ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.06 Математика

Направление подготовки (специальность) 05.03.06 Экология и природопользование

Профиль образовательной программы «Экология»

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Конспект лекций ……………………………………………………….……..…….5

1.1 Лекция № 1 Системы линейных уравнений. Матрицы. Определители ………..…..5

1.2 Лекция № 2 Решение систем линейных уравнений..…………………………………7

1.3 Лекция № 3 Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений в матричном виде ………………………………………………...……………………………..9

1.4 Лекция № 4 Числовые множества. Множество комплексных чисел …..………..…13

1.5 Лекция № 5 Векторы. Действия над векторами …...……………………………..…14

1.6 Лекция № 6 Прямая на плоскости …….……………………………………………..16

1.7 Лекция № 7 Кривые второго порядка …..…………………………………………...18

1.8 Лекция № 8 Понятие функции. Предел функции в точке…...…………………..…20

1.9 Лекция № 9 Производная функции в точке……………………………………….22

1.10 Лекция № 10 Исследование функции с помощью производных…………………23

1.11 Лекция № 11 Дифференциал функции……………………………………………..24

1.12 Лекция № 12 Функции нескольких переменных…………………………………..27

1.13 Лекция № 13 Неопределенный интеграл…………………………………………...30

1.14 Лекция № 14 Определенный интеграл……………………………………………...31

1.15 Лекция № 15 Дифференциальные уравнения n-го порядка……………………….34

1.16 Лекция № 16 Дифференциальные уравнения первого и второго порядков……..35

1.17 Лекция № 17 Применение диф. уравнений в прикладных задачах……………….37

1.18 Лекция № 18 Основные понятия и теоремы теории вероятностей……………….40

1.19 Лекция № 19 Повторные независимые испытания ……………………….………41

1.20 Лекция № 20 Дискретные случайные величины ………………………….….…42

1.21 Лекция № 21 Непрерывные случайные величины…………………………………43

1.22 Лекция № 22 Функция распределения и плотность вероятности …………….….43

1.23 Лекция № 23 Законы распределения случайных величин: равномерное и показательное ……………………………………………...……….……………….44

1.24 Лекция № 24 Законы распределения случайных величин: нормальное…………46

1.25 Лекция № 25 Биометрия ………..……………………………………………………...47

1.26 Лекция № 26 Теория корреляции…………………………………………………...51

2. Методические материалы по выполнению лабораторных работ (не предусмотрено РУП)

3. Методические указания по проведению практических занятий ………………53

3.1 Практическое занятие № ПЗ-1 Матрицы. Определители…………………………53

3.2 Практическое занятие № ПЗ-2 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера …………………………………………………….…54
3.3 Практическое занятие № ПЗ-3 Решение систем линейных уравнений в матричном виде…………………………………………………………………………56
3.4 Практическое занятие № ПЗ-4 Действия над комплексными числами…………..59
3.5 Практическое занятие № ПЗ-5 Действия над векторами………………………….61
3.6 Практическое занятие № ПЗ-6 Задание прямой на плоскости различными способами. Взаимное расположение прямых ……………….………………………...…63
3.7 Практическое занятие № ПЗ-7 Построение кривых второго порядка ……..……65
3.8 Практическое занятие № ПЗ-8 Нахождение предела функции…………………...66
3.9 Практическое занятие № ПЗ-9 Нахождение производных функций ..……..……68
3.10 Практическое занятие № ПЗ-10 Исследование функции с помощью производных……………………………………………………………………………….69
3.11 Практическое занятие № ПЗ-11 Дифференциал функции………………………70
3.12 Практическое занятие № ПЗ-12 Функции нескольких переменных……………74
3.13 Практическое занятие № ПЗ-13 Нахождение неопределенного интеграла ...….75
3.14 Практическое занятие № ПЗ-14 Вычисление определенного интеграла ...…….78
3.15 Практическое занятие № ПЗ-15 Дифференциальные уравнения первого и второго порядков……………………………………………………………………...79
3.16 Практическое занятие № ПЗ-16 Применение дифференциальных уравнений в прикладных задачах……………………………………………………………80
3.17 Практическое занятие № ПЗ-17 Нахождение вероятности события по определению…………………………………………………………………………………82
3.18 Практическое занятие № ПЗ-18 Нахождение вероятности события с помощью теорем сложения и умножения вероятностей …...…..82
3.19 Практическое занятие № ПЗ-19 Повторные независимые испытания. Теорема Бернулли, формула Пуассона, локальная теорема Муавра-Лапласа …………...…83
3.20 Практическое занятие № ПЗ-20 Повторные независимые испытания. Интегральная теорема Муавра-Лапласа ……………………………………………...….…84
3.21 Практическое занятие № ПЗ-21 Наиболее вероятное число появлений события в испытании…………………………………………………………………………….85
3.22 Практическое занятие № ПЗ-22 Дискретные случайные величины. Закон распределения, многоугольник распределения ……………………………………………86
3.23 Практическое занятие № ПЗ-23 Числовые характеристики дискретной случайной величины………………………………………………………………………87

3.24 Практическое занятие № ПЗ-24 Функция распределения…………….………...87
3.25 Практическое занятие № ПЗ-25 Плотность вероятности………………………...88
3.26 Практическое занятие № ПЗ-26 Числовые характеристики непрерывной случайной величины………………………………………………………………….89
3.27 Практическое занятие № ПЗ-27 Законы распределения случайных величин: равномерное распределение. 89
3.28 Практическое занятие № ПЗ-28 Законы распределения случайных величин: показательное распределение……………………………………………………..…...90
3.29 Практическое занятие № ПЗ-29 Законы распределения случайных величин: нормальное распределение……………………………………………………………91
3.30 Практическое занятие № ПЗ-30 Элементы математической статистики. Методы сбора и обработки данных ………………………………………………………….92
3.31 Практическое занятие № ПЗ-31 Графическое представление данных ………....93
3.32 Практическое занятие № ПЗ-32 Выборочные числовые характеристики ……...94
3.33 Практическое занятие № ПЗ-33 Корреляционный анализ ……………………....96
3.34 Практическое занятие № ПЗ-34 Построение линии регрессии ………………....97
4. Методические материалы по проведению семинарских занятий (не предусмотрено РУП)

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2часа)

Тема: «Система линейных уравнений. Матрицы. Определители».

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Понятие системы линейных уравнений.
2. Матрицы.
3. Определители.
4. Вычисление определителей.
5. Операции над матрицами.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие системы линейных уравнений.

Определение. Линейными операциями над какими-либо объектами называются их сложение и умножение на число.

Определение. Линейной комбинацией переменных называется результат применения к ним линейных операций, т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_i -$числа, $x_i -$переменные.

Определение. Линейным уравнением называется уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \qquad (2.1)$$

где a_i и b – числа, x_i - неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Определение. Линейное уравнение называется однородным, если b = 0. В противном случае уравнение называется неоднородным.

Определение. Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.2)$$

где a_{ij}, b_i - числа, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

Определение. Решением линейной системы (2.2) называется набор чисел $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

2. Матрицы.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: A – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, $i-$ номер строки, в которой стоит данный элемент, j – номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Определение. Числа m и n называются размерностями матрицы.

Определение. Матрица называется квадратной, если m = n. Число n в этом случае называют порядком квадратной матрицы.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определение. Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с теми же номерами.

3. Определители.

Определение. Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Определение. Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2. Вычисление определителей.

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).

<u>Свойство 1.</u> Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

<u>Свойство 2</u>. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.
Свойство 4. Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.
Свойство 5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение. Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: a_{ij} –выбранный элемент определителя, M_{ij} –его минор.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. Операции над матрицами.

Суммой двух матриц одинакового порядка называют матрицу такого же порядка, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц.

Аналогично, разностью двух матриц одинакового порядка называют матрицу такого же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц.

Произведением матрицы на число есть матрица того же порядка, элементы которой получены умножением соответствующих элементов матриц на это же число.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Решение систем линейных уравнений».

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Решение СЛУ методом Гаусса.
2. Формулы Крамера для решения СЛУ.

1.2.2 Краткое содержание вопросов.

1. Решение СЛУ методом Гаусса.

Замечание. Линейная система (2.2) может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Условия существования и количества решений линейной системы будут изучены в дальнейшем, а пока рассмотрим способы нахождения единственного решения системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.3)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1}, где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Таким же образом можно исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \ddot{a}_{12}x_2 + \ldots + \ddot{a}_{1n}x_n = \ddot{b}_1 \\ \quad x_2 + \ldots + \ddot{a}_{2n}x_n = \ddot{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad x_n = \ddot{b}_n \end{cases}. \qquad (2.4)$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \ddot{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\ddot{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (2.4) единственным образом определяется x_n, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

2. Формулы Крамера для решения СЛУ.

Пусть нам требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$.

Пусть Δ - определитель основной матрицы системы, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ - определители матриц, которые получаются из *A* заменой *1-ого, 2-ого, …, n-ого*столбца соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$. Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

1.3 Лекция №3 (2часа).

Тема: «Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений в матричном виде»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Обратная матрица.
2. Решение систем линейных уравнений в матричном виде.

1.3.2 Краткое содержание вопросов.

1. Обратная матрица.

Обратная матрица A^{-1} — матрица, произведение которой на исходную матрицу A равно единичной матрице E:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Замечание. Обратная матрица существует только для квадратных матриц определитель которых не равен нулю.

Свойства обратной матрицы

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

● $(A\cdot B)^{-1} = A^{-1}\cdot B^{-1}$
● $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
● $(kA)^{-1} = \dfrac{A^{-1}}{k}$
● $(A^{-1})^{-1} = A$

2. Решение систем линейных уравнений в матричном виде.

Методы вычисления обратной матрицы

Вычисление обратной матрицы с помощью присоединённой матрицы

Теорема.

Если справа к квадратной матрице дописать единичную матрицу того же порядка и с помощью элементарных преобразований над строками преобразовать полученную матрицу так, чтобы начальная матрица стала единичной, то матрица полученная из единичной будет обратной матрицей к исходной.

Замечание.

Если при преобразованиях в левой части матрицы образуется нулевая строка (столбец), то исходная матрица не имеет обратной матрицы.

Пример 1.

Найти обратную матрицу матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Приписываем к матрице A справа единичную матрицу третьего порядка:

$$A|E = \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Преобразуем левую часть полученной матрицы в единичную. Для этого от 3-тей строки отнимем 1-ую строку:

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2-2 & 1-4 & 1-1 & 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Третью строку поделим на (-3) и поменяем местами со второй строкой:

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right. \sim$$

$0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0$

Отнимем он 1-ой строки 2-ую умноженную на 4; от 3-тей строки 2-ую умноженную на 2:

$$\sim \begin{pmatrix} 2 - 4\cdot 0 & 4 - 4\cdot 1 & 1 - 4\cdot 0 & 1 - 4\cdot(1/3) & 0 - 4\cdot 0 & 0 - 4\cdot(-1/3) \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 - 2\cdot 0 & 2 - 2\cdot 1 & 1 - 2\cdot 0 & 0 - 2\cdot 1/3 & 1 - 2\cdot 0 & 0 - 2\cdot(-1/3) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \sim$$

Отнимем он 1-ой строки 3-ую строку:

$$\sim \begin{pmatrix} 2 - 0 & 0 - 0 & 1 - 1 & -1/3 - (-2/3) & 0 - 1 & 4/3 - 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \sim$$

Разделим 1-ую строку на 2:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$

Вычисление обратной матрицы с помощью союзной матрицы

Определение. Матрица Ã, элементы которой равны алгебраическим дополнениям соответствующих элементов матрицы A называется **союзной матрицей**.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^{T}$$

Пример 1. Найти обратную матрицу матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем определитель матрицы A:

$$\det(A) = \begin{matrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$= 2\cdot2\cdot1 + 4\cdot1\cdot2 + 1\cdot0\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 - 2\cdot1\cdot1 - 4\cdot0\cdot1 = 4 + 8 + 0 - 4 - 2 - 0 = 6$

Найдем алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1 - 1\cdot1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0\cdot1 - 1\cdot2) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot1 - 2\cdot2 = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4\cdot1 - 1\cdot1) = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1 - 1\cdot2 = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2\cdot1 - 4\cdot2) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot1 - 1\cdot2 = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2\cdot1 - 1\cdot0) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot2 - 4\cdot0 = 4$$

Запишем союзную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$

1.4 Лекция №4 (2часа).

Тема: «Числовые множества. Множество комплексных чисел»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Числовые множества.
2. Множество комплексных чисел.

1.4.2 Краткое содержание вопросов.

1. Числовые множества.

- Числа вида ***N = {1, 2, 3, ...}*** называются **натуральными**. Натуральные числа появились в связи с необходимостью подсчета предметов

1. Если ***m, n, k -*** натуральные числа, то при ***m - n = k*** говорят, что ***m - уменьшаемое, n - вычитаемое, k - разность;*** при ***m : n = k*** говорят, что ***m - делимое, n - делитель, k - частное,*** число ***m*** называют также ***кратным*** числа ***n,*** а число ***n - делителем*** числа ***m,*** Если число ***m -*** кратное числа ***n,*** то существует натуральное число ***k,*** такое, что ***m = kn.***
2. Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляются ***числовые выражения.*** Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получиться число, которое называется ***значением выражения***.
3. ***Порядок арифметических действий:*** сначала выполняются действия в скобках; внутри любых скобок сначала выполняют умножение и деление, а потом сложение и вычитание.
4. Если натуральное число ***m*** не делится на натуральное число ***n,*** т.е. не существует такого***натурального числа k,*** что ***m = kn,*** то рассматривают ***деление с остатком: m = np + r,*** где ***m - делимое, n - делитель (m>n), p - частное, r - остаток***.
5. Если число имеет только два делителя (само число и единица), то оно называется ***простым***: если число имеет более двух делителей, то оно называется ***составным.***
6. Любое составное натуральное число можно ***разложить на простые множители***, и только одним способом. При разложении чисел на простые множители используют ***признаки делимости***.
7. Для любых заданных натуральных чисел ***a*** и ***b*** можно найти ***наибольший общий делитель.*** Он обозначается ***D(a,b).*** Если числа ***a*** и ***b*** таковы, что ***D(a,b) = 1,*** то числа ***a*** и ***b*** называются ***взаимно простыми.***
8. Для любых заданных натуральных чисел ***a*** и ***b*** можно найти ***наименьшее общее кратное.*** Оно обозначается ***K(a,b).*** Любое общее кратное чисел ***a*** и ***b*** делится на ***K(a,b).***
9. Если числа ***a*** и ***b взаимно простые***, т.е. ***D(a,b) = 1,*** то ***K(a,b) = ab .***

- Числа вида: ***Z = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}*** называются ***целыми числами,*** т.е. целые числа - это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

Натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5.... называют также положительными целыми числами. Числа -1, -2, -3, -4, -5, ...,противоположные натуральным, называются отрицательными целыми числами.

Целые и дробные числа составляют **множество рациональных чисел: Q = Z ∪ {m/n},** *где* ***m -*** целое число, а ***n -*** натуральное число.

1. Среди дробей, обозначающих данное рациональное число, имеет
2. ся одна и только одна несократимая дробь. Для целых чисел - это дробь со знаменателем 1.
3. Каждое рациональное число представимо в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

4. Дробь m/n называется **правильной,** если ее числитель меньше знаменателя, и **неправильной**, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.
5. Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби.
6. **Основное свойство дроби:** если числитель и знаменатель данной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.
7. Если числитель и знаменатель дроби взаимно простые числа, то дробь называется **несократимой**.
8. В виде **десятичной дроби** можно записать правильную дробь, знаменатель которой равен степени с основанием 10. Если к десятичной дроби приписать справа нуль или несколько нулей, то получится равная ей дробь. Если десятичная дробь оканчивается одним или несколькими нулями, то эти нули можно отбросить - получиться равная ей дробь. **Значимыми цифрами** числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих в начале.
9. Последовательно повторяющаяся группа цифр после запятой в десятичной записи числа называется **периодом**, а бесконечная десятичная дробь, имеющая такой период в своей записи, называется **периодической.** Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется **чистой периодической**; если же между запятой м периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называется **смешанной периодической**.

Числа не являющиеся целыми или дробными называются **иррациональными.**
Каждое иррациональное число представляется в виде непериодической бесконечной десятичной дробью.

Множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей называется **множеством действительных чисел**: рациональных и иррациональных.

2. Множество комплексных чисел.

Комплексные числа. Комплексным числом называется число вида z=a+b·i , a, b ∈ R, i2=−1z=a+b·i, a, b ∈R, i2=−1

Замечание.

1. Действительное число ***a*** - это действительная часть числа ***z*** и обозначается a=Reza=Rez
2. Действительное число ***b*** - это мнимая часть числа ***z*** и обозначается b=Imzb=Imz

Действительные числа представляют собой полноценный набор чисел и действий над ними, которого, кажется, должно хватить для решения любых заданий курса математики. Но как решить такое уравнение в действительных числах x2+1=0x2+1=0? Существует ещё одно расширение чисел - комплексные числа. В комплексных числах можно брать корни из отрицательных чисел.

1.5 Лекция №5 (2часа).

Тема: «Векторы. Действия над векторами»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Понятие вектора.
2. Действия над векторами.

1.5.2 Краткое содержание вопросов.

1. Понятие вектора.

Определение 1. Величина, полностью характеризуемая своим числовым значением в выбранной системе единиц, называется *скалярной* или ***скаляром***.
(Масса тела, объем, время и т.д.)

Определение 2. Величина, характеризуемая числовым значением и направлением, называется *векторной* или ***вектором***.
(Перемещение, сила, скорость и т.д.)

Обозначения: $\bar{a}$, $\bar{b}$ или $\dot{AB}$, $\dot{BC}$.
Геометрический вектор – это направленный отрезок.

Для вектора $\overrightarrow{AB}$ – точка A – начало, точка B – конец вектора.
Определение 3. ***Модуль*** вектора – это длина отрезка AB.
Определение 4. Вектор, модуль которого равен нулю, называется ***нулевым*,** обозначается $\bar{0}$.
Определение 5. Векторы, расположенные на параллельных прямых или на одной прямой называются ***коллинеарными***. Если два коллинеарных вектора имеют одинаковое направление, то они называются ***сонаправленными***.
Определение 6. Два вектора считаются ***равными***, если они ***сонаправлены*** и равны по модулю.

2. Действия над векторами.
1) Сложение векторов.

Опр. 6. ***Суммой*** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки их приложения **(правило параллелограмма)**.

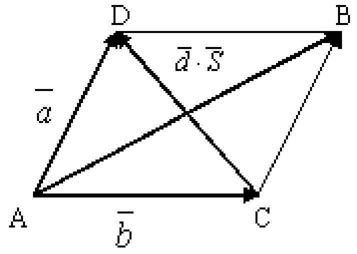


Рис.1.

Опр. 7. Суммой трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах **(правило параллелепипеда).**

Опр. 8. Если A, B, C – произвольные точки, то $\dot{AB} + \dot{BC} = \dot{AC}$ **(правило треугольника)**.

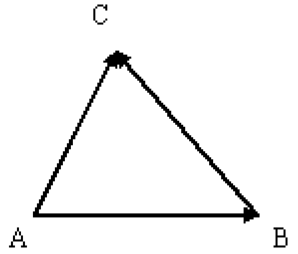


рис.2

Свойства сложения.

1°. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (переместительный закон).

2°. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{c}) + \bar{b}$ (сочетательный закон).

3°. $\bar{a} + (-\bar{a}) + \bar{0}$.

2) Вычитание векторов.

Опр. 9. Под ***разностью*** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимают вектор $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{d} = \bar{a}$.

В параллелограмме – это другая диагональ СД (см.рис.1).

3) Умножение вектора на число.

Опр. 10. ***Произведением*** вектора $\overline{a}$ на скаляр $\boldsymbol{k}$ называется вектор

$$\overline{b} = k\overline{a} = \overline{a}k,$$

имеющий длину ***ka***, и направление, которого:

1. совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $k > 0$;
2. противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $k < 0$;
3. произвольно, если $k = 0$.

Свойства умножения вектора на число.

1°. $(k + l)\overline{a} = k\overline{a} + l\overline{a}$.

$k(\overline{a} + \overline{b}) = k\overline{a} + k\overline{b}$.

2°. $k(l\overline{a}) = (kl)\overline{a}$.

3°. $1\cdot\overline{a} = \overline{a}$, $(-1)\cdot\overline{a} = -\overline{a}$, $0\cdot\overline{a} = \overline{0}$.

1.6 Лекция №6 (2часа).

Тема: «Прямая на плоскости»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Метод координат.
1. Прямая. Способы задания.
1. Взаимное расположение прямых на плоскости.

1.6.2 Краткое содержание вопросов.

1. Метод координат.

Под *системой координат* на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Одной из таких систем является *прямоугольная* (декартова) *система координат*.

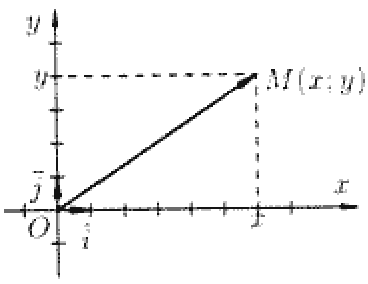


Рис. 23.

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют осями координат, точку их пересечения О - началом координат. Одну из осей называют осью абсцисс (осью Ox), другую — осью ординат (осью Oy) (рис. 1).

На рисунках ось абсцисс обычно располагают горизонтально и направленной слева направо, а ось ординат - вертикально и направленной снизу вверх. Оси координат делят плоскость на четыре области — четверти (или квадранты).

Единичные векторы осей обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$($|i|=|j|=1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$). Систему координат обозначают Oxy, а плоскость, в которой расположена система координат, называют координатной плоскостью.

Рассмотрим произвольную точку М плоскости Oxy. Вектор ОМ называется радиусом-вектором точки М.

Координатами точки М в системе координат Oxy называются координаты радиуса-вектора ОМ. Если ОМ=(x;y), то координаты точки М записывают так: M(x;y), число *x* называется *абсциссой* точки М, y — *ординатой* точки М.

Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка М плоскости, и наоборот.

2. Прямая. Способы задания.

Линия на плоскости рассматривается (задается) как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние - R от некоторой фиксированной точки О (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Оху называется такое уравнение F(x;y) = 0 с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются текущими координатами точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка Ax + By + C = 0, причем постоянные А, В не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k, -\frac{C}{B} = b$, то полученное уравнение $y = kx + b$ называет уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор (α_1 , α_2), компоненты которого удовлетворяют условию А α_1 + В α_2 = 0 называется направляющим вектором прямой Ах + Ву + С = 0.

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С≠0, то, разделив на –С, получим:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *a* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

1.7 Лекция №4 (2часа).

Тема: «Кривые второго порядка»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Определение кривой второго порядка.
2. Окружность.
3. Эллипс.
4. Гипербола.
5. Парабола.

1.7.2 Краткое содержание вопросов.

1. Определение кривой второго порядка.

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю.

Если кривая Г невырожденная, то для неё найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой примет один из следующих трех видов (каноническое уравнение):

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гипербола,

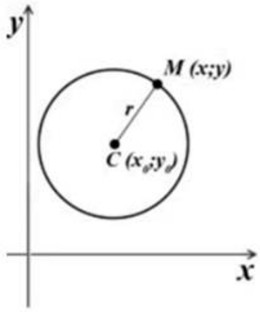
$y^2 = 2px$ - парабола.

2. Окружность.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки – от центра.

Таким образом, уравнение окружности с центром в точке $C(x_0; y_0)$ радиуса r имеет вид:

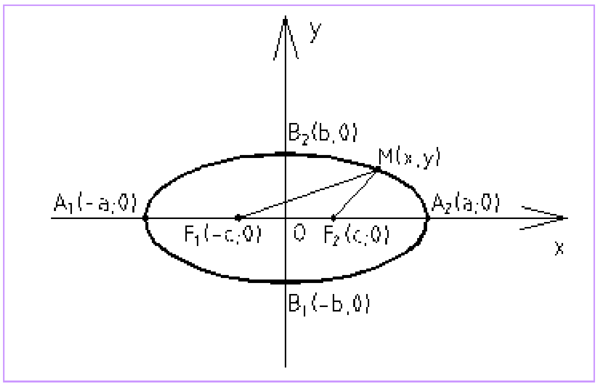
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.



Частный случай уравнения окружности с центром в точке $O(0;0)$: $x^2 + y^2 = r^2$.

3. Эллипс.

Эллипс – геометрическое множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная 2a, большая, чем расстояние между фокусами 2c: $|F_1M| + |F_2M| = 2a$.



Эллипс, заданный каноническим уравнением: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

симметричен относительно осей координат. Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0, b)$ называются его вершинами.

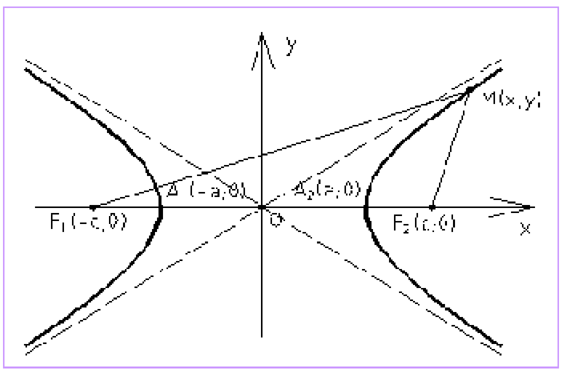
Если a>b, то фокусы находятся на оси OX на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра эллипса O.

Число $\varepsilon = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ $(0 \le \varepsilon \le 1)$ называется эксцентриситетом эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $\varepsilon = 0$ эллипс является окружностью, а при $\varepsilon = 1$ он вырождается в отрезок длиною $2a$).

Если a<b, то фокусы находятся на оси OY и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$.

4. Гипербола.

Гипербола – геометрическое множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная 2a, меньшая, чем расстояние между фокусами 2c: $|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$.



Гипербола, заданная каноническим уравнением:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось OX в точ-

ках $A_1(-a,0)$ и $A_2(-a,0)$ - вершинах гиперболы, и не пересекает оси OY.
Параметр a называется вещественной полуосью, b – мнимой полуосью.

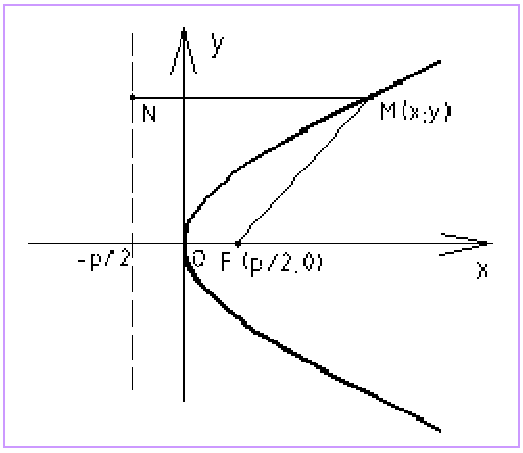
Число $\varepsilon = c/a = \sqrt{1 + b^2/a^2}$, $(1 < \varepsilon < \infty)$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ называются асимптотами гиперболы.

Гипербола, заданная каноническим уравнением:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, (или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$), называется сопряжённой (имеет те же асимптоты). Её фокусы расположены на оси OY. Она пересекает ось OY в точках $B_1(0,-b)$ и $B_2(0, b)$ - вершинах гиперболы, и не пересекает оси OX.
В этом случае параметр b называется вещественной полуосью, a – мнимой полуосью. Эксцентриситет вычисляется по формуле: $\varepsilon = c/b = \sqrt{1 + a^2/b^2}$, $(1 < \varepsilon < \infty)$.

5. Парабола.

Парабола – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой: $|MN| = |FM|$.



Парабола, заданная указанным каноническим уравнением, симметрична относительно оси OX.

Уравнение $x^2 = 2p \cdot y$ задает параболу, симметричную относительно оси OY.

Парабола $y^2 = 2p \cdot x$ имеет фокус $F(p / 2;\ 0)$ и директрису $x = -p / 2$.

Парабола $x^2 = 2p \cdot y$ имеет фокус $F(0;\ p / 2)$ и директрису $y = -p / 2$.

Если p>0, то в обоих случаях ветви параболы обращены в положительную сторону соответствующей оси, а если p<0 – в отрицательную сторону.

1.8 Лекция №8 (2часа).

Тема: «Понятие функции. Предел функции в точке».

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Понятие функции.
2. Предел функции в точке.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие функции.

Функция- зависимость переменной **y** от переменной **x,** если каждому значению **x** соответствует единственное значение **y**.

Переменная x- независимая переменная или аргумент.

Переменная y- зависимая переменная.

Значение функции- значение y, соответствующее заданному значению x.

Область определения функции- все значения, которые принимает независимая переменная. Обозначается $D(f)$.

Область значений функции (множество значений)- все значения, которые принимает функция. Обозначается $E(f)$.

Функция является четной- если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(x)=f(-x)

Функция является нечетной- если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(-x)=-f(x)

Возрастающая функция- если для любых x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$

Убывающая функция- если для любых x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$

Функция называется периодической, если существует такое число T, что $(x \pm T) \in D(f)$ и $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

Способы задания функции.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы **y=f(x)**, где **f(x)-** некоторое выражение с переменной **x**. В таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана аналитически.

На практике часто используется табличный способ задания функции. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблица квадратов, таблица кубов.

Наиболее наглядным является графический способ задания функции. При данном способе функция задается графиком, по которому можно для каждого x определить единственное y.

Основными элементарными функциями являются:

1) степенная функция $y = x^n, n \in R$,
2) показательная функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$,
3) логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$,
4) тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = tg\, x, y = ctg\, x$,
5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctg\, x, y = arcctg\, x$.

2. Предел функции в точке.

Определение предела по Коши. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение предела по Гейне. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для любой последовательности $\{x_n\}$такой, что $x_n \neq a, \forall n \in N$ сходящейся к числу a, соответствующая последовательность значений функции $f(\{x_n\})$сходится к числу A.

Если A – предел функции в точке a, то пишут, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Если функция f (x) имеет предел в точке a, то этот предел единственный.

Число A_1 называется пределом функции f (x) слева в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех выполня- $x \in (a - \delta;\ a)$ ется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Число A_2 называется пределом функции f (x) справа в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех вы- $x \in (a;\ a + \delta)$ полняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Предел слева обозначается $\lim_{x \to a-0} f(x)$предел справа –$\lim_{x \to a+0} f(x)$. Эти пределы характеризуют поведение функции слева и справа от точки a. Их часто называют односторонними пределами.

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность точки a, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$, то говорят, что функция f (x) имеет в точке a бесконечный предел:

Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что предел функции f (x) при x, стремящемся к плюс бесконечности, равен A:

$$\lim_{x \to +\infty} f$$

Если функция f (x) имеет конечный предел в точке a, то существует окрестность точки a, в которой функция f ограничена (возможно, что в самой точке a функция не определена). При этом, если $A \neq 0$, то найдется окрестность точки a, в которой (быть может, за исключением самой точки a) значения функции f имеют тот же знак, что и число A.

1.9 Лекция №9 (2часа).

Тема: «Производная функции в точке».

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Понятие производной.
2. Геометрический, механический и биологический смыслы производной.
3. Правила дифференцирования.

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие производной

Пусть функция y = f(x) определена в промежутке X. *Производной* функции y = f(x) в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел *конечный,* то функция f(x) называется *дифференцируемой* в точке x_o; при этом она оказывается обязательно и непрерывной в этой точке.

Если же рассматриваемый предел равен ∞ (или $-\infty$), то при условии, что функция в точке x_o непрерывна, будем говорить, что функция f(x) имеет в точке x_o *бесконечную производную*.

Производная обозначается символами

$$y',\quad f'(x_o),\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

2. Геометрический, механический и биологический смыслы производной.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в данной точке x_o; *физический смысл* - в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении s = s(t) в момент t_0; *биологический смысл* – в том что производная от числа особей популяции микроорганизмов $N(t)$ по времени есть скорость размножения популяции.

3. **Правила дифференцирования.**

Если *c* - постоянное число, и u = u(x), v = v(x) - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) (c) ' = 0, (cu) ' = cu';

2) (u+v)' = u'+v';

3) (uv)' = u'v+v'u;

4) $(u/v)' = (u'v-v'u)/v^2$;

5) если y = f(u), u = j(x), т.е. y = f(j(x)) - *сложная функция,* или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций j и f, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

6) если для функции y = f(x) существует обратная дифференцируемая функция x = g(y), причем $\frac{dg}{dy} = x'_y \neq 0$, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

При нахождении производных пользуются таблицами производных основных элементарных функций.

1.10 Лекция №10 (2часа).

Тема: «Исследование функции с помощью производных».

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Исследование функции с помощью первой производной.
2. Исследование функции с помощью второй производной.

.1.10.2 Краткое содержание вопросов:

1. Исследование функции с помощью первой производной

С помощью производной функции можно определить характер монотонности функции, точки экстремума, а также ее наибольшее и наименьшее значение на заданном промежутке.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции:

а) если на заданном промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает на этом промежутке;

б) если $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом промежутке.

Экстремум функции

Максимумом (минимумом) функции $y = f(x)$ называют такое ее значение, которое больше (меньше) всех ее других значений в окрестности рассматриваемой точки.

Максимум и минимум функции имеют локальный характер, поскольку отдельные минимумы некоторой функции могут оказаться больше максимумов той же функции (рис. 6.4).

Максимум и минимум функции называются *экстремумом функции* . Значение аргумента, при котором достигается экстремум, называется *точкой экстремума* . На рисунке 6.4 значения x_1,x_2 ,x_3 ,x_4 и x_5 являются точками экстремума рассматриваемой функции.

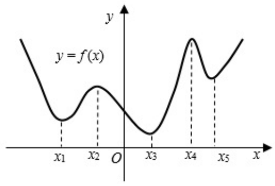


Рис. 6.4

Критическими точками функции называют те значения аргумента, при которых производная функции равна нулю или не существует. Критические точки функции находят, решая уравнение: $f'(x) = 0$.

Алгоритм нахождения точек экстремума функции:

1) находим область определения функции $y = f(x)$;
2) находим $f'(x)$;
3) находим критические точки функции, решая уравнение $f'(x) = 0$;
4) наносим критические точки на область определения функции;
5) определяем знак производной функции на полученных промежутках;
6) определяем точки экстремума функции по правилу: если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «–», то имеем точку максимума, а если с «–» на «+», то имеем точку минимума.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Свое наибольшее и наименьшее значение она может принимать либо на концах отрезка, либо в точках экстремума.

Алгоритм нахождения *наибольшего и наименьшего значений* функции $y = f(x)$ на заданном отрезке:

1) находим $f'(x)$;
2) находим критические точки функции, решая уравнение $f'(x) = 0$;
3) находим значение функции на концах отрезка и в критических точках, принадлежащих данному отрезку;
4) определяем наибольшее и наименьшее значение из полученных.

2. Исследование функции с помощью второй производной

Критическими точками второго рода функции $y = f(x)$ называют те значения аргумента, при которых вторая производная этой функции равна нулю или не существует.

Критические точки второго рода функции $y = f(x)$ находят, решая уравнение $f''(x) = 0$.

Если при переходе через критическую точку второго рода вторая производная функции меняет знак, то имеем *точку перегиба* графика функции.

Если на некотором промежутке выполняется неравенство $f''(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ *вогнута* на этом промежутке, а если $f''(x) < 0$, то функция *выпукла* на этом промежутке.

1.11 Лекция №6 (2часа).

Тема: «Дифференциал функции».

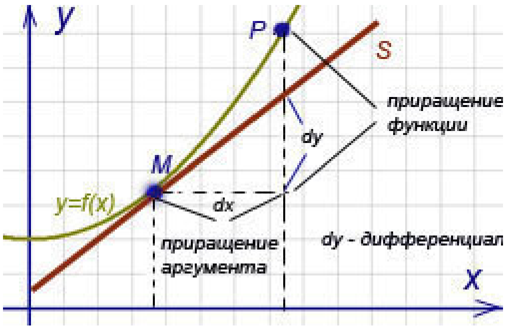
1.11.1 Вопросы лекции:

1. Понятие и геометрический смысл дифференциала.
2. Свойства дифференциала.
3. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
4. Абсолютная и относительная погрешности приближенных вычислений

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие и геометрический смысл дифференциала

Определение.



Итак, график дифференцируемой функции в окрестности каждой своей точки сколь угодно близко приближается к графику касательной в силу равенства:

$$f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+\left(f'\left(x_0\right)+\alpha\right)\Delta x,$$

где α – бесконечно малая в окрестности x_0 функция. Для приближенного вычисления значения функции f в точке $x_0 + \Delta x$ эту бесконечно малую функцию можно отбросить:

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Линейную функцию

$$y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$$

называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают df. Для функции x производная в каждой точке x_0 равна 1, то есть $dx=x-x_0.$ Поэтому пишут:

$$\boxed{df=f'(x)dx.}$$

Приближенное значение функции вблизи точки x_0 равно сумме ее значения в этой точке и дифференциала в этой же точке. Это дает возможность записать производную следующим образом:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}.$$

Часто эту запись используют, чтобы уточнить, по какой переменной дифференцируется функция.

Геометрически дифференциал функции df – это приращение ординаты касательной к графику функции в данной точке при изменении абсциссы точки на dx.

Дифференциалом функции в некоторой точке *x* называется главная, линейная часть приращения функции.

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной *x* (аргумента).

Это записывается так:

$dy = y'\Delta x$ или $df(x) = f'(x)\Delta x$ или же $df(x) = f'(x)dx$

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению ординаты касательной S, проведённой к графику этой функции в точке M(x; y), при изменении *x* (аргумента) на величину $\Delta x = dx$ (см. рисунок).

Почему дифференциал можно использовать в приближенных вычислениях?

Дифференциал, $dy = y'\Delta x$ является главной, линейной относительно Δx частью приращения функции; чем меньше Δx , тем большую долю приращения составляет эта часть. В этом можно убедиться, мысленно передвигая перпендикуляр, опущенный из точки *P* (см. рисунок) к оси *Ox*, ближе к началу координат. Поэтому при малых значениях Δx (и при $y' \neq 0$) **приращение функции можно приближенно заменить его главной частью** $y'\Delta x$, т.е. $\Delta y \approx y'\Delta x$

О разных формах записи дифференциала

Дифференциал функции в точке *x* и обозначают dy или $df(x)$.

Следовательно,

$$dy = y'\Delta x \tag{1}$$

или

$$df(x) = f'(x)\Delta x\ , \tag{2}$$

поскольку дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной.

Замечание. Нужно помнить, что если *x* – исходное значение аргумента, а $x + \Delta x$ - наращенное значение, то производная в выражении дифференциала берётся в исходной точке *x* ; в формуле (1) этого не видно из записи.

Дифференциал функции можно записать в другой форме:

$$dy = y'dx \tag{3}$$

Или

$$df(x) = f'(d)dx \tag{4}$$

2. Свойства дифференциала

В этом и следующем параграфах каждую из функций будем считать дифференцируемой при всех рассматриваемых значениях её аргументов.

Дифференциал обладает свойствами, аналогичными свойствам производной:

$$dC = 0; \quad \text{(С – постоянная величина)} \tag{5}$$

$$d(u+v) = du + dv; \tag{6}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du; \tag{7}$$

$$d(Cu) = C\,du; \tag{8}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{9}$$

Формулы (5) – (9) получаются из соответствующих формул для производной умножением обеих частей каждого равенства на dx .

Одно из особеннейших свойств дифференциала - <u>инвариантность формы дифференциала в случае сложных функций</u>.

3. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Установленное во втором параграфе приближенное равенство

$$\Delta y \approx y'\Delta x$$

или

$$\Delta y = dy, \tag{10}$$

позволяет использовать дифференциал для приближенных вычислений значений функции.

Запишем приближенное равенство более подробно. Так как

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

а

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

то

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

или

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (11)$$

4. Абсолютная и относительная погрешности приближенных вычислений

Пользуясь приближенным значением числа, нужно иметь возможность судить о степени его точности. С этой целью вычисляют его абсолютную и относительную погрешности.

Абсолютная погрешность Δ приближенного числа y равна абсолютной величине разности между точным числом b и его приближенным значением:

$$\Delta = |y-b|. \qquad (12)$$

Относительной погрешностью δ приближенного числа y называется отношение абсолютной погрешности этого числа к абсолютной величине соответствующего точного числа:

$$\delta = \frac{\Delta}{|b|}. \qquad (13)$$

Если точное число неизвестно, то

$$\delta \approx \frac{\Delta}{|u|}. \qquad (14)$$

Иногда, прежде чем применить формулу (11), требуется предварительно преобразовать исходную величину. Как правило, это делается в двух целях. Во-первых, надо добиться, чтобы величина Δx была достаточно малой по сравнению с $f'(x_0)$, так как чем меньше $f'(x_0)\Delta x$, тем точнее результат приближенного вычисления. Во-вторых, желательно, чтобы величина $f(x_0)$ вычислялась просто.

1.12 Лекция №12 (2часа).

Тема: «Функции нескольких переменных».

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Понятие функции двух и более переменных
2. Предел и непрерывность функции двух переменных
3. Частные производные первого порядка. Полный дифференциал

1.12.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие функции двух и более переменных

Многие явления, происходящие в природе, экономике, общественной жизни нельзя описать с помощью функции одной переменной. Например, рентабельность предприятия зависит от прибыли, основных и оборотных фондов. Для изучения такого рода зависимостей и вводится понятие функции нескольких переменных.

В данной лекции рассматриваются функции двух переменных, так как все основные понятия и теоремы, сформулированные для функций двух переменных, легко обобщаются на случай большего числа переменных.

Пусть $\{M\}$ – множество упорядоченных пар действительных чисел (x, y).

Определение 1. Если каждой упорядоченной паре чисел $(x, y) \in \{M\}$ по некоторому закону f поставлено в соответствие единственное действительное число z, то говорят, что задана функция двух переменных $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$. Числа x, y называются при этом независимыми переменными или аргументами функции, а число z – зависимой переменной. Например, формула $V = \pi R^2 h$, выражающая объем цилиндра, является функцией двух переменных: R – радиуса основания и h – высоты.

Пару чисел (x, y) иногда называют точкой $M(x, y)$, а функцию двух переменных – функцией точки $f(M)$. Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют частным значением функции двух переменных.

Совокупность всех точек $M(x, y)$, в которых определена функция $z = f(x, y)$, называется областью определения этой функции. Для функции двух переменных область определения представляет собой всю координатную плоскость или ее часть, ограниченную одной или несколькими линиями.

Например, область определения функции $z = x^2 + y^2$ – вся плоскость, а функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ – единичный круг с центром в начале координат ($1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$).

2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Понятия предела и непрерывности функции двух переменных аналогичны случаю одной переменной.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – произвольная точка плоскости. δ – окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется множество всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Другими словами, δ – окрестность точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром в точке M_0 и радиусом δ.

Определение 2. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0,\ y \to y_0$ (или в точке $M_0(x_0; y_0)$), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех $x \neq x_0;\ y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Обозначается предел следующим образом: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ или $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = A$.

Определение 3. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если: 1) $f(x, y)$ определена в точке $M_0(x_0; y_0)$ и ее окрестности; 2) имеет конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$; 3) этот предел равен значению функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Точки, в которых условие непрерывности не выполняется, называются точками разрыва этой функции. В некоторых функциях точки разрыва образуют целые линии разрыва.

Например, функция $z = \dfrac{3}{xy}$ имеет две линии разрыва: ось Ox ($y = 0$) и ось Oy ($x = 0$).

3. Частные производные первого порядка. Полный дифференциал

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргумент y оставим неизменным. Тогда функция z получит приращение $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, которое называется частным приращением z по переменной x и обозначается $\Delta_x z$: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Аналогично, фиксируя аргумент x и придавая аргументу y приращение Δy, получим частное приращение функции z по переменной y: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Величина $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется полным приращениием функции z в точке $M(x, y)$.

Определение 4. Частной производной функции двух переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю (если этот предел существует). Обозначается частная производная так:

z'_x, z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

Таким образом, по определению имеем:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частные производные функции $z = f(x, y)$ вычисляются по тем же правилам и формулам, что и функция одной переменной, при этом учитывается, что при дифференцировании по переменной x, y считается постоянной, а при дифференцировании по переменной y постоянной считается x.

Определение 5. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т.е. $dz = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$.

Учитывая, что дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, формулу полного дифференциала можно записать в виде

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \quad \text{или} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

1.13 Лекция №6 (2часа).

Тема: «Неопределенный интеграл».

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Понятие первообразной и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Основные методы интегрирования.

1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие первообразной и ее свойства.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $X=(a,b)$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $f(x)$ является производной для $F(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции $f(x)$ требуется найти функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$. Первообразная определена неоднозначно: для функции $\frac{1}{1+x^2}$ первообразными будут и функция arctg x, и функция arctg x-10: $(\text{arctg } x)' = (\text{arctg } x - 10)' = \frac{1}{1+x^2}$. Для того, чтобы описать все множество первообразных функции $f(x)$, рассмотрим

Свойства первообразной.

1. Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на интервале X, то функция $f(x) + C$, где C - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $f(x)$ на этом интервале. (Док-во: $F'(x) = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$).

2. Если функция $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$ на интервале $X=(a,b)$, то любая другая первообразная $F_1(x)$ может быть представлена в виде $F_1(x) = F(x) + C$, где C - постоянная на X функция.

3. Для любой первообразной $F(x)$ выполняется равенство $dF(x) = f(x)\,dx$.

Из этих свойств следует, что если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале X, то всё множество первообразных функции $f(x)$ (т.е. функций, имеющих производную $f(x)$ и дифференциал $f(x)\,dx$) на этом интервале описывается выражением $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.

Определение. Множество первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Как следует из изложенного выше, если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная. Функцию $f(x)$ принято называть подынтегральной функцией, произведение $f(x)\,dx$ - подынтегральным выражением.

3. Основные методы интегрирования.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int F'(x)dx = F(x)+C, \quad \int dF(x) = F(x)+C.$

3. Если $\int f(x)dx = F(x)+C,$ то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad a \neq 0.$

4. $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx, \quad \alpha^2+\beta^2 \neq 0.$

Замена переменных в неопределенном интеграле:

1. $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(u(x))+C.$

2. Если $x=\varphi(t), \ \varphi'(t)\neq 0, \ F$ - первообразная для $(g\circ\varphi)\varphi',$ то $\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C = F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C.$

Формула интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

(u, v - дифференцируемые функции).

Для нахождения неопределенных интегралов пользуются таблицами интегралов основных элементарных функций.

1.14 Лекция №7 (2 часа)

Тема: «Определенный интеграл».

1.14.1 Вопросы лекции:

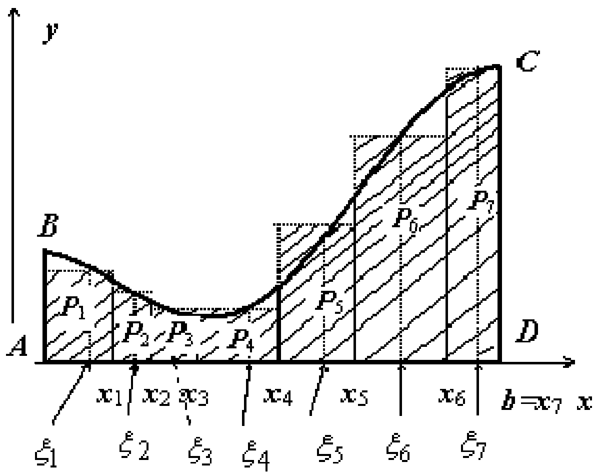
1. Понятие определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Геометрический смысл определенного интеграла.

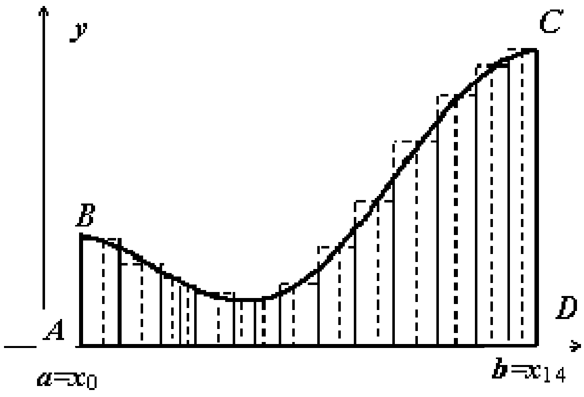
1.14.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие определенного интеграла.

Вычисление площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке $[a,b]$ ($b>a$) задана непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая на этом отрезке неотрицательные значения : $f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$. Требуется определить площадь S криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху – функцией $y = f(x)$. Для решения этой задачи разделим произвольным образом основание AD фигуры точками $x_0 = a$, x_1 , x_2 , …, x_n-1 = a, x_n = b на n частей $[x_0 , x_1]$, $[x_1 , x_2]$, …, $[x_i$-1 , $x_i]$, …, $[x_n$-1 , $x_n]$; символом Δx_i будем обозначать длину i-го отрезка: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \ i = 1,2,\ldots,n$. На каждом из отрезков $[x_i$-1 , $x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i, найдём $f(\xi_i)$, вычислим произведение $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ (это произведение равно площади прямоугольника P_i с основанием $[x_i$-1 , $x_i]$ и высотой ξ_i) и просуммируем эти произведения по всем прямоугольникам.





Полученную сумму обозначим $\boldsymbol{S}_{\text{ступ}}$:

$$S_{\text{ступ}} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \, .$$

$\boldsymbol{S}_{\text{ступ}}$ равно площади ступенчатой фигуры, образованной прямоугольниками $\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{i}$ = 1,2,…,$\boldsymbol{n}$; на левом рисунке эта площадь заштрихована. $\boldsymbol{S}_{\text{ступ}}$ не равна искомой площади $\boldsymbol{S}$, она только даёт некоторое приближение к $\boldsymbol{S}$. Для того, чтобы улучшить это приближение, будем увеличивать количество $\boldsymbol{n}$ отрезков таким образом, чтобы максимальная длина этих отрезков $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$ стремилась к нулю (на рисунке ступенчатые фигуры изображены при $\boldsymbol{n}$ = 7 (слева) и при $\boldsymbol{n}$ = 14 (справа)). При $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i \to 0 \ (n \to \infty)$ разница между $\boldsymbol{S}_{\text{ступ}}$ и $\boldsymbol{S}$ будет тоже стремиться к нулю, т.е.

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \, .$$

Определение определённого интеграла.

Пусть на отрезке [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$] задана функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Разобьём отрезок [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$] произвольным образом на $\boldsymbol{n}$ частей точками [x_0 , x_1], [x_1 , x_2], …, [x_i-1 , x_i], …, [x_n-1 , x_n]; длину $\boldsymbol{i}$-го отрезка обозначим Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1,2,\ldots,n$; максимальную из длин отрезков обозначим λ: $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$. На каждом из отрезков [x_i-1 , x_i] выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \, .$$

Сумма σ называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$] на части [x_i-1 , x_i], ни от выбора точек ξ_i, то функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется интегрируемой по отрезку [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$], а этот предел называется определённым интегралом от функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ по отрезку [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$] и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx \, .$$

Функция $f(x)$, как и в случае неопределённого интеграла, называется подынтегральной, числа a и b - соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Кратко определение иногда записывают так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\dots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

.

В этом определении предполагается, что $b > a$. Для других случаев примем, тоже по определению:

Если $b=a$, то $\int_a^b f(x)dx = 0$; если $b<a$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Теорема существования определённого интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по этому отрезку.

2. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

1. Линейность. Если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то по этому отрезку интегрируема их линейная комбинация $A\,f(x) + B\,g(x)$ (A, B = const),

$$\int_a^b \left[Af(x) + Bg(x)\right]dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$$

.

2. Аддитивность. Если $y = f(x)$ интегрируема по отрезку $[a,b]$ и точка c принадлежит этому отрезку, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

.

3. Интеграл от единичной функции ($f(x) = 1$). Если $f(x) = 1$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a$$

.

4. Теорема об интегрировании неравенств. Если в любой точке $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, и функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

.

Формула Ньютона-Лейбница.

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

.

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла. Если $u(x)$, $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

.

Замена переменной в определённом интеграле. Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$

1. определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[\alpha, \beta]$,

2. $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$,

3. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b].

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

3. Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x) > 0$ на отрезке [a,b], то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции ***ABCD***, ограниченной снизу отрезком [a,b], слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху – функцией $y = f(x)$.

1.15 Лекция №15 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения n-го порядка»

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия и определения.
2. Задача Коши.

1.15.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия и определения.

Обыкновенным *дифференциальным уравнением n –го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ \dots\ , y^{(n)}(x)) = 0,$$

где F — известная функция (n + 2)-х переменных, x — независимая переменная из интервала (a,b), $y(x)$ — неизвестная функция. Число n называется порядком уравнения.

Функция $y(x)$ называется *решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения на промежутке (a, b), если она n раз дифференцируема на (a, b) и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной, называют уравнениями в *нормальной форме*:

$y^{(n)} = f(x, y, y', \ y'', \ \dots\ , y^{(n-1)})$.

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия.

Чтобы выделить единственное решение уравнения n–го порядка обычно задают n начальных условий $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \dots\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Любое конкретное решение $y = \varphi(x)$ уравнения n –го порядка $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots\ , y^{(n)}(x)) = 0$, называется *частным решением*.

Общим решением дифференциального уравнения $F(x, y(x), y'(x), y''(x),\ \dots\ , y^{(n)}(x)) = 0$ называется функция $y = \Phi(x,\ C_1, C_2, \dots , C_n)$, содержащая некоторые постоянные (параметры) $C_1, C_2, \dots , C_n$, и обладающая следующими свойствами:

1. $\Phi(x, C_1, C_2, \ \dots\ , C_n)$ является решением уравнения при любых допустимых значениях $C_1, C_2, \dots , C_m$;
2. для любых начальных данных $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \dots\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, для которых задача Коши имеет единственное решение,

существуют значения постоянных $C_1 = A_1, C_2 = A_2,\ \dots\ , C_n = A_n$, такие что решение $y = \Phi(x, A_1, A_2, \dots, A_n)$ удовлетворяет заданным начальным условиям.

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме: $f(x, y) = 0$ или $G(x, y, C_1,\ C_2, \dots, C_n) = 0$.

Такие неявно заданные решения называются *частным интегралом* или *общим интегралом* уравнения.

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удается свести к алгебраическим операциям и к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций, то уравнение называется *интегрируемым в квадратурах*. Класс таких уравнений относительно узок.

Для решения уравнений, которые не интегрируются в квадратурах, применяются приближенные или численные методы.

2. Задача Коши.

Задачей Коши (или начальной задачей) называется задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad x>x_0,$$

удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ называются начальными данными, начальными условиями или данными Коши.

1.16 Лекция №16 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения первого и второго порядков»

1.16.1 Вопросы лекции:

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.
2. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

1.16.2 Краткое содержание вопросов:

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений — исследование общих свойств решений, развитие точных, асимптотических и численных методов интегрирования уравнений.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $F(x, y, y') = 0$, где x - независимая переменная, $y(x)$ - неизвестная функция. В форме, разрешённой относительно производной, уравнение первого порядка записывается так: $y' = f(x, y)$

Если пользоваться другим обозначением производной, то можно записать как

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Общее решение (общий интеграл) уравнения при $n = 1$ имеет вид $\Phi(x, y, C) = 0$ или $y = \varphi(x, C)$.

Решение некоторых типов ОДУ первого порядка.

Уравнения с разделёнными переменными. Так называются уравнения вида удовлетворяющее начальному условию $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$.

Пусть $y(x)$ - решение этого уравнения, т.е. $f(x)dx + g(y(x))dy(x) = 0$. Интегрируя это тождество, получим $\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$ - общий интеграл (общее решение) этого уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными. Так называются уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$ или $f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$.

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными:

Записываем уравнение в форме $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$, затем делим на $g(y)$ и умножаем на dx: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.		Уравнение делим на $f_2(x)\ g_1(y)$: $\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = 0$.
Эти уравнения - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общие интегралы:		
$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.		$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = C$.
В обоих случаях возможна потеря решений: деление на функцию может привести к уравнению, которое неэквивалентно данному.		
Если функция $g(y)$ имеет действительные корни $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то функции $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_3, \ldots$, очевидно, являются решениями исходного уравнения.		Если функция $f_2(x)$ имеет действительные корни $x_1, x_2, x_3, \ldots$, функция $g_1(y)$ имеет действительные корни $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то функции $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3, \ldots$, $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_3, \ldots$ являются решениями исходного уравнения.
В обоих случаях эти решения могут содержаться в общем решении, но могут и не содержаться в нём; последнее может случиться, если на этих решениях нарушаются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.		

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Характеристические числа

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Общее решение

1. В случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Если $\lambda_1 = \alpha - i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha + i\beta,$ то общее решение можно записать и в форме

$$y(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

2. В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ $\quad y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}.$

1.17 Лекция №13 (2 часа).

Тема: «Применение дифференциальных уравнений в прикладных задачах»

1.17.1 Вопросы лекции:

1. Простая модель роста популяции.
2. Модель сезонного роста
3. Логистический рост популяции.

1.17.2 Краткое содержание вопросов:

1. Простая модель роста популяции.

ДУ – один из математических методов, применяемых для описания динамики биологических систем. Они позволяют строить непрерывные модели, которые подходят для описания роста очень больших популяций, например, популяции бактерий или других микроорганизмов.

Пусть изучается популяция микроорганизмов, которая является объектом исследования. Тогда ключевыми переменными являются время и численность данной популяции как функция времени. Наблюдения за объектом позволили получить информацию о скорости роста популяции и ее начальном размере. Возникает вопрос: можно ли предсказать, каким будет размер популяции во все последующие моменты времени? Это биологическая задача. Для ее решения используем один из математических методов – ДУ.

Введем математические обозначения:

$t-$время;

$p = p(t)$ – численность популяции в момент времени t;

$p'(t) = \dfrac{dp}{dt}$ – скорость роста популяции;

$p(0)$ – численность популяции в начальный момент времени.

Простая модель роста популяции
(популяция, предоставленная сама себе)

Представим себе популяцию, которая развивается изолированно в условиях неограниченного ареала и неограниченных ресурсов питания. Эти предположения указывают на то, рассматривается только модель популяции. Изменение численности в нашей модельной популяции определяется только численностью самой популяции. Поэтому логично предположить, что скорость роста популяции будет пропорциональна размеру популяции.

Математически это условие запишется в следующем виде:

$$p'(t) \sim p(t) \text{ или } p'(t) = a \cdot p(t),$$

где $a-$ некоторая постоянная (коэффициент пропорциональности).

Итак, получено ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Его общим решением является класс функций вида:

$$p(t) = C \cdot e^{at}, \; C = const$$

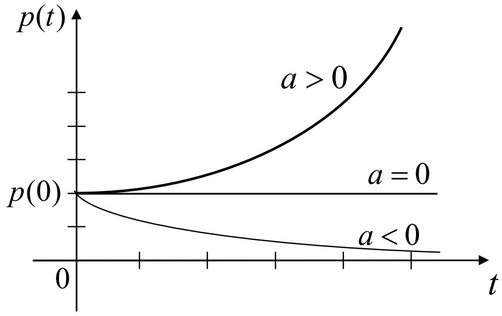
Постоянная C легко находится при известной начальной численности популяции: $p(0) = C \cdot e^{a \cdot 0} \;\; \Rightarrow \;\; p(0) = C$.

Таким образом, $p(t) = p(0) \cdot e^{at}$ – формула экспоненциального роста.

Если размер популяции известен еще в какой-то другой момент времени, то постоянную a можно определить единственным образом, в зависимости от которой возможны три случая:

1) если $a > 0$, то численность популяции с течением времени возрастает;
2) если $a = 0$, то численность популяции не меняется;
3) если $a < 0$, то численность популяции с течением времени убывает.

На рисунке показаны все три случая решения ДУ.



Разумеется, естественные популяции не изменяют свою численность по экспоненте. Построенная модель показывает, как изменялся бы размер популяции, если бы она имела неограниченный ареал и обладала неограниченными ресурсами (т.е. если бы ее не стесняли и неограниченно подкармливали). На этой тенденции основано быстрое и массовое производство, например, антибиотиков (т.е. культивирование плесневых грибков, выделяющих пенициллин).

2. Модель сезонного роста.

ДУ первого порядка $p'(t) = r \cdot p(t) \cdot \cos t$ можно рассматривать как простую модель сезонного роста. Скорость роста популяции становится попеременно то положительной, то отрицательной, и популяция то возрастает, то убывает. Это может вызываться такими сезонными факторами, как доступность пищи.

Если $p(0)$ – начальный размер популяции, то частное решение ДУ имеет вид:

$$p(t) = p(0) \cdot e^{r \sin t}$$

Максимальный размер популяции, равный $p(0) \cdot e^{r}$, достигается при $t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$. Эти моменты времени можно считать серединами сезонов наибольшей доступности пищи (летних сезонов). Минимальный размер популяции, равный $p(0) \cdot e^{-r}$, достигается при $t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$, которые являются серединами сезонов наибольшей нехватки пищи (зимних сезонов). Продолжительность одного года соответствует 2π ед. времени.

3. Логистический рост популяции.

Модель можно изменить, если учесть внутривидовую борьбу благодаря эффекту скученности или усиливающейся конкуренции за доступные пищевые ресурсы.

Пусть a – коэффициент размножения популяции; b – коэффициент внутривидовой конкуренции, который берем со знаком «минус». Уменьшение количества особей тем больше, чем больше число встреч между ними, т.е. пропорционально численности популяции в квадрате. Пусть $a > b$, т.е. с течением времени численность популяции увеличивается.

В данной модели уравнение, которому подчиняется рост популяции, имеет вид:

$$p'(t) = a \cdot p(t) - b \cdot p^2(t),$$

или в упрощенной форме:

$$p' = a \cdot p - b \cdot p^2 = p(a - bp)$$

Математически получаем ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Решая его, приходим к виду:

$$\int \frac{dp}{p(a - bp)} = \int dt$$

Для вычисления интеграла, стоящего в левой части последнего равенства, представим дробь $\frac{1}{p(a-bp)}$ в виде суммы двух дробей с неопределенными числителями $\frac{A}{p}+\frac{B}{a-bp}$. Числители находим, приведя сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{A}{p}+\frac{B}{a-bp}=\frac{A(a-bp)+Bp}{p(a-bp)}=\frac{Aa-Abp+Bp}{p(a-bp)}=\frac{Aa+p(B-Ab)}{p(a-bp)}$$

Учитываем, что $\frac{1}{p(a-bp)}=\frac{1+p\cdot 0}{p(a-bp)}$. Тогда сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной p, получаем:

$$\begin{cases} Aa=1 \\ B-Ab=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{a} \\ B=\frac{b}{a} \end{cases}$$

Таким образом, $\int\frac{dp}{p(a-bp)}=\int\frac{1}{ap}dp+\int\frac{b}{a-bp}dp$.

Дальнейшее вычисление интегралов приводит к равенству вида:

$$\frac{1}{a}\ln p+\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{1}{b}\right)\cdot\ln(a-bp)=t+C$$

$$\frac{1}{a}\ln\frac{p}{a-bp}=t+C$$

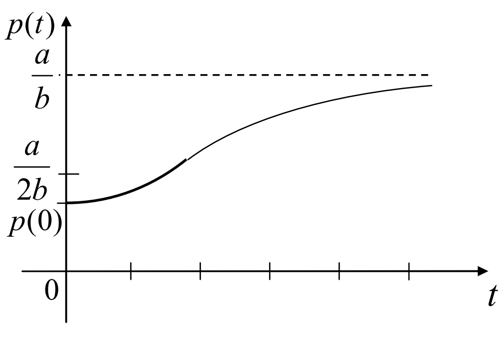
Если p_0- начальный размер популяции, то постоянная интегрирования $C=\frac{1}{a}\ln\frac{p_0}{a-bp_0}$. Подставив найденное значение и сделав некоторые преобразования, получим:

$$p=\frac{ap_0e^{at}}{a-bp_0+bp_0e^{at}}$$ - уравнение логистического роста

Процесс роста, описываемый такой функцией, называется логистическим ростом. При логистическом росте популяция с увеличением времени приближается к предельному (равновесному) размеру:

$$\lim_{t\to+\infty}p(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{ap_0e^{at}}{a-bp_0+bp_0e^{at}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left[:e^{at}\right]=\frac{a}{b}$$

Используя данное ДУ $p'=ap-bp^2$, можно показать, что функция $p(t)$ возрастает на $\left(0;\frac{a}{b}\right)$. Существует единственная точка перегиба при $p=\frac{a}{2b}$.



1.18 Лекция №18 (2 часа).

Тема: «Основные понятия и теоремы теории вероятностей».

1.18.1 Вопросы лекции:

1. Основные определения. Классическое определение вероятности события.
2. Классификация событий и их свойства.
3. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.
4. Формула полной вероятности.

1.18.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные определения. Классическое определение вероятности события.

Классическое определение вероятности

$$P(A) = m/n$$

(m - число благоприятных исходов опыта; n - число всех его исходов).

2. Классификация событий и их свойства.

Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же испытании. В противном случае события называются совместными.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого события в одном и том же испытании. В противном случае события называются зависимыми.

3. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B),$$

где $P(B/A)$ - вероятность события B при условии, что произошло событие A.

4. Формула полной вероятности.

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k),$$

где $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ - полная группа гипотез, т. е.

$$B_i B_j = \varnothing,\ i \neq j,\quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

(Ω - достоверное событие).

Формула Бейеса

$$P(B_m/A) = \frac{P(B_m)P(A/B_m)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)},\quad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ - полная группа гипотез.

1.19 Лекция №19 (2 часа).

Тема: «Повторные независимые испытания»

1.19.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Формула Бернулли.
3. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
4. Наиболее вероятное число появления события в испытании.

1.19.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия.

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А.

2. Формула Бернулли.

Вероятность события, состоящего в том, что при n повторениях испытания событие A, которое имеет одну и ту же вероятность появления в каждом испытании, произойдет ровно k раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

где n – число повторений независимых испытаний; k – число испытаний, в которых происходит событие A; p – вероятность появления события A в одном испытании; q – вероятность непоявления события A в одном испытании $(q = 1 - p)$.

3. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что при этом событие A появится ровно k раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $q = 1 - p$ – вероятность ненаступления события A, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что при этом событие A произойдет не менее k_1 и не более k_2 раз, вычисляется по формуле

$$P(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

4. Наиболее вероятное число появления события в испытании.

Пусть k_0 – число появлений события A, имеющего наибольшую вероятность при n испытаниях, p – вероятность появления события A, $q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A. Тогда верно следующее неравенство:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

1.20 Лекция №10 (2 часа).

Тема: «Дискретные случайные величины».

1.20.1 Вопросы лекции:

1. Определение дискретной случайной величины. Закон распределения.
2. Многоугольник распределения.
3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

1.20.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение дискретной случайной величины. Закон распределения.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

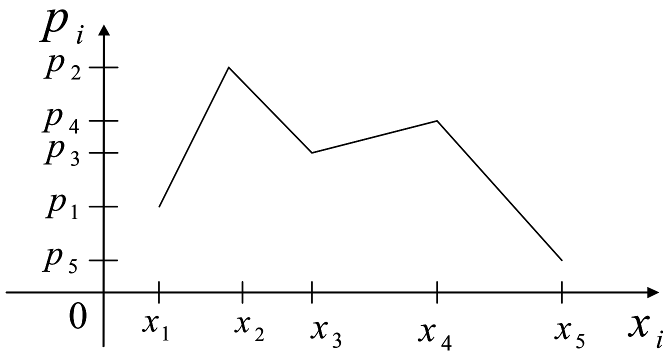
Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между всевозможными значениями и их вероятностями.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

2. Многоугольник распределения.

Многоугольником распределения дискретной случайной величины называют фигуру, полученную из точек (x_i, p_i) и отрезков, их соединяющих.



3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений каждого возможного значения этой величины на соответствующую вероятность:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_s p_s.$$

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и ее математическим ожиданием:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

1.21 Лекция №21 (2 часа).

Тема: «Непрерывные случайные величины».

1.21.1 Вопросы лекции:

1. Определение непрерывной случайной величины.
2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

1.21.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение непрерывной случайной величины.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, все возможные значения которой заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал.

2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Математическим ожиданием $M(X)$ непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;b]$, называют определенный интеграл $\int_a^b x\,f(x)dx$, т.е.

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)dx.$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx.$$

Дисперсией $D(X)$ непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a;b]$, то

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

1.22 Лекция №22 (2 часа).

Тема: «Функция распределения и плотность вероятности».

1.22.1 Вопросы лекции:

1. Функция распределения вероятностей случайной величины.
2. Плотность распределения вероятностей.

1.22.2 Краткое содержание вопросов:

1. Функция распределения вероятностей случайной величины.

Определение. Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Свойства функции распределения

1) Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;\ 1]$:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2) $F(x)$ – неубывающая функция, т. е.

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, например x_1, равна нулю:

$$P(X = x_1) = 0.$$

3) Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a;$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x \ge b.$$

Следствие. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

График функции распределения

График функции распределения непрерывной случайной величины расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = 1$. При возрастании x в интервале $(a;b)$, в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «поднимается вверх». При $x \le a$ ординаты графика равны нулю; при $x \ge b$ ординаты графика равны единице.

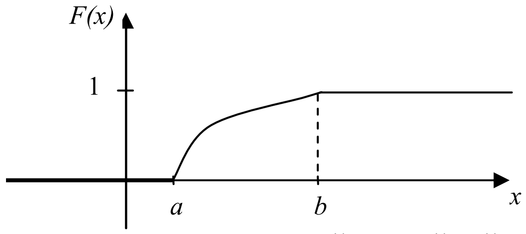


График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

2. Плотность распределения вероятностей.

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерыв-ной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Часто вместо термина «плотность распределения» используют термины «плотность вероятностей» и «дифференциальная функция».

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx .$$

1.23 Лекция №23 (2 часа).

Тема: «Законы распределения случайных величин: равномерное и показательное»

Вопросы лекции:

1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.

1.23.1 Краткое содержание вопросов:

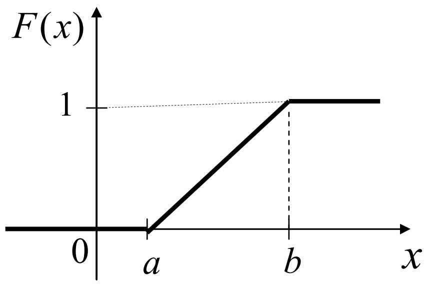
1. Равномерное распределение.

Определение. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины называют равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Функция распределения вероятности равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \;\; x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \;\; a \le x \le b, \\ 1, & при \;\; x > b. \end{cases}$$

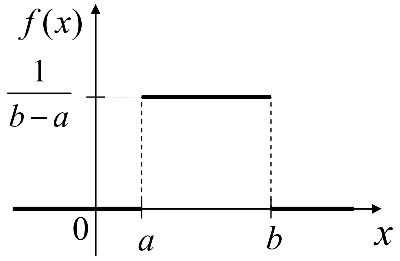
График функции распределения $F(x)$ для равномерного распределения имеет вид:



Плотность вероятности равномерного распределения равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \;\; x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & при \;\; a \le x \le b, \\ 0, & при \;\; x > b. \end{cases}$$

График плотности $f(x)$ для равномерного распределения имеет вид:



Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}.$$

2 Показательное распределение.

Определение. Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & при \quad x\geq 0,\end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Вероятность попадания в заданный интервал показательно распределенной случайной величины

Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины X, которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения, равна

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Числовые характеристики показательного распределения:

Математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ :

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия показательного распределения равна обратной величине параметра λ в квадрате:

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Среднее квадратическое отклонение показательного распределения равно:

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda},$$

т.е. математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

1.24 Лекция №24 (2 часа).

Тема: «Законы распределения случайных величин: нормальное»

1.24.1 Вопросы лекции:

1. Определение.
2. График.
3. Основные теоремы.

1.24.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение.

Определение. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, если ее функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

2. График функции $f(x)$ называется кривой нормального распределения. Методами дифференциального исчисления можно установить, что:

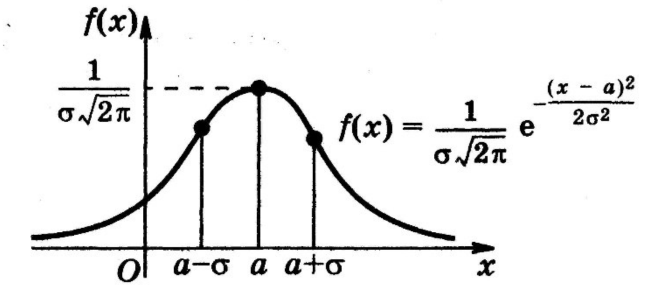
1) кривая симметрична относительно прямой $x=a$;

2) функция имеет максимум в точке $\left(a, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, при $x=a$ $f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

3) по мере удаления x от точки a функция убывает и при $x \to \pm\infty$ кривая приближается к оси Ox ;

4) кривая выпукла при $x \in (a-\sigma, a+\sigma)$ и вогнута при $x \in (-\infty, a-\sigma)$ и $x \in (a+\sigma, +\infty)$.

График функции $f(x)$ имеет вид:



3. Основные теоремы.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β),

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа.

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от математического ожидания

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше положительного числа δ ,

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм. Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадратического отклонения.

Определение. Интервал $(a-3\sigma\,;\,a+3\sigma)$ называется диапазоном изменения нормально распределенной случайной величины.

1.25 Лекция №25 (2 часа)

Тема: «Биометрия».

1.25.1 Вопросы лекции:

1. Биометрия и ее основные задачи.
2. Генеральная совокупность. Выборка. Случайные величины.
3. Дискретный и интервальный ряды распределения.
4. Графическое представление данных.

5. Выборочные числовые характеристики.

1.25.2 Краткое содержание вопросов:

1. Биометрия и ее основные задачи.

Биометрия – математическая статистика в биологии.

Биометрия – наука о статистическом анализе массовых явлений в биологии, т.е. таких явлений, в массе которых обнаруживаются закономерности, не выявляемые на единичных случаях наблюдений.

Предметом биометрии служит любой биологический объект, если проводимые над ним наблюдения получают количественное выражение.

Задачи:

1. Указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результа-те специально поставленных экспери-ментов.

2. Разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

2. Генеральная совокупность. Выборка. Случайные величины.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной (основной) совокупностью называют совокупность, объектов из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из *1000* деталей отобрано для обследования *100* деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$. Число объектов генеральной совокупности N значительно превосходит объем выборки n .

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

3. Дискретный и интервальный ряды распределения.

Способы группировки статистических данных:

1. Дискретный вариационный ряд
2. Интервальный вариационный ряд

Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

Расположив данные в порядке не убывания и сгруппировав их так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы, получают ранжированный ряд данных наблюдения.

Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называют вариантом, а изменение этого значения варьированием.

Варианты обозначают малыми буквами латинского алфавита с соответствующими порядковому номеру группы индексами - $\boldsymbol{x_i}$. Число, которое показывает, сколько раз встречается соответствующий вариант в ряде наблюдений называют частотой варианта и обозначают соответственно - $\boldsymbol{n_i}$.

Сумма всех частот ряда $\sum n_i$- объем выборки. Отношение частоты варианта к объему выборки $\boldsymbol{n_i / n = w_i}$ называют относительной частотой.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Дискретным вариационным рядом распределения называют ранжированную совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или относительными частотами w_i.

Если изучаемая случайная величина является непрерывной, то ранжирование и группировка наблюдаемых значений зачастую не позволяют выделить характерные черты варьирования ее значений. Это объясняется тем, что отдельные значения случайной величины могут как угодно мало отличаться друг от друга и поэтому в совокупности наблюдаемых данных одинаковые значения величины могут встречаться редко, а частоты вариантов мало отличаются друг от друга.

Нецелесообразно также построение дискретного ряда для дискретной случайной величины, число возможных значений которой велико. В подобных случаях следует строить интервальный вариационный ряд распределения.

Для построения такого ряда весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины разбивают на ряд частичных интервалов и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

Интервальным вариационным рядом называют упорядоченную совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений величины.

4. Графическое представление данных.

Для наглядности строят различные графики статистического распределения.

По данным дискретного вариационного ряда строят полигон частот или относительных частот.

Полигоном частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки (x_1; n_1), (x_2; n_2), ..., (x_k; n_k). Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им частоты n_i. Точки (x_i; n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот (Рис. 1).

Полигоном относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки (x_1; W_1), (x_2; W_2), ..., (x_k; W_k). Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им относительные частоты W_i. Точки (x_i; W_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i / h.

Площадь i - го частичного прямоугольника равна $hn_i / h = n_i$ - сумме частот вариант i - го интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению W_i / h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i / h (Рис. 2).

Площадь i - го частичного прямоугольника равна $hW_i / h = W_i$ - относительной частоте вариант попавших в i - й интервал. Следовательно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

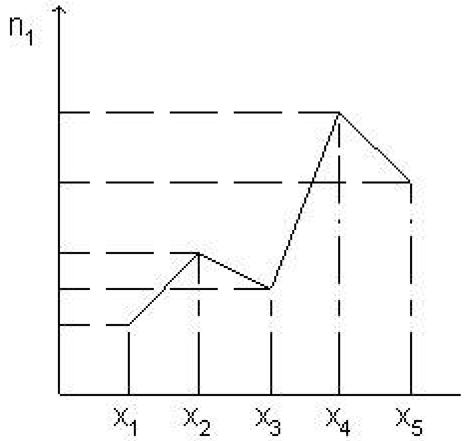


Рис. 1. Полигон частот

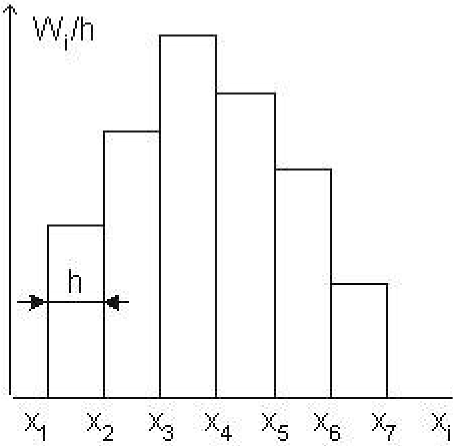


Рис. 2. Гистограмма относительных частот

5. Выборочные числовые характеристики.

Пусть статистическое распределение выборки объема n имеет вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

1) Выборочной средней $\bar{x}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i ,$$

где k – число различных значений вариант.

2) Выборочной дисперсией D_B называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\bar{x}$:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i ,$$

где k - число различных значений вариант.

3) Исправленная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i ,$$

где k – число различных значений вариант.

4) Связь между выборочной и исправленной дисперсиями:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B .$$

5) Исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2} .$$

6) Ошибка средней:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

7) Коэффициент вариации:

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\,\% .$$

Мода M_0 – варианта, которая имеет наибольшую частоту.

Медиана m_e – варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант.

1.26 Лекция № 26 (2 часа).

Тема: «Теория корреляции»

1.26.1 Вопросы лекции:

1. Понятие корреляции. Две основные задачи теории корреляции.
2. Корреляционная таблица.
3. Линейная и нелинейная корреляция.
4. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.

1.26.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие корреляции. Две основные задачи теории корреляции.

Корреляционной зависимостью (корреляцией) называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение среднего значения другой величины.

2. Корреляционная таблица.

Корреляционной таблицей называется таблица, в которой результаты наблюдений записаны в возрастающем порядке с указанием частот n_{ij} появления пары $(x_i ; y_j)$.

3. Линейная и нелинейная корреляция.

Условным средним $\bar{y}_x$ называют среднее арифметическое значение величины Y, вычисленное при условии, что X принимает фиксированное значение.

Эмпирической линией регрессии Y на X называется ломанная, соединяющая точки $M(x_i ; \bar{y}_{x_i})$.

Теоретической линией регрессии Y на X называется «сглаживающая» кривая, около которой группируются точки $M(x_i ; \bar{y}_{x_i})$, а соответствующее уравнение $y = f(x)$ – уравнением регрессии Y на X.

4. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Для установления между двумя признаками линейной корреляции служит выборочный коэффициент корреляции, который вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \overline{y})^2}} .$$

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1) $-1 \le r \le 1$;

2) чем больше $|r|$, тем теснее линейная корреляция между двумя признаками;

3) если $|r| = 1$, то корреляционная зависимость становится функциональной;

4) если $r = 0$, то между изучаемыми признаками нет линейной корреляции, но возможно существование какого-либо другого вида корреляционной зависимости (параболической, гиперболической и т.д.).

Если в результате опыта линейная зависимость между величинами Y и X выражена в виде таблицы

X	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
Y	y_1	y_2	. . .	y_i	. . .	y_n

то параметры a и b уравнения прямой регрессии $y = ax + b$ находятся из нормированной системы

$$\begin{cases} \grave{a}\sum_{i=1}^{n} \tilde{o}_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

по методу наименьших квадратов.

В случае малой выборки уравнение прямой регрессии вычисляют по формуле:

$$y - \overline{y} = b_{Y/X}(x - \overline{x}),$$

где $b_{Y/X}$ – коэффициент регрессии, вычисляемый следующим образом:

$$b_{Y/X} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2} ,$$

где

$\overline{x}$ – выборочная средняя признака X;

$\overline{y}$ – выборочная средняя признака Y .

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ(не предусмотрено РУП)

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Матрицы. Определители»

3.1.1 Задание для работы:

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Матрицы. Операции над матрицами.
3. Нахождение обратной матрицы.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 13,$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}.$$

Утверждение. Разложение определителя по произвольной строке.

Для определителя матрицы A справедлива формула

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}.$$

Пример. Вычислите $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся разложением по третьей строке, так выгоднее, поскольку в третьей строке два числа из трех - нули. Получим

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0.7 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0.7 \end{vmatrix} = -3(-10-4) = 42.$$

Пример. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A| = 11 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}$ - существует.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.3 Результаты и выводы: В результате проделанной работы научились вычислять определители, выполнять действия с матрицами.

3.2 Практическое занятие №2 (2 часа).
Тема: «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера»

3.2.1 Задание для работы:
1. Решение СЛУ методом Гаусса.
2. Решение СЛУ по формулам Крамера.

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+z=2 \\ x-y+2x=-1 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$$

Решая системы линейных уравнений школьными способами, мы почленно умножали одно из уравнений на некоторое число, так, чтобы коэффициенты при первой переменной в двух уравнениях были противоположными числами. При сложении уравнений происходит исключение этой переменной. Аналогично действует и метод Гаусса.

Для упрощения внешнего вида решения составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

В этой матрице слева до вертикальной черты расположены коэффициенты при неизвестных, а справа после вертикальной черты - свободные члены.

Для удобства деления коэффициентов при переменных (чтобы получить деление на единицу) переставим местами первую и вторую строки матрицы системы. Получим систему, эквивалентную данной, так как в системе линейных уравнений можно переставлять местами уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

С помощью нового первого уравнения исключим переменную *x* из второго и всех последующих уравнений. Для этого ко второй строке матрицы прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{3}{1}$), к третьей – первую строку, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{2}{1}$).

Это возможно, так как $a_{11} \neq 0$.

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям первую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате получим матрицу эквивалентную данной системе новой системы уравнений, в которой все уравнения, начиная со второго не содержат переменную *x*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Для упрощения второй строки полученной системы умножим её на $\frac{1}{5}$ и получим вновь матрицу системы уравнений, эквивалентной данной системе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Теперь, сохраняя первое уравнение полученной системы без изменений, с помощью второго уравнения исключаем переменную *y* из всех последующих уравнений. Для этого к третьей строке матрицы системы прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ (в нашем случае на $-\frac{4}{1}$).

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям вторую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате вновь получим матрицу системы, эквивалентной данной системе линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Мы получили эквивалентную данной трапециевидную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ \quad y - z \quad = 1 \\ \qquad\ z \quad = 1 \end{cases}$$

Если число уравнений и переменных больше, чем в нашем примере, то процесс последовательного исключения переменных продолжается до тех пор, пока матрица системы не станет трапециевидной, как в нашем примере.

Решение найдём "с конца" - это называется "обратный ход метода Гаусса". Для этого из последнего уравнения определим *z*:

$z = 1$.

Подставив это значение в предшествующее уравнение, найдём y:

$y = 1 + z$

$y = 1 + 1 = 2.$

Из первого уравнения найдём x:

$x = -1 + y - 2z$

$x = -1 + 2 - 2 = -1.$

Итак, решение данной системы - $(x = -1; \ \ y = 2; \ \ z = 2)$.

3.2.3 Результаты и выводы: Научились решать системы линейных уравнений.

3.3 Практическое занятие №3 (2 часа).

Тема: «Решение систем линейных уравнений в матричном виде»

3.3.1 Задание для работы:

1. Вычисление обратной матрицы.
2. Решение систем линейных уравнений в матричном виде.

3.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычисление обратной матрицы.

Задание. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ найти обратную методом присоединенной матрицы.

Решение. Приписываем к заданной матрице A справа единичную матрицу второго порядка:

$$A|E = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

От первой строки отнимаем вторую (для этого от элемента первой строки отнимаем соответствующий элемент второй строки):

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

От второй строки отнимаем две первых:

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Первую и вторую строки меняем местами:

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

От второй строки отнимаем две первых:

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right)$$

Вторую строку умножаем на (-1), а к первой строке прибавляем вторую:

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

Итак, слева получили единичную матрицу, а значит матрица, стоящая в правой части (справа от вертикальной черты), является обратной к исходной.

Таким образом, получаем, что $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

2. Решение систем линейных уравнений в матричном виде.

Вычисление обратной матрицы с помощью присоединённой матрицы

Пример 1.

Найти обратную матрицу матрицы А

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Приписываем к матрице А справа единичную матрицу третьего порядка:

$$A|E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Преобразуем левую часть полученной матрицы в единичную. Для этого от 3-тей строки отнимем 1-ую строку:

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2-2 & 1-4 & 1-1 & 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Третью строку поделим на (-3) и поменяем местами со второй строкой:

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Отнимем он 1-ой строки 2-ую умноженную на 4; от 3-тей строки 2-ую умноженную на 2:

$$\sim \begin{pmatrix} 2-4\cdot0 & 4-4\cdot1 & 1-4\cdot0 & 1-4\cdot(1/3) & 0-4\cdot0 & 0-4\cdot(-1/3) \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0-2\cdot0 & 2-2\cdot1 & 1-2\cdot0 & 0-2\cdot1/3 & 1-2\cdot0 & 0-2\cdot(-1/3) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \sim$$

Отнимем он 1-ой строки 3-ую строку:

$$\sim \begin{pmatrix} 2-0 & 0-0 & 1-1 & -1/3-(-2/3) & 0-1 & 4/3-2/3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 2/3 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right) \sim$$

Разделим 1-ую строку на 2:

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right)$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$

Вычисление обратной матрицы с помощью союзной матрицы

Пример 1.

Найти обратную матрицу матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем определитель матрицы A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot2\cdot1 + 4\cdot1\cdot2 + 1\cdot0\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 - 2\cdot1\cdot1 - 4\cdot0\cdot1 = 4 + 8 + 0 - 4 - 2 - 0 = 6$$

Найдем алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1 - 1\cdot1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0\cdot1 - 1\cdot2) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot1 - 2\cdot2 = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4\cdot1 - 1\cdot1) = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1 - 1\cdot2 = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 4 \cdot 2) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 4$$

Запишем союзную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$

3.4 Практическое занятие №4 (2 часа).

Тема: «Действия над комплексными числами»

3.4.1 Задание для работы:

1. Сложение комплексных чисел.
2. Вычитание комплексных чисел.
3. Умножение комплексных чисел.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Сложение комплексных чисел

Пример 1

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:

$z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$

2.Вычитание комплексных чисел

Пример 2

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$

Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2 - \sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.

Рассчитаем вторую разность:

$z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$

Здесь действительная часть тоже составная: $2 + \sqrt{3}$

$-1 + \sqrt{2}i + 7 - 3i = 6 + (\sqrt{2} - 3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

3. Умножение комплексных чисел

Пример 3

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

Очевидно, что произведение следует записать так:

$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$

$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$

$-i \cdot 6i = -6i^2 = -6 \cdot (-1) = +6$

4. Деление комплексных чисел

Пример 4

Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13 + i}{7 - 6i}$$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7 + 6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7 + 6i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13 + i)(7 + 6i)}{(7 - 6i)(7 + 6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$).

Распишем подробно:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13 + i)(7 + 6i)}{(7 - 6i)(7 + 6i)} = \frac{91 + 7i + 78i + 6i^2}{7^2 - (6i)^2} = \frac{91 + 7i + 78i - 6}{49 - (-36)} =$$

$$= \frac{85 + 85i}{49 + 36} = \frac{85 + 85i}{85} = 1 + i$$

Пример 5

Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a + bi$).

Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2}=\frac{\sqrt{3}-i}{3+1}=\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$$

Пример 6

Даны два комплексных числа $z_1=5+2i$, $z_2=2-5i$. Найти их сумму, разность, произведение и частное.

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце занятия.

3.4.3 Результаты и выводы: Научились выполнять действия над комплексными числами.

3.5 Практическое занятие №5 (2 часа).

Тема: «Действия над векторами»

3.5.1 Задание для работы:

1. Координаты вектора.
2. Длина вектора.
3. Скалярное произведение векторов.

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Координаты вектора.

Пример 1

Даны две точки плоскости $A(2;1)$ и $B(-2;3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

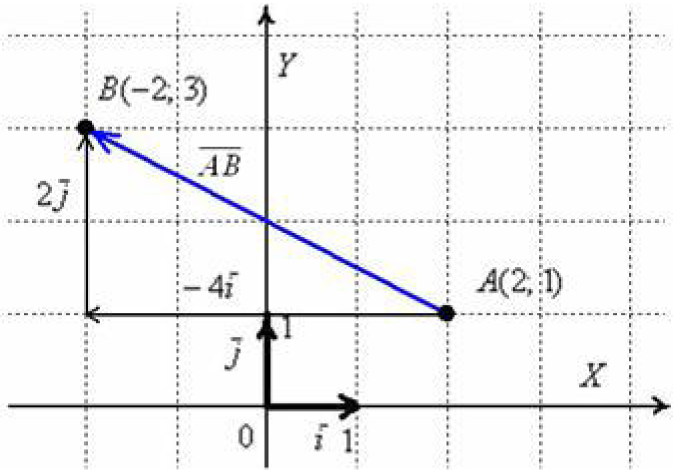
Решение: по соответствующей формуле: $\overline{AB}(-2-2;3-1)=\overline{AB}(-4;2)$

Как вариант, можно было использовать следующую запись: $\overline{AB}=(-2-2;3-1)=(-4;2)$

Эстеты решат и так: $\overline{AB}=(-2-2)\bar{i}+(3-1)\bar{j}=-4\bar{i}+2\bar{j}$

Лично я привык к первой версии записи.

Ответ: $\overline{AB}(-4;2)$



Пример 2

а) Даны точки $A(-4;5)$ и $B(1;-3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

б) Даны точки $A(2;0)$, $B(-7;1)$ и $C(4;1)$. Найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

в) Даны точки $F(-2; -1; 0)$ и $E(0; -1; -2)$. Найти векторы $\overline{FE}$ и $\overline{EF}$.

г) Даны точки $A_1(10; 5; -4)$, $A_2(-8; 6; 3)$, $A_3(1; 1; -1)$, $A_4(0; 0; 1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$.

Это примеры для самостоятельного решения.

2. Длина вектора.

Пример 3

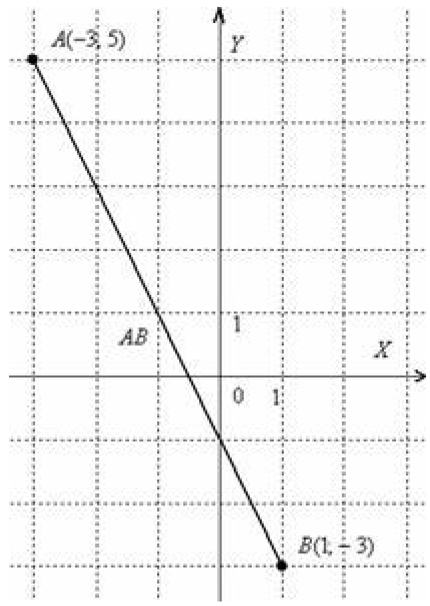
Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:

$$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Для наглядности выполним чертёж



Пример 5

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Решение: Сначала найдём вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}(1-(-3); -3-5) = \overline{AB}(4; -8)$$

По формуле $|\overline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ вычислим длину вектора:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Пример 7

Даны векторы $\overline{a}(1; -2)$ и $\overline{b}(2; 3)$. Найти $2\overline{a}$, $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$

Решение чисто аналитическое:

$$2\overline{a} = 2(1; -2) = (2; -4)$$

$$\overline{a}+\overline{b} = (1; -2) + (2; 3) = (1+2; -2+3) = (3; 1)$$

$$\overline{a}-\overline{b} = (1; -2) - (2; 3) = (1-2; -2-3) = (-1; -5)$$

Ответ: $2\overline{a} = (2; -4)$, $\overline{a}+\overline{b} = (3; 1)$, $\overline{a}-\overline{b} = (-1; -5)$

3. **Скалярное произведение векторов**

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|=2,\quad |\overline{b}|=5,\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. В данном случае:

$$\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=2\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{6}=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$

Ответ: $\overline{a}\overline{b}=5\sqrt{3}$

3.5.3 Результаты и выводы: Научились выполнять действия над векторами.

3.6 Практическое занятие №6 (2 часа).

Тема: «Задание прямой на плоскости различными способами. Взаимное расположение прямых»

3.6.1 Задание для работы:

1. Различные способы задания прямой.
2. Проверка параллельности прямых.
3. Проверка перпендикулярности прямых.

3.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

Даны вершины треугольника АВС: А(-2;5), В(10;- 4), С(8;10). Требуется:

1) Найти длину стороны АВ;
2) Составить уравнения сторон АВ и АС в общем виде и найти их угловые коэффициенты;
3) Вычислить угол А в радианах;
4) Составить уравнение медианы АД;
5) Составить уравнение высоты СЕ и найти ее длину.

Решение:

1) Расстояние d между точками А (x_1; y_1) и В (x_2; y_2) вычисляется по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Применяя (1), находим длину стороны АВ:

$$d_{AB}=\sqrt{(10-(-2))^2+(-4-5)^2}=\sqrt{144+81}=15$$

2) уравнение прямой, проходящей через точки А (x_1; y_1) и В (x_2; y_2), имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (5)$$

Подставив в (5) соответствующие координаты точек А и В, находим уравнение прямой АВ.

$$\frac{y-5}{-4-5}=\frac{x-(-2)}{10-(-2)}$$

$$\frac{y-5}{-9}=\frac{x+2}{12}$$

$$\frac{y-5}{-3}=\frac{x+2}{4}$$

$$4y-20=-3x-6$$

$$3x+4y-14=0$$

Чтобы найти угловой коэффициент прямой AB ($к_{AB}$), решим полученное уравнение прямой относительно y:

$$4y = -3x + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{14}{4};$$

откуда $к_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Подставляя в (5) координаты точек A и C, находим уравнение прямой AC.

$$\frac{y-5}{10-5} = \frac{x+2}{8+2}$$

$$\frac{y-5}{5} = \frac{x+2}{10}$$

$$\frac{y-5}{1} = \frac{x+2}{2}$$

$$x + 2 = 2y - 10$$

$x - 2y + 12 = 0$ - уравнение стороны AC, откуда $к_{AC} = \frac{1}{2}$

3) Если даны две прямые, угловые коэффициенты которых соответственно $к_1$ и $к_2$, то угол γ между этими прямыми определяется по формуле:

$$tg\gamma = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| \qquad (7)$$

Искомый угол A образован прямыми AB и AC, угловые коэффициенты которых найдены ранее в пункте 2). Для определения угла A положим $k_1 = k_{AB} = -\frac{3}{4}$ и $k_2 = k_{AC} = \frac{1}{2}$. Применяя (7), получим:

$$tgA = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{3}{4})}{1 + (-\frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}} = 2;$$ откуда $A = arctg2 = 63^0 26'$.

Используя таблицу перевода градусной меры в радианную, получим A=1.107 рад.

4). Если AD есть медиана, то точка D является серединой стороны BC. Для вычисления координат точки D применяем формулы деления отрезка на две равные части:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (10)$$

Подставив в (10) координаты точек B и C, находим координаты точки D:

$x_D = \frac{10 + 8}{2} = 9$; $y_D = \frac{-4 + 10}{2} = 3$; D (9;3).

Подставив в (5) координаты точек A (-2;5) и D (9;3), находим искомое уравнение медианы AD:

$$2x + 11y - 51 = 0$$

5). Высота CE перпендикулярна стороне AB. известно, что если две прямые взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратные по величине и противоположны по знаку. Следовательно, $\kappa_{CE} = -\frac{1}{\kappa_{AB}}$. Так как $\kappa_{AB} = -\frac{3}{4}$, то $\kappa_{CE} = \frac{4}{3}$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом, имеет вид:

$$y - y_1 = \kappa(x - x_1) \qquad (4)$$

Подставив в (4) координаты точки С и найденный угловой коэффициент $к_{CE} = \frac{4}{3}$, получим искомое уравнение высоты СЕ:

$$y - 10 = \frac{4}{3}(x - 8)$$

$$3y - 30 = 4x - 32$$

$4x - 3y - 2 = 0$ - уравнение СЕ.

Чтобы найти длину СЕ, определим сперва координаты точки Е – точки пересечения высоты СЕ и прямой АВ. Для этого решаем совместно систему уравнений АВ и СЕ:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 14 = 0 \\ 4x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 4, получим:

$$\begin{cases} 9x + 12y - 42 = 0 \\ 16x - 12y - 8 = 0 \end{cases}$$

Сложим оба уравнения и припишем в систему первое уравнение исходной системы:

$$\begin{cases} 25x - 50 = 0 \\ 3x + 4y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3x + 4y - 14 = 0 \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение системы значение $x = 2$, найдем значение y :

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3 \cdot 2 + 4y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Следовательно, Е (2;2). Длину высоты СЕ определяем как расстояние между двумя точками С и Е по формуле (1).

$$d_{CE} = \sqrt{(2-8)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{100} = 10$$

3.6.3 Результаты и выводы: Научились составлять уравнения прямых.

3.7 Практическое занятие №7 (2 часа).

Тема: «Построение кривых второго порядка»

3.7.1 Задание для работы:

1. Составление уравнения и построение окружности.
2. Составление уравнения и построение эллипса.
3. Составление уравнения и построение гиперболы.
4. Составление уравнения и построение параболы.

3.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пусть требуется построить эллипс с заданными параметрами a =4 и b =2.

Решение:

а) строим окружность радиуса R =4 с центром в начале прямоугольной системы координат Oxy ;

б) принимаем коэффициент сжатия окружности $k = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$;

в) далее применяем линейку и прямоугольный треугольник: двигаем треугольник вдоль линейки так, чтобы деление [4] всё время оставалось на оси Ox ;

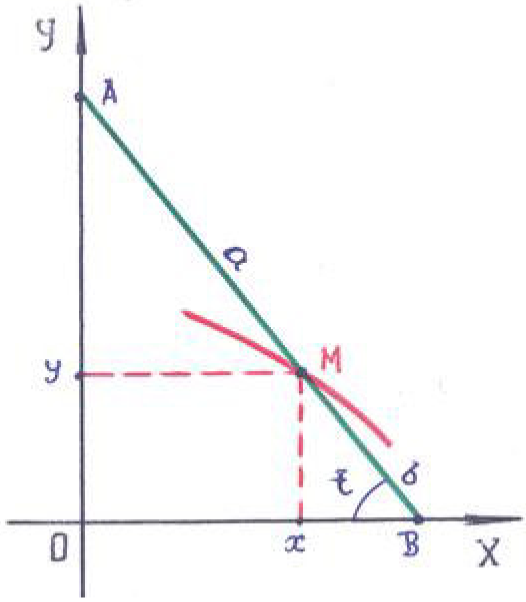
г) используем ординаты: 1; 2; 3; 4 точек окружности и, двигая треугольник вдоль линейки, отмечаем на плоскости Oxy точки с ординатами: $\pm\frac{1}{2}$; $\pm$ 1; $\pm\frac{3}{2}$; $\pm$ 2;

д) в результате выполнения построений по пункту г) для каждой четверти эллипса получаем по пять точек, которые легко соединить при помощи ***лекала***: эллипс (симпатичный!) построен.

Замечание: значения параметров a =4 и b =2 и ординат: 1; 2; 3; 4 выбраны так, чтобы каждый раз ***легко видеть середины*** выделяемых отрезков.

Ответ: эллипс: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ – построен.

5). Эллипс – результат ***сжатия*** окружности: $X^2+Y^2=a^2$. Наблюдение результата ортогонального параллельного проектирования подсказывает практический способ построения эллипса с заданными параметрами a и b , то есть с заданными осями:



6). Параметрические уравнения эллипса. Имея опыт построения параметрических уравнений прямой, напрашивается вопрос: не будет ли это связано с некоторым движением точки на плоскости в системе координат OXY ?

Наиболее удобной моделью для получения параметрических уравнений эллипса считают отрезок AB , который скользит своими концами A и B по осям OY и OX , соответственно. При движении отрезка AB точка M (на отрезке закреплена), принадлежащая отрезку, описывает некоторую линию. Найдём её уравнение, введя параметр t – угол отрезка AB с осью координат OX . Для этого достаточно записать значения координат точки M :

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad (11)$$

Утверждать, что уравнения (11) есть эллипс, можно только после того, как убедимся, что точка принадлежит уже известному нам уравнению эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Подставим координаты точки M в каноническое уравнение эллипса:

$\frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t)^2}{b^2}=1 \to \cos^2 t+\sin^2 t=1$ – тождество!

3.7.3 Результаты и выводы: Научились строить кривые второго порядка.

3.8 Практическое занятие № 8 (2 часа).

Тема: «Нахождение предела функции»

3.8.1 Задание для работы:

1. Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$.
2. Нахождение производной сложной функции.
3. Дифференциал функции.

3.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

Пример.

Решить предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Итак, решаем наш предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$$2x^2-3x-5=0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

Далее находим корни:

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

2. Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

Пример.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Вот оно как, ответ $\frac{2}{3}$, а вовсе не бесконечность.

3.8.3 Результаты и выводы: Научились вычислять пределы.

3.9 Практическое занятие № 9 (2 часа).

Тема: «Нахождение производных функций»

3.9.1 Задание для работы:

1. Нахождение производной функции по правилам дифференцирования и таблице производных.
2. Нахождение производной сложной функции.
3. Дифференциал функции.

3.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти производные указанных функций:

а) $y=x^3-\frac{1}{x^4}+6\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=(x^3+2)\cdot\sin x$; в) $y=\frac{\arcsin x}{x^2+e^x}$; г) $y=(x^2-arctgx)^4$; д) $y=e^{\sin 4x}$; е) $y=e^{tgx}\cdot\cos^2 x$; ж) $y=\ln\sin(2x+1)$.

Решение.

а) Перепишем данную функцию, введя дробные и отрицательные показатели: $y = x^3 - x^{-4} + 6x^{\frac{2}{3}}$.

Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы 3) и формулу дифференцирования степенной функции 7), учитывая, что $x'_x = 1$, имеем:

$$y' = 3x^2 - (-4)x^{-5} + 6 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) Применяя правило производной произведения двух функций 4), а также формулы 7) и 13), имеем:

$$y' = (x^3 + 2)' \cdot \sin x + (x^3 + 2) \cdot (\sin x)' = 3x^2 \cdot \sin x + (x^3 + 2) \cdot \cos x$$

в) Применяем правило дифференцирования частного двух функций 6), а также формулы 17), 7) и 11).

$$y' = \frac{(\arcsin x)' \cdot (x^2 + e^x) - \arcsin x \cdot (x^2 + e^x)'}{(x^2 + e^x)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (x^2 + e^x) - \arcsin x \cdot (2x + e^x)}{(x^2 + e^x)^2}$$

$$= \frac{x^2 + e^x - \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x \cdot (2x + e^x)}{\sqrt{1 - x^2} \cdot (x^2 + e^x)^2}.$$

г) Данная функция является сложной; она может быть представлена так: $y = u^4$, где $u = x^2 - arctgx$. Применяем формулу 7):

$$y' = 4u^3 \cdot u' = 4(x^2 - arctgx)^3 \cdot (x^2 - arctgx)' = 4(x^2 - arctgx)^3 \cdot (2x - \frac{1}{1 + x^2}) \cdot$$

д) Применяем формулу 13) дифференцирования сложной функции.

$$y' = (e^{\sin 4x})' = e^{\sin 4x} \cdot (\sin 4x)' = e^{\sin 4x} \cdot \cos 4x \cdot (4x)' = 4e^{\sin 4x} \cos 4x$$

е)

$$y' = (e^{tgx} \cdot \cos^2 x)' = (e^{tgx})' \cdot \cos^2 x + e^{tgx} \cdot (\cos^2 x)' = e^{tgx} \cdot (tgx)' \cdot \cos^2 x + e^{tgx}((\cos x)^2)' =$$

$$= e^{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x + e^{tgx} \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)' = e^{tgx} + e^{tgx} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) =$$

$$= e^{tgx} - e^{tgx} \cdot \sin 2x = e^{tgx}(1 - \sin 2x)$$

ж) Применяем формулу 12) дифференцирования сложной функции:

$$y' = (\ln\sin(2x+1))' = \frac{1}{\sin(2x+1)} \cdot (\sin(2x+1))' = \frac{1}{\sin(2x+1)} \cdot \cos(2x+1) \cdot (2x+1)' =$$

$$= 2ctg(2x+1).$$

3.9.3 Результаты и выводы: Научились вычислять производные.

3.10 Практическое занятие № 10 (2 часа).

Тема: «Исследование функции с помощью производных»

3.10.1 Задание для работы:

1. Исследование функции с помощью первой производной.
2. Исследование функции с помощью второй производной.

3.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

Задача. Исследовать функцию $y = \frac{2(x+1)}{e^x}$ и построить ее график.

Решение. Данная функция существует на всей числовой оси. Определим точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции.

$$y' = \frac{2e^x - 2(x+1)e^x}{(e^x)^2} = -\frac{2x}{e^x}$$

Показательная функция e^x положительна для любого значения x. Следовательно, первая производная обращается в нуль только при $x = 0$. При этом левее этой точке, то есть при $x < 0$, производная $y'(x)$ положительна, а при $x > 0$ производная $y'(x)$ отрицательна. Это означает, что в точке $x = 0$ функция имеет максимум. В промежутке (-∞; 0) функция возрастает, а в промежутке (0;+∞) убывает.

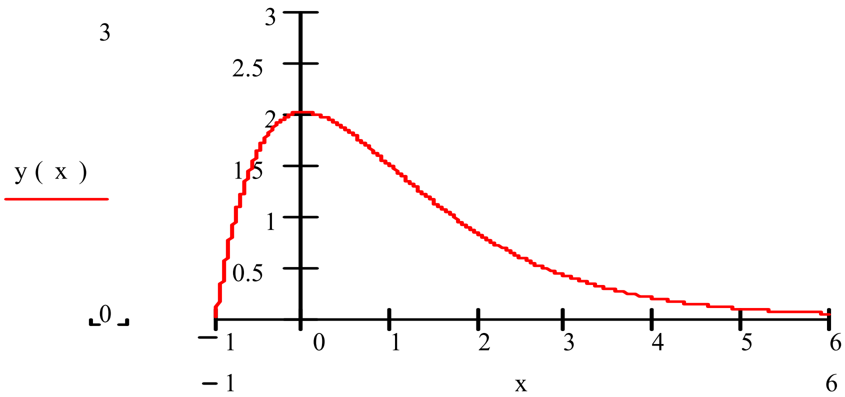
$y_{\min} = y(0) = 2$; A(0;2) – точка максимума.

Чтобы найти точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости, находим производную второго порядка:

$$y'' = \frac{-2e^x + 2xe^x}{(e^x)^2} = \frac{2(x-1)}{e^x}$$

Вторая производная y'' обращается в нуль при $x = 1$. Эта критическая точка второго рода разбивает числовую ось на два промежутка: (-∞;1) и (1;+∞). В первом из этих промежутков $y''(x)$ отрицательна, а во втором – положительна. Следовательно, в первом промежутке график функции является выпуклым, а во втором – вогнутым. Так как при переходе через критическую точку $x = 1$ вторая производная меняет свой знак, то $x = 1$ есть абсцисса точки перегиба. Вычислим ординату точке перегиба: $y(1) = \frac{4}{e}$.

Итак, P(1; $\frac{4}{e}$) – точка перегиба графика функции. График исследуемой функции дан на рисунке.



3.10.3 Результаты и выводы: Научились исследовать функции.

3.11 Практическое занятие № 11 (2 часа).

Тема: «Дифференциал функции»

3.11.1 Задание для работы:

1. Вычисление дифференциала функций.
2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
3. Абсолютная и относительная погрешности приближенных вычислений.

3.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычисление дифференциала функций.

<u>Пример</u>

Найти дифференциал функции $y=\sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}$

Перед тем, как находить производную или дифференциал, всегда целесообразно посмотреть, а нельзя ли как-нибудь упростить функцию (или запись функции) ещё **до**дифференцирования? Смотрим на наш пример. Во-первых, можно преобразовать корень:

$$y=\sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}=\sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right)$$ (корень пятой степени относится именно к синусу).

Во-вторых, замечаем, что под синусом у нас дробь, которую, очевидно, предстоит дифференцировать. Формула дифференцирования дроби очень громоздка. Нельзя ли избавиться от дроби? В данном случае – можно, почленно разделим числитель на знаменатель:

$$y=\sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}=\sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-3}{x}\right)=\sin^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)$$

Функция сложная. В ней два вложения: под степень вложен синус, а под синус вложено выражение $\left(1-\frac{3}{x}\right)$. Найдем производную, используя правило дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ два раза:

$$y'=\left(\sin^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)'=\frac{4}{5}\cdot\sin^{-\frac{1}{5}}\left(1-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)'=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\cdot\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{x}\right)'=\frac{4\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)}{5\cdot\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\cdot\left(0+\frac{3}{x^2}\right)=\frac{12\cos\left(1-\frac{3}{x}\right)}{5\cdot x^2\cdot\sqrt[5]{\sin\left(1-\frac{3}{x}\right)}}$$

Запишем дифференциал, при этом снова представим $\left(1-\frac{3}{x}\right)$ в первоначальном «красивом» виде:

$$dy=\frac{12\cos\left(\frac{x-3}{x}\right)dx}{5\cdot x^2\cdot\sqrt[5]{\sin\left(\frac{x-3}{x}\right)}}$$

Когда производная представляет собой дробь, значок dx обычно «прилепляют» в самом конце числителя (можно и справа на уровне дробной черты).

Пример

Найти дифференциал функции $y=\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}$

Это пример для самостоятельного решения.

Следующие два примера на нахождение дифференциала в точке:

Пример

Вычислить дифференциал функции $f(x)=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$ в точке $x=1$

Найдем производную:

$$f'(x)=\left(\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})\right)'=\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot(x^2+\sqrt{x^4+1})'=$$

$$=\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}\cdot(x^4+1)'\right)=\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(2x+\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}\right)=(*)$$

Опять, производная вроде бы найдена. Но в эту бодягу еще предстоит подставлять число, поэтому результат максимально упрощаем:

$$(*)=\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(2x+\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}\right)=\frac{2x}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}\right)=$$

$$=\frac{2x}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}}\right)=\frac{2x\cdot(\sqrt{x^4+1}+x^2)}{(x^2+\sqrt{x^4+1})\cdot\sqrt{x^4+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$$

Труды были не напрасны, записываем дифференциал:

$$df(x)=\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$$

Теперь вычислим дифференциал в точке $x=1$:

$$df(1)=\frac{2\cdot\mathbf{1}\cdot dx}{\sqrt{1^4+1}}=\frac{2dx}{\sqrt{2}}$$

В значок дифференциала dx единицу подставлять не нужно, он немного из другой оперы.

Ну и хорошим тоном в математике считается устранение иррациональности в знаменателе. Для этого домножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$. Окончательно:

$$df(1)=\frac{2\cdot\sqrt{2}dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}dx}{2}=\sqrt{2}dx$$

Пример

Вычислить дифференциал функции $f(x)=-\ln\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right|$ в точке $x=\sqrt{2}$. В ходе решения производную максимально упростить.

Это пример для самостоятельного решения.

2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Пример. Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно ln 1,01.

Решение. Число ln 1,01 является одним из значений функции $y=\ln x$. Формула (11) в данном случае примет вид

$$\ln(x_0+\Delta x)\approx\ln x_0+\frac{\Delta x}{x_0}.$$

Положим

$x_0=1;$

тогда

$\Delta x=0,01.$

Следовательно,

$$\ln(1,01)=\ln(1+0,01)\approx\ln 1+\frac{0,01}{1}=0,01,$$

что является очень хорошим приближением: табличное значение ln 1,01 = 0,0100.

Пример. Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно

$1/\sqrt{1,005}.$

Решение. Число $1/\sqrt{1,005}$ является одним из значений функции

$y = 1/\sqrt{x}$.

Так как производная этой функции

$y` = -1/(2x\sqrt{x})$,

то формула (11) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}} \approx \frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}\Delta x.$$

Полагая

$x_0 = 1$

и

$\Delta x = 0,005$,

получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1,005}} \approx \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{2x \bullet 1\sqrt{1}} \bullet 0,005 =$$

$$= 1 - 0,5 \bullet 0,005 \approx 0,9975 \approx 0,998$$

(табличное значение

$1/\sqrt{1,005} \approx 0,9975$).

3. Абсолютная и относительная погрешности приближенных вычислений

Пример. Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно $\sqrt[3]{2}$. Оценить точность полученного результата.

Решение. Рассмотрим функцию

$y = \sqrt[3]{x}$.

Её производная равна

$$y` = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

а формула (11) примет вид

$$\sqrt[3]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

В данном случае было бы нерационально вычислять приближенно $\sqrt[3]{2}$ следующим образом:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \approx 1,333,$$

так как значение

$\Delta x = 1$

не является малым по сравнению со значением производной в точке

$x_0 = 1$.

Здесь удобно предварительно вынести из под корня некоторое число, например 4/3. Тогда

$$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2 \bullet 27}{64}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{1-\frac{10}{64}}.$$

Теперь, полагая

$x_0 = 1$,

$\Delta x = -10/64$,

получим

$$\sqrt[3]{\frac{54}{64}} \approx 1+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}\left(-\frac{10}{64}\right) \approx 0,94792.$$

Умножая на 4/3, находим

$$\sqrt[3]{2} \approx (4/3) \bullet 0,94792 \approx 1,2639.$$

Принимая табличное значение корня

$\sqrt[3]{2} = 1,2599$ за точное число, оценим по формулам (12) и (13) из лекции абсолютную и относительную погрешности приближенного значения:

$$\Delta = |1,2599 - 1,2639| = 0,004;$$

$$\delta = 0,004 / 1,2599 \approx 0,003 = 0,3\%.$$

3.11.3 Результаты и выводы: Научились находить дифференциал функции.

3.12 Практическое занятие № 12 (2 часа).

Тема: «Функции нескольких переменных»

3.12.1 Задание для работы:

1. Предел функции двух переменных
2. Частные производные первого порядка. Полный дифференциал

3.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Предел функции двух переменных

Пример 1. Найти предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}.$$

Решение. Введем обозначение

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, откуда

$r^2 = x^2 + y^2$. При

$x \to 0,\ y \to 0$ имеем, что

$r \to 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} = \lim_{r\to 0}\frac{r}{\ln(1-r^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{r\to 0}\frac{r'}{(\ln(1-r^2))'} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{\left(1\big/1-r^2\right)\cdot(-2r)} = \infty.$$

Пример 2. Найти точки разрыва функции

$$z = \frac{1}{x^2+y^2-9}.$$

Решение. Данная функция не определена в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль, т. е. в точках, где

$x^2 + y^2 - 9 = 0$ или

$x^2 + y^2 = 9$. Это окружность с центром в начале координат и радиусом

$r = 3$. Значит, линией разрыва исходной функции будет окружность
$x^2 + y^2 = 9$.

3. Частные производные первого порядка. Полный дифференциал

Пример 3. Найти частные производные функций:

а)

$z = x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3$; б)

$z = \dfrac{x}{y} + e^{x-2y}$.

Решение. а) Чтобы найти

z'_x считаем
y постоянной величиной и дифференцируем
z как функцию одной переменной
x:

$$z'_x = (x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3)'_x = (x^3)'_x - (5x^2y)'_x + (3xy^2)'_x - (y^3)'_x =$$
$$= 3x^2 - 5\cdot 2x\cdot y + 3\cdot 1\cdot y^2 - 0 = 3x^2 - 10xy + 3y^2.$$

Аналогично, считая

x постоянной величиной, находим
z'_y:

$$z'_y = (x^3)'_y - (5x^2y)'_y + (3xy^2)'_y - (y^3)'_y = 0 - 5x^2\cdot 1 + 3x\cdot 2y - 3y^2 =$$
$$= -5x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Решение.
б)

$$z'_x = \left(\frac{x}{y}\right)'_x + \left(e^{x-2y}\right)'_x = \frac{1}{y}\cdot x'_x + e^{x-2y}\cdot(x-2y)'_x = \frac{1}{y} + e^{x-2y}$$

$$z'_y = \left(\frac{x}{y}\right)'_y + (e^{x-2y})'_y = x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y + e^{x-2y}\cdot(x-2y)'_y = x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) + e^{x-2y}\cdot(-2) =$$
$$= -\frac{x}{y^2} - 2e^{x-2y}$$

Пример 4. Найти полный дифференциал функции
$z = \ln(x^2 + y^2)$

Решение. Так как
$$z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$
то по формуле полного дифференциала находим

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy$$

3.12.3 Результаты и выводы: Научились находить предел и частные производные функции двух переменных.

3.13 Практическое занятие № 13 (2 часа).

Тема: «Нахождение неопределенного интеграла»

3.13.1 Задание для работы:

1. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
2. Основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод подстановки; метод интегрирования по частям.

3.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти интегралы:

а) $\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx$; б) $\int (5\cos x - 3e^x)dx$; в) $\int \left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx$.

Решение. а) Предварительно преобразуем подынтегральную функцию и затем применим свойства неопределенного интеграла и табличный интеграл 2).

$$\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx = \int (4x^3 - x^{\frac{1}{2}} + 6\cdot x^{-2})dx = 4\int x^3dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + 6\int x^{-2}dx =$$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = x^4 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{6}{x} + C.$$

б) Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные интегралы, будем иметь:

$$\int (5cosx - 3e^x)dx = 5\int \cos x dx - 3\int e^x dx = 5\sin x - 3e^x + C$$

в) Применяем свойства 3 и 4 и табличные интегралы 12), 11) и 5).

$$\int \left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx = 2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} - \arcsin\frac{x}{5} + 3\ln|x| + C =$$

$$= \frac{2}{3}arctg\,\frac{x}{3} - \arcsin\,\frac{x}{5} + 3\ln|x| + C\,.$$

Найти интегралы:

а) $\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx$; б) $\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}dx$; в) $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$; г) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$

.

Решение. а) Раскроем скобки в числителе и полученное произведение почленно разделим на x^3 .

$$\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx = \int \frac{x^3-3x+2x^2-6}{x^3}dx = \int\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int dx - 3\int x^{-2}dx + 2\int\frac{dx}{x} - 6\int x^{-3}dx = x + \frac{3}{x} + 2\ln|x| + \frac{3}{x^2} + C\,.$$

б) Преобразуем подынтегральную функцию и представим заданный интеграл в виде суммы двух других, каждый из которых табличный.

$$\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x\cdot(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x\cdot(1+x^2)}dx + \int \frac{2x}{x\cdot(1+x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \ln|x| + 2arctgx + C.$$

в) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx = \int\left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = e^x + tgx + C$.

г) Чтобы привести данный интеграл к табличным, выразим стоящую в числителе 1 суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$ и разделим почленно на знаменатель.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Интегрирование заменой переменной (метод подстановки).

Применяя соответствующие подстановки $u = \varphi(x)$, найти указанные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{5x+1}$; б) $\int e^{x^2+1}xdx$; в) $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$; г) $\int \frac{2xdx}{x^4-9}$.

Решение. а) Если воспользоваться подстановкой $u = 5x+1$, то интеграл приводиться к табличному интегралу 5).

Пусть $u = 5x+1$, тогда $du = 5dx$ и $dx = \frac{du}{5}$.

Применяя формулу (1), будем иметь:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \int \frac{du}{5u} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|5x+1| + C.$$

б) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 6), положим $u = x^2+1$, тогда $du = 2xdx$ и $xdx = \frac{du}{2}$. Применяя формулу (1), получим:

$$\int e^{x^2=1}xdx = \int e^u\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

в) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 12), положим $u = x^3$, тогда $du = 3x^2dx$ и $x^2dx = \frac{du}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \int \frac{du}{3(1+u^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}arctgu + C = arctgx^3 + C$$

г) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 13), положим $u = x^2$, тогда $du = 2xdx$. Применяя (1), получим.

$$\int \frac{2xdx}{x^4-9} = \int \frac{du}{u^2-9} = \int \frac{du}{u^2-3^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C.$$

Найти интегралы:

а) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{6x}-7}}$; в) $\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x}$; г) $\int \frac{\cos x\cdot dx}{25+\sin^2 x}$.

Решение. а) Положим $t = \arcsin x$, тогда $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно,

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^2 x\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\arcsin^3 x + C.$$

В тех случаях, когда становится ясным, какая подстановка приводит данный интеграл к табличному, можно не вводить явным образом новую переменную. Например, при решении примера а) видно, что $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ является дифференциалом функции $\arcsin x$.

Поэтому решение можно записать так:

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^2 x \cdot d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

б) Положим $u = e^{3x}$, тогда $du = 3e^{3x}dx$ и $e^{3x}dx = \frac{du}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{6x}-7}} = \int \frac{du}{3\sqrt{u^2-7}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-7}} = \frac{1}{3}\ln(u+\sqrt{u^2-7}) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x}-7}) + C.$$

в) Положим $u = 3 + \sin^2 x$, тогда $du = 2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx$. Следовательно,

$$\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|3+\sin^2 x| + C.$$

При решении данного примера можно было бы явным образом не вводить новой переменной и интегрировать следующим образом:

$$\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{d(3+\sin^2 x)}{3+\sin^2 x} = \ln|3+\sin^2 x| + C.$$

г) Так как $\cos x \cdot dx$ есть дифференциал функции $\sin x$, то данный интеграл приводится к табличному интегралу 12).

$$\int \frac{\cos x \cdot dx}{25+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{5^2+\sin^2 x} = \frac{1}{5} arctg \frac{\sin x}{5} + C$$

Интегрирование по частям.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, найти интегралы:

а) $\int x \cdot e^x dx$; б) $\int x\cos xdx$.

Решение. а) Положим $u = x$ и $dv = e^x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$.

Применяя (2), получим:

$$\int x \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

б) Положим $u = x$ и $dv = \cos xdx$, тогда $du = dx$, $v = \int \cos xdx = \sin x$.

Следовательно,

$$\int x\cos xdx = x \cdot \sin x - \int \sin xdx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Пользуясь формулой (2), весьма важно правильно выбрать множители u и dv. Для разложения подынтегрального выражения на множители нет общих правил. Вместе с тем можно руководствоваться некоторыми частными указаниями.

Указание 1. Если подынтегральное выражение содержит произведение показательной или тригонометрической функции на многочлен, то за множитель u следует принять многочлен.

Указание 2. Если подынтегральное выражение содержит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на многочлен, то за множитель u следует принять логарифмическую функцию или обратную тригонометрическую функцию.

3.13.3 Результаты и выводы: Научились находить неопределенные интегралы разными методами.

3.14 Практическое занятие № 14 (2 часа).

Тема: «Вычисление определенного интеграла»

3.14.1 Задание для работы:

1. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница
2. Геометрический смысл определенного интеграла.

3.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вычислить интегралы:

а) $\int_2^3 3x^2 dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$; г) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Для вычисления определенного интеграла применяем формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

а) $\int_2^3 3x^2 dx = x^3\Big|_2^3 = 27 - 8 = 19$.

б) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} arctg\,\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(arctg\,1 - arctg\,0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$.

в) Сделаем замену переменной. Пусть $\sqrt[4]{3x+1} = z$, тогда $3x+1 = z^4$ и $3dx = 4z^3dz$.

Определим пределы интегрирования для новой переменной z.

При $x = 0$ переменная $z_H = 1$ (нижний предел).

При $x = 5$ переменная $z_B = 2$ (верхний предел).

Следовательно,

$$\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \int_1^2 \frac{4z^3dz}{z} = \int_1^2 4z^2dz = 4\frac{z^3}{3}\Big|_1^2 = 4\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

г) Сделаем подстановку. Пусть $x = 2\sin t$; тогда $dx = 2\cos t dt$. Если $x = 0$, то $0 = 2\sin t$, откуда $t_1 = 0$ (нижний предел). Если $x = 2$, то $2 = 2\sin t$, откуда $t_2 = \frac{\pi}{2}$ (верхний предел).

Следовательно, $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = (2t + \sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

3.14.3 Результаты и выводы: научились вычислять определенные интегралы.

3.15 Практическое занятие № 15 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения первого и второго порядков»

3.15.1 Задание для работы:

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение с разделенными переменными. Уравнение с разделяющимися переменными.
2. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами
3. Решение задачи Коши.

3.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти частное решение уравнения $y' = (y+1)ctgx$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Умножив обе части уравнения на dx и разделив на множитель $(y+1)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y+1} = ctgxdx \text{ или } \frac{dy}{y+1} = \frac{\cos xdx}{\sin x}.$$

Интегрируя, имеем: $\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{\cos xdx}{\sin x}$.

$$\ln|y+1| = \ln\sin x + \ln C$$

$$y+1 = C\sin x$$

$y = C\sin x - 1$ - общее решение заданного уравнения. Используя начальные условия, находим значение произвольной постоянной C.

$$2 = C\sin\frac{\pi}{2} - 1$$

$$2 = C - 1$$

$$C = 3$$

Следовательно, $y = 3\sin x - 1$ есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

3.15.3 Результаты и выводы: научились применять дифференциальные уравнения в практических задачах.

3.16 Практическое занятие № 16 (2 часа).

Тема: «Применение дифференциальных уравнений в прикладных задачах»

3.16.1 Задание для работы:

1. Применение дифференциальных уравнений в биологических задачах.

3.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени. Известно, что количество бактерий за один час утроилось. Как измениться количество бактерий через 5 часов, если первоначальное количество равно *а*?

Решение. Пусть x – количество бактерий в момент времени t. Переменная величина x является функцией переменной величины t. Скорость изменения величины x выражается производной $\frac{dx}{dt}$. По условию задачи дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x,$$

где κ – некоторый коэффициент пропорциональности.

Разделим переменные и решим составленное уравнение.

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt$$

$$\ln x = kt + \ln C$$

$$\ln\frac{x}{C} = kt$$

откуда $\frac{x}{C} = e^{kt}$ или $x = C \cdot e^{kt}$ - общее решение уравнения.

Значения произвольной постоянной C определяем из начальных условий: при $t = 0, x = a$.

Следовательно, $a = C \cdot e^{\kappa \cdot 0}; C = a$.

Таким образом, $x = ae^{\kappa t}$ или $x = a(e^k)^t$ - есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Чтобы определить коэффициент пропорциональности κ, воспользуемся теми дополнительными условиями, которые указаны в задаче: при $t = 1$ (за один час) количество бактерий утроилось, то есть $x=3a$.

Следовательно, $3a = a(e^k)^1$ откуда $e^k = 3$ и мы получаем зависимость между переменными: $x = a \cdot 3^t$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, находим количество x при $t = 5$, $x = a \cdot 3^5$, $x = 243a$.

Как видно, через 5 часов количество бактерий увеличится в 243 раза.

Найти значение биомассы в момент Т = 12, если в начальный момент ($t = 0$) значение биомассы $m_0 = 10$ и $k(t) = \dfrac{1}{1 + 2t}$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение, описывающее динамику развития популяции. Состояние популяции (в простейшем понимании – стада) можно охарактеризовать массой m этой популяции (т.е. весом всего стада), причем масса m является функцией времени $m = m(t)$. Считаем, что скорость прироста биомассы пропорциональна биомассе популяции с коэффициентом $k = k(t)$.

Скорость изменения биомассы характеризуется производной $m'(t)$ (при $m' > 0$ - это скорость развития, при $m' < 0$ - скорость вымирания). По условию задачи $m' = km$ или

$$m' = \frac{1}{1 + 2t} m \qquad (1)$$

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные m и t:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{1 + 2t} m$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{dt}{1 + 2t}$$

Отсюда после почленного интегрирования получаем:

$\int \dfrac{dm}{m} = \int \dfrac{dt}{1 + 2t}$, т.е. $\ln m = \dfrac{1}{2} \ln(1 + 2t) + \ln C$

В данном случае произвольную постоянную удобно взять в виде $\ln C$. Из последнего равенства следует формула для общего решения дифференциального уравнения

$$m = C(1 + 2t)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

Для определения значения произвольной постоянной C полагаем в равенстве (2) $t = 0, m = m_0 = 10$. В результате получаем

$$10 = C(1 + 2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}}, C = 10$$

Таким образом, из общего решения дифференциального уравнения приходим к выражению

$$m(t) = 10\sqrt{1 + 2t} \qquad (3)$$

Положим теперь в равенстве (3) $t = T = 12$. Тогда

$$m(12) = 10\sqrt{1 + 2 \cdot 12} = 50.$$

Следовательно, в момент времени T = 12(ед.) значение биомассы будет составлять 50 (ед.).

3.16.3 Результаты и выводы: научились применять дифференциальные уравнение в биологических задачах.

3.17 Практическое занятие № 17 (2 часа).

Тема: «Нахождение вероятности события по определению»

3.17.1 Задание для работы:

1. Классическое определение вероятности события.
2. Свойства событий.

3.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Брошена игральная кость. Найти вероятность события, состоящего в том, что выпало четное число очков.

Решение. Обозначим событие A = {выпало четное число очков}. Имеется 6 элементарных событий, т.е. $n = 6$. Элементарными событиями, благоприятными для A, являются события: A_1 = {выпадение 2 очков}, A_2 = {выпадение 4 очков}, A_3 = {выпадение 6 очков}. Всего таких событий три, следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Итак, вероятность того, что выпадет четное число очков, равна $0,5$.

Пример. В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешивают и наудачу извлекают 1 шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение. Всевозможными элементарными исходами являются события:

A = {извлечение белого шара},

B = {извлечение красного шара},

C = {извлечение зеленого шара},

D = {извлечение голубого шара}.

Необходимо найти событие, состоящее в появлении события B или C, или D, т.е. события $B + C + D$. Так как события B, C, D – несовместны, то

$$P(B + C + D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Таким образом, вероятность извлечения цветного шара равна $0,8$.

3.17.3 Результаты и выводы: Научились вычислять вероятность событий по определению.

3.18 Практическое занятие № 18 (2 часа).

Тема: «Нахождение вероятности события с помощью теорем сложения и умножения вероятностей»

3.18.1 Задание для работы:

1 Теорема о сумме вероятностей.

3. Теорема произведении вероятностей.

3.18.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. В ящике 60 груш сорта A и 40 груш сорта B. Отбирают две груши. Определить вероятности следующих событий:

а) обе груши сорта A;

б) обе груши сорта B;

в) одна груша сорта A, а другая груша сорта B.

Решение. Обозначим:

A_1 = {при первом извлечении взята груша сорта A},

A_2 = {при втором извлечении взята груша сорта A},

B_1 = {при первом извлечении взята груша сорта B},

B_2 = {при втором извлечении взята груша сорта B}.

Таким образом, нужно найти:

а) $P(A_1 \ и\ A_2)$;

б) $P(B_1 \ и\ B_2)$;

в) $P((A_1 \ и\ B_2) \ \ или \ \ (B_1 \ и\ A_2))$.

Находим:

а) $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{59}{99} = 0{,}36$; т.е. вероятность того, что обе груши сорта A, равна $0{,}36$.

б) $P(B_1 B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \dfrac{40}{100} \cdot \dfrac{39}{99} = 0{,}16$.

Следовательно, вероятность того, что обе груши сорта B, равна $0{,}16$.

в) $P(A_1 B_2 + B_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(B_2/A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2/B_1) = \dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{40}{99} + \dfrac{40}{100} \cdot \dfrac{60}{99} = 0{,}48$.

Таким образом, вероятность того, что одна груша сорта A, а другая груша сорта B, равна $0{,}48$.

Пример. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент даст правильный ответ на первый вопрос, равна 0,9, вероятность правильного ответа на второй вопрос равна 0,8 и, наконец, вероятность правильного ответа на третий вопрос равна 0,7. Найти вероятность того, что студент на все три вопроса ответит правильно.

Решение. Обозначим: A = {правильный ответ на первый вопрос}, B = {правильный ответ на второй вопрос}, C = {правильный ответ на третий вопрос}.

События A, B и C являются независимыми. Применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, получим:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Итак, вероятность того, что студент на все три вопроса ответит правильно, равна $0{,}504$.

3.18.3 Результаты и выводы: Научились вычислять вероятность событий по теоремам.

3.19 Практическое занятие № 19 (2 часа).

Тема: «Повторные независимые испытания. Теорема Бернулли, формула Пуассона, локальная теорема Муавра-Лапласа»

3.19.1 Задание для работы:

1. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
3. Формула Пуассона.

3.19.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. На опытной делянке посеяно 15 семян. Всхожесть всех семян одинакова и равна $80\ \%$. Найти вероятность того, что из 15 посеянных семян взойдет ровно 12.

Решение. Обозначим событие A = {из 15 посеянных семян взойдет 12}. Число посеянных семян равно числу независимых испытаний, т. е. $n = 15$. Событие A осуществится 12 раз, поэтому $k = 12$. По условию $p = 80\% = 0{,}8$, тогда $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. По формуле Бернулли имеем:

$$P_{15}(12) = \frac{15\,!}{12\,!\,(15-12)!} \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^{15-12} =$$

$$= \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^{3} = 455 \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}008 \approx 0{,}2551.$$

Итак, вероятность того, что из 15 посеянных семян взойдет ровно 12, равна $0{,}26$.

Пример. Завод сортовых семян выпускает гибридные семена кукурузы. Известно, что семена первого сорта составляют $90\ \%$. Определить вероятность того, что из взятых наудачу для проверки 400 семян 354 будут семенами первого сорта.

Решение. Имеем $n = 400$, $p = \frac{90}{100} = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $k = 354$. Тогда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{354 - 400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \frac{354 - 360}{6} = -1.$$

Так как функция $\varphi\,(x)$ – четная, то найдем по таблице значение функции $\varphi(x)$ при $x = 1$:

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0{,}2420\ .$$

Найдем искомую вероятность:

$$P_{400}(354) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \cdot \varphi(1) \approx \frac{1}{\sqrt{36}} \cdot 0{,}2420 \approx 0{,}0403\,.$$

Итак, вероятность того, что из взятых наудачу для проверки 400 семян 354 будут семенами первого сорта $\approx 4\%$.

Пример. Известно, что вероятность летального исхода при определенной болезни равна $0{,}01$. Какова вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное?

Решение. Имеем $n = 90$, $p = 0{,}01$. Найдем $\lambda = n \cdot p = 90 \cdot 0.01 = 0{,}9$, $k = 1$. Используя формулу, получим

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0{,}9^1}{1!} \cdot e^{-0{,}9}.$$

Найдем по таблице значение функции $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ при $\lambda = 0{,}9$ и $k = 1$, тогда

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0{,}9^1}{1!} \cdot e^{-0{,}9} \approx 0{,}3659\ .$$

Таким образом, вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное, составляет $37\ \%$.

3.19.3 Результаты и выводы: Научились применять повторные независимые испытания в сельском хозяйстве.

3.20 Практическое занятие № 20 (2 часа).

Тема: «Повторные независимые испытания. Интегральная теорема Муавра-Лапласа»

3.20.1 Задание для работы:

1. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

3.20.2 Краткое описание проводимого занятия:

Известно, что вероятность летального исхода при определенной болезни равна $0{,}01$.

Какова вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное?

Решение. Имеем $n = 90$, $p = 0{,}01$. Найдем $\lambda = n \cdot p = 90 \cdot 0.01 = 0{,}9$, $k = 1$. Используя формулу, получим

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0{,}9^1}{1!} \cdot e^{-0{,}9}.$$

Найдем по таблице значение функции $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ при $\lambda = 0{,}9$ и $k = 1$, тогда

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0{,}9^1}{1!} \cdot e^{-0{,}9} \approx 0{,}3659.$$

Таким образом, вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное, составляет $37\ \%$.

В лаборатории из партии семян, имеющих всхожесть $90\ \%$, высеяно 600 семян. Найти вероятность того, что число семян, давших всходы, не менее 520 и не более 570, если принять, что каждое посеянное зерно взойдет с одной и той же вероятностью.

Решение. Имеем $n = 600$, $p = \frac{90}{100} = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $k_1 = 520$, $k_2 = 570$. Тогда по формуле имеем

$$P(520, 570) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Найдем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{520 - 600 \cdot 0{,}9}{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = -\frac{20}{7{,}35} \approx -2{,}72,$$

$$x_2 = \frac{570 - 600 \cdot 0{,}9}{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \frac{30}{7{,}35} \approx 4{,}08.$$

Найдем по таблице значения функции $\Phi(x)$ при $x_1 = 2{,}72$ и $x_2 = 4{,}08$.

Таким образом, вероятность того, что число семян, давших всходы не менее 520 и не более 570, приближенно равна

$$P(520, 570) \approx \Phi(4{,}08) - \Phi(-2{,}72) \approx \Phi(4{,}08) + \Phi(2{,}72) = 0{,}49996 + 0{,}4967 \approx 0{,}99,$$

т.е. событие практически достоверное.

3.20.3 Результаты и выводы: Научились применять повторные независимые испытания в сельском хозяйстве.

3.21 Практическое занятие № 21 (2 часа).

Тема: «Наиболее вероятное число появления события в испытании»

3.21.1 Задание для работы:

1. Найти наиболее вероятное число появления события в испытании.

3.21.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Садовод сделал осенью 6 прививок. По опыту прошлых лет известно, что после зимовки 7 из каждых 10 черенков оставались жизнеспособными. Какое число прижившихся черенков наиболее вероятно?

Решение. Имеем $n = 6$, $p = \frac{7}{10} = 0{,}7$, $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Вычислим: $np - q = 6 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 = 4{,}2 - 0{,}3 = 3{,}9$, $np + p = 6 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 = 4{,}2 + 0{,}7 = 4{,}9$.

По формуле (16) получаем

$$3{,}9 \le k_0 \le 4{,}9.$$

Так как k_0 – целое число, то $k_0 = 4$.

Таким образом, наибольшая вероятность соответствует событию, состоящему в том, что приживутся 4 черенка.

3.21.3 Результаты и выводы: Научились находить наиболее вероятное число появлений события в испытании.

3.22 Практическое занятие № 22 (2 часа).

Тема: «Дискретные случайные величины. Закон распределения, многоугольник распределения»

3.22.1 Задание для работы:

1. Закон распределения ДСВ.
2. Многоугольник распределения ДСВ.

3.22.2 Краткое описание проводимого занятия:

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Пример. Производится обработка стада животных дезинфици-рующим составом против заболевания A. Вероятность события, состоящего в том, что заболевание ликвидировано, равна $0,9$. Из стада после обработки отбирается 4 животных. Составить закон распределения случайной величины X – числа здоровых животных среди отобранных.

Решение. Возможные значения случайной величины X таковы: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Вероятности этих значений найдем, используя формулу Бернулли (14):

$$p_1 = P_4(0) = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{4\,!}{0!\cdot(4-0)!} 0,9^0 (1-0,9)^{4-0} = \frac{4!}{1\cdot 4\,!} \cdot 1 \cdot 0,1^4 = 0,0001 .$$

$$p_2 = P_4(1) = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{4\,!}{1!\cdot(4-1)!} 0,9^1 (1-0,9)^{4-1} = \frac{3!\cdot 4}{1\cdot 3\,!} \cdot 0,9 \cdot 0,1^3 = 0,0036 .$$

$$p_3 = P_4(2) = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{4\,!}{2!\cdot(4-2)!} 0,9^2 (1-0,9)^{4-2} = 0,0486 .$$

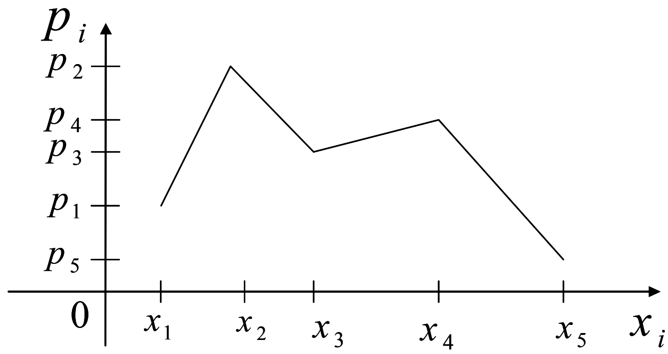
$$p_4 = P_4(3) = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{4\,!}{3!\cdot(4-3)!} 0,9^3 (1-0,9)^{4-3} = 0,2916 .$$

$$p_5 = P_4(4) = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{4\,!}{4!\cdot(4-4)!} 0,9^4 (1-0,9)^{4-4} = 0,6561 .$$

Так как все события в этом испытании образуют полную группу, то $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Действительно, $0,0001 + 0,0036 + 0,0486 + 0,2916 + 0,6561 = 1$. Составим закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Многоугольником распределения дискретной случайной величины называют фигуру, полученную из точек (x_i, p_i) и отрезков, их соединяющих.



3.23 Практическое занятие № 23 (2 часа).

Тема: «Числовые характеристики дискретной случайной величины»

3.23.1 Задание для работы:

1. Числовые характеристики ДСВ.
2. Свойства числовых характеристик ДСВ.

3.23.2 Краткое описание проводимого занятия:

Случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4.$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04.$$

Искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}6.$$

3.23.3 Результаты и выводы: Научились вычислять числовые характеристики дискретной случайной величины.

3.24 Практическое занятие № 24 (2 часа).

Тема: «Функция распределения»

3.24.1 Задание для работы:

1. Нахождение функции распределения.

3.24.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{если} \ \ x\le 0,\\ \sin x, \ \textit{если} \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, \ \textit{если} \ \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x)=F^{/}(x)=\begin{cases}0, \ \textit{если} \ \ x<0,\\ \cos x, \ \textit{если} \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, \ \textit{если} \ \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Заметим, что при $x=0$ производная $F^{/}(x)$ не существует.

3.24.3 Результаты и выводы: Научились находить функцию распределения.

3.25 Практическое занятие № 25 (2 часа).

Тема: «Плотность вероятности»

3.25.1 Задание для работы:

1. Плотность вероятности.

3.25.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{если} \ \ x\le 0,\\ \sin x, \ \textit{если} \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, \ \textit{если} \ \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x)=F^{/}(x)=\begin{cases}0, \ \textit{если} \ \ x<0,\\ \cos x, \ \textit{если} \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, \ \textit{если} \ \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Заметим, что при $x=0$ производная $F^{/}(x)$ не существует.

Пример. Задана плотность распределения вероятностей случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ \textit{если} \ x\le 0,\\ 2x, \ \textit{если} \ 0<x\le 1,\\ 0, \ \textit{если} \ x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0{,}5\,;1)$.

Решение. По формуле искомая вероятность

$$P(0{,}5 < X < 1) = \int_{0,5}^{1} 2x\,dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{0,5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

3.25.3 Результаты и выводы: Научились находить плотность вероятности.

3.26 Практическое занятие № 26 (2 часа).

Тема: «Числовые характеристики непрерывной случайной величины»

3.26.1 Задание для работы:

1. Числовые характеристики НСВ.

3.26.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx = \int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Найдем дисперсию по формуле:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

По формуле найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0{,}29.$$

3.26.3 Результаты и выводы: Научились вычислять числовые характеристики непрерывных случайных величин.

3.27.3 Практическое занятие № 27 (2 часа).

Тема: «Законы распределения случайных величин: равномерное распределение»

3.27.1 Задание для работы:

1. Равномерное распределение.

3.27.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Чтобы выполнить определенное задание, лабораторной крысе требуется, по меньшей мере, 2 мин, но никогда не требуется более 10 мин. Найти: а) функцию распределения вероятностей; б) вероятность того, что крыса выполнит задание менее чем за 4 мин; в) среднее время выполнения задания.

Решение. а) Рассмотрим случайную величину $T -$ время, необходимое для выполнения задания. Так как любое время между 2 и 10 мин одинаково вероятно, то T является равномерно распределенной случайной величиной. По условию $a = 2$, $b = 10$. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 2, \\ \dfrac{x-2}{8}, & при\ 2 \le x \le 10, \\ 1, & при\ x > 10. \end{cases}$$

б) Вероятность того, что крыса выполнит задание менее чем за 4 мин, составляет:

$$F(6) = \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

в) Среднее время выполнения задания характеризует математическое ожидание случайной величины. Тогда

$$M(X) = \frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Таким образом, среднее время выполнения задания составляет 6 мин.

3.27.3 Результаты и выводы: Научились использовать законы распределения случайных величин в биологических задачах.

3.28 Практическое занятие № 28 (2 часа).

Тема: «Законы распределения случайных величин: показательное распределение»

3.28.1 Задание для работы:

1. Показательное распределение.

3.28.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

Решение. Искомую плотность распределения, используя формулу, получим в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 8 \cdot e^{-8x}, & при \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Функцию распределения, используя формулу, получим в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-8x}, & при \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 2 \cdot e^{-2x}, & при \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0,3;1)$.

Решение. По условию, имеем $\lambda = 2$. Воспользуемся формулой:

$$P(0,3 < X < 1) = e^{-2\cdot 0,3} - e^{-2\cdot 1} = e^{-0,6} - e^{-2} = 0,54881 - 0,13534 \approx 0,41$$

Итак, вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0,3;1)$, равна $0,41$.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 5 \cdot e^{-5x}, & при \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. По условию $\lambda = 5$. Следовательно, используя формулы, находим:

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{5^2} = 0{,}04.$$

Пример. (Распределение жизненных циклов растений). Продолжительность жизни растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величину с функцией плотности вероятностей $f(x) = \frac{1}{120} e^{-\frac{x}{120}}$. Требуется: 1) найти среднюю продолжительность жизни растений; 2) долю растений данного вида, которые умирают за период в 100 дней.

Решение. 1) В выражении для $f(x)$ нетрудно узнать функцию плотности экспоненциального распределения с математическим ожиданием $a = 120$. Следовательно, средняя продолжительность жизни растений этого вида составляет 120 дней.

2) Доля растений, которые умирают за период в 100 дней, выражается вероятностью $P(0 < X < 100)$. Используя формулу, $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, получаем:

$$P(0 < X < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{120} e^{-\frac{x}{120}} dx.$$

Этот интеграл можно вычислить методом замены переменной. Пусть $u = -\frac{x}{120}$, тогда $du = -\frac{1}{120} dx$.

Вычислим новые пределы интегрирования:

x	0	100
u	0	$-\frac{100}{120} = -\frac{5}{6}$

После подстановки получаем:

$$P(0 < X < 100) = -\int_0^{-5/6} e^u du = -e^u \Big|_0^{-5/6} = -e^{-\frac{5}{6}} - (-e^0) = 1 - e^{-\frac{5}{6}} \approx 0{,}57.$$

Следовательно, доля растений, которые умирают за период в 100 дней, примерно равна 57 %.

3.28.3 Результаты и выводы: Научились использовать законы распределения случайных величин в биологических задачах.

3.29 Практическое занятие № 29 (2 часа).

Тема: «Законы распределения случайных величин: нормальное распределение»

3.29.1 Задание для работы:

1. Нормальное распределение.
2. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

3.29.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Известно, что случайная величина X подчинена нормальному закону распределения, $M(X) = 6$, $\sigma^2 = 9$. Найти функцию плотности вероятности.

Решение. Имеем $a = 6$, $\sigma = 3$. Тогда, используя формулу, искомая функция имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{2\cdot 3^2}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}.$$

Пример. Известно, что случайная величина X подчиняется нормальному закону с функцией плотности вероятности

$$f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-15)^2}{200}}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

Решение. Имеем: $M(X)=a=15$, $D(X)=\sigma^2=10^2=100$.

Пример. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(10, 50)$.

Решение. Воспользуемся формулой. По условию $\alpha=10$, $\beta=50$, $a=30$, $\sigma=10$, следовательно,

$$P(10<X<50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2)=0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность:

$$P(10<X<50)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$$

Пример. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение величины X от математического ожидания по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. Воспользуемся формулой. По условию, $a=20$, $\sigma=10$, $\delta=3$. Следовательно,

$$P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right)=2\Phi(0{,}3).$$

По таблице находим $\Phi(0{,}3)=0{,}1179$. Искомая вероятность:

$$P(|X-20|<3)=2\cdot 0{,}1179=0{,}2358.$$

3.29.3 Результаты и выводы: Научились решать задачи по данной теме.

3.30 Практическое занятие № 30 (2 часа).

Тема: «Элементы математической статистики. Методы сбора и обработки данных»

3.30.1 Задание для работы:

1. Методы сбора и обработки данных.

3.30.2 Краткое описание проводимого занятия:

Статистические данные представляют собой данные, полученные в результате обследования большого числа объектов или явлений.

Экспериментальные данные - это результаты измерения некоторых признаков объектов, выбранных из большой совокупности объектов.

Часть объектов исследования, определенным образом выбранная из более обширной совокупности, называется выборкой, а вся исходная совокупность, из которой взята выборка,- генеральной (основной) совокупностью.

Исследования, в которых участвуют все без исключения объекты, составляющие генеральную совокупность, называются сплошными исследованиями.

Может использоваться выборочный метод, суть которого в том, что для обследования привлекается часть генеральной совокупности (выборка), но по результатам этого обследования судят о свойствах всей генеральной совокупности.

Предметом изучения в статистике являются варьирующиеся признаки (называемые статистическими). Они делятся на качественные и количественные.

Качественными признаками объект обладает либо не обладает. Они не поддаются непосредственному измерению (спортивная специализация, квалификация, национальность, территориальная принадлежность и т. п.). Количественные признаки представляют собой результаты подсчета или измерения.

В соответствии с этим они делятся на дискретные и непрерывные.

Например, измеряемая температура воздуха в некотором пункте – непрерывная случайная величина (может меняться на сколь угодно малую величину), и соответствующая генеральная совокупность представляет собой бесконечное множество значений.

Повторной называют выборку, при которой объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Если выборка правильно отражает соотношения в генеральной совокупности, то ее называют репрезентативной (представительной). Например, результаты социологического опроса населения будут зависеть от того, в каком месте он проводится, среди каких групп.

3.30.3 Результаты и выводы: Изучили методы сбора и обработки данных.

3.31 Практическое занятие № 31 (2 часа).

Тема: «Графическое представление данных»

3.31.1 Задание для работы:

1. Построение полигона и гистограммы.

3.31.2 Краткое описание проводимого занятия:

Из крупного стада коров произведена случайная выборка, получено 20 вариант удоя коров за 300 дней лактации (в ц): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3. Получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот.

Решение. Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания: 25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Максимальное значение признака составляет $46{,}2$ ц, а минимальное – $25{,}9$ ц. Разница между ними составляет $20{,}3$ ц. Этот интервал надо разбить на определенное количество классов. При малом объеме выборки ($20-40$ вариант) намечают $5-6$ классов. Возьмем длину классового интервала $h=5$. Получаем пять интервалов: первый $25-30$, второй $30-35$, третий $35-40$, четвертый $40-45$, пятый $45-50$ (начало первого класса не обязательно должно совпадать со значением минимальной варианты).

С помощью ранжированного ряда определим частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадет два значения ($25{,}9$ и $27{,}0$), поэтому $n_1 = 2$. Во второй интервал попадают пять значений, поэтому $n_2 = 5$. Аналогично $n_3 = 9$, $n_4 = 3$, $n_5 = 1$. Теперь найдем относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}1 \quad \text{(в первый интервал);}$$

$$W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{5}{20} = 0{,}25 \quad \text{(во второй интервал);}$$

$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{9}{20} = 0{,}45 \quad \text{(в третий интервал);}$$

$$W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} = 0,15 \quad \text{(в четвертый интервал);}$$

$$W_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{1}{20} = 0,05 \quad \text{(в пятый интервал).}$$

Для проверки вычисляем сумму относительных частот:

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0,1 + 0,25 + 0,45 + 0,15 + 0,05 = 1.$$

Тот факт, что в сумме получили единицу, подтверждает правильность вычислений.

По формуле $P_i' = \frac{W_i}{h}$ вычислим плотности P_i' относительных частот вариант. Получаем:

$$P_1' = \frac{W_1}{h} = \frac{0,1}{5} = 0,02 \quad \text{(для первого интервала);}$$

$$P_2' = \frac{W_2}{h} = \frac{0,25}{5} = 0,05 \quad \text{(для второго интервала);}$$

$$P_3' = \frac{W_3}{h} = \frac{0,45}{5} = 0,09 \quad \text{(для третьего интервала);}$$

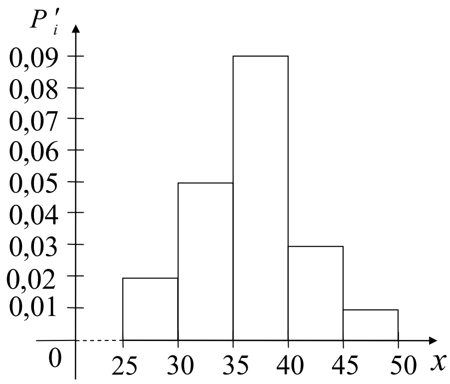
$$P_4' = \frac{W_4}{h} = \frac{0,15}{5} = 0,03 \quad \text{(для четвертого интервала);}$$

$$P_5' = \frac{W_5}{h} = \frac{0,05}{5} = 0,01 \quad \text{(для пятого интервала).}$$

Полученные результаты сведем в таблицу:

Интервал значений удоя (ц)	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50
Частоты вариант n_i	2	5	9	3	1
Относительные частоты W_i	0,1	0,25	0,45	0,15	0,05
Плотность относительных частот P_i'	0,02	0,05	0,09	0,03	0,01

Для построения гистограммы относительных частот частичные интервалы изображают на оси абсцисс, а значения плотностей относительных частот откладывают на оси ординат.



3.31.3 Результаты и выводы: Научились наглядно представлять данные статистического распределения.

3.32 Практическое занятие № 32 (2 часа).

Тема: «Выборочные числовые характеристики»

3.32.1 Задание для работы:

1. Вычисление основных выборочных характеристик.

3.32.2 Краткое описание проводимого занятия:

Из крупного стада коров произведена случайная выборка, получено 20 вариант удоя коров за 300 дней лактации (в ц): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3. Вычислить основные выборочные характеристики.

Решение. Расчеты удобно проводить с помощью таблицы:

№ опыта	Результат обследования x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	35,9	– 0,1	0,01
2	35,3	– 0,7	0,49
3	42,7	6,7	44,89
4	45,2	9,2	84,64
5	25,9	– 10,1	102,01
6	35,3	– 0,7	0,40
7	33,4	– 2,6	6,76
8	27,0	– 9,0	81,00
9	35,9	– 0,1	0,01
10	38,8	2,8	7,84
11	33,7	– 2,3	5,29
12	38,6	2,6	6,76
13	40,9	4,9	24,01
14	35,5	– 0,5	0,25
15	44,1	8,1	65,61
16	37,4	1,4	1,96
17	34,2	– 1,8	3,24
18	30,8	– 5,2	27,04
19	38,4	2,4	5,76
20	31,3	– 4,7	22,09
$\sum$	720,3	0	490,15

Просуммировав варианты x_i, занесем сумму $\sum x_i$ в нижнюю строку таблицы под соответствующим столбцом. Разделив эту сумму на 20, получим:

$$\bar{x} = 36{,}015 \approx 36{,}0.$$

Теперь заполняем следующий столбец таблицы, в который записываем разность $x_i - \bar{x}$. Для контроля можно вычислить сумму всех таких разностей. Если разности вычислены правильно, то их сумма равна нулю.

Затем возводим эти разности в квадрат и заполняем последний столбец таблицы. Вычислив сумму $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 490{,}15$ и разделив ее на $n - 1 = 20 - 1 = 19$. Получим значение дисперсии

$$s^2 = \frac{490{,}15}{19} \approx 25{,}8 .$$

Извлекая квадратный корень из величины s^2, находим:

$$s \approx 5{,}08 ,$$

затем ошибку средней:

$$s_{\bar{x}} = \frac{5{,}08}{\sqrt{20}} \approx \frac{5{,}08}{4{,}47} \approx 1{,}34.$$

Вычисляем коэффициент вариации:

$$V = \frac{5{,}08}{36} \cdot 100\,\% \approx 14\,\%.$$

Поскольку $10\% < V < 20\%$, то изменчивость удоев за 300 дней следует считать средней.

Таким образом, $\bar{x} \approx 36$, $s^2 \approx 25{,}8$, $s \approx 5{,}08$, $s_{\bar{x}} \approx 1{,}34$, $V \approx 14\%$.

3.32.3 Результаты и выводы: Научились вычислять выборочные характеристики.

3.33 Практическое занятие № 33 (2 часа).

Тема: «Корреляционный анализ»

3.33.1 Задание для работы:

1. Построение корреляционной таблицы.
2. Вычисление коэффициента корреляции.

3.33.2 Краткое описание проводимого занятия:

Для 10 петушков леггорнов 15-дневного возраста были получены следующие данные о массе их тела X (г) и массе гребня Y (мг):

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;

Решение. Сначала сделаем промежуточные вычисления, которые удобно располагать в виде таблицы:

№	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	83	56	0	0	– 4	16	0
2	72	42	–11	121	– 18	324	198
3	69	18	–14	196	– 42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	– 4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	– 8	64	– 29	841	232
10	70	48	– 13	169	–12	144	156
$\sum$	830	600	0	1000	0	6854	2302

Вычисляем средние:

$$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83; \quad \bar{y} = \frac{600}{10} = 60.$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000,$$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 6854,$$

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2302.$$

Подставляя вычисленные значения в формулу (83), получаем:

$$r = \frac{2302}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{6854}} \approx 0{,}88.$$

Вывод: между массой тела X и массой гребня Y у 15-дневных петушков существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

3.33.3 Результаты и выводы: научились применять теорию корреляции в задачах сельского хозяйства.

3.34 Практическое занятие № 34 (2 часа).

Тема: «Построение линии регрессии»

3.34.1 Задание для работы:

1. Составить уравнение прямой регрессии Y на X.
2. Построить линию регрессии.

3.34.2 Краткое описание проводимого занятия:

Для 10 петушков леггорнов 15-дневного возраста были получены следующие данные о массе их тела X (г) и массе гребня Y (мг):

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

составить уравнение прямой регрессии Y на X.

Решение. 1) Сначала сделаем промежуточные вычисления, которые удобно располагать в виде таблицы:

№	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	83	56	0	0	– 4	16	0
2	72	42	–11	121	– 18	324	198
3	69	18	–14	196	– 42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	– 4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	– 8	64	– 29	841	232
10	70	48	– 13	169	–12	144	156
$\sum$	830	600	0	1000	0	6854	2302

Вычисляем средние:

$$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83\,; \quad \bar{y} = \frac{600}{10} = 60\,.$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим:

$$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 1000,$$
$$\sum (y_i - \overline{y})^2 = 6854,$$
$$\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 2302.$$

Используя данные из таблицы, по формуле находим коэффициент регрессии $b_{Y/X}$:

$$b_{Y/X} = \frac{2302}{1000} \approx 2,3 \cdot$$

Подставляя теперь в формулу найденные значения $\overline{x} = 83, \overline{y} = 60, b_{Y/X} = 2,3$, имеем:

$$y - 60 = 2,3(x - 83).$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$y = 2,3x - 130,9.$$

Отметим, что полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении x от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что при массе петушка 80 г масса его гребня составит:

$$y = 2,32 \cdot 80 - 132,56 \approx 53 \text{ мг.}$$

Таким образом, $r \approx 0,88$, $y = 2,3x - 130,9$. Построение самостоятельно.

3.34.3 Результаты и выводы: научились составлять уравнение линии регрессии.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ (не предусмотрено РУП)