ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.06 Математика и математические методы в биологии

Направление подготовки 06.03.01 Биология

Профиль образовательной программы Микробиология

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2часа)

Тема: «Система линейных уравнений. Матрицы. Определители».

1.1.1. Вопросы лекции:

1.Понятие системы линейных уравнений.
2.Матрицы.
3. Определители.
4.Вычисление определителей.
5. Операции над матрицами.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие системы линейных уравнений.

Определение. Линейными операциями над какими-либо объектами называются их сложение и умножение на число.

Определение. Линейной комбинацией переменных называется результат применения к ним линейных операций, т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, где α_i – числа, x_i – переменные.

Определение. Линейным уравнением называется уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b, \qquad (2.1)$$

где a_i и b – числа, x_i - неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Определение. Линейное уравнение называется однородным, если b = 0. В противном случае уравнение называется неоднородным.

Определение. Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.2)$$

где a_{ij}, b_i - числа, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

*Определение.*Решением линейной системы (2.2) называется набор чисел $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

2. Матрицы.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: А – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, i – номер строки, в которой стоит данный элемент, j – номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Определение. Числа m и n называются размерностями матрицы.

Определение. Матрица называется квадратной, если m = n. Число n в этом случае называют порядком квадратной матрицы.
Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определение. Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с теми же номерами.

3. Определители.

*Определение***.**Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.
Определение. Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Вычисление определителей.

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).
<u>Свойство 1.</u> Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.
<u>Свойство 2</u>. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad .$$

<u>Свойство 3.</u> Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.
<u>Свойство 4.</u> Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.
<u>Свойство 5</u>. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Свойство 6</u>. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>Свойство 7.</u>

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>Свойство 8.</u> Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение. Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.
Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

4. Операции над матрицами.

Суммой двух матриц одинакового порядка называют матрицу такого же порядка, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц.

Аналогично, разностью двух матриц одинакового порядка называют матрицу такого же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц.

Произведением матрицы на число есть матрица того же порядка, элементы которой получены умножением соответствующих элементов матриц на это же число.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Решение систем линейных уравнений».

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Решение СЛУ методом Гаусса.
2. Формулы Крамера для решения СЛУ.

1.2.2 Краткое содержание вопросов.

1. Решение СЛУ методом Гаусса.

Замечание. Линейная система (2.2) может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Условия существования и количества решений линейной системы будут изучены в дальнейшем, а пока рассмотрим способы нахождения единственного решения системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.3)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1}, где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + ... + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + ... + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \quad .... \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + ... + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Таким же образом можно исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \ddot{a}_{12}x_2 + ... + \ddot{a}_{1n}x_n = \ddot{b}_1 \\ \quad x_2 + ... + \ddot{a}_{2n}x_n = \ddot{b}_2 \\ \quad .... \\ \quad\quad x_n = \ddot{b}_n \end{cases}. \qquad (2.4)$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \ddot{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\ddot{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (2.4) единственным образом определяется x_n, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

2. Формулы Крамера для решения СЛУ.

Пусть нам требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$.

Пусть Δ - определитель основной матрицы системы, а Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, $\ldots$, Δ_{x_n} - определители матриц, которые получаются из *A* заменой *1-ого, 2-ого, …, n-ого*столбца соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$. Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

1.3 Лекция №3(2часа).
Тема: «Прямая на плоскости»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Метод координат.
1. Прямая. Способы задания.
1. Взаимное расположение прямых на плоскости.

1.3.2 Краткое содержание вопросов.

1. Метод координат.

Под *системой координат* на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Одной из таких систем является *прямоугольная* (декартова) *система координат*.

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями, на каждой

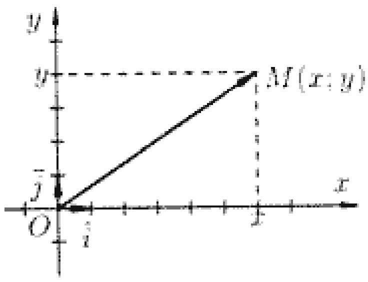


Рис. 23.

из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют осями координат, точку их пересечения O - началом координат. Одну из осей называют осью абсцисс (осью Ox), другую — осью ординат (осью Oy) (рис. 1).

На рисунках ось абсцисс обычно располагают горизонтально и направленной слева направо, а ось ординат - вертикально и направленной снизу вверх. Оси координат делят плоскость на четыре области — четверти (или квадранты).

Единичные векторы осей обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$($|\ i\ |=|\ j\ |=1, \vec{i} \perp \vec{j}$). Систему координат обозначают Oxy, а плоскость, в которой расположена система координат, называют координатной плоскостью.

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy. Вектор OM называется радиусом-вектором точки M.

Координатами точки M в системе координат Oxy называются координаты радиуса-вектора OM. Если OM=(x;y), то координаты точки M записывают так: M(x;y), число x называется *абсциссой* точки M, y — *ординатой* точки M.

Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

2.Прямая. Способы задания.

Линия на плоскости рассматривается (задается) как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние - R от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение F(x;y) = 0 с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются текущими координатами точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка Ax + By + C = 0, причем постоянные A, B не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (A, B) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ax + By + C = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Если общее уравнение прямой Ax + By + C = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k, -\frac{C}{B} = b$, то полученное уравнение $y = kx + b$ называет уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор (α_1 , α_2), компоненты которого удовлетворяют условию А α_1 + В α_2 = 0 называется направляющим вектором прямой Ах + Ву + С = 0.

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С≠0, то, разделив на –С, получим:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые Ах + Ву + С = 0 и $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

1.4 Лекция №4(2часа).
Тема: «Кривые второго порядка»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Определение кривой второго порядка.
2. Окружность.
3. Эллипс.
4. Гипербола.
5. Парабола.

1.4.2 Краткое содержание вопросов.

1. Определение кривой второго порядка.

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю.

Если кривая Г невырожденная, то для неё найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой примет один из следующих трех видов (каноническое уравнение):

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гипербола,

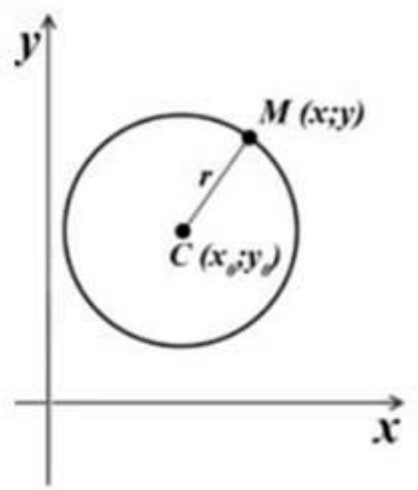
$y^2 = 2px$ - парабола.

2. Окружность.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки – от центра.

Таким образом, уравнение окружности с центром в точке $C(x_0;y_0)$ радиуса r имеет вид:

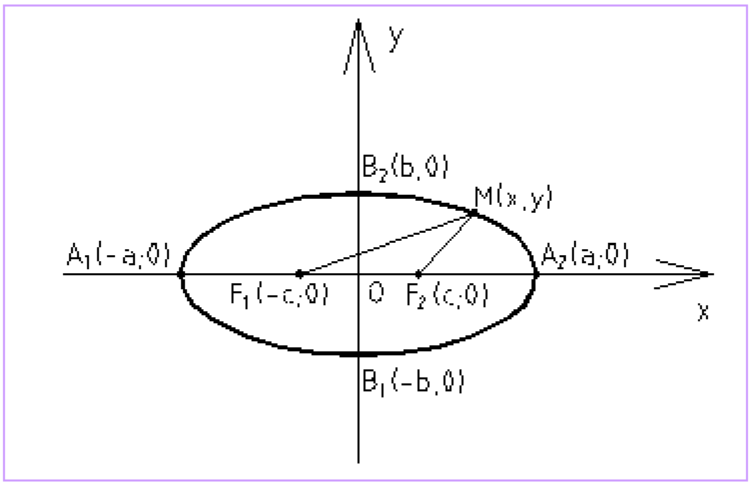
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.



Частный случай уравнения окружности с центром в точке $O(0;0)$: $x^2 + y^2 = r^2$.

3. Эллипс.

Эллипс – геометрическое множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная 2a, большая, чем расстояние между фокусами 2c: $|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a$.



Эллипс, заданный каноническим уравнением: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, симметричен относительно осей координат. Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0, b)$ называются его вершинами.

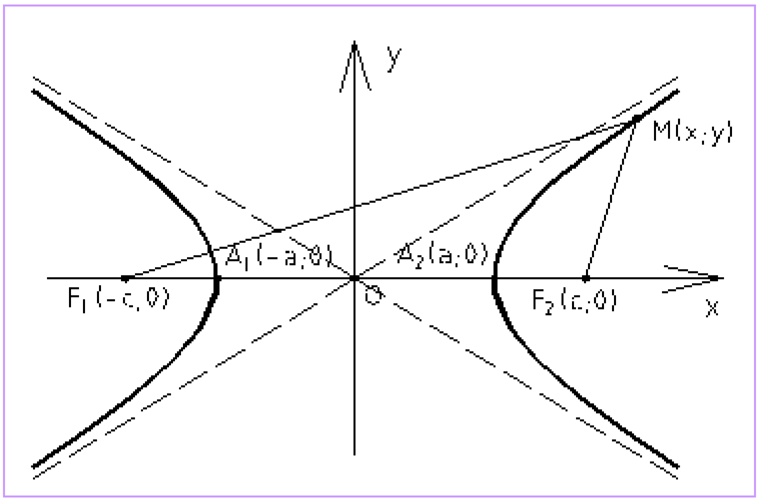
Если a>b, то фокусы находятся на оси OX на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра эллипса O.

Число $\varepsilon = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ $(0 \le \varepsilon \le 1)$ называется эксцентриситетом эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $\varepsilon = 0$ эллипс является окружностью, а при $\varepsilon = 1$ он вырождается в отрезок длиною $2a$).

Если a<b, то фокусы находятся на оси OY и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$.

4. Гипербола.

Гипербола– геометрическое множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная 2a, меньшая, чем расстояние между фокусами 2c: $\left|F_1M\right| - \left|F_2M\right| = \pm 2a$.



Гипербола, заданная каноническим уравнением: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось OX в точках $A_1(-a,0)$ и $A_2(-a,0)$ - вершинах гиперболы, и не пересекает оси OY.

Параметр a называется вещественной полуосью, b – мнимой полуосью.

Число $\varepsilon = c/a = \sqrt{1 + b^2/a^2}$, $(1 < \varepsilon < \infty)$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ называются асимптотами гиперболы.

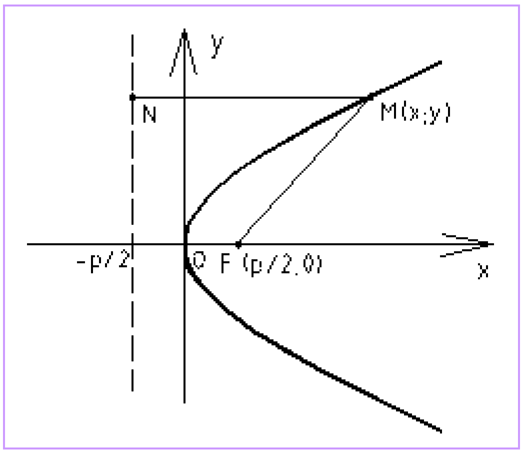
Гипербола, заданная каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \text{ (или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\text{)},$$

называется сопряжённой (имеет те же асимптоты). Её фокусы расположены на оси OY. Она пересекает ось OY в точках $B_1(0,-b)$ и $B_2(0, b)$ - вершинах гиперболы, и не пересекает оси OX.
В этом случае параметр b называется вещественной полуосью, а – мнимой полуосью. Эксцентриситет вычисляется по формуле: $\varepsilon = c/b = \sqrt{1 + a^2/b^2}$, $(1 < \varepsilon < \infty)$.

5. Парабола.

Парабола – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой



фокусом, и данной прямой, называемой директрисой: $|MN| = |FM|$.

Парабола, заданная указанным каноническим уравнением, симметрична относительно оси OX.

Уравнение $x^2 = 2p \cdot y$ задает параболу, симметричную относительно оси OY.

Парабола $y^2 = 2p \cdot x$ имеет фокус $F(p / 2; 0)$ и директрису $x = -p / 2$.

Парабола $x^2 = 2p \cdot y$ имеет фокус $F(0; p / 2)$ и директрису $y = -p / 2$.

Если p>0, то в обоих случаях ветви параболы обращены в положительную сторону соответствующей оси, а если p<0 – в отрицательную сторону.

1.5 Лекция №5(2часа).
Тема: «Производная».

1.5.1 Вопросы лекции:
1. Понятие производной.
2. Геометрический, механический и биологический смыслы производной.
3. Правила дифференцирования.
4. Дифференциал.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:
1. Понятие производной

Пусть функция y = f(x) определена в промежутке X. *Производной* функции y = f(x) в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел *конечный,* то функция f(x) называется *дифференцируемой* в точке x_o; при этом она оказывается обязательно и непрерывной в этой точке.

Если же рассматриваемый предел равен ∞ (или -∞), то при условии, что функция в точке x_o непрерывна, будем говорить, что функция f(x) имеет в точке x_o*бесконечную производную*.

Производная обозначается символами

$$y', \quad f'(x_o), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

2. Геометрический, механический и биологический смыслы производной.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к кривой y=f(x) в данной точке x_o; *физический смысл* - в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении s = s(t) в момент t_0; *биологический смысл* – в том что производная от числа особей популяции микроорганизмов $N(t)$ по времени есть скорость размножения популяции.

3. Правила дифференцирования.

Если *c* - постоянное число, и u = u(x), v = v(x) - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) (c)' = 0, (cu)' = cu';

2) (u+v)' = u'+v';

3) (uv)' = u'v+v'u;

4) $(u/v)' = (u'v-v'u)/v^2$;

5) если y = f(u), u = j(x), т.е. y = f(j(x)) - *сложная функция,* или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций j и f, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

6) если для функции y = f(x) существует обратная дифференцируемая функция x = g(y), причем $\frac{dg}{dy} = x'_y \neq 0$, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

При нахождении производных пользуются таблицами производных основных элементарных функций ([2] с. 150).

4. Дифференциал функции.

Итак, график дифференцируемой функции в окрестности каждой своей точки сколь угодно близко приближается к графику касательной в силу равенства:

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) = f\left(x_0\right) + \left(f'\left(x_0\right) + \alpha\right)\Delta x,$$

где α – бесконечно малая в окрестности x_0 функция. Для приближенного вычисления значения функции f в точке $x_0 + \Delta x$ эту бесконечно малую функцию можно отбросить:

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Линейную функцию

$$y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают df. Для функции x производная в каждой точке x_0 равна 1, то есть $dx = x - x_0$. Поэтому пишут:

$$\boxed{df = f'(x)dx.}$$

Приближенное значение функции вблизи точки x_0 равно сумме ее значения в этой точке и дифференциала в этой же точке. Это дает возможность записать производную следующим образом:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Часто эту запись используют, чтобы уточнить, по какой переменной дифференцируется функция.

Геометрически дифференциал функции df – это приращение ординаты касательной к графику функции в данной точке при изменении абсциссы точки на dx.

1.6 Лекция №6(2часа).
Тема: «Неопределенный интеграл».

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Понятие первообразной и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
3. Основные методы интегрирования.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие первообразной и ее свойства.

Определение. Функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ называется первообразной для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ является производной для $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, т.е. $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ требуется найти функцию $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, производная которой равна $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Первообразная определена неоднозначно: для функции $\frac{1}{1+x^2}$ первообразными будут и функция arctg $\boldsymbol{x}$, и функция arctg $\boldsymbol{x}$-10: $(\text{arctg}\, x)' = (\text{arctg}\, x - 10)' = \frac{1}{1+x^2}$. Для того, чтобы описать все множество первообразных функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, рассмотрим

Свойства первообразной.

1. Если функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ - первообразная для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}$, то функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C}$ - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на этом интервале. (Док-во: $\boldsymbol{F'(x) = \left(F(x) + C\right)' = f(x)}$).

2. Если функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ - некоторая первообразная для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, то любая другая первообразная $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})$ может быть представлена в виде $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C}$ - постоянная на $\boldsymbol{X}$ функция.

3. Для любой первообразной $F(x)$ выполняется равенство $dF(x) = f(x)\,dx$.

Из этих свойств следует, что если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале X, то всё множество первообразных функции $f(x)$ (т.е. функций, имеющих производную $f(x)$ и дифференциал $f(x)\,dx$) на этом интервале описывается выражением $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.

Определение. Множество первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Как следует из изложенного выше, если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная. Функцию $f(x)$ принято называть подынтегральной функцией, произведение $f(x)\,dx$ - подынтегральным выражением.

3. Основные методы интегрирования.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int F'(x)dx = F(x)+C, \quad \int dF(x) = F(x)+C.$

3. Если $\int f(x)dx = F(x)+C,$ то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad a \neq 0.$

4. $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx, \quad \alpha^2+\beta^2 \neq 0.$

Замена переменных в неопределенном интеграле:

1. $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(u(x))+C.$

2. Если $x = \varphi(t), \ \varphi'(t) \neq 0, \ F$ - первообразная для $(g \circ \varphi)\varphi',$ то $\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C = F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C.$

Формула интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

(u, v - дифференцируемые функции).

Для нахождения неопределенных интегралов пользуются таблицами интегралов основных элементарных функций.

1.7 Лекция №7(2 часа)

Тема: «Определенный интеграл».

1.7.1 Вопросы лекции:

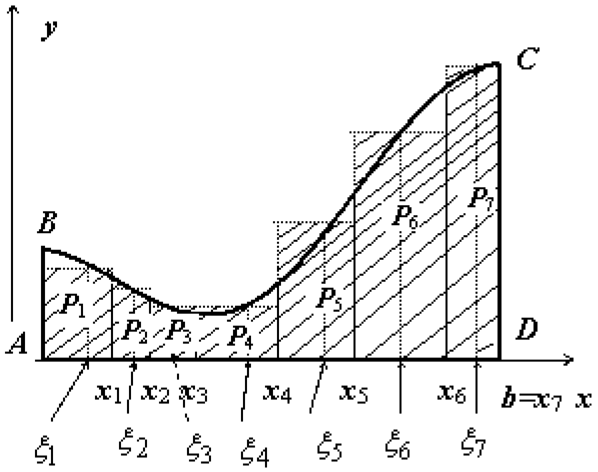
1. Понятие определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Геометрический смысл определенного интеграла.

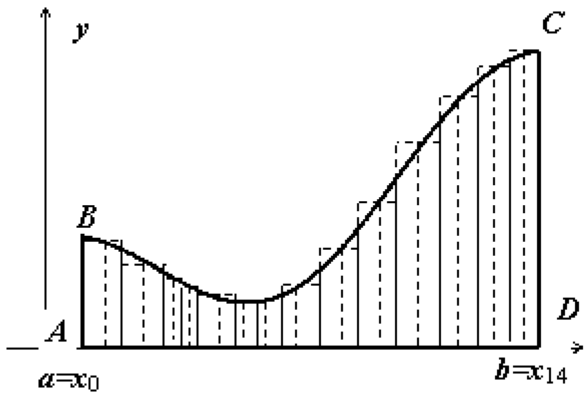
1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие определенного интеграла.

Вычисление площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке [$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$] ($\boldsymbol{b}>\boldsymbol{a}$) задана непрерывная функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, принимающая на этом отрезке неотрицательные значения : $f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$. Требуется определить площадь $\boldsymbol{S}$ криволинейной трапеции ***ABCD***, ограниченной снизу отрезком [$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$], слева и справа - прямыми $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, сверху – функцией $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.





Для решения этой задачи разделим произвольным образом основание ***AD*** фигуры точками $x_0 = a,\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} = a,\ x_n = b$ на $\boldsymbol{n}$ частей $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$; символом Δx_i будем обозначать длину $\boldsymbol{i}$-го отрезка: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ i = 1,2,\ldots,n$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i, найдём $f(\xi_i)$, вычислим произведение $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ (это произведение равно площади прямоугольника P_i с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой ξ_i) и просуммируем эти произведения по всем прямоугольникам. Полученную сумму обозначим $S_{\text{ступ}}$:

$$S_{\text{ступ}} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$S_{\text{ступ}}$ равно площади ступенчатой фигуры, образованной прямоугольниками P_i, $i = 1,2,\ldots,n$; на левом рисунке эта площадь заштрихована. $S_{\text{ступ}}$ не равна искомой площади $\boldsymbol{S}$, она только даёт некоторое приближение к $\boldsymbol{S}$. Для того, чтобы улучшить это приближение, будем увеличивать количество $\boldsymbol{n}$ отрезков таким образом, чтобы максимальная длина этих отрезков $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$ стремилась к нулю (на рисунке ступенчатые фигуры изображены при $n = 7$ (слева) и при $n = 14$ (справа)). При $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i \to 0\ (n \to \infty)$ разница между $S_{\text{ступ}}$ и $\boldsymbol{S}$ будет тоже стремиться к нулю, т.е.

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определение определённого интеграла.

Пусть на отрезке [a,b] задана функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок [a,b] произвольным образом на n частей точками [x_0 ,x_1], [x_1 ,x_2], …, [x_{i-1} ,x_i], …, [x_{n-1} ,x_n]; длину i-го отрезка обозначим Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1,2,\ldots,n$; максимальную из длин отрезков обозначим λ: $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$. На каждом из отрезков [x_{i-1} ,x_i] выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Сумма σ называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка [a,b] на части [x_{i-1} ,x_i], ни от выбора точек ξ_i, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по отрезку [a,b], а этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку [a,b] и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Функция $f(x)$, как и в случае неопределённого интеграла, называется подынтегральной, числа a и b - соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Кратко определение иногда записывают так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

В этом определении предполагается, что $b>a$. Для других случаев примем, тоже по определению:

Если $b=a$, то $\int_a^b f(x)dx = 0$; если $b<a$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Теорема существования определённого интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то она интегрируема по этому отрезку.

2. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

1. Линейность. Если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ интегрируемы по отрезку [a,b] , то по этому отрезку интегрируема их линейная комбинация $Af(x) + Bg(x)$ (A, B = const),

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx .$$

2. Аддитивность. Если $y = f(x)$ интегрируема по отрезку [a,b] и точка c принадлежит этому отрезку, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

3. Интеграл от единичной функции ($f(x) = 1$). Если $f(x) = 1$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a .$$

4. *Теорема об интегрировании неравенств*. Если в любой точке $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, и функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Формула Ньютона-Лейбница.

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла. Если $u(x)$, $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

Замена переменной в определённом интеграле. Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$

1. определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[\alpha, \beta]$,
2. $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$,
3. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

3. Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции ***ABCD***, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху – функцией $y = f(x)$.

1.8 Лекция №8 (2 часа).
Тема: «Основные понятия и теоремы теории вероятностей».

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Основные определения. Классическое определение вероятности события.
2. Классификация событий и их свойства.
3. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.
4. Формула полной вероятности.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные определения. Классическое определение вероятности события.

Классическое определение вероятности

$$P(A) = m/n$$

(m - число благоприятных исходов опыта; n - число всех его исходов).

2. Классификация событий и их свойства.

Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же испытании. В противном случае события называются совместными.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого события в одном и том же испытании. В противном случае события называются зависимыми.

3. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B),$$

где $P(B/A)$ - вероятность события *B* при условии, что произошло событие *A*.

4. Формула полной вероятности.

Формула полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k),$$

где $B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_n$ - полная группа гипотез, т. е.

$$B_iB_j=\varnothing,\ i\neq j,\quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i=\Omega$$

(Ω - достоверное событие).

Формула Бейеса

$$P(B_m/A)=\frac{P(B_m)P(A/B_m)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)},\quad m=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

где $B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_n$ - полная группа гипотез.

1.9 Лекция №9 (2 часа).

Тема: «Повторные независимые испытания»

.

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Формула Бернулли.
3. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
4. Наиболее вероятное число появления события в испытании.

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия.

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А.

2. Формула Бернулли.

Вероятность события, состоящего в том, что при n повторениях испытания событие A, которое имеет одну и ту же вероятность появления в каждом испытании, произойдет ровно k раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

где n – число повторений независимых испытаний; k – число испытаний, в которых происходит событие A; p – вероятность появления события A в одном испытании; q – вероятность непоявления события A в одном испытании $(q = 1 - p)$.

3. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что при этом событие A появится ровно k раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $q = 1 - p$ – вероятность ненаступления события A, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что при этом событие A произойдет не менее k_1 и не более k_2 раз, вычисляется по формуле

$$P(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

4. Наиболее вероятное число появления события в испытании.

Пусть k_0 – число появлений события A, имеющего наибольшую вероятность при n испытаниях, p – вероятность появления события A, $q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A. Тогда верно следующее неравенство:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

1.10 Лекция №10 (2 часа).
Тема: «Дискретные случайные величины».

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Определение дискретной случайной величины. Закон распределения.
2. Многоугольник распределения.

3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

1.10.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение дискретной случайной величины. Закон распределения.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

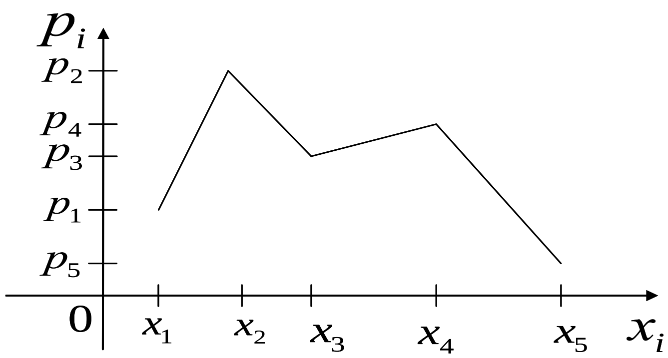
Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между всевозможными значениями и их вероятностями.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

2. Многоугольник распределения.

Многоугольником распределения дискретной случайной величины называют фигуру, полученную из точек (x_i, p_i) и отрезков, их соединяющих.



3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений каждого возможного значения этой величины на соответствующую вероятность:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_s p_s .$$

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и ее математическим ожиданием:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 .$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 .$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

1.11 Лекция №11 (2 часа).

Тема: «Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность вероятности».

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Функция распределения вероятностей случайной величины.
2. Определение непрерывной случайной величины.
3. Плотность распределения вероятностей.

4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1. Функция распределения вероятностей случайной величины.

Определение. Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Свойства функции распределения

1) Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2) $F(x)$ – неубывающая функция, т. е.

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, например x_1, равна нулю:

$$P(X = x_1) = 0.$$

3) Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a;$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x \ge b.$$

Следствие. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

График функции распределения

График функции распределения непрерывной случайной величины расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = 1$. При возрастании x в интервале $(a;b)$, в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «поднимается вверх». При $x \le a$ ординаты графика равны нулю; при $x \ge b$ ординаты графика равны единице.

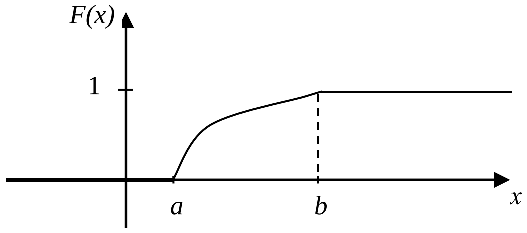


График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

2. Определение непрерывной случайной величины.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, все возможные значения которой заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал.

3. Плотность распределения вероятностей.

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерыв-ной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Часто вместо термина «плотность распределения» используют термины «плотность вероятностей» и «дифференциальная функция».

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Математическим ожиданием $M(X)$ непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;b]$, называют определенный интеграл $\int_a^b x\, f(x)dx$, т.е.

$$M(X) = \int_a^b x\, f(x)dx.$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx.$$

Дисперсией $D(X)$ непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a;b]$, то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

1.12 Лекция №12 (2 часа).

Тема: «Законы распределения случайных величин»

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.
3. Нормальное распределение.

1.12.2 Краткое содержание вопросов:

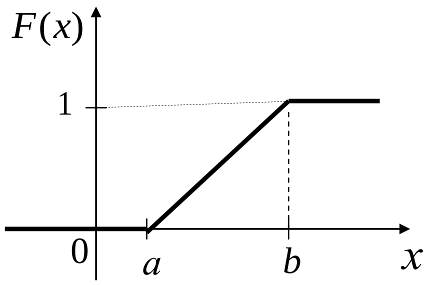
1. Равномерное распределение.

Определение. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины называют равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Функция распределения вероятности равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \;\; x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \;\; a \le x \le b, \\ 1, & при \;\; x > b. \end{cases}$$

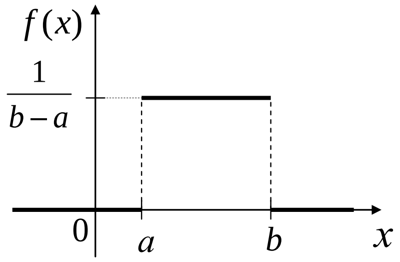
График функции распределения $F(x)$ для равномерного распределения имеет вид:



Плотность вероятности равномерного распределения равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \;\; x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & при \;\; a \le x \le b, \\ 0, & при \;\; x > b. \end{cases}$$

График плотности $f(x)$ для равномерного распределения имеет вид:



Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}.$$

2. Показательное распределение.

Определение. Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & при \quad x\geq 0,\end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Вероятность попадания в заданный интервал показательно распределенной случайной величины

Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины X , которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения, равна

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Числовые характеристики показательного распределения:

Математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия показательного распределения равна обратной величине параметра λ в квадрате:

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Среднее квадратическое отклонение показательного распределения равно:

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda},$$

т.е. математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

3. Нормальное распределение.

Определение. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, если ее функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

График функции $f(x)$ называется кривой нормального распределения. Методами дифференциального исчисления можно установить, что:

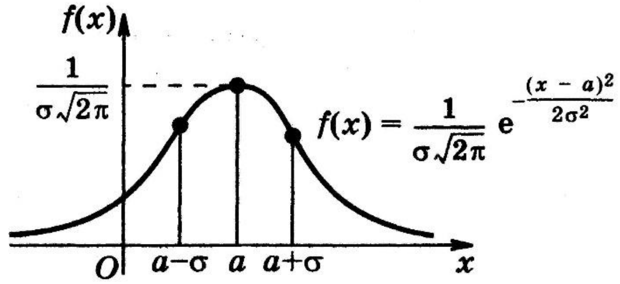
1) кривая симметрична относительно прямой $x=a$;

2) функция имеет максимум в точке $\left(a,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, при $x=a$ $f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

3) по мере удаления x от точки a функция убывает и при $x\to\pm\infty$ кривая приближается к оси Ox;

4) кривая выпукла при $x\in(a-\sigma,a+\sigma)$ и вогнута при $x\in(-\infty,a-\sigma)$ и $x\in(a+\sigma,+\infty)$.

График функции $f(x)$ имеет вид:



Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β),

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа.

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от математического ожидания

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше положительного числа δ,

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм. Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадратического отклонения.

Определение. Интервал $(a-3\sigma;\,a+3\sigma)$ называется диапазоном изменения нормально распределенной случайной величины.

1.13 Лекция №13 (2 часа).
Тема: «Основные понятия математических методов»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Понятие математических методов.
2. Математические методы в биологии.
3. Простая модель роста популяции.
4. Модель сезонного роста
5. Логистический рост популяции.

1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие математических методов.

Бурное развитие прикладной математики XVII века привело к использованию некоторыми людьми математического подхода при изучении организмов и их развития. Например, Галилей изучал влияние увеличения размеров тела животного на размеры и прочность скелета, Эйлер создал математическую модель сердца. Давно было отмечено, что математические построения сравнительно простого типа достаточно точно описывают некоторые биологические явления (ячейка медовых сот имеет вид правильного шестиугольника, а раковина моллюска – вид спирали).

В начале XX века появились первые модели по теории эпидемий, описывающий механизм их распространения. Тогда же началось систематическое использование математики в биологии. В настоящее время благодаря ЭВМ интеграция биологии и математики происходит еще успешнее.

Сейчас создано много математических моделей, описывающих биологические процессы или явления. Например, простая модель роста популяции, модели «Хищник – жертва», «Кооперация видов», модель сезонного роста и т.д.

Определение. Модель – упрощенная схема (конструкция) какого-либо процесса или явления. Модель биологического процесса отражает его основные биологические свойства.

Определение. Если схема или конструкция выражается в математическое форме (график, таблица, уравнение, система уравнений), то модель называется математической.

Однако любая математическая модель – это абстрактное построение, которое лишь частично соответствует действительности.

Значение математических моделей

1. Математическое моделирование – средство, позволяющее достигнуть значительно большей ясности и точности, чем чисто словесными методами.
2. Математическая модель дает частичное описание определенных аспектов реальной действительности и ее справедливость целиком зависит от точности этого изображения.
3. Простые модели, отражающие лишь немногие свойства реального процесса, важны тем, что они дают общее представление о процессе.
4. Подставляя в основные уравнения различные значения рассматриваемых параметров, можно получить конкретные решения задачи, что позволяет прогнозировать процесс.
5. Аналитическая форма решений иногда позволяет выразить наблюдаемые биологические закономерности в виде математических теорем (например, пороговая теорема в теории эпидемий).

Этапы построения математической модели

1. выделение объекта наблюдения и ключевых биологических переменных;
2. на основе эмпирических наблюдений установление связей и зависимостей между биологическими переменными;

3. описание существенных черт процесса в математической форме (собственно построение математической модели);
4. решение с помощью математических методов;
5. перенос результатов с математической формы в биологическую;
6. проверка адекватности модели.

2. Математические методы в биологии.

Определение. Математические методы в биологии – это разделы математики и математическая статистика, которые используются при решении биологических задач.

Выделяют следующие математические методы:

- дифференциальные уравнения;
- вектора и матрицы;
- линейное программирование;
- теория вероятностей;
- математическая статистика;
- разностные уравнения;
- теории игр и др.

Область применимости математических методов

Математические методы точны и в них используются четкие формулировки и более широкий набор понятий. Они применимы практически ко всем областям знания: физике, химии, психологии, биологии, медицине.

В большинстве случаев биологический материал крайне изменчив, подвержен влиянию многочисленных факторов, для его описания требуется огромное число разнообразных данных. Поэтому раньше считали, что в биологии применить математику крайне сложно. В настоящее время математика достигла такого уровня, что способна учесть эти особенности. Так для описания биологической изменчивости применяют распределение вероятностей, для выявления каждого из многочисленных факторов можно применить факторный анализ. С помощью компьютеров можно быстро и точно обработать большое количество данных.

Итак, математические методы применимы при изучении биологии. Необходимо только научиться правильно выбирать метод и суметь им воспользоваться.

Например, для описания роста многочисленных популяций используются дифференциальные уравнения; если численность популяции невелика, то целесообразнее применять разностные уравнения. В эпидемиологии часто используют матрицы. Задачи максимизации и минимизации в биологии решаются с помощью линейного программирования. В теории вероятностей для решения медицинских задач используются формулы Байеса. Теория игр используется при эксперименте с обучением или оценке риска при лечебных процедурах. Из математической статистики часто используют приемы первичной обработки материала, критерии статистической значимости, факторный анализ, теорию корреляции.

Математический метод	Биологическая задача
Дифференциальные уравнения	1. Популяция большой численности, растущая в неограниченном ареале и при неограниченных ресурсах; 2. популяция большой численности, растущая в ограниченных условиях; 3. внутривенное питание глюкозой
Системы дифференциальных уравнений	1. Взаимодействие популяций («Хищник – жертва», «межвидовая конкуренция», «кооперация видов»); 2. моделирование эпидемий

Матрицы и вектора	1. Контакты в эпидемиологии; 2. сосуществование бактерий; 3. распределение активности животного; 4. эволюция экосистемы
Линейное программирование	1. Сосуществование видов при ограничениях; 2. дневной рацион животного
Теория вероятностей	1. Проверка вакцин; 2. определение наиболее вероятного заболевания по симптомам; 3. подсчет клеток под микроскопом;
Математическая статистика	1. установление зависимости между двумя и более признаками; 2. изучение распределения заболеваемости внутри вида животных разных пород или возрастов;
Разностные уравнения и системы уравнений	1. Рост популяции через определенные временные периоды; 2. динамика численности популяции с учетом миграции; 3. взаимодействие популяций

3. Простая модель роста популяции.

ДУ – один из математических методов, применяемых для описания динамики биологических систем. Они позволяют строить непрерывные модели, которые подходят для описания роста очень больших популяций, например, популяции бактерий или других микроорганизмов.

Пусть изучается популяция микроорганизмов, которая является объектом исследования. Тогда ключевыми переменными являются время и численность данной популяции как функция времени. Наблюдения за объектом позволили получить информацию о скорости роста популяции и ее начальном размере. Возникает вопрос: можно ли предсказать, каким будет размер популяции во все последующие моменты времени? Это биологическая задача. Для ее решения используем один из математических методов – ДУ.

Введем математические обозначения:

t – время;

$p = p(t)$ – численность популяции в момент времени t;

$p'(t) = \dfrac{dp}{dt}$ – скорость роста популяции;

$p(0)$ – численность популяции в начальный момент времени.

<u>Простая модель роста популяции</u>

<u>(популяция, предоставленная сама себе)</u>

Представим себе популяцию, которая развивается изолированно в условиях неограниченного ареала и неограниченных ресурсов питания. Эти предположения указывают на то, рассматривается только модель популяции. Изменение численности в нашей модельной популяции определяется только численностью самой популяции. Поэтому логично предположить, что скорость роста популяции будет пропорциональна размеру популяции.

Математически это условие запишется в следующем виде:

$$p'(t) \sim p(t) \text{ или } p'(t) = a \cdot p(t),$$

где a – некоторая постоянная (коэффициент пропорциональности).

Итак, получено ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Его общим решением является класс функций вида:

$$p(t) = C \cdot e^{at},\ C = const$$

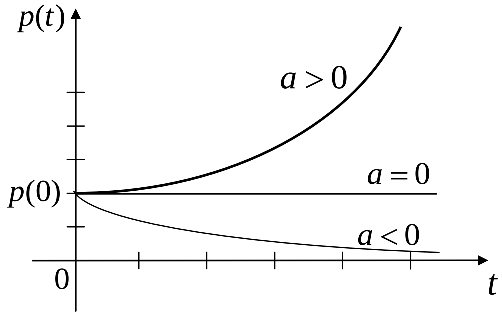
Постоянная C легко находится при известной начальной численности популяции: $p(0) = C \cdot e^{a\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad p(0) = C$.

Таким образом, $p(t) = p(0) \cdot e^{at}$ – формула экспоненциального роста.

Если размер популяции известен еще в какой-то другой момент времени, то постоянную a можно определить единственным образом, в зависимости от которой возможны три случая:

1) если $a > 0$, то численность популяции с течением времени возрастает;
2) если $a = 0$, то численность популяции не меняется;
3) если $a < 0$, то численность популяции с течением времени убывает.

На рисунке показаны все три случая решения ДУ.



Разумеется, естественные популяции не изменяют свою численность по экспоненте. Построенная модель показывает, как изменялся бы размер популяции, если бы она имела неограниченный ареал и обладала неограниченными ресурсами (т.е. если бы ее не стесняли и неограниченно подкармливали). На этой тенденции основано быстрое и массовое производство, например, антибиотиков (т.е. культивирование плесневых грибков, выделяющих пенициллин).

4. Модель сезонного роста.

ДУ первого порядка $p'(t) = r \cdot p(t) \cdot \cos t$ можно рассматривать как простую модель сезонного роста. Скорость роста популяции становится попеременно то положительной, то отрицательной, и популяция то возрастает, то убывает. Это может вызываться такими сезонными факторами, как доступность пищи.

Если $p(0)$ – начальный размер популяции, то частное решение ДУ имеет вид:

$$p(t) = p(0) \cdot e^{r \sin t}$$

Максимальный размер популяции, равный $p(0) \cdot e^{r}$, достигается при $t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$. Эти моменты времени можно считать серединами сезонов наибольшей доступности пищи (летних сезонов). Минимальный размер популяции, равный $p(0) \cdot e^{-r}$, достигается при $t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$, которые являются серединами сезонов наибольшей нехватки пищи (зимних сезонов). Продолжительность одного года соответствует 2π ед. времени.

5.Логистический рост популяции.

Модель можно изменить, если учесть внутривидовую борьбу благодаря эффекту скученности или усиливающейся конкуренции за доступные пищевые ресурсы.

Пусть a – коэффициент размножения популяции; b – коэффициент внутривидовой конкуренции, который берем со знаком «минус». Уменьшение количества особей тем больше, чем больше число встреч между ними, т.е. пропорционально численности популяции в квадрате. Пусть $a > b$, т.е. с течением времени численность популяции увеличивается.

В данной модели уравнение, которому подчиняется рост популяции, имеет вид:

$$p'(t) = a \cdot p(t) - b \cdot p^2(t),$$

или в упрощенной форме:

$$p' = a \cdot p - b \cdot p^2 = p(a - bp)$$

Математически получаем ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Решая его, приходим к виду:

$$\int \frac{dp}{p(a-bp)} = \int dt$$

Для вычисления интеграла, стоящего в левой части последнего равенства, представим дробь $\dfrac{1}{p(a-bp)}$ в виде суммы двух дробей с неопределенными числителями $\dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{a-bp}$. Числители находим, приведя сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{a-bp} = \frac{A(a-bp)+Bp}{p(a-bp)} = \frac{Aa - Abp + Bp}{p(a-bp)} = \frac{Aa + p(B - Ab)}{p(a-bp)}$$

Учитываем, что $\dfrac{1}{p(a-bp)} = \dfrac{1 + p \cdot 0}{p(a-bp)}$. Тогда сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной p, получаем:

$$\begin{cases} Aa = 1 \\ B - Ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{a} \\ B = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Таким образом, $\displaystyle\int \frac{dp}{p(a-bp)} = \int \frac{1}{ap}dp + \int \frac{b}{a-bp}dp$.

Дальнейшее вычисление интегралов приводит к равенству вида:

$$\frac{1}{a}\ln p + \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) \cdot \ln(a - bp) = t + C$$

$$\frac{1}{a}\ln\frac{p}{a-bp} = t + C$$

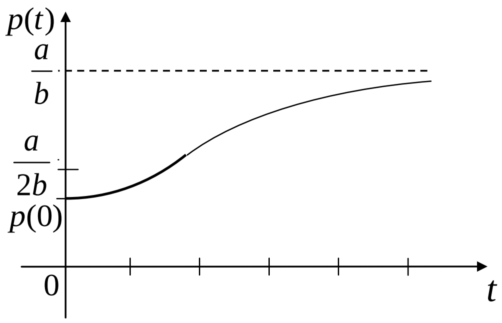
Если p_0 – начальный размер популяции, то постоянная интегрирования $C = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{p_0}{a-bp_0}$. Подставив найденное значение и сделав некоторые преобразования, получим:

$$p = \frac{ap_0e^{at}}{a - bp_0 + bp_0e^{at}}$$ - уравнение логистического роста

Процесс роста, описываемый такой функцией, называется логистическим ростом. При логистическом росте популяция с увеличением времени приближается к предельному (равновесному) размеру:

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{ap_0e^{at}}{a - bp_0 + bp_0e^{at}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left[: e^{at}\right] = \frac{a}{b}$$

Используя данное ДУ $p' = ap - bp^2$, можно показать, что функция $p(t)$ возрастает на $\left(0; \dfrac{a}{b}\right)$. Существует единственная точка перегиба при $p = \dfrac{a}{2b}$.



1.14 Лекция №14 (2 часа)
Тема: «Основные понятия математических методов».

1.14.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия.
2. Модель межвидовой конкуренции.
3. Модель кооперации видов.
4. Взаимодействие «Хищник – жертва».
5. Система логистических уравнений.
6. Модель Вольтерра.

1.14.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия.

В естественных условиях популяции не живут изолированно. Их отношения тесно переплетаются и проявляются в форме симбиоза, конкуренции, паразитизма, истребления.

Рассмотрим два вида, которые сосуществуют в одной среде. При описании роста популяции каждого вида необходимо учитывать эффект присутствия другого вида. Естественно допустить, что скорость роста каждой популяции будет зависеть не только от ее собственной численности, но и от численности другого вида. Для описания такого типа взаимодействия можно использовать систему дифференциальных уравнений первого порядка. Например, систему

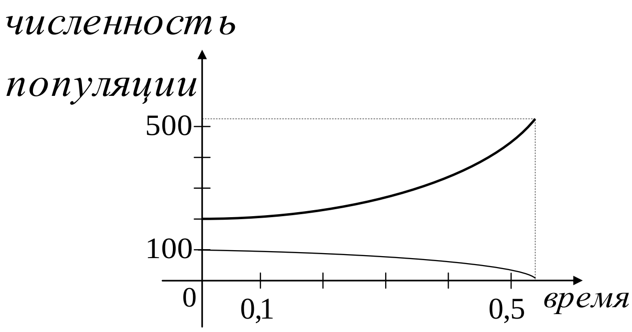
$$\begin{cases} p'(t) = a_{11}p(t) + a_{12}q(t) \\ q'(t) = a_{21}p(t) + a_{22}q(t) \end{cases}$$

можно рассматривать как простую модель взаимодействия двух видов, где $p(t), q(t)$ – численности видов в момент времени t, присутствующих в данной среде.

Возможные типы взаимодействия можно учитывать с помощью положительных и отрицательных знаков коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

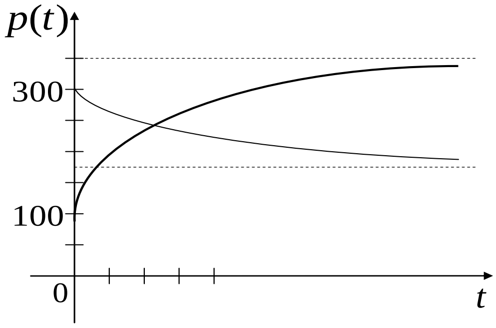
2. Модель межвидовой конкуренции.

Конкуренцию за общие ресурсы можно учесть в системе дифференциальных уравнений с помощью отрицательных коэффициентов a_{12}, a_{21}, которые показывают, что скорость роста популяции одного вида убывает по мере роста популяции другого.



3. Модель кооперации видов.

Допустим, что два вида находятся в отношении симбиоза, т.е. популяция каждого вида возрастает пропорционально численности другого, а уменьшение каждого вида будем считать пропорционально собственной численности. Это учитываем с помощью положительных коэффициентов a_{12}, a_{21} и отрицательных a_{11}, a_{22}.



4. Взаимодействие «Хищник – жертва».

Пусть $p(t)$ – численность вида хищника, $q(t)$ – численность вида жертвы. Предположим, что скорость роста численности хищника пропорциональна как численности жертвы, так и своей. Скорость роста жертвы увеличивается пропорционально своей численности и уменьшается по мере увеличения популяции хищников. С СДУ эти предположения можно учесть с помощью положительных коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} и отрицательного a_{21}.

Например, взаимодействие «хищник – жертва» описывается СДУ

$$\begin{cases} p'(t) = p(t) + q(t) \\ q(t) = -p(t) + q(t) \end{cases}$$

Требуется определить численности популяций во все последующие моменты времени, если вначале популяции насчитывали по 1000 особей. Когда наступит вымирание вида жертвы?

Общее решение СДУ имеет вид:

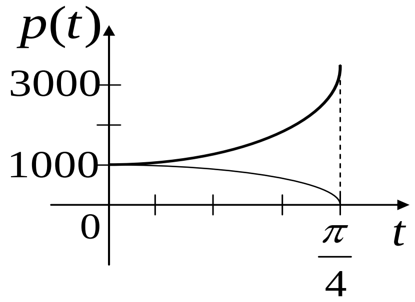
$$\begin{cases} p(t) = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t \\ q(t) = -C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t \end{cases}$$

При начальных условиях $p(0) = 1000, q(0) = 1000$ находим частное решение, которое определяет численности данных популяций в любой момент времени:

$$\begin{cases} p(t) = 1000 e^t \cos t + 1000 e^t \sin t \\ q(t) = -1000 e^t \sin t + 1000 e^t \cos t \end{cases}$$

Популяция жертвы вымирает, когда $t = \dfrac{\pi}{4}$ ед. времени. Популяция хищников может продолжать расти за счет других ресурсов и описываться другим уравнением.

Развитие двух популяций вплоть до исчезновения вида жертвы показано на рисунке.



5. Система логистических уравнений.

Чтобы составить более реалистичные модели взаимодействия двух видов, используем логистические уравнения для описания каждого вида. Тогда СДУ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} p'(t) = p(t)(a - a_{11}p(t) - a_{12}q(t)) \\ q'(t) = q(t)(b - a_{21}p(t) - a_{22}q(t)) \end{cases}$$

Эта система решается только численными методами, однако, можно без общего решения численности равновесных популяций, т.е. скорость их роста равна нулю:

$$\begin{cases} 0 = p(t)(a - a_{11}p(t) - a_{12}q(t)) \\ 0 = q(t)(b - a_{21}p(t) - a_{22}q(t)) \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет несколько решений:

1) $\begin{cases} p(t) = 0 \\ q(t) = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} p(t) = 0 \\ q(t) = \dfrac{b}{a_{22}} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} p(t) = \dfrac{a}{a_{11}} \\ q(t) = 0 \end{cases}$

Второе и третье решения соответствует условию, при котором один из видов вымирает, а другой достигает равновесного размера.

Более интересно четвертое решение, которое дает устойчивое сосуществование этих видов:

$$\begin{cases} a - a_{11}p(t) - a_{12}q(t) = 0 \\ b - a_{21}p(t) - a_{22}q(t) = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_{11}p(t) + a_{12}q(t) = a \\ a_{21}p(t) + a_{22}q(t) = b \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим выражения для численностей двух видов в любой момент времени:

$$\begin{cases} p(t) = \dfrac{a \cdot a_{22} - b \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{22}} \\ q(t) = \dfrac{b \cdot a_{11} - a \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{22}} \end{cases}$$

Если эти числа положительны, то они соответствуют популяциям двух видов, способных сосуществовать и сохранять постоянный размер.

Замечание. Различные виды взаимодействий можно задать с помощью положительных и отрицательных знаков.

6. Модель Вольтерра.

Он построил свою модель взаимодействия «хищник – жертва» на основании принципа теории встреч. Этот принцип состоит в том, что положительное или отрицательное влияние взаимодействия популяций на скорость роста численностей пропорционально числу встреч между особями этих популяций, т.е. произведению их численностей.

Для взаимодействия «хищник – жертва» он предложил следующую СДУ:

$$\begin{cases} p' = -a\,p + c_1 pq \\ q' = b\,q - c_2\,pq \end{cases},$$

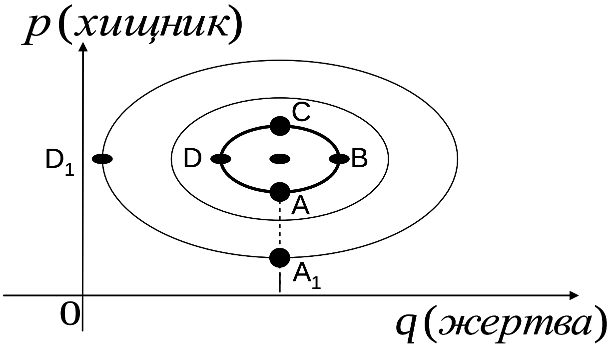
где $p = p(t)$ определяет численность вида хищника; $q = q(t)$ – численность вида жертвы.

Знак «плюс» перед коэффициентом c_1 означает, что наличие жертвы увеличивает прирост хищника, знак «минус» перед коэффициентом c_2 означает, что наличие хищника уменьшает прирост жертвы. Коэффициент b означает естественный прирост жертвы; $-a$ – естественную убыль хищника.

Найдем стационарное решение:

$$\begin{cases} 0 = -a\,p + c_1 pq \\ 0 = b\,q - c_2\,pq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{b}{c_2} \\ q = \dfrac{a}{c_1} \end{cases}$$

Можно показать, что решение СДУ $\begin{cases} p' = -a\,p + c_1 pq \\ q' = b\,q - c_2\,pq \end{cases}$ удовлетворяет условию $p^b q^a e^{-c_2 p} e^{-c_1 q} = C$, $C = const$, которое соответствует замкнутой кривой, содержащей внутри себя точку $\left(\dfrac{a}{c_1}; \dfrac{b}{c_2}\right)$. Таким образом, любая траектория (кроме данной точки) представляет собой цикл. Это означает, что соответствующее решение периодическое. В рамках модели хищник и жертва могут сосуществовать сколь угодно долго, меняя свою численность по периодическому закону.



$A \to B$: увеличивая свою численность, жертва увеличивает ресурсы питания для хищников, численность которых также растет.

$B \to C$: хищники быстрее истребляют жертв, которые не успевают пополнить свою популяцию.

$C \to D$: нехватка пищи приводит к уменьшению численности хищника.

$D \to A$: хищников становится так мало, что жертва успевает увеличивать свою численность.

Замечание. Не всегда можно увеличить численность жертвы, истребляя хищников. Допустим, истребив часть хищников, мы из точки A модели перешли в A_1. Тем самым мы перевели систему на другой цикл, где число жертв так мало (точка D_1), что популяция жертв может исчезнуть.

1.15 Лекция №15 (2 часа)
Тема: «Биометрия».

1.15.1 Вопросы лекции:
1. Биометрия и ее основные задачи.
2. Генеральная совокупность. Выборка. Случайные величины.
3. Дискретный и интервальный ряды распределения.
4. Графическое представление данных.
5. Выборочные числовые характеристики.

1.15.2 Краткое содержание вопросов:

1. Биометрия и ее основные задачи.
Биометрия – математическая статистика в биологии.

Биометрия – наука о статистическом анализе массовых явлений в биологии, т.е. таких явлений, в массе которых обнаруживаются закономерности, не выявляемые на единичных случаях наблюдений.

Предметом биометрии служит любой биологический объект, если проводимые над ним наблюдения получают количественное выражение.

Задачи:

1. Указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

2. Разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

2. Генеральная совокупность. Выборка. Случайные величины.
Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной (основной) совокупностью называют совокупность, объектов из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из *1000* деталей отобрано для обследования *100* деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$. Число объектов генеральной совокупности N значительно превосходит объем выборки n .

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

3. Дискретный и интервальный ряды распределения.
Способы группировки статистических данных:
1. Дискретный вариационный ряд
2. Интервальный вариационный ряд

Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

Расположив данные в порядке неубывания и сгруппировав их так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы, получают ранжированный ряд данных наблюдения.

Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называют вариантом, а изменение этого значения варьированием.

Варианты обозначают малыми буквами латинского алфавита с соответствующими порядковому номеру группы индексами - x_i. Число, которое показывает, сколько раз встречается соответствующий вариант в ряде наблюдений называют частотой варианта и обозначают соответственно - n_i.

Сумма всех частот ряда $\sum n_i$- объем выборки. Отношение частоты варианта к объему выборки $n_i / n = w_i$ называют относительной частотой.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Дискретным вариационным рядом распределения называют ранжированную совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или относительными частотами w_i.

Если изучаемая случайная величина является непрерывной, то ранжирование и группировка наблюдаемых значений зачастую не позволяют выделить характерные черты варьирования ее значений. Это объясняется тем, что отдельные значения случайной величины могут как угодно мало отличаться друг от друга и поэтому в совокупности наблюдаемых данных одинаковые значения величины могут встречаться редко, а частоты вариантов мало отличаются друг от друга.

Нецелесообразно также построение дискретного ряда для дискретной случайной величины, число возможных значений которой велико. В подобных случаях следует строить интервальный вариационный ряд распределения.

Для построения такого ряда весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины разбивают на ряд частичных интервалов и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

Интервальным вариационным рядом называют упорядоченную совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений величины.

4. Графическое представление данных.

Для наглядности строят различные графики статистического распределения.

По данным дискретного вариационного ряда строят полигон частот или относительных частот.

Полигоном частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки (x_1; n_1), (x_2; n_2), ..., (x_k; n_k). Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им частоты n_i. Точки (x_i; n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот (Рис. 1).

Полигоном относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки (x_1; W_1), (x_2; W_2), ..., (x_k; W_k). Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им относительные частоты W_i. Точки (x_i; W_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i / h.

Площадь i - го частичного прямоугольника равна $hn_i / h = n_i$ - сумме частот вариант i - го интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению W_i / h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i / h (Рис. 2).

Площадь i - го частичного прямоугольника равна $hW_i / h = W_i$ - относительной частоте вариант попавших в i - й интервал. Следовательно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

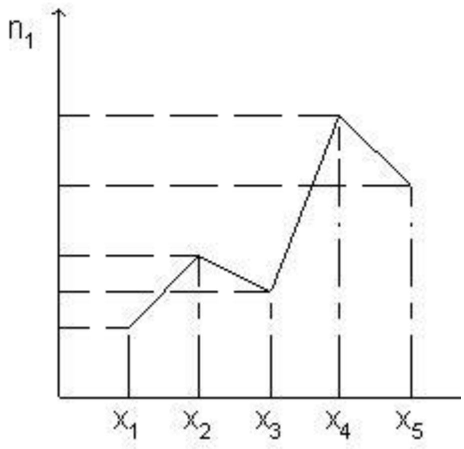


Рис. 1. Полигон частот

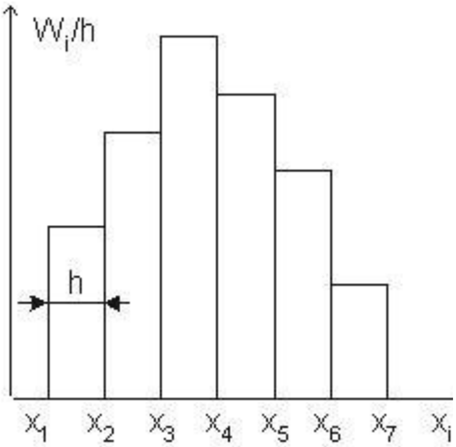


Рис. 2. Гистограмма относительных частот

5. Выборочные числовые характеристики.

Пусть статистическое распределение выборки объема n имеет вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\ldots$	n_k

1) Выборочной средней $\bar{x}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i ,$$

где k – число различных значений вариант.

2) Выборочной дисперсией D_B называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\bar{x}$:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i,$$

где k - число различных значений вариант.

3) Исправленная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

или, если заданы частоты n_i вариант:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i,$$

где k – число различных значений вариант.

4) Связь между выборочной и исправленной дисперсиями:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B.$$

5) Исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2}.$$

6) Ошибка средней:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

7) Коэффициент вариации:

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Мода M_0 – варианта, которая имеет наибольшую частоту.

Медиана m_e – варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант.

1.16 Лекция № 16 (2 часа).

Тема: «Теория корреляции»

1.16.1 Вопросы лекции:

1. Понятие корреляции. Две основные задачи теории корреляции.
2. Корреляционная таблица.
3. Линейная и нелинейная корреляция.
4. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.

1.16.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие корреляции. Две основные задачи теории корреляции.

Корреляционной зависимостью (корреляцией) называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение среднего значения другой величины.

2. Корреляционная таблица.

Корреляционной таблицей называется таблица, в которой результаты наблюдений записаны в возрастающем порядке с указанием частот $n_{i\,j}$ появления пары $\left(x_i\,;\,y_j\right)$.

3. Линейная и нелинейная корреляция.

Условным средним $\bar{y}_x$ называют среднее арифметическое значение величины Y, вычисленное при условии, что X принимает фиксированное значение.

Эмпирической линией регрессии Y на X называется ломанная, соединяющая точки $M(x_i\,;\,\bar{y}_{x_i})$.

Теоретической линией регрессии Y на X называется «сглаживающая» кривая, около которой группируются точки $M(x_i\,;\,\bar{y}_{x_i})$, а соответствующее уравнение $y = f(x)$ – уравнением регрессии Y на X.

4. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Для установления между двумя признаками линейной корреляции служит выборочный коэффициент корреляции, который вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}\,.$$

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1) $-1 \le r \le 1$;

2) чем больше $|r|$, тем теснее линейная корреляция между двумя признаками;

3) если $|r| = 1$, то корреляционная зависимость становится функциональной;

4) если $r = 0$, то между изучаемыми признаками нет линейной корреляции, но возможно существование какого-либо другого вида корреляционной зависимости (параболической, гиперболической и т.д.).

Если в результате опыта линейная зависимость между величинами Y и X выражена в виде таблицы

X	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
Y	y_1	y_2	. . .	y_i	. . .	y_n

то параметры a и b уравнения прямой регрессии $y = ax + b$ находятся из нормированной системы

$$\begin{cases} \grave{a}\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{o}_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

по методу наименьших квадратов.

В случае малой выборки уравнение прямой регрессии вычисляют по формуле:

$$y - \bar{y} = b_{Y/X}\,(x - \bar{x})\,,$$

где $b_{Y/X}$ – коэффициент регрессии, вычисляемый следующим образом:

$$b_{Y/X} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2},$$

где

$\bar{x}$ – выборочная средняя признака X ;

$\bar{y}$ – выборочная средняя признака Y .

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Матрицы. Определители»

2.1.1 Задание для работы:

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Матрицы. Операции над матрицами.
3. Нахождение обратной матрицы.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 13,$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}.$$

Утверждение. Разложение определителя по произвольной строке.

Для определителя матрицы A справедлива формула $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}.$

Пример. Вычислите $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся разложением по третьей строке, так выгоднее, поскольку в третьей строке два числа из трех - нули. Полу-

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0.7 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0.7 \end{vmatrix} = -3(-10-4) = 42.$$

чим

Пример. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A| = 11 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}$ - существует.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.3 Результаты и выводы: В результате проделанной работы научились вычислять определители, выполнять действия с матрицами.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа).

Тема: «Решение систем линейных уравнений»

2.2.1 Задание для работы:

1. Решение СЛУ методом Гаусса.
2. Решение СЛУ по формулам Крамера.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2x = -1 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Решая системы линейных уравнений школьными способами, мы почленно умножали одно из уравнений на некоторое число, так, чтобы коэффициенты при первой переменной в двух уравнениях были противоположными числами. При сложении уравнений происходит исключение этой переменной. Аналогично действует и метод Гаусса.

Для упрощения внешнего вида решения составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

В этой матрице слева до вертикальной черты расположены коэффициенты при неизвестных, а справа после вертикальной черты - свободные члены.

Для удобства деления коэффициентов при переменных (чтобы получить деление на единицу) переставим местами первую и вторую строки матрицы системы. Получим систему, эквивалентную данной, так как в системе линейных уравнений можно переставлять местами уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

С помощью нового первого уравнения исключим переменную *x* из второго и всех последующих уравнений. Для этого ко второй строке матрицы прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{3}{1}$), к третьей – первую строку, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ (в нашем случае на $-\frac{2}{1}$).

Это возможно, так как $a_{11} \neq 0$.

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям первую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате получим матрицу эквивалентную данной системе новой системы уравнений, в которой все уравнения, начиная со второго не содержат переменннную *x*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Для упрощения второй строки полученной системы умножим её на $\frac{1}{5}$ и получим вновь матрицу системы уравнений, эквивалентной данной системе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Теперь, сохраняя первое уравнение полученной системы без изменений, с помощью второго уравнения исключаем переменную *y* из всех последующих уравнений. Для этого к третьей строке матрицы системы прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ (в нашем случае на $-\frac{4}{1}$).

Если бы в нашей системе уравнений было больше трёх, то следовало бы прибавлять и ко всем последующим уравнениям вторую строку, умноженную на отношение соответствующих коэффициентов, взятых со знаком минус.

В результате вновь получим матрицу системы, эквивалентной данной системе линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Мы получили эквивалентную данной трапециевидную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ \quad y - z \quad = 1 \\ \qquad z \quad = 1 \end{cases}$$

Если число уравнений и переменных больше, чем в нашем примере, то процесс последовательного исключения переменных продолжается до тех пор, пока матрица системы не станет трапециевидной, как в нашем демо-примере.

Решение найдём "с конца" - это называется "обратный ход метода Гаусса". Для этого из последнего уравнения определим z:

$z = 1$.

Подставив это значение в предшествующее уравнение, найдём y:

$y = 1 + z$

$y = 1 + 1 = 2.$

Из первого уравнения найдём x:

$x = -1 + y - 2z$

$x = -1 + 2 - 2 = -1.$

Итак, решение данной системы - $(x = -1;\ \ y = 2;\ \ z = 2)$.

2.2.3 Результаты и выводы: Научились решать системы линейных уравнений.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа).

Тема: «Задание прямой на плоскости различными способами. Взаимное расположение прямых»

2.3.1 Задание для работы:

1. Различные способы задания прямой.
2. Проверка параллельности прямых.
3. Проверка перпендикулярности прямых.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

Даны вершины треугольника АВС: А(-2;5), В(10;- 4), С(8;10). Требуется:

1) Найти длину стороны АВ;
2) Составить уравнения сторон АВ и АС в общем виде и найти их угловые коэффициенты;
3) Вычислить угол А в радианах;
4) Составить уравнение медианы АД;
5) Составить уравнение высоты СЕ и найти ее длину.

Решение:

1) Расстояние d между точками А (x_1; y_1) и В (x_2; y_2) вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Применяя (1), находим длину стороны АВ:

$$d_{AB} = \sqrt{(10 - (-2))^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$$

2) уравнение прямой, проходящей через точки А (x_1; y_1) и В (x_2; y_2), имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (5)$$

Подставив в (5) соответствующие координаты точек А и В, находим уравнение прямой АВ.

$$\frac{y-5}{-4-5} = \frac{x-(-2)}{10-(-2)}$$

$$\frac{y-5}{-9} = \frac{x+2}{12}$$

$$\frac{y-5}{-3} = \frac{x+2}{4}$$

$$4y - 20 = -3x - 6$$

$$3x + 4y - 14 = 0$$

Чтобы найти угловой коэффициент прямой АВ ($к_{AB}$), решим полученное уравнение прямой относительно *y*:

$$4y = -3x + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{14}{4};$$

откуда $к_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Подставляя в (5) координаты точек А и С, находим уравнение прямой АС.

$$\frac{y-5}{10-5} = \frac{x+2}{8+2}$$

$$\frac{y-5}{5} = \frac{x+2}{10}$$

$$\frac{y-5}{1} = \frac{x+2}{2}$$

$$x + 2 = 2y - 10$$

$x - 2y + 12 = 0$ - уравнение стороны АС, откуда $к_{AC} = \frac{1}{2}$

3) Если даны две прямые, угловые коэффициенты которых соответственно $к_1$ и $к_2$, то угол γ между этими прямыми определяется по формуле:

$$tg\gamma = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| \qquad (7)$$

Искомый угол А образован прямыми АВ и АС, угловые коэффициенты которых найдены ранее в пункте 2). Для определения угла А положим $k_1 = k_{AB} = -\frac{3}{4}$ и $k_2 = k_{AC} = \frac{1}{2}$. Применяя (7), получим:

$$tgA = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{3}{4})}{1 + (-\frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}} = 2;$$ откуда $A = arctg2 = 63^0 26'$.

Используя таблицу перевода градусной меры в радианную, получим А=1.107 рад.

4). Если AD есть медиана, то точка D является серединой стороны ВС. Для вычисления координат точки D применяем формулы деления отрезка на две равные части:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\; y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (10)$$

Подставив в (10) координаты точек B и C, находим координаты точки D:

$x_D=\frac{10+8}{2}=9$; $y_D=\frac{-4+10}{2}=3$; D (9;3).

Подставив в (5) координаты точек A (-2;5) и D (9;3), находим искомое уравнение медианы AD:

$$2x+11y-51=0$$

5). Высота CE перпендикулярна стороне AB. известно, что если две прямые взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратные по величине и противоположны по знаку. Следовательно, $\kappa_{CE}=-\frac{1}{\kappa_{AB}}$. Так как $\kappa_{AB}=-\frac{3}{4}$, то $\kappa_{CE}=\frac{4}{3}$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом, имеет вид:

$$y-y_1=\kappa(x-x_1) \qquad (4)$$

Подставив в (4) координаты точки C и найденный угловой коэффициент $\kappa_{CE}=\frac{4}{3}$, получим искомое уравнение высоты CE:

$$y-10=\frac{4}{3}(x-8)$$

$$3y-30=4x-32$$

$4x-3y-2=0$ - уравнение CE.

Чтобы найти длину CE, определим сперва координаты точки E – точки пересечения высоты CE и прямой AB. Для этого решаем совместно систему уравнений AB и CE:

$$\begin{cases}3x+4y-14=0\\4x-3y-2=0\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 4, получим:

$$\begin{cases}9x+12y-42=0\\16x-12y-8=0\end{cases}$$

Сложим оба уравнения и припишем в систему первое уравнение исходной системы:

$$\begin{cases}25x-50=0\\3x+4y-14=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\3x+4y-14=0\end{cases}$$

Подставив во второе уравнение системы значение $x=2$, найдем значение y:

$$\begin{cases}x=2\\3\cdot 2+4y-14=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\4y=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$$

Следовательно, E (2;2). Длину высоты CE определяем как расстояние между двумя точками C и E по формуле (1).

$$d_{CE}=\sqrt{(2-8)^2+(2-10)^2}=\sqrt{100}=10$$

2.3.3 Результаты и выводы: Научились составлять уравнения прямых.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).

Тема: «Построение кривых второго порядка»

2.4.1 Задание для работы:

1. Составление уравнения и построение окружности.
2. Составление уравнения и построение эллипса.
3. Составление уравнения и построение гиперболы.
4. Составление уравнения и построение параболы.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пусть требуется построить эллипс с заданными параметрами a =4 и b =2.

Решение:

а) строим окружность радиуса R =4 с центром в начале прямоугольной системы координат Oxy ;

б) принимаем коэффициент сжатия окружности $k = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$;

в) далее применяем линейку и прямоугольный треугольник: двигаем треугольник вдоль линейки так, чтобы деление [4] всё время оставалось на оси Ox ;

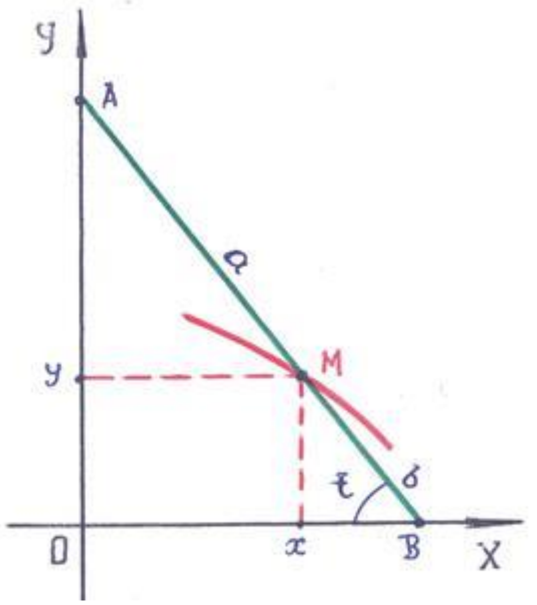
г) используем ординаты: 1; 2; 3; 4 точек окружности и, двигая треугольник вдоль линейки, отмечаем на плоскости Oxy точки с ординатами: $\pm\frac{1}{2}$; $\pm$ 1; $\pm\frac{3}{2}$; $\pm$ 2;

д) в результате выполнения построений по пункту г) для каждой четверти эллипса получаем по пять точек, которые легко соединить при помощи ***лекала***: эллипс (симпатичный!) построен.

Замечание: значения параметров a =4 и b =2 и ординат: 1; 2; 3; 4 выбраны так, чтобы каждый раз ***легко видеть середины*** выделяемых отрезков.

Ответ: эллипс: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ – построен.

5). Эллипс – результат ***сжатия*** окружности: $X^2+Y^2=a^2$. Наблюдение результата ортогонального параллельного проектирования подсказывает практический способ построения эллипса с заданными параметрами a и b , то есть с заданными осями:



6). Параметрические уравнения эллипса. Имея опыт построения параметрических уравнений прямой, напрашивается вопрос: не будет ли это связано с некоторым движением точки на плоскости в системе координат OXY ? Наиболее удобной моделью для получения параметрических уравнений эллипса считают отрезок AB , который скользит своими концами A и B по осям OY и OX , соответственно. При движении отрезка AB точка M (на отрезке закреплена), принадлежащая отрезку, описывает некоторую линию. Найдём её уравнение, введя параметр t – угол отрезка AB с осью координат OX . Для этого достаточно записать значения координат точки M :

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad (11)$$

Утверждать, что уравнения (11) есть эллипс, можно только после того, как убедимся, что точка принадлежит уже известному нам уравнению эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Подставим координаты точки M в каноническое уравнение эллипса:

$\frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ – тождество!

2.4.3 Результаты и выводы: Научились строить кривые второго порядка.

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа).

Тема: «Нахождение производных функций»

2.5.1 Задание для работы:

1. Нахождение производной функции по правилам дифференцирования и таблице производных.
2. Нахождение производной сложной функции.
3. Дифференциал функции.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти производные указанных функций:

а) $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = (x^3+2)\cdot\sin x$; в) $y = \frac{\arcsin x}{x^2 + e^x}$; г) $y = (x^2 - arctgx)^4$; д) $y = e^{\sin 4x}$; е) $y = e^{tgx}\cdot\cos^2 x$; ж) $y = \ln\sin(2x+1)$.

Решение.

а) Перепишем данную функцию, введя дробные и отрицательные показатели: $y = x^3 - x^{-4} + 6x^{\frac{2}{3}}$.

Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы 3) и формулу дифференцирования степенной функции 7), учитывая, что $x'_x = 1$, имеем:

$$y' = 3x^2 - (-4)x^{-5} + 6\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) Применяя правило производной произведения двух функций 4), а также формулы 7) и 13), имеем:

$$y' = (x^3+2)'\cdot\sin x + (x^3+2)\cdot(\sin x)' = 3x^2\cdot\sin x + (x^3+2)\cdot\cos x$$

в) Применяем правило дифференцирования частного двух функций 6), а также формулы 17), 7) и 11).

$$y' = \frac{(\arcsin x)'\cdot(x^2+e^x) - \arcsin x\cdot(x^2+e^x)'}{(x^2+e^x)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(x^2+e^x) - \arcsin x\cdot(2x+e^x)}{(x^2+e^x)^2}$$

$$= \frac{x^2+e^x - \sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x\cdot(2x+e^x)}{\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+e^x)^2}.$$

г) Данная функция является сложной; она может быть представлена так: $y = u^4$, где $u = x^2 - arctgx$. Применяем формулу 7):

$$y' = 4u^3 \cdot u' = 4(x^2 - arctgx)^3 \cdot (x^2 - arctgx)' = 4(x^2 - arctgx)^3 \cdot (2x - \frac{1}{1+x^2}).$$

д) Применяем формулу 13) дифференцирования сложной функции.

$$y' = (e^{\sin 4x})' = e^{\sin 4x} \cdot (\sin 4x)' = e^{\sin 4x} \cdot \cos 4x \cdot (4x)' = 4e^{\sin 4x} \cos 4x$$

е)

$$y' = (e^{tgx} \cdot \cos^2 x)' = (e^{tgx})' \cdot \cos^2 x + e^{tgx} \cdot (\cos^2 x)' = e^{tgx} \cdot (tgx)' \cdot \cos^2 x + e^{tgx}((\cos x)^2)' =$$

$$= e^{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x + e^{tgx} \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)' = e^{tgx} + e^{tgx} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) =$$

$$= e^{tgx} - e^{tgx} \cdot \sin 2x = e^{tgx}(1 - \sin 2x)$$

ж) Применяем формулу 12) дифференцирования сложной функции:

$$y' = (\ln\sin(2x+1))' = \frac{1}{\sin(2x+1)} \cdot (\sin(2x+1))' = \frac{1}{\sin(2x+1)} \cdot \cos(2x+1) \cdot (2x+1)' =$$

$$= 2ctg(2x+1).$$

2.5.3 Результаты и выводы: Научились вычислять производные.

2.6 Практическое занятие №6 (2 часа).

Тема: «Нахождение неопределенного интеграла»

2.6.1 Задание для работы:

1. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
2. Основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод подстановки; метод интегрирования по частям.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти интегралы:

а) $\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx$; б) $\int (5\cos x - 3e^x)dx$; в) $\int \left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx$.

Решение. а) Предварительно преобразуем подынтегральную функцию и затем применим свойства неопределенного интеграла и табличный интеграл 2).

$$\int (4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2})dx = \int (4x^3 - x^{\frac{1}{2}} + 6 \cdot x^{-2})dx = 4\int x^3 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 6\int x^{-2} dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = x^4 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{6}{x} + C.$$

б) Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные интегралы, будем иметь:

$$\int (5cosx - 3e^x)dx = 5\int \cos x dx - 3\int e^x dx = 5\sin x - 3e^x + C$$

в) Применяем свойства 3 и 4 и табличные интегралы 12), 11) и 5).

$$\int \left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{3}{x}\right]dx = 2 \cdot \frac{1}{3} arctg\frac{x}{3} - \arcsin\frac{x}{5} + 3\ln|x| + C =$$

$$= \frac{2}{3} arctg\frac{x}{3} - \arcsin\frac{x}{5} + 3\ln|x| + C.$$

Найти интегралы:

а) $\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx$; б) $\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}dx$; в) $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$; г) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$.

Решение. а) Раскроем скобки в числителе и полученное произведение почленно разделим на x^3.

$$\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx = \int \frac{x^3-3x+2x^2-6}{x^3}dx = \int\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int dx - 3\int x^{-2}dx + 2\int\frac{dx}{x} - 6\int x^{-3}dx = x + \frac{3}{x} + 2\ln|x| + \frac{3}{x^2} + C.$$

б) Преобразуем подынтегральную функцию и представим заданный интеграл в виде суммы двух других, каждый из которых табличный.

$$\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}dx = \int\frac{1+2x+x^2}{x\cdot(1+x^2)}dx = \int\frac{1+x^2}{x\cdot(1+x^2)}dx + \int\frac{2x}{x\cdot(1+x^2)}dx = \int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \ln|x| + 2arctgx + C.$$

в) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx = \int\left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = e^x + tgx + C$.

г) Чтобы привести данный интеграл к табличным, выразим стоящую в числителе 1 суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$ и разделим почленно на знаменатель.

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Интегрирование заменой переменной (метод подстановки).

Применяя соответствующие подстановки $u=\varphi(x)$, найти указанные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{5x+1}$; б) $\int e^{x^2+1}xdx$; в) $\int\frac{x^2dx}{1+x^6}$; г) $\int\frac{2xdx}{x^4-9}$.

Решение. а) Если воспользоваться подстановкой $u=5x+1$, то интеграл приводиться к табличному интегралу 5).

Пусть $u=5x+1$, тогда $du=5dx$ и $dx=\frac{du}{5}$.

Применяя формулу (1), будем иметь:

$$\int\frac{dx}{5x+1} = \int\frac{du}{5u} = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|5x+1| + C.$$

б) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 6), положим $u=x^2+1$, тогда $du=2xdx$ и $xdx=\frac{du}{2}$. Применяя формулу (1), получим:

$$\int e^{x^2=1}xdx = \int e^u\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

в) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 12), положим $u=x^3$, тогда $du=3x^2dx$ и $x^2dx=\frac{du}{3}$. Следовательно,

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^6} = \int\frac{du}{3(1+u^2)} = \frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}arctgu + C = arctgx^3 + C$$

г) Чтобы привести данный интеграл к табличному интегралу 13), положим $u=x^2$, тогда $du=2xdx$. Применяя (1), получим:

$$\int\frac{2xdx}{x^4-9} = \int\frac{du}{u^2-9} = \int\frac{du}{u^2-3^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C.$$

Найти интегралы:

а) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{6x}-7}}$; в) $\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x}$; г) $\int \frac{\cos x \cdot dx}{25+\sin^2 x}$.

Решение.а) Положим $t = \arcsin x$, тогда $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно,

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^2 x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\arcsin^3 x + C.$$

В тех случаях, когда становится ясным, какая подстановка приводит данный интеграл к табличному, можно не вводить явным образом новую переменную. Например, при решении примера а) видно, что $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ является дифференциалом функции $\arcsin x$.

Поэтому решение можно записать так:

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^2 x \cdot d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

б) Положим $u = e^{3x}$, тогда $du = 3e^{3x}dx$ и $e^{3x}dx = \frac{du}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{6x}-7}} = \int \frac{du}{3\sqrt{u^2-7}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-7}} = \frac{1}{3}\ln(u + \sqrt{u^2-7}) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x}-7}) + C.$$

в) Положим $u = 3 + \sin^2 x$, тогда $du = 2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx$. Следовательно,

$$\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|3+\sin^2 x\right| + C.$$

При решении данного примера можно было бы явным образом не вводить новой переменной и интегрировать следующим образом:

$$\int \frac{\sin 2xdx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{d(3+\sin^2 x)}{3+\sin^2 x} = \ln\left|3+\sin^2 x\right| + C.$$

г) Так как $\cos x \cdot dx$ есть дифференциал функции $\sin x$, то данный интеграл приводится к табличному интегралу 12).

$$\int \frac{\cos x \cdot dx}{25+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{5^2+\sin^2 x} = \frac{1}{5} arctg \frac{\sin x}{5} + C$$

Интегрирование по частям.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, найти интегралы:

а) $\int x \cdot e^x dx$;   б) $\int x \cos x dx$.

Решение. а) Положим $u = x$ и $dv = e^x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$.

Применяя (2), получим:

$$\int x \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

б) Положим $u = x$ и $dv = \cos x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$.

Следовательно,

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Пользуясь формулой (2), весьма важно правильно выбрать множители u и dv. Для разложения подынтегрального выражения на множители нет общих правил. Вместе с тем можно руководствоваться некоторыми частными указаниями.

Указание 1. Если подынтегральное выражение содержит произведение показательной или тригонометрической функции на многочлен, то за множитель *u* следует принять многочлен.

Указание 2. Если подынтегральное выражение содержит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на многочлен, то за множитель *u* следует принять логарифмическую функцию или обратную тригонометрическую функцию.

2.6.3 Результаты и выводы: Научились находить неопределенные интегралы разными методами.

2.7 Практическое занятие №7 (2 часа).

Тема: «Вычисление определенного интеграла»

2.7.1 Задание для работы:

1. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница
2. Геометрический смысл определенного интеграла.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_2^3 3x^2dx$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int\limits_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$; г) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Для вычисления определенного интеграла применяем формулу Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

а) $\int\limits_2^3 3x^2dx = x^3\Big|_2^3 = 27-8=19.$

б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(arctg1-arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$

в) Сделаем замену переменной. Пусть $\sqrt[4]{3x+1}=z$, тогда $3x+1=z^4$ и $3dx=4z^3dz$.

Определим пределы интегрирования для новой переменной z.

При $x=0$ переменная $z_H=1$ (нижний предел).

При $x=5$ переменная $z_B=2$ (верхний предел).

Следовательно,

$$\int\limits_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \int\limits_1^2 \frac{4z^3dz}{z} = \int\limits_1^2 4z^2dz = 4\frac{z^3}{3}\Big|_1^2 = 4\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

г) Сделаем подстановку. Пусть $x=2\sin t$; тогда $dx=2\cos tdt$. Если $x=0$, то $0=2\sin t$, откуда $t_1=0$ (нижний предел). Если $x=2$, то $2=2\sin t$, откуда $t_2=\frac{\pi}{2}$ (верхний предел).

Следовательно, $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt =$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = (2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi .$$

2.7.3 Результаты и выводы: научились вычислять определенные интегралы.

2.8 Практическое занятие №8 (2 часа).

Тема: «Нахождение вероятности события по определению и с помощью теорем сложения и умножения вероятностей»

2.8.1 Задание для работы:

1. Основные определения. Классическое определение вероятности события.
2. Классификация событий и их свойства.
3. Теоремы о сумме и произведении вероятностей.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

Брошена игральная кость. Найти вероятность события, состоящего в том, что выпало четное число очков.

Решение. Обозначим событие A = {выпало четное число очков}. Имеется 6 элементарных событий, т.е. $n = 6$. Элементарными событиями, благоприятными для A, являются события: A_1 = {выпадение 2 очков}, A_2 = {выпадение 4 очков}, A_3 = {выпадение 6 очков}. Всего таких событий три, следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Итак, вероятность того, что выпадет четное число очков, равна $0{,}5$.

Пример 6.В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешивают и наудачу извлекают 1 шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение. Всевозможными элементарными исходами являются события:

A = {извлечение белого шара},

B = {извлечение красного шара},

C = {извлечение зеленого шара},

D = {извлечение голубого шара}.

Необходимо найти событие, состоящее в появлении события B или C, или D, т.е. события $B + C + D$. Так как события B, C, D – несовместны, то

$$P(B+C+D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Таким образом, вероятность извлечения цветного шара равна $0{,}8$.

В ящике 60 груш сорта A и 40 груш сорта B. Отбирают две груши. Определить вероятности следующих событий:

а) обе груши сорта A;

б) обе груши сорта B;

в) одна груша сорта A, а другая груша сорта B.

Решение. Обозначим:

A_1 = {при первом извлечении взята груша сорта A },

A_2 = {при втором извлечении взята груша сорта A },

B_1 = {при первом извлечении взята груша сорта B },

B_2 = {при втором извлечении взята груша сорта B }.

Таким образом, нужно найти:

а) $P(A_1 \text{ и } A_2)$;

б) $P(B_1 \text{ и } B_2)$;

в) $P((A_1 \text{ и } B_2) \text{ или } (B_1 \text{ и } A_2))$.

Находим:

а) $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} = 0{,}36$; т.е. вероятность того, что обе груши сорта A, равна $0{,}36$.

б) $P(B_1 B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} = 0{,}16$.

Следовательно, вероятность того, что обе груши сорта B, равна $0{,}16$.

в) $P(A_1 B_2 + B_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(B_2/A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2/B_1) = \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{99} + \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{99} = 0{,}48$.

Таким образом, вероятность того, что одна груша сорта A, а другая груша сорта B ,равна $0{,}48$.

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент даст правильный ответ на первый вопрос, равна 0,9, вероятность правильного ответа на второй вопрос равна 0,8 и, наконец, вероятность правильного ответа на третий вопрос равна 0,7. Найти вероятность того, что студент на все три вопроса ответит правильно.

Решение. Обозначим: A = {правильный ответ на первый вопрос}, B = {правильный ответ на второй вопрос}, C = {правильный ответ на третий вопрос}.

События A, B и C являются независимыми. Применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, получим:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Итак, вероятность того, что студент на все три вопроса ответит правильно, равна $0{,}504$.

2.8.3 Результаты и выводы: Научились вычислять вероятность событий.

2.9 Практическое занятие №9 (2 часа).

Тема: «Повторные независимые испытания»

2.9.1 Задание для работы:

1. Формула Бернулли.
2. Локальная теорема Муавра-Лапласа.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

На опытной делянке посеяно 15 семян. Всхожесть всех семян одинакова и равна 80%. Найти вероятность того, что из 15 посеянных семян взойдет ровно 12.

Решение. Обозначим событие A = {из 15 посеянных семян взойдет 12}. Число посеянных семян равно числу независимых испытаний, т. е. $n = 15$. Событие A осуществится 12 раз, поэтому $k = 12$. По условию $p = 80\% = 0{,}8$, тогда $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. По формуле Бернулли имеем:

$$P_{15}(12) = \frac{15\,!}{12\,!\,(15-12)!} \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^{15-12} =$$

$$= \frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{12!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^{3} = 455\cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}008 \approx 0{,}2551.$$

Итак, вероятность того, что из 15 посеянных семян взойдет ровно 12, равна $0{,}26$.

Завод сортовых семян выпускает гибридные семена кукурузы. Известно, что семена первого сорта составляют 90%. Определить вероятность того, что из взятых наудачу для проверки 400 семян 354 будут семенами первого сорта.

Решение. Имеем $n = 400$, $p = \frac{90}{100} = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $k = 354$. Тогда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{354 - 400\cdot 0{,}9}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} = \frac{354 - 360}{6} = -1.$$

Так как функция $\varphi\,(x)$ – четная, то найдем по таблице значение функции $\varphi(x)$ при $x = 1$:

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0{,}2420.$$

Найдем искомую вероятность:

$$P_{400}(354) \approx \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} \cdot \varphi(1) \approx \frac{1}{\sqrt{36}} \cdot 0{,}2420 \approx 0{,}0403.$$

Итак, вероятность того, что из взятых наудачу для проверки 400 семян 354 будут семенами первого сорта $\approx 4\%$.

Известно, что вероятность летального исхода при определенной болезни равна $0{,}01$. Какова вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное?

Решение. Имеем $n = 90$, $p = 0{,}01$. Найдем $\lambda = n\cdot p = 90\cdot 0.01 = 0{,}9$, $k = 1$. Используя формулу, получим

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0{,}9^1}{1!}\cdot e^{-0{,}9}.$$

Найдем по таблице значение функции $\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ при $\lambda = 0{,}9$ и $k = 1$, тогда

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0{,}9^1}{1!}\cdot e^{-0{,}9} \approx 0{,}3659.$$

Таким образом, вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное, составляет 37%.

2.9.3 Результаты и выводы: Научились применять повторные независимые испытания в сельском хозяйстве.

2.10 Практическое занятие № 10 (2 часа).

Тема: «Повторные независимые испытания»

2.10.1 Задание для работы:

1. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
2. Наиболее вероятное число появления события в испытании.

3. Формула Пуассона.

2.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

Известно, что вероятность летального исхода при определенной болезни равна $0{,}01$. Какова вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное?

Решение. Имеем $n = 90$, $p = 0{,}01$. Найдем $\lambda = n \cdot p = 90 \cdot 0.01 = 0{,}9$, $k = 1$. Используя формулу, получим

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0{,}9^1}{1!} \cdot e^{-0{,}9}.$$

Найдем по таблице значение функции $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ при $\lambda = 0{,}9$ и $k = 1$, тогда

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{0{,}9^1}{1!} \cdot e^{-0{,}9} \approx 0{,}3659.$$

Таким образом, вероятность того, что в группе из 90 больных животных погибнет 1 животное, составляет 37%.

В лаборатории из партии семян, имеющих всхожесть 90%, высеяно 600 семян. Найти вероятность того, что число семян, давших всходы, не менее 520 и не более 570, если принять, что каждое посеянное зерно взойдет с одной и той же вероятностью.

Решение. Имеем $n = 600$, $p = \frac{90}{100} = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $k_1 = 520$, $k_2 = 570$. Тогда по формуле имеем

$$P(520, 570) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Найдем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{520 - 600 \cdot 0{,}9}{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = -\frac{20}{7{,}35} \approx -2{,}72,$$

$$x_2 = \frac{570 - 600 \cdot 0{,}9}{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \frac{30}{7{,}35} \approx 4{,}08.$$

Найдем по таблице значения функции $\Phi(x)$ при $x_1 = 2{,}72$ и $x_2 = 4{,}08$.

Таким образом, вероятность того, что число семян, давших всходы не менее 520 и не более 570, приближенно равна

$$P(520, 570) \approx \Phi(4{,}08) - \Phi(-2{,}72) \approx \Phi(4{,}08) + \Phi(2{,}72) = 0{,}49996 + 0{,}4967 \approx 0{,}99,$$

т.е. событие практически достоверное.

2.10.3 Результаты и выводы: Научились применять повторные независимые испытания в сельском хозяйстве.

2.11 Практическое занятие №11 (2 часа).

Тема: «Дискретные случайные величины»

2.11.1 Задание для работы:

1. Числовые характеристики ДСВ.
2. Свойства числовых характеристик ДСВ.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

Случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4.$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04.$$

Искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}6.$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \; x \le 0, \\ x, & \text{если } \; 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если } \; x > 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \; x \le 0, \\ 1, & \text{если } \; 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если } \; x > 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int_a^b x\, f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Найдем дисперсию по формуле:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

По формуле найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0{,}29.$$

2.11.3 Результаты и выводы: Научились вычислять числовые характеристики случайных величин.

2.12 Практическое занятие № 11 (2 часа).

Тема: «Непрерывные случайные величины»

2.12.1 Задание для работы:

1. Числовые характеристики НСВ.
2. Функция распределения.
3. Плотность вероятности.

2.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x \le 0,\\ \sin x, & \text{если} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & \text{если} \quad x > \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x)=F^{/}(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x < 0,\\ \cos x, & \text{если} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{если} \quad x > \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Заметим, что при $x=0$ производная $F^{/}(x)$ не существует.

Пример. Задана плотность распределения вероятностей случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x \le 0,\\ 2x, & \text{если} \quad 0 < x \le 1,\\ 0, & \text{если} \quad x > 1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0{,}5;1)$.

Решение. По формуле искомая вероятность

$$P(0{,}5 < X < 1)=\int_{0{,}5}^{1} 2x\,dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{0{,}5}^{1} = 1-0{,}25=0{,}75.$$

Пример. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X , заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x \le 0,\\ x, & \text{если} \quad 0 < x \le 1,\\ 1, & \text{если} \quad x > 1.\end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F^{/}(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x \le 0,\\ 1, & \text{если} \quad 0 < x < 1,\\ 0, & \text{если} \quad x > 1.\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле:

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)dx=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Найдем дисперсию по формуле:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

По формуле найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0{,}29.$$

2.12.3 Результаты и выводы: Научились вычислять числовые характеристики случайных величин.

2.13 Практическое занятие № 13 (2 часа).

Тема: «Законы распределения случайных величин»

2.13.1 Задание для работы:

1. Равномерное распределение.
2. Показательное распределение.

2.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Чтобы выполнить определенное задание, лабораторной крысе требуется, по меньшей мере, 2 мин, но никогда не требуется более 10 мин. Найти: а) функцию распределения вероятностей; б) вероятность того, что крыса выполнит задание менее чем за 4 мин; в) среднее время выполнения задания.

Решение. а) Рассмотрим случайную величину $T -$ время, необходимое для выполнения задания. Так как любое время между 2 и 10 мин одинаково вероятно, то T является равномерно распределенной случайной величиной. По условию $a = 2$, $b = 10$. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2, \\ \dfrac{x-2}{8}, & \text{при } 2 \le x \le 10, \\ 1, & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

б) Вероятность того, что крыса выполнит задание менее чем за 4 мин, составляет:

$$F(6) = \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

в) Среднее время выполнения задания характеризует математическое ожидание случайной величины. Тогда

$$M(X) = \frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Таким образом, среднее время выполнения задания составляет 6 мин.

Пример. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

Решение. Искомую плотность распределения, используя формулу, получим в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 8 \cdot e^{-8x}, & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Функцию распределения, используя формулу, получим в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-8x}, & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 2 \cdot e^{-2x}, & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0{,}3; 1)$.

Решение. По условию, имеем $\lambda = 2$. Воспользуемся формулой:

$$P(0{,}3 < X < 1) = e^{-2\cdot 0{,}3} - e^{-2\cdot 1} = e^{-0{,}6} - e^{-2} = 0{,}54881 - 0{,}13534 \approx 0{,}41$$

Итак, вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0{,}3;1)$, равна $0{,}41$.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 5 \cdot e^{-5x}, & при \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Решение. По условию $\lambda = 5$. Следовательно, используя формулы, находим:

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{5^2} = 0{,}04.$$

Пример. (Распределение жизненных циклов растений). Продолжительность жизни растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величину с функцией плотности вероятностей $f(x) = \frac{1}{120} e^{-\frac{x}{120}}$. Требуется: 1) найти среднюю продолжительность жизни растений; 2) долю растений данного вида, которые умирают за период в 100 дней.

Решение. 1) В выражении для $f(x)$ нетрудно узнать функцию плотности экспоненциального распределения с математическим ожиданием $a = 120$. Следовательно, средняя продолжительность жизни растений этого вида составляет 120 дней.

2) Доля растений, которые умирают за период в 100 дней, выражается вероятностью $P(0 < X < 100)$. Используя формулу, $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, получаем:

$$P(0 < X < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{120} e^{-\frac{x}{120}} dx.$$

Этот интеграл можно вычислить методом замены переменной. Пусть $u = -\frac{x}{120}$, тогда $du = -\frac{1}{120}dx$.

Вычислим новые пределы интегрирования:

x	0	100
u	0	$-\frac{100}{120} = -\frac{5}{6}$

После подстановки получаем:

$$P(0 < X < 100) = -\int_0^{-5/6} e^u du = -e^u \Big|_0^{-5/6} = -e^{-\frac{5}{6}} - (-e^0) = 1 - e^{-\frac{5}{6}} \approx 0{,}57.$$

Следовательно, доля растений, которые умирают за период в 100 дней, примерно равна 57 %.

2.13.3 Результаты и выводы: Научились использовать законы распределения случайных величин в биологических задачах.

2.14 Практическое занятие № 14 (2 часа).

Тема: «Законы распределения случайных величин»

2.14.1 Задание для работы:

1. Нормальное распределение.
2. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

2.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример. Известно, что случайная величина X подчинена нормальному закону распределения, $M(X)=6$, $\sigma^2=9$. Найти функцию плотности вероятности.

Решение. Имеем $a=6$, $\sigma=3$. Тогда, используя формулу, искомая функция имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{2\cdot 3^2}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}.$$

Пример. Известно, что случайная величина X подчиняется нормальному закону с функцией плотности вероятности

$$f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-15)^2}{200}}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

Решение. Имеем: $M(X)=a=15,\ D(X)=\sigma^2=10^2=100.$

Пример. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(10, 50)$.

Решение. Воспользуемся формулой. По условию $\alpha=10$, $\beta=50$, $a=30$, $\sigma=10$, следовательно,

$$P(10<X<50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2)=0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность:

$$P(10<X<50)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$$

Пример. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение величины X от математического ожидания по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. Воспользуемся формулой. По условию, $a=20$, $\sigma=10$, $\delta=3$. Следовательно,

$$P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right)=2\Phi(0{,}3).$$

По таблицен аходим $\Phi(0{,}3)=0{,}1179$. Искомая вероятность:

$$P(|X-20|<3)=2\cdot 0{,}1179=0{,}2358.$$

2.14.3 Результаты и выводы: Научились решать задачи по данной теме.

2.15 Практическое занятие № 15 (2 часа).

Тема: «Основные понятия математических методов»

2.15.1 Задание для работы:

1. Применение матриц в биологии. Миграционная матрица.
2. Задача на смещение популяций.

2.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Миграционная матрица.

Введём так называемую биологическую или миграционную матрицу

$$\text{От места М: К месту} \begin{pmatrix} . & A & B & C \\ A & . & . & . \\ B & . & . & . \\ C & . & . & . \end{pmatrix}$$

Каждая точка в этой матрице представляет ту часть населения, в процентах, которая перемещается с одного места на другое за единицу времени. Эти части умножаются на значения (число людей или ещё чего-либо) в местах А, В, С и в результате получаются значения А, В и С спустя единицу времени:

$$\left|\begin{matrix}\text{Перемещающаяся}\\ \text{часть М}\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}\text{Значения в}\\ \text{настоящий момент } \boldsymbol{n}\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\text{Значение в}\\ \text{последующий момент } \boldsymbol{n}'\end{matrix}\right|$$

Это матричное уравнение для миграции (переселения). Если эту операцию повторять несколько раз мы увидим как миграция, представленная матрицей **М** сказывается на значениях в местах А, В и С по пришествии нескольких промежутков времени. По мере увеличения числа умножений матриц, эти величины всё меньше зависят от их начальных значений, и некоторое время спустя они начинают зависеть, лишь от миграционной матрицы **М.** Покажем это на примере:

Пусть имеется матрица $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ для движениями между двумя популяциями, содержащими соответственно 54 и 108 особей, то есть возьмём n = $\begin{pmatrix} 54 \\ 108 \end{pmatrix}$.

После миграции новые численности популяций представляются элементами вектора n’, где: $n' = M \times n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 54 \\ 108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 90 \end{pmatrix}$

Повторение миграции приведёт к вектору:

$$n'' = M \times n' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 72 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 84 \end{pmatrix}$$

и далее к $\begin{pmatrix} 80 \\ 82 \end{pmatrix}$ и в конце концов к $\begin{pmatrix} 81 \\ 81 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\begin{pmatrix} 81 \\ 81 \end{pmatrix}$ – собственный вектор матрицы М, соответствующий собственному значению 1. Отсюда следует, что любая симметричная картина миграции, представленная элементами матрицы М, не изменяет численности двух популяций, как только последние становятся равны.

2. Задача на смещение популяций.

Обратимся к важному явлению в биологии, которому подвержено множество человеческих популяций – смещению. Под этим термином будем подразумевать объединение групп людей с различными генетическими характеристиками и последующее случайное спаривание. С этим процессом возникает вопросы: можно ли предсказать последствия смешения населения? Заключается ли в наших генах вся история смешения различных рас? И др. На эти вопросы без участия математики биологам ответить трудно. Это обусловлено сложной природой главной генетической системы – системы групп крови, а так же невозможностью обнаружения всех генотипов по её анализу.

Чтобы как-то ответить на поставленные вопросы, используем введённую нами матрицу миграции и тот маленький опыт, который мы получили, рассматривая смещение двух популяций с её помощью.

Теперь для P популяции матрица смещения квадратная и имеет порядок p×p. Элемент m_{ij}, стоящий в I - й строке и в j – м столбце, представляет ту часть j – го населения, которые мигрируют в I – е население.

Нам нужно также определить матрицу Q, составленную из частот всех генов, во всех популяциях. Предположим нам надо рассмотреть k генов, тогда матрица Q должна иметь k столбцов и p строк.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1\mathrm{p}} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2\mathrm{p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{\mathrm{p}1} & m_{\mathrm{p}2} & m_{\mathrm{p}3} & \dots & m_{\mathrm{pp}} \end{pmatrix}; \qquad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{p1} & q_{\mathrm{p}2} & q_{\mathrm{p}3} & \cdots & q_{\mathrm{p}k} \end{pmatrix}$$

Каждая строка при этом в матрице Q описывает генетический фонд для одной из популяций. Понятие генетического фонда является важным для больших популяций со случайными спариваниями, так как по существу включает в себя все имеющиеся гены безотносительно к тем индивидуумам, которые ими обладают. В результате умножения матрицы Q слева на матрицу M, получается новая матрица Q’, описывающая состояние генофондов в популяции после миграции и смешивание через одно поколение.

Q’ = Q×M

Каждый столбец матрицы Q можно рассматривать как вектор, который меняется в результате миграции. Это совпадает с тем, что имеется в матричном уравнении для миграции. То, что эти векторы составляют вместе матрицу Q очень удобно, ибо теперь одновременное изменение различных генов во всех популяциях можно описать одним уравнением.

Что бы до конца разобраться, что происходит, упростим нашу задачу, сужая и конкретизируя её.

Пусть имеется только две популяции, в первой из которой геном A обладает $^3/_4$ населения, а во второй $^1/_2$ от общего количества. Тогда соответственно геном B в первой популяции обладает $^1/_4$ а во второй $^1/_2$ населения. Пусть так же в каждом поколении $^1/_3$ каждой популяции мигрирует в другую. Вопрос: к чему приведёт эффект смещения?

Составим миграционную матрицу M, и матрицу частот всех генов Q:

$$M = \begin{pmatrix} ^2/_3 & ^1/_3 \\ ^1/_3 & ^2/_3 \end{pmatrix}; \qquad Q = \begin{pmatrix} ^3/_4 & ^1/_2 \\ ^1/_2 & ^1/_4 \end{pmatrix}$$

Запишем миграционное уравнение и определим новые генетические частоты:

Q’ = Q×M

$$Q' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} & \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Из найденных значений видно, что эффект смещения приводит к сближению частот гена A в этих двух популяциях: более высокое значение $\frac{3}{4}$ уменьшается до $\frac{2}{3}$, а более низкое значение возрастает от $\frac{1}{2}$, до $\frac{7}{12}$. Относительно гена B можно сделать такой же вывод:

Если мы захотим определить генетические частоты в следующем поколении, то нам потребуется миграционное уравнение:

Q’’ = Q’×M и т.д.

Задача, в общем-то решена, эффект смещения установлен. А в заключении хотелось бы отметить, что миграционное уравнение очень важно в популяционной генетики, так как им можно воспользоваться так как им можно воспользоваться не только для определения изменения генетических частот по известным величинам миграции, но и наоборот, по известным частотам можно вычислить коэффициенты миграции.

2.15.3 Результаты и выводы: Научились решать задачи по данной теме.

2.16 Практическое занятие №16 (2 часа).
Тема: «Дифференциальные уравнения первого и второго порядков»

2.16.1 Задание для работы:
1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение с разделенными переменными. Уравнение с разделяющимися переменными.
2. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами
3. Решение задачи Коши.

2.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти частное решение уравнения $y' = (y+1)ctgx$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Умножив обе части уравнения на dx и разделив на множитель $(y+1)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y+1} = ctgxdx \text{ или } \frac{dy}{y+1} = \frac{\cos xdx}{\sin x}.$$

Интегрируя, имеем: $\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{\cos xdx}{\sin x}$.

$$\ln|y+1| = \ln\sin x + \ln C$$

$$y+1 = C\sin x$$

$y = C\sin x - 1$ - общее решение заданного уравнения. Используя начальные условия, находим значение произвольной постоянной *С*.

$$2 = C\sin\frac{\pi}{2} - 1$$

$$2 = C - 1$$

$$C = 3$$

Следовательно, $y = 3\sin x - 1$ есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

2.16.3 Результаты и выводы: научились применять дифференциальные уравнения в практических задачах.

2.17 Практическое занятие № 17 (2 часа).
Тема: «Системы дифференциальных уравнений»

2.17.1 Задание для работы:
1. Решение систем дифференциальных уравнений.

2.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример

Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 3$, $y(0) = 0$.

Решение: В задачах чаще всего система встречается с начальными условиями, поэтому почти все примеры данного урока будут с задачей Коши. Но это не важно, поскольку общее решение по ходу дела все равно придется найти.

Решим систему методом исключения. Напоминаю, что суть метода – свести систему к одному дифференциальному уравнению. А уж дифференциальные уравнения, надеюсь, вы решаете хорошо.

Алгоритм решения стандартен:

1) Берем второе уравнение системы $\dfrac{dy}{dt} = -x + 3y$ и выражаем из него x:

$x = -\dfrac{dy}{dt} + 3y \quad (*)$

2) Дифференцируем по t обе части полученного уравнения $x = -\dfrac{dy}{dt} + 3y$:

$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt}$

Со «штрихами» процесс выглядит так:

$$(x)' = (-y' + 3y)'$$
$$x' = -y'' + 3y'$$

Важно, чтобы этот простой момент был понятен, далее я не буду на нём останавливаться.

3) Подставим $x = -\dfrac{dy}{dt} + 3y$ и $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt}$ в первое уравнение системы $\dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y$:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = -2\left(-\frac{dy}{dt} + 3y\right) + 4y$$

И проведём максимальные упрощения:

$$-\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}=2\frac{dy}{dt}-6y+4y$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=0$$

Получено самое что ни на есть обычное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Со «штрихами» оно записывается так: $y''-y'-2y=0$.

Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2-\lambda-2=0$

$D=1+8=9;\ \sqrt{D}=3$

$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}$

$\lambda_1=-1, \lambda_2=2$ – получены различные действительные корни, поэтому:
$y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$.

Одна из функций найдена, пол пути позади.

Да, обратите внимание, что у нас получилось характеристическое уравнение с «хорошим» дискриминантом, а значит, мы ничего не напутали в подстановке и упрощениях.

4) Идём за функцией $x(t)$. Для этого берём уже найденную функцию $y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$ и находим её производную. Дифференцируем по t:
$y'(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{2t})'=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}$

Подставим $y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$ и $y'(t)=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}$ в уравнение (*):

$$x(t)=-\frac{dy}{dt}+3y=-(-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t})+3(C_1e^{-t}+C_2e^{2t})=$$
$$=C_1e^{-t}-2C_2e^{2t}+3C_1e^{-t}+3C_2e^{2t}=4C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$$

Или короче: $x(t)=4C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$

5) Обе функции найдены, запишем общее решение системы:
$$\begin{cases} x(t)=4C_1e^{-t}+C_2e^{2t} \\ y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{2t} \end{cases},\ \textit{где}\ \ C_1, C_2-\textit{const}$$

6) Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям $x(0)=3$, $y(0)=0$:
$$\begin{cases} x(0)=4C_1+C_2=3 \\ y(0)=C_1+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow 3C_1=3 \Rightarrow C_1=1;\ C_2=-1$$
Здесь из первого уравнения я почленно вычел второе уравнение, более подробно о методе можно прочитать в статье. Как решить систему линейных уравнений?

Ответ: частное решение: $\begin{cases} x(t)=4e^{-t}-e^{2t} \\ y(t)=e^{-t}-e^{2t} \end{cases}$

Полученный ответ достаточно легко проверить, проверку осуществим в три шага:

1) Проверяем, действительно ли выполняются начальные условия $x(0)=3$, $y(0)=0$:

$$x(0)=4-1=3$$
$$y(0)=1-1=0$$

Оба начальных условия выполняются.

2) Проверим, удовлетворяет ли найденный ответ первому уравнению системы $\frac{dx}{dt}=-2x+4y$.

Берём из ответа функцию $x(t)=4e^{-t}-e^{2t}$ и находим её производную:
$x'(t)=(4e^{-t}-e^{2t})'=-4e^{-t}-2e^{2t}$

Подставим $x(t)=4e^{-t}-e^{2t}$, $y(t)=e^{-t}-e^{2t}$ и $x'(t)=-4e^{-t}-2e^{2t}$ в первое уравнение системы:

$$\frac{dx}{dt}=-2x+4y$$
$$-4e^{-t}-2e^{2t}=-2(4e^{-t}-e^{2t})+4(e^{-t}-e^{2t})$$
$$-4e^{-t}-2e^{2t}=-8e^{-t}+2e^{2t}+4e^{-t}-4e^{2t}$$
$$-4e^{-t}-2e^{2t}=-4e^{-t}-2e^{2t}$$

Получено верное равенство, значит, найденный ответ удовлетворяет первому уравнению системы.

3) Проверим, удовлетворяет ли ответ второму уравнению системы $\frac{dy}{dt}=-x+3y$

Берём из ответа функцию $y(t)=e^{-t}-e^{2t}$ и находим её производную:
$y'(t)=(e^{-t}-e^{2t})'=-e^{-t}-2e^{2t}$

Подставим $x(t)=4e^{-t}-e^{2t}$, $y(t)=e^{-t}-e^{2t}$ и $y'(t)=-e^{-t}-2e^{2t}$ во второе уравнение системы:

$$\frac{dy}{dt}=-x+3y$$
$$-e^{-t}-2e^{2t}=-(4e^{-t}-e^{2t})+3(e^{-t}-e^{2t})$$
$$-e^{-t}-2e^{2t}=-4e^{-t}+e^{2t}+3e^{-t}-3e^{2t}$$
$$-e^{-t}-2e^{2t}=-e^{-t}-2e^{2t}$$

Получено верное равенство, значит, найденный ответ удовлетворяет второму уравнению системы.

Проверка завершена.

Что проверено? Проверено выполнение начальных условий. И, самое главное, показан тот факт, что найденное частное решение $\begin{cases} x(t) = 4e^{-t} - e^{2t} \\ y(t) = e^{-t} - e^{2t} \end{cases}$ удовлетворяет каждому уравнению исходной системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$.

2.17.3 Результаты и выводы: научились решать системы дифференциальных уравнений.

2.18 Практическое занятие № 18 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения в биологии»

2.18.1 Задание для работы:

1. Применение дифференциальных уравнений в биологических задачах.

2.18.2 Краткое описание проводимого занятия:

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени. Известно, что количество бактерий за один час утроилось. Как измениться количество бактерий через 5 часов, если первоначальное количество равно a?

Решение. Пусть x – количество бактерий в момент времени t. Переменная величина x является функцией переменной величины t. Скорость изменения величины x выражается производной $\frac{dx}{dt}$. По условию задачи дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x,$$

где κ – некоторый коэффициент пропорциональности.

Разделим переменные и решим составленное уравнение.

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt$$

$$\ln x = kt + \ln C$$

$$\ln \frac{x}{C} = kt$$

откуда $\frac{x}{C} = e^{kt}$ или $x = C \cdot e^{kt}$ - общее решение уравнения.

Значения произвольной постоянной C определяем из начальных условий: при $t = 0, x = a$.

Следовательно, $a = C \cdot e^{\kappa \cdot 0}; C = a$.

Таким образом, $x = ae^{\kappa t}$ или $x = a(e^k)^t$ - есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Чтобы определить коэффициент пропорциональности *к*, воспользуемся теми дополнительными условиями, которые указаны в задаче: при $t=1$ (за один час) количество бактерий утроилось, то есть *x=3a*.

Следовательно, $3a = a(e^k)^1$ откуда $e^k = 3$ и мы получаем зависимость между переменными: $x = a \cdot 3^t$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, находим количество x при $t=5$, $x = a \cdot 3^5$, $x = 243a$.

Как видно, через 5 часов количество бактерий увеличится в 243 раза.

Найти значение биомассы в момент T = 12, если в начальный момент ($t=0$) значение биомассы $m_0 = 10$ и $k(t) = \dfrac{1}{1+2t}$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение, описывающее динамику развития популяции. Состояние популяции (в простейшем понимании – стада) можно охарактеризовать массой *m* этой популяции (т.е. весом всего стада), причем масса *m* является функцией времени $m = m(t)$. Считаем, что скорость прироста биомассы пропорциональна биомассе популяции с коэффициентом $k = k(t)$.

Скорость изменения биомассы характеризуется производной $m'(t)$ (при $m' > 0$ - это скорость развития, при $m' < 0$ - скорость вымирания). По условию задачи $m' = km$ или

$$m' = \frac{1}{1+2t} m \qquad (1)$$

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные *m* и t:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{1+2t} m$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{dt}{1+2t}$$

Отсюда после почленного интегрирования получаем:

$$\int \frac{dm}{m} = \int \frac{dt}{1+2t}, \text{ т.е. } \ln m = \frac{1}{2}\ln(1+2t) + \ln C$$

В данном случае произвольную постоянную удобно взять в виде $\ln C$. Из последнего равенства следует формула для общего решения дифференциального уравнения

$$m = C(1+2t)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

Для определения значения произвольной постоянной C полагаем в равенстве (2) $t = 0, m = m_0 = 10$. В результате получаем

$$10 = C(1 + 2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}}, C = 10$$

Таким образом, из общего решения дифференциального уравнения приходим к выражению

$$m(t) = 10\sqrt{1+2t} \qquad (3)$$

Положим теперь в равенстве (3) $t = T = 12$. Тогда

$$m(12) = 10\sqrt{1 + 2 \cdot 12} = 50.$$

Следовательно, в момент времени T = 12(ед.) значение биомассы будет составлять 50 (ед.).

2.18.3 Результаты и выводы: научились применять дифференциальные уравнение в биологических задачах.

2.19 Практическое занятие № 19 (2 часа).

Тема: «Системы дифференциальных уравнений в биологии»

2.19.1 Задание для работы:

1. Применение систем дифференциальных уравнений в биологических задачах.

2.19.2 Краткое описание проводимого занятия:

Модель межвидовой конкуренции

Пример. Взаимное влияние популяций двух конкурирующих видов на скорости их роста задается СДУ:

$$\begin{cases} p'(t) = 2p(t) - q(t) \\ q'(t) = -p(t) + 2q(t) \end{cases}$$

Допустим, что начальные популяции насчитывают $p(0) = 100, q(0) = 200$ особей. Требуется найти численности обоих видов в любой последующий момент времени. Каков прогноз развития данных популяций?

Решение. Решая систему, приходим к ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$p'' - 4p' + 3p = 0,$$

которое дает общее решение вида $p(t) = C_1e^{3t} + C_2e^t$.

Из первого уравнения системы получаем: $q(t) = 2p(t) - p'(t)$, что после непосредственной подстановки дает:

$$q(t) = 2(C_1e^{3t} + C_2e^t) - (C_1e^{3t} + C_2e^t)' = -C_1e^{3t} + C_2e^t$$

Таким образом, общее решение СДУ имеет вид:

$$\begin{cases} p(t) = C_1e^{3t} + C_2e^t \\ q(t) = -C_1e^{3t} + C_2e^t \end{cases}$$

Найдем частное решение СДУ. Для этого подставим в найденную систему начальные условия: $t = 0$, $p(0) = 100, q(0) = 200$. Получим:

$$\begin{cases} 100 = C_1 + C_2 \\ 200 = -C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -50 \\ C_2 = 150 \end{cases}$$

Итак, система вида

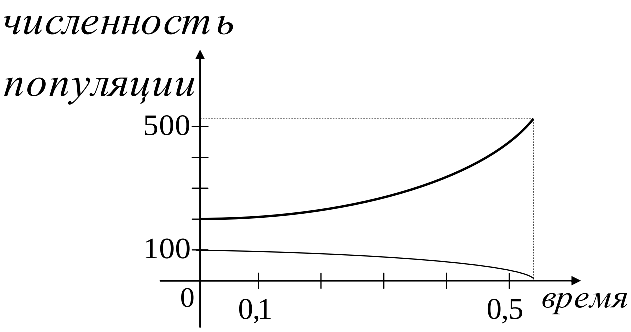
$$\begin{cases} p(t) = -50e^{3t} + 150e^t \\ q(t) = 50e^{3t} + 150e^t \end{cases}$$

позволяет найти численности обоих видов в любой момент времени.

Так как во втором уравнении все коэффициенты при экспоненциальной функции положительны, то с течением времени численность второй популяции возрастает. Очевидно, что наступит момент времени, в который $p(t) = 0$.

$$-50e^{3t} + 150e^t = 0$$
$$e^t(3 - e^{2t}) = 0$$
$$e^{2t} = 0$$
$$t \approx 0{,}55$$

Таким образом, через $t \approx 0{,}55$ ед. времени первый вид вымирает.



Модель кооперации видов

Пример. Взаимное влияние популяций двух конкурирующих видов на скорости их роста задается СДУ:

$$\begin{cases} p'(t) = -2p(t) + 4q(t) \\ q(t) = p(t) - 2q(t) \end{cases}$$

Допустим, что начальные популяции насчитывают $p(0) = 100, q(0) = 300$ особей. Требуется найти численности обоих видов в любой последующий момент времени. Каков прогноз развития данных популяций?

Решение. Решая систему, приходим к ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$p'' + 4p' = 0,$$

которое дает общее решение вида $p(t) = C_1 + C_2 e^{-4t}$.

Из первого уравнения системы получаем: $q(t) = \dfrac{2p(t) + p'(t)}{4}$, или:

$$q(t) = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2} e^{-4t}$$

Таким образом, общее решение СДУ имеет вид:

$$\begin{cases} p(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} \\ q(t) = \dfrac{C_1}{2} - \dfrac{C_2}{2} e^{-4t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия $p(0) = 100, q(0) = 300$, найдем частное решение СДУ.

$$\begin{cases} 100 = C_1 + C_2 \\ 300 = \dfrac{C_1}{2} - \dfrac{C_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 350 \\ C_2 = -250 \end{cases}$$

Итак, система вида

$$\begin{cases} p(t) = 350 - 250e^{-4t} \\ q(t) = 175 + 125e^{-4t} \end{cases}$$

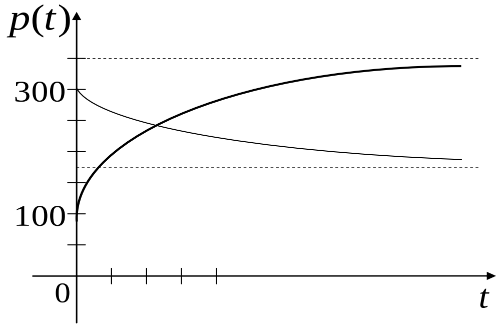
позволяет найти численности обоих видов в любой момент времени.

Так как:

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = 350$$

$$\lim_{t \to +\infty} q(t) = 175,$$

то при данных условиях каждая популяция достигает равновесного состояния, которое может поддерживаться в данной среде.



2.19.3 Результаты и выводы: научились решать биологические задачи с помощью систем дифференциальных уравнений.

2.20 Практическое занятие № 20 (2 часа).

Тема: «Системы дифференциальных уравнений в биологии»

2.20.1 Задание для работы:

1. Решение систем логистических уравнений.

2.20.2 Краткое описание проводимого занятия:

Системы логистических уравнений

Пример. Взаимодействие двух видов описывается СДУ

$$\begin{cases} p'(t) = p(t)(0{,}15 - 5\cdot 10^{-4}\cdot p(t) + 2\cdot 10^{-4}\cdot q(t)) \\ q'(t) = q(t)(0{,}4 - 10^{-4} p(t) - 4\cdot 10^{-5} q(t)) \end{cases}$$

Указать вид взаимодействия и дать биологическую интерпретацию каждому коэффициенту. Найти равновесный размер популяций.

Решение. Это взаимодействие вида «хищник – жертва», причем $p(t)$ – численность хищника, $q(t)$ – численность жертвы.

Коэффициенты 0,15 и 0,4 означают естественную рождаемость вида хищника и вида жертвы соответственно; $5\cdot 10^{-4}$ и $4\cdot 10^{-5}$ – их естественную смертность; коэффициент 10^{-4} – смертность жертв за счет хищника; $-2\cdot 10^{-4}$ показывает рождаемость хищника за счет жертв.

Решая систему $\begin{cases} 5\cdot 10^{-4}\cdot p(t) - 2\cdot 10^{-4}\cdot q(t) = 0{,}15 \\ 10^{-4} p(t) + 4\cdot 10^{-5} q(t) = 0{,}4 \end{cases}$, получаем: $\begin{cases} p(t) = 2150 \\ q(t) = 4575 \end{cases}$ – равновесные размеры хищника и жертвы.

2.20.3 Результаты и выводы: научились решать биологические задачи с помощью систем дифференциальных уравнений.

2.21 Практическое занятие №21 (2 часа).

Тема: «Элементы математической статистики»

2.21.1 Задание для работы:

1. Построение полигона и гистограммы.

2.21.2 Краткое описание проводимого занятия:

Из крупного стада коров произведена случайная выборка, получено 20 вариант удоя коров за 300 дней лактации (в ц): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3. Получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот.

Решение. Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания: 25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Максимальное значение признака составляет $46{,}2$ ц, а минимальное – $25{,}9$ ц. Разница между ними составляет $20{,}3$ ц. Этот интервал надо разбить на определенное количество классов. При малом объеме выборки ($20 - 40$ вариант) намечают $5 - 6$ классов. Возьмем длину классового интервала $h = 5$. Получаем пять интервалов: первый $25 - 30$, второй $30 - 35$, третий $35 - 40$, четвертый $40 - 45$, пятый $45 - 50$ (начало первого класса не обязательно должно совпадать со значением минимальной варианты).

С помощью ранжированного ряда определим частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадет два значения ($25{,}9$ и $27{,}0$), поэтому $n_1 = 2$. Во второй интервал попадают пять значений, поэтому $n_2 = 5$. Аналогично $n_3 = 9$, $n_4 = 3$, $n_5 = 1$.

Теперь найдем относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}1 \qquad \text{(в первый интервал);}$$

$$W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{5}{20} = 0{,}25 \qquad \text{(во второй интервал);}$$

$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{9}{20} = 0{,}45 \qquad \text{(в третий интервал);}$$

$$W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15 \qquad \text{(в четвертый интервал);}$$

$$W_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \qquad \text{(в пятый интервал).}$$

Для проверки вычисляем сумму относительных частот:

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}45 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1.$$

Тот факт, что в сумме получили единицу, подтверждает правильность вычислений.

По формуле $P_i' = \frac{W_i}{h}$ вычислим плотности P_i' относительных частот вариант. Получаем:

$$P_1' = \frac{W_1}{h} = \frac{0{,}1}{5} = 0{,}02 \qquad \text{(для первого интервала);}$$

$$P_2' = \frac{W_2}{h} = \frac{0{,}25}{5} = 0{,}05 \qquad \text{(для второго интервала);}$$

$$P_3' = \frac{W_3}{h} = \frac{0{,}45}{5} = 0{,}09 \qquad \text{(для третьего интервала);}$$

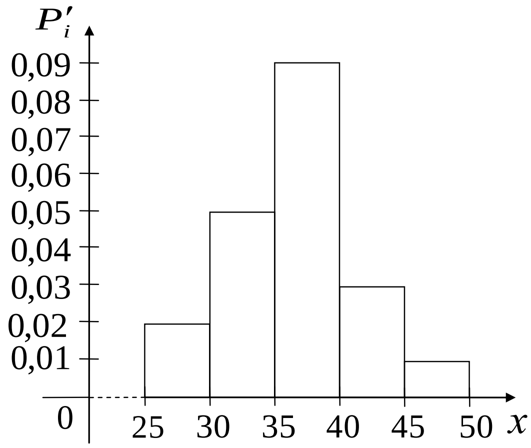
$$P_4' = \frac{W_4}{h} = \frac{0{,}15}{5} = 0{,}03 \qquad \text{(для четвертого интервала);}$$

$$P'_5 = \frac{W_5}{h} = \frac{0,05}{5} = 0,01 \qquad \text{(для пятого интервала).}$$

Полученные результаты сведем в таблицу:

Интервал значений удоя (ц)	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50
Частоты вариант n_i	2	5	9	3	1
Относительные частоты W_i	0,1	0,25	0,45	0,15	0,05
Плотность относительных частот P'_i	0,02	0,05	0,09	0,03	0,01

Для построения гистограммы относительных частот частичные интервалы изображают на оси абсцисс, а значения плотностей относительных частот откладывают на оси ординат.



2.21.3 Результаты и выводы: Научились наглядно представлять данные статистического распределения.

2.22 Практическое занятие № 21 (2 часа).
Тема: «Элементы биометрии»

2.22.1 Задание для работы:
1. Вычисление основных выборочных характеристик.

2.22.2 Краткое описание проводимого занятия:
Из крупного стада коров произведена случайная выборка, получено 20 вариант удоя коров за 300 дней лактации (в ц): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3. Вычислить основные выборочные характеристики.

Решение. Расчеты удобно проводить с помощью таблицы:

№ опыта	Результат обследования x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	35,9	– 0,1	0,01
2	35,3	– 0,7	0,49
3	42,7	6,7	44,89

4	45,2	9,2	84,64
5	25,9	– 10,1	102,01
6	35,3	– 0,7	0,40
7	33,4	– 2,6	6,76
8	27,0	– 9,0	81,00
9	35,9	– 0,1	0,01
10	38,8	2,8	7,84
11	33,7	– 2,3	5,29
12	38,6	2,6	6,76
13	40,9	4,9	24,01
14	35,5	– 0,5	0,25
15	44,1	8,1	65,61
16	37,4	1,4	1,96
17	34,2	– 1,8	3,24
18	30,8	– 5,2	27,04
19	38,4	2,4	5,76
20	31,3	– 4,7	22,09
$\sum$	720,3	0	490,15

Просуммировав варианты x_i, занесем сумму $\sum x_i$ в нижнюю строку таблицы под соответствующим столбцом. Разделив эту сумму на 20, получим:

$$\bar{x} = 36{,}015 \approx 36{,}0 .$$

Теперь заполняем следующий столбец таблицы, в который записываем разность $x_i - \bar{x}$. Для контроля можно вычислить сумму всех таких разностей. Если разности вычислены правильно, то их сумма равна нулю.

Затем возводим эти разности в квадрат и заполняем последний столбец таблицы. Вычислив сумму $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 490{,}15$ и разделив ее на $n - 1 = 20 - 1 = 19$. Получим значение дисперсии

$$s^2 = \frac{490{,}15}{19} \approx 25{,}8 .$$

Извлекая квадратный корень из величины s^2, находим:

$$s \approx 5{,}08 ,$$

затем ошибку средней:

$$s_{\bar{x}} = \frac{5{,}08}{\sqrt{20}} \approx \frac{5{,}08}{4{,}47} \approx 1{,}34 .$$

Вычисляем коэффициент вариации:

$$V = \frac{5{,}08}{36} \cdot 100\% \approx 14\% .$$

Поскольку $10\% < V < 20\%$, то изменчивость удоев за 300 дней следует считать средней.

Таким образом, $\bar{x} \approx 36$, $s^2 \approx 25{,}8$, $s \approx 5{,}08$, $s_{\bar{x}} \approx 1{,}34$, $V \approx 14\%$.

2.22.3 Результаты и выводы: Научились вычислять выборочные характеристики.

2.23 Практическое занятие №23 (2 часа).

Тема: «Доверительные интервалы»

2.23.1 Задание для работы:

1. Нахождение доверительного интервала для математического ожидания.
2. Нахождение доверительного интервала для среднеквадратического отклонения.

2.23.2 Краткое описание проводимого занятия:

По выборке объема $n=16$ из генеральной совокупности определены выборочная средняя $\bar{x}=41{,}7$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s=4$. Найти 95-процентный доверительный интервал для генеральной средней.

Решение. По условию задачи дана малая выборка ($n<30$), поэтому доверительный интервал имеет вид:

$$I_\gamma=\left(\bar{x}-t_\gamma\cdot\frac{s}{\sqrt{n}};\,\bar{x}+t_\gamma\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\bar{x}=41{,}7$, $s=4$, $n=16$, а t_γ определяется по таблице приложения 4. Для $\gamma=0{,}95$ и $n=16$ имеем $t_\gamma=2{,}13$.

Тогда

$$I_\gamma=\left(41{,}7-2{,}13\cdot\frac{4}{\sqrt{16}};\,41{,}7+2{,}13\cdot\frac{4}{\sqrt{16}}\right)=(39{,}57;\,43{,}83).$$

Итак, доверительный интервал равен $(39{,}57;\,43{,}83)$.

По выборке объема $n=45$ из генеральной совокупности определены выборочная средняя $\bar{x}=28$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s=2{,}6$. С надежностью $\gamma=0{,}99$ определить доверительный интервал для генеральной средней.

Решение. По условию задачи дана большая выборка ($n\ge 30$), поэтому доверительный интервал имеет вид:

$$I_\gamma=\left(\bar{x}-t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}};\,\bar{x}+t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\bar{x}=28$, $s=2{,}6$, $n=45$.

Величина t есть аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0{,}99}{2}=0{,}495$.

По таблице приложения 3 находим: $t=2{,}58$.

Тогда

$$I_\gamma=\left(28-2{,}58\cdot\frac{2{,}6}{\sqrt{45}};\,28+2{,}58\cdot\frac{2{,}6}{\sqrt{45}}\right)\approx(27;\,29).$$

Итак, доверительный интервал равен $(27;\,29)$.

По выборке объема $n=20$ из генеральной совокупности определено исправленное среднее квадратическое отклонение $s=3{,}5$. Найти 95-процентный доверительный интервал для генерального отклонения.

Решение. Доверительный интервал для генерального среднего квадратического отклонения имеет вид:

$$I_\gamma=\begin{cases}(s\cdot(1-q);\,s\cdot(1+q)), & \text{ïðè } q<1,\\ (0;\,s\cdot(1+q)), & \text{ïðè } q>1.\end{cases}$$

Величину q определяем по таблице приложения:

$$q = q(0{,}95;\ 20) = 0{,}37.$$

Так как $q < 1$, то

$$I_\gamma = (s \cdot (1-q);\ s \cdot (1+q)).$$

Тогда

$$I_\gamma = (3{,}5 \cdot (1-0{,}37);\ 3{,}5 \cdot (1+0{,}37)) \approx (2{,}2;\ 4{,}8).$$

Итак, доверительный интервал равен $(2{,}2;\ 4{,}8)$.

Высота растений яровой пшеницы X – случайная величина, имеющая нормальное распределение. Сколько необходимо отобрать растений, чтобы с вероятностью в 95% выборочная средняя отличалась от математического ожидания меньше, чем на 2 см, если известно, что $s = 5{,}7$?

Решение. Имеем $\gamma = 0{,}95$, тогда

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475.$$

По таблице приложений находим: $t = 1{,}96$.

Тогда

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 5{,}7^2}{2^2} \approx 31{,}2.$$

Таким образом, $n \geq 32$.

2.23.3 Результаты и выводы: научились находить доверительные интервалы.

2.24 Практическое занятие № 24 (2 часа).

Тема: «Теория корреляции»

2.24.1 Задание для работы:

1. Построение корреляционной таблицы.
2. Вычисление коэффициента корреляции.

2.24.2 Краткое описание проводимого занятия:

Для 10 петушков леггорнов 15-дневного возраста были получены следующие данные о массе их тела X (г) и массе гребня Y (мг):

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;

Решение. Сначала сделаем промежуточные вычисления, которые удобно располагать в виде таблицы:

№	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
1	83	56	0	0	– 4	16	0
2	72	42	–11	121	– 18	324	198

3	69	18	–14	196	– 42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	– 4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	– 8	64	– 29	841	232
10	70	48	– 13	169	–12	144	156
$\sum$	830	600	0	1000	0	6854	2302

Вычисляем средние:

$$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83; \quad \bar{y} = \frac{600}{10} = 60.$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000,$$
$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 6854,$$
$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2302.$$

Подставляя вычисленные значения в формулу (83), получаем:

$$r = \frac{2302}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{6854}} \approx 0{,}88.$$

Вывод: между массой тела X и массой гребня Y у 15-дневных петушков существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

2.24.3 Результаты и выводы: научились применять теорию корреляции в задачах сельского хозяйства.

2.25 Практическое занятие № 25 (2 часа).

Тема: «Теория корреляции»

2.25.1 Задание для работы:

1. Составить уравнение прямой регрессии Y на X.
2. Построить линию регрессии.

2.25.2 Краткое описание проводимого занятия:

Для 10 петушков леггорнов 15-дневного возраста были получены следующие данные о массе их тела X (г) и массе гребня Y (мг):

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

составить уравнение прямой регрессии Y на X.

Решение. 1) Сначала сделаем промежуточные вычисления, которые удобно располагать в виде таблицы:

№	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	83	56	0	0	– 4	16	0
2	72	42	–11	121	– 18	324	198
3	69	18	–14	196	– 42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	– 4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	– 8	64	– 29	841	232
10	70	48	– 13	169	–12	144	156
$\sum$	830	600	0	1000	0	6854	2302

Вычисляем средние:

$$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83; \quad \bar{y} = \frac{600}{10} = 60.$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000,$$
$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 6854,$$
$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2302.$$

Используя данные из таблицы, по формуле находим коэффициент регрессии $b_{Y/X}$:

$$b_{Y/X} = \frac{2302}{1000} \approx 2{,}3.$$

Подставляя теперь в формулу найденные значения $\bar{x} = 83$, $\bar{y} = 60$, $b_{Y/X} = 2{,}3$, имеем:

$$y - 60 = 2{,}3(x - 83).$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$y = 2{,}3x - 130{,}9.$$

Отметим, что полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении x от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что при массе петушка 80 г масса его гребня составит:

$$y = 2{,}32 \cdot 80 - 132{,}56 \approx 53 \text{ мг}.$$

Таким образом, $r \approx 0{,}88$, $y = 2{,}3x - 130{,}9$.

2.25.3 Результаты и выводы: научились применять теорию корреляции в задачах сельского хозяйства.