ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.05 Алгебра и геометрия

Направление подготовки (специальность) 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Профиль образовательной программы “Автоматизированные системы обработки информации и управления”

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция № 1 (2 часа).

Тема: «Элементы теории матриц»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Матрицы, их классификация
2. Действия над матрицами
3. Решение типовых задач

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Матрицы, их классификация

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Прямоугольная таблица, содержащая *m* строки *n* столбцов действительных чисел называется **числовой матрицей.**

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1\gamma}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2\gamma}\cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{ij}\cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mj}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенно $A_{m\times n}=(a_{ij})$. Далее будем рассматривать числовые матрицы.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее **элементами**, где i=1,2,…m номер строки, j=1,2,…n номер столбца.

Матрицы обозначается заглавными буквами латинского алфавита A, B, C…, элементы строчными буквами.

Если число строк и столбцов одной матрицы равно числу строк и столбцов другой матрицы, то они называются **одноразмерными матрицами.**

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной матрицей**. Квадратную матрицу размером n×n называют матрицей **n-ого порядка**.

$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-ого порядка

a_{11}, a_{22} элементы главной диагонали

a_{12}, a_{21} элементы побочной диагонали

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ квадратная матрица 3-его порядка

a_{11}, a_{22}, a_{33} элементы главной диагонали

a_{13}, a_{22}, a_{31} элементы побочной диагонали

Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие выше (ниже) главной диагонали равны нулю, называется **треугольной матрицей.**

Квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали равны нулю, называется **диагональной матрицей.**

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны между собой, называется **скалярной матрицей.**

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны 1, называется **единичной матрицей.**

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ единичная матрица 3-его порядка

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей (0).**

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором (или вектор- столбец, или вектор-строка соответственно).**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е.$(5)_{1\times1}$ есть 5.

Одноразмерные матрицы **равны между собой**, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице А. тогда и только тогда, когда $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$

2. Действия над матрицами

Одноразмерные матрицы можно складывать.

Алгебраической суммой двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$ (i=1,2..m, j=1,2…n)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -9 & 8 \\ 6 & -4 & 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 12 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -7 & 15 \\ 6 & 0 & -2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Операция сложения одноразмерных матриц обладает следующими свойствами:

-коммутативность (переместительный закон) A+B=B+A

-ассоциативность (сочетательный закон)

(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C

- A+**0**=A

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число k называется матрица

$B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}= ka_{ij}$(i=1,2..m, j=1,2…n). Т.е. **Произведением числа k на матрицу А** называется матрица, определяемая равенством:

$$\mathbf{k}\bullet\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Пример:

A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, число k=2, 2A=$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

Матрица (–A), все элементы которой получены путем умножения соответствующих элементов матрицы A на (-1) называется матрицей **противоположной A.**

Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

- $1\cdot A=A$
- $\kappa\cdot(A+B)=\kappa\cdot A+\kappa\cdot B$
- $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
- $(\alpha\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta A)$
- $A+(-A)=\mathbf{0}$

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы**.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$, где i=1,2..m, k=1,2,..

…p, т.е. элемент i-й строки и k-ого столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-ого столбца матрицы B.

Иными словами: **Произведение двух матриц A и B** обозначается символом AB и определяется **равенством:**

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

Пример: A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ C=A·B=$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 1 \\ -19 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

c_{11}=3·5+1·(-2)+2·(-2)=9

c_{12}=3·1+1·3+2·2=10

c_{13}=3·0+1·1+2·0=1

c_{21}=-1·5+0·(-2)+7·(-2)=-19

c_{22}=-1·1+0·3+7·2=13

c_{23}=-1·0+0·1+7·0=0

Если матрицы A и B - квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

- AB≠BA, если данное равенство выполняется, то матрицы A и B называют перестановочными (обладают свойством коммутации);

- A·(B·C)= (A·B)·C (ассоциативность);

- A·(B+C)=AB+AC (дистрибутивность умножения относительно сложения);

- A·E=A

- α·(AB)= (α·A)B.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строк столбцами с с сохранением нумерации, называется **матрицей транспонированной к данной**. Обозначается A^T (A′).

Пусть дана матрица $A_{n\times m}$=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, тогда

$$A^{T}_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

3. Решение типовых задач

Пример: Вычислить матрицу: $\mathbf{D=A\cdot B^{T}-2E+C^{2}}$,

если $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

1. Составим матрицу B^{T}, поменяв строки и столбцы матрицы B местами с сохранением нумерации $B^{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найдем произведение матриц $A\cdot B^{T}$

$$A\cdot B^{T}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-3)\cdot 3+1\cdot(-2) & 2\cdot 0+(-3)\cdot 4+1\cdot 2 \\ 1\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot(-2) & 1\cdot 0+2\cdot 4+0\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Найдем произведение $2\cdot E=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Найдем матрицу $C^{2}=C\cdot C$

$$C^{2}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 3 \\ -1\cdot 2+3\cdot(-1) & -1\cdot 1+3\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Найдем матрицу $D=A\cdot B^{T}-2E+C^{2}$, подставив найденные матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-9&-10\\7&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&5\\-5&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9-2+3&-10-0+5\\7-0-5&8-2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&-5\\2&14\end{pmatrix}$$

Ответ: $D=\begin{pmatrix}-8&-5\\2&14\end{pmatrix}$

Пример: А=$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$. Найдём обратную матрицу для А с помощью элементарных преобразований.

Для этого припишем к матрице А единичную матрицу и будем применять элементарные преобразования к обеим матрицам А и Е так, чтобы на месте матрицы А получить единичную матрицу. Тогда на месте единичной матрицы получится обратная матрица $А^{-1}$.

$$A/E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&-2&0&1&0\\2&-2&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}-2\\ \hookleftarrow\\ \hookleftarrow\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-6&-2&1&0\\0&-6&-3&-2&0&1\end{array}\right):(-3)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&2&2/3&-1/3&0\\0&-6&-3&-2&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\\ -2;\,6\\ \qquad\hookleftarrow\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1/3&2/3&0\\0&1&2&2/3&-1/3&0\\0&0&9&2&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ 1/9\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1/3&2/3&0\\0&1&2&2/3&-1/3&0\\0&0&1&2/9&-2/9&1/9\end{array}\right)\begin{array}{l}\qquad\leftarrow\\ \leftarrow;\\ -2\quad 2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/9&2/9&2/9\\0&1&0&2/9&1/9&-2/9\\0&0&1&2/9&-2/9&1/9\end{array}\right)=E/A^{-1}$$

Итак, нашли $A^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

1.2 Лекция № 2 (2 часа).

Тема: «Элементы теории определителей»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Определители: определение, способы вычисления.

2. Теорема Муавра - Лапласа.

3. Свойства определителей

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определители: определение, способы вычисления

Каждой квадратной матрице A соответствует число - определитель данной матрицы Δ (det A).

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ **- определитель второго порядка**.

B=$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ **- определитель третьего порядка**

Для вычисления определителя второго порядка используют формулу:

A=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21}$

Пример:

1) A=(a_{11}) матрица 1-ого порядка

$\Delta_1=|a_{11}|=a_{11}$ $|7|=7$ $|-3|=-3$

2) A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрица 2-ого порядка

$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3) - (-2) \cdot 3 = -21 + 6 = -15$$

Определителем третьего порядка называют число, обозначаемое символом

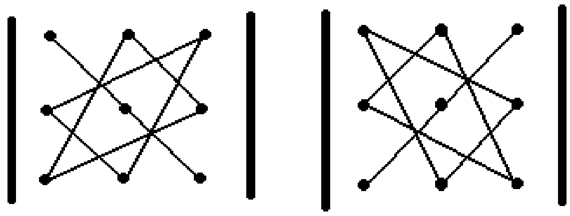
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2)$$

Определитель 3-его порядка можно вычислить по правилу треугольника, схеме Сарроса.

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) берутся со знаком «+», а какие со знаком«—», полезно использован следующее правило треугольников:



«+» «-»

Это правило позволяет легко записать формулу (2) и вычислить данный определитель.

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрица 3-его порядка

Правило треугольника:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot4\cdot4+(-2)\cdot3\cdot5+(-1)\cdot3\cdot0-(-2)\cdot4\cdot(-1)-5\cdot5\cdot3-4\cdot3\cdot0=-33$$

2. Теорема Муавра – Лапласа

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-ого порядка называется определитель n-1 порядка, полученного путем вычеркивания из исходного определителя i-ой строки и j-ого столбца.

Пример:

A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $M_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}=-35$ $M_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=20$ $M_{32}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=14$

Алгебраическим дополнением A_{ij}элемента a_{ij} квадратной матрицы n-ого порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$

Например, если элемент a_{12} находится на пересечении первой строки и второго столбца, то для него p=1+2=3 и его алгебраическим дополнением является

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{31})$$

Пример: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -35$ $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=1\cdot 20=20$

Теорема Лапласа: Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{is}\ .$$

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{21} + a_{13} + A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

Пример: Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Решение:

Для вычисления данного определителя воспользуемся теоремой Лапласа: Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов, какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Для более удобного вычисления выполним элементарные преобразования: умножим элементы 1-ой строки на 1, (-2), (-1), и прибавляя их соответственно к элементам 2-ой, 3-ей, 4-ой строк, добиваемся того, чтобы все элементы 3-его столбца (кроме a_{13}) равнялись нулю и разложим определитель по элементам 3-его столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot1\cdot0 + 2\cdot3\cdot2 + 6\cdot1\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot6 - 2\cdot1\cdot0 - (-1)\cdot(-1)\cdot3 =$$

$$= 0 + 12 - 6 - 12 - 0 - 3 = -9$$

Для вычисления последнего определителя воспользовались правилом треугольника.

Ответ: определитель матрицы равен - 9.

Пример: Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Решение: Раскладывая определитель по элементам первой строки, получаем:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $=1(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+2(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+3(-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$=1 (1*2 - 0*1) - 2(0*2 - 0*2) + 3(0*1 - 2*1)= - 4

Ответ: Δ=-4

Пример: Вычислить определитель самостоятельно: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Ответ: Δ=-2

3. Свойства определителей

1. Определитель не изменяется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами,

2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель с двумя одинаковыми сроками (столбцами) равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя;

5. Если все элементы какой-то строки или столбца равны 0, то и определитель равен 0.

6. Если все элементы какой-то строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен 0.

Теорема о существовании обратной матрицы: Квадратная матрица имеет обратную тогда и только тогда, кода ее определитель отличен от нуля.

Матрица, у которой определитель отличен от нуля, **называется невырожденной**, в противном случае она вырождена.

1.3 Лекция № 3 (2 часа).

Тема: «Системы линейных уравнений»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Определения и основные понятия.

2. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

3. Метод обратной матрицы.

4. Метод Гаусса.

5. Ранг матрицы

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определения и основные понятия

Структура вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------------ \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ ------------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} , b_i (i=1,2,…m) (j=1,2,…n) – произвольные числа:

a_{ij} – коэффициенты при переменных x_j;

b_i – свободные члены,

называется **системой m линейных уравнений относительно n неизвестных.**

Решением системыm линейных уравнений относительно n неизвестных называется упорядоченный набор чисел (кортеж) $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в истинное числовое равенство.

Решить систему - значит, найти множество всех ее решений.

Система может иметь: а) единственное решение; б) бесконечное множество решений; в) пустое множество решений.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Система, имеющая пустое множество решений, называется **несовместной.**

Совместная система, имеющая единственное решение, называется **определенной**.

Совместная система, имеющая бесконечное множество решений, называется **неопределенной**.

Две системы называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Рассмотрим элементарные преобразования, позволяющие получить систему, равносильную данной:

а) перестановка уравнений;

б) вычеркивание из системы уравнения вида $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=0$;

в) умножение обеих частей, какого-то уравнения на одно и то же число, отличное от нуля;

г) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и тоже число.

2. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Для простоты рассмотрим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - это определитель матрицы коэффициентов A(det A) или его еще называют определителем системы и он составлен из коэффициентов при неизвестных. Обозначим его Δ.

2) $c_1a_{22} - c_2a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ - - определитель, который получается из det A, **если в** нем столбец коэффициентов при X_1 (первый столбец) заменить на столбец свободных членов. Обозначим его Δx_1.

3) $c_2a_{11} - c_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$ - определитель, который получится, если в det A столбец коэффициентов при x_2 заменить на столбец правых частей. Обозначим его Δx_2

Можно доказать, что $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, a $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$

Если мы возьмемсистему трех уравнений с тремя неизвестными, то формулы останутся те же:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

Эти формулы широко известны и называются **формулами Крамера.**

Формулы Крамера применяются для решения систем линейных уравнений, если определитель системы отличен от нуля (матрица коэффициентов является невырожденной)

Если же $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_1 или Δ_2 или Δ_3 не равен нулю, то система (1.2) решений не имеет.

Если же $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пример: Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Вычислим определитель Δ системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot (-6) -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) - 8 \cdot 1 \cdot (-1) = -24 - 12 - 6 + 24 + 9 + 8 = -1 \neq 0$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot (-6) -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-1) \cdot 1 = 12 + 15 - 12 - 30 + 18 - 4 = -1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}8 & -4 & -6\\ 1 & 2 & -1\\ 4 & -5 & -3\end{vmatrix}=8\cdot2\cdot(-3)+(-4)\cdot(-1)\cdot4+1\cdot(-5)\cdot(-6)-$$

$$-6\cdot2\cdot4-8\cdot(-5)\cdot(-1)-(-4)\cdot1\cdot(-3)=-48+16+30+48-40-12=-6$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}8 & 3 & -4\\ 1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & -5\end{vmatrix}=8\cdot1\cdot(-5)+3\cdot2\cdot4+(-4)\cdot1\cdot1-(-4)\cdot1\cdot4-1\cdot3\cdot(-5)-8\cdot2\cdot1=$$

$$=-40+24-4+16+15-16=-5$$

Таким образом,

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=1,\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-6}{-1}=6,\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-5}{-1}=5.$$

Ответ: (1,6,5)

3. Метод обратной матрицы

Обозначим через матрицу А матрицу системы (*), составленную из коэффициентов при неизвестных, через X – матрицу – столбец из неизвестных, через B – матрицу-столбец из свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица A^{-1} называется обратной для матрицы А, если $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, где Е – единичная матрица того же порядка, что и А, и матрица А называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю, т.е. $\Delta=|A|\neq0$

Каждая невырожденная матрица А имеет обратную, причем

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

где A_{11}, A_{12}, …A_{33} – алгебраические дополнения элементов матрицы А.

Систему (*) можно записать в матричной форме: A·X=B.

Умножим слева на A^{-1} обе части этого равенства, получим:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, имеем $X = A^{-1} \cdot B$ – это решение системы в матричном виде. Следовательно, матрица – решение X находится как произведение A^{-1} и B.

Пример: Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Обозначим: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда в матричной форме система имеет вид: A·X=B. Чтобы решить матричное уравнение, составим матрицу обратную матрице А.

Чтобы определить, имеет ли матрица А обратную нужно найти её определитель. Если$\Delta_{A,} \neq 0$, то матрица А имеет обратную матрицу A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 21 - 8 - 28 - 15 - 4 = -44$$

Так как определитель матрицы А $|A| \neq 0$, то матрица А имеет обратную матрицу A^{-1}

Составим транспонированную матрицу: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

Найдем алгебраические дополнения для Aijпо формуле:

Aij=(-l)$^{i+j}$ • $M_{:/,}$ где $M_{ц}$ – минор. Минором $M_{ц}$ называется определитель матрицы, полученный путём вычёркивания i-строки и j-столбца.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & -5\end{vmatrix}=-5-2=-7$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-(15+8)=-23$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=3-4=-1$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 7\\ -1 & -5\end{vmatrix}=-(-5+7)=-2$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 7\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-10-28=-38$$

$$A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-(-2-4)=6$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2-7=-9$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 7\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-(-4+21)=-17$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2+3=5$$

Из алгебраических дополнений транспонированной матрицы составим присоединённую матрицу

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-7 & -23 & -1\\ -2 & -38 & 6\\ -9 & -17 & 5\end{pmatrix}$$

Находим обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A}$

$$A^{-1}=-\frac{1}{44}\cdot\begin{pmatrix}-7 & -23 & -1\\ -2 & -38 & 6\\ -9 & -17 & 5\end{pmatrix}$$

Можно проверить правильность составления обратной матрицы A^{-1} • A= E:

Теперь по формуле $X=A^{-1}\cdot B$ находим матрицу X

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -23 & -1 \\ -2 & -38 & 6 \\ -9 & -17 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{1}{44} \cdot (-7 \cdot 3 - 23 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{44} \cdot (-2 \cdot 3 - 38 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = 1$$

$$x_3 = -\frac{1}{44} \cdot (-9 \cdot 3 - 17 \cdot 1 + 5 \cdot 0) = 1$$

Ответ: (1;1;1)

4. Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы методом Гаусса на конкретном примере:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последнего, находятся значения переменных.

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при переменных и свободных членов, поменяв первую и вторую строку, чтобы a_{11}=1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Умножим элементы первой строки на -2 и прибавим к соответствующим элементам второй строки, умножим элементы первой строки на -7 и прибавим к соответствующим элементам третьей строки. В результате получим в первом столбце, во второй и третьей строке 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Умножим элементы второй строки на -9 а элементы третьей на 5 и полученные элементы второй строки прибавим к соответствующим элементам третьей строки, тогда получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 45 & -54 & -9 \\ 0 & -45 & 10 & -35 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -44 & -44 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Запишем преобразованные уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - 6x_3 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Теперь можно найти значения переменных, подставляя последовательно значение x_3 во второе уравнение, найдем x_2, подставим значения x_2 и x_3 в первое уравнение найдем x_1

$$(x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1) \Rightarrow x_1 = 1$$

Ответ: {(1;1;1)}

Пример:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24 \\ -15x_1 + 4x_2 = -42 \end{cases}$$

Исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого мы должны прибавить ко второму уравнению первое, умноженное на (- 4), а к третьему прибавить первое, умноженное на 5.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 & \textit{ведущее уравнение} \quad (-4) \quad 5 \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24 & \qquad\qquad\qquad\quad \hookleftarrow \\ -15x_1 + 4x_2 = -42 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \hookleftarrow \end{cases}$$

Получим систему равносильную исходной.

На втором шаге исключения мы не трогаем первое уравнение. Другие два уравнения содержат два неизвестных x_2 и x_3 и к ним можно применить ту же процедуру исключения. Для этого к третьему уравнению прибавляем первое, умноженное на 3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 & \\ -3x_1 + 17x_3 = -8 & 3 \\ -9x_2 - 25x_3 = -2 & \hookleftarrow \end{cases}$$

Вновь получим систему равносильную исходной.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ \qquad -3x_1 + 17x_3 = -8 \\ \qquad\qquad 26x_3 = -26 \end{cases}$$

Далее наши действия очевидны. Из третьего уравнения $x_3 = -1$, подставляя значения x_3 во второе уравнение, получаем $x_2 = -3$ и, наконец, из первого уравнения получаем $x_1 = 2$.

Если в результате преобразований получим уравнение, в котором все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то полученное уравнение, а, следовательно, и вся система несовместны, если же свободный член равен нулю, то система является неопределенной.

Решите предложенные системы методами Крамера и Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;-3)Ответ: система несовместна.

5. Ранг матрицы

Для решения и исследования математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матриц.

В матрице $A_{m\times n}$ вычеркиванием каких-либо строк, столбцов можно вычленить подматрицу к-го порядка ($k \le \min(m,n)$)

Определители таких подматриц называют **минорами к-го** порядка.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок, отличных от нуля, миноров этой матрицы. Обозначение: rangA, r(A)

Из определения следует что, $r(A) \le \min(m,n)$

Пример: вычислить ранг матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ & & & \end{pmatrix}$ по определению.

Решение: так как $A_{3x4} \Rightarrow r(A) \le \min(3,4) = 3$

Проверим, равен ли r(A)=3,то есть вычислим все миноры 3-го порядка

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \; M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \; M_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_3^4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Так как все миноры 3-го порядка равны 0, следовательно, $\mathrm{r(A)} \le 2$

Проверим, есть ли миноры 2-го порядка $\ne 0$, например $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow$

$\mathrm{r(A)} = 2$

Мы рассмотрели общий случай определения ранга матриц, а именно перебор всех миноров. Этот способ трудоемок.

Для облегчения задачи используют преобразования, сокращающие нахождение ранга матрицы:

1.Отбрасывание нулевой строки, столбца.

2.Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число $\ne 0$

3.Изменение порядка строки (столбца)

4.Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5.Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

С помощью элементарных преобразований можно матрицу привести к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{1k} \\ 0a_{22}......a_{2n}a_{2k} \\ .... \\ 00.........a_{nn}a_{rk} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a_{ij}\neq 0 \\ i=1,....r, r\le k \end{matrix}$$

Замечание: Ранг ступенчатой матрицы равен r, так как существует минор r-го порядка $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1r} \\ 0a_{22}.....a_{2r} \\ .... \\ 00.........a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot ....a_{rr}\neq 0$$

Пример: найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

Решение: так как a_{11}=0 поменяем местами 1,2 строки, чтобы $a_{11}\neq 0$, получим

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

добьемся, чтобы ниже a_{11} в 1 столбце все элементы равны 0 умножением 1строки на числа 2,1и прибавим соответственно к 3,4строкам, получим

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$a_{22}\neq 0$, добьемся, чтобы все элементы 2 столбца ниже a_{22} были равны 0, получим

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

отбросим нулевую строку, получим матрицу ступенчатого вида, она содержит минор 2-го порядка, например, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$

Покажем, как решаются m систем линейных уравнений с n переменными.

Пример: решить систему линейных уравнений и найти одно из базисных решений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем её к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & -10 & -9 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -5 \end{array}\right) \approx$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

r(A)=2, число переменных n=4, следовательно система имеет бесконечное множество решений. Определитель при переменных x_1 и x_2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, следовательно их можно взять за основные. Остальные, неосновные переменные x_3 и x_4переносим в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 2x_4 + 1 \\ \quad x_2 = 5x_3 + x_4 + 5 \end{cases}$$

$$x_1=-2x_2+3x_3+2x_4+1=-2(5x_3+x_4+5)+3x_3+2x_4+1=$$
$$-10x_3-2x_4-10+3x_3+2x_4+1=-7x_3-9$$
$$\begin{cases} x_1=-7x_3-9 \\ x_2=5x_3+x_4+5 \end{cases}$$
$$\{(-7x_3-9;5x_3+x_4+5;x_3;x_4)x_3\in R;x_4\in R\}$$

Тем самым нашли общее решение системы:

$$\{(-7x_3-9;5x_3+x_4+5;x_3;x_4)x_3\in R;x_4\in R\}.$$

Чтобы найти базисное решение приравняем свободные переменные к нулю, т.е. $x_3=x_4=0$. Получим одно базисное решение (-9;5;0;0), т.к. взяли одну пару базисных переменных.

1.4 Лекция № 4 (2 часа).

Тема: «Вектора, их свойства, классификация, арифметические действия. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис. ПДСК»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Определения и основные понятия, линейные операции над векторами.
2. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис пространства.
3. ПДСК.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определения и основные понятия, линейные операции над векторами

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек).

Обозначают: $\overrightarrow{AB}$ (точка A - начало вектора, точка B - конец вектора) или одной буквой - $\vec{a}$.

Определение. Длиной вектора (модулем) называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора обозначается $\overrightarrow{|a|}$ или $\overrightarrow{|AB|}$.

Определение. Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначают: $\vec{0}$.

Определение. Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с данным вектором $\vec{a}$, называется ортом вектора а и обозначается обычно символом $\overrightarrow{a_0}=\frac{\vec{a}}{\overrightarrow{|a|}}$

Определение. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение. Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковое направление.

Определение. Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение вектора на число.

Определение. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух неравных векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ называется вектор$\vec{c}$ который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (правило треугольника).

В случае неколлинеарных векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ можно вместо правила треугольника использовать правило параллелограмма: если векторы $\vec{a}$и $\vec{b}$ отложены от общего начала и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущего из общего начала $\vec{a}$и $\vec{b}$.

Определение. Разностью $\vec{a}$- $\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$и $\vec{b}$ отложены от общего начала, то их разность есть вектор, исходящий из конца вектора $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу вектора $\vec{a}$ («уменьшаемого»).

Определение. Два коллинеарных вектора равной длины, направленные в противоположные стороны, называются противоположными. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается - $\vec{a}$.

Замечание.

1. Разность векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\vec{a}$и (-$\vec{b}$): $\vec{a}$- $\vec{b}$ = $\vec{a}$+ (-$\vec{b}$).

2. Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника (правило многоугольника).

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\vec{a}|=|\alpha|\,|\vec{a}|$;

б) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

в) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ сонаправлены, если $0<\alpha$ (если же $\alpha=0$, то $\vec{b}=\vec{0}$).

Произведение вектора $\vec{a}$ на число α обозначают $\alpha\vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число обладают следующими свойствами:

1) сложение векторов ассоциативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ выполняются равенство:

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

2) сложение векторов коммутативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

3) прибавление нулевого вектора к любому вектору $\vec{a}$ не меняет последнего:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор - $\vec{a}$, такой что

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) умножение вектора на действительное число ассоциативно, т. е. для любых чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство:

$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$;

6) умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел, т. е. для любых чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство:

$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+(\beta\vec{a})$;

7) умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов, т. е. для любых векторов α и β и любого числа α выполняется равенство:

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;

8)умножение вектора на единицу не меняет этого вектора: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Теорема (о коллинеарных векторах). Если $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ - два коллинеарных вектора, причем вектор $\overrightarrow{e_1}$ - ненулевой, то существует единственное число x такое, что

$\overrightarrow{e_2}=x\,\overrightarrow{e_1}$

Определение. Ортом ненулевого вектора $\vec{a}$ называется вектор $\overrightarrow{a_0}$, удовлетворяющий равенству:

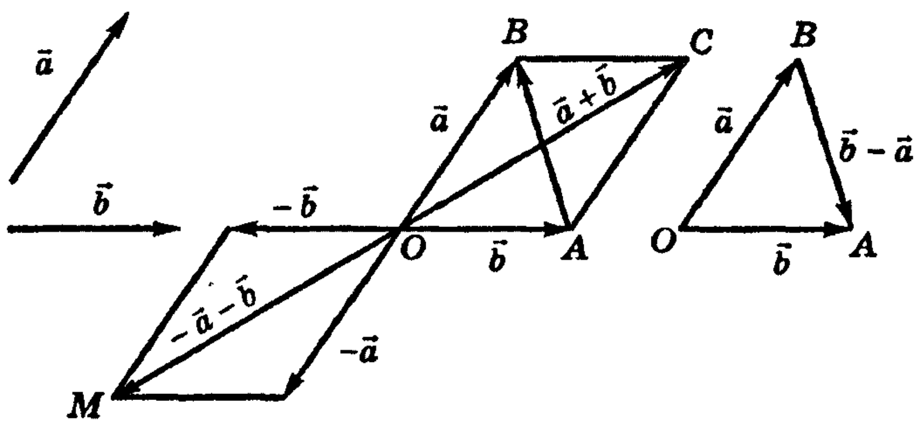
$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\overrightarrow{a_0}$

Сформулированные свойства линейных операций позволяют преобразовать выражения, составленные из векторов, по обычным правилам алгебры: можно раскрыть скобки, приводить подобные члены, переносить некоторые члены в другую часть равенства с противоположным знаком и т.д.

Пример 1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов:

а) $\vec{a}$+$\vec{b}$;   б) $\vec{a}$-$\vec{b}$;   в) $\vec{b}$-$\vec{a}$;   г) $-\vec{a}-\vec{b}$

Решение. Пусть даны два вектора, a и B, отложим их от общего начала и построим указанные векторы либо по правилу параллелограмма, либо по правилу треугольника.



Ответ: а) $\vec{a}$+$\vec{b}$=$\overrightarrow{OC}$;   б) $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}$;

в)$\vec{b}-\vec{a}$ =$\overrightarrow{BA}$;   г) -$\vec{a}$-$\vec{b}$ $=\overrightarrow{OM}$.

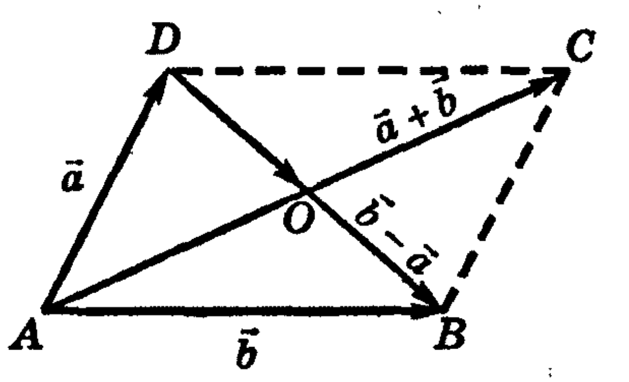
Пример 2. Доказать равенства:

а) $\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$=$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$;

б) $\vec{a}$ -$\frac{1}{2}$($\vec{a}$ +$\vec{b}$) $=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$

и выяснить, каков их геометрический смысл.

Решение. а) В левой части равенства раскроем скобки, приведем подобные члены, получим вектор в правой части. Поясним это равенство геометрически. Пусть даны два вектора, a и b, отложим их от общего начала и построим параллелограмм и его диагонали, получим:



По правилу построения разности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$ Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то

$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

Тогда $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}$ или $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

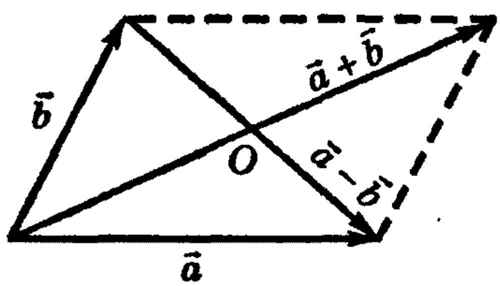
б) Аналогично объясняется второе равенство.

Равенства доказаны.

Пример 3. Дано: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ и $|\vec{a}+\vec{b}| = 24$. Вычислить

Решение. Пусть даны векторы $\vec{a}+\vec{b}$, и на них построен параллелограмм. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ диагонали параллелограмма, $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$длины его диагоналей. Известна теорема: сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон параллелограмма. Поэтому:

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$, и $24^2 + |\vec{a}-b|^2 = 2(13^2+19^2)$



Отсюда $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 484$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 22$, $(|\vec{a}-\vec{b}|>0)$.

Ответ: 22.

2. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис пространства

Обобщением понятия вектора служит N-мерный вектор, которым называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $x=(x_1, x_2, ... x_n)$, где x_i – i-я компонента вектора x. Необходимо знать, что линейные операции над n-мерными векторами удовлетворяют 8 аксиомам, схожими с аксиомами для действительных чисел.

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ называют линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, среди которых есть по крайней мере одно, не равное нулю, такое, что

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} = \vec{0}. \qquad (***)$$

Это определение линейной зависимости векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ эквивалентно такому: векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ линейно зависимы, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных (или разложить по остальным).

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ называются линейно зависимыми, если равенство (***) возможно в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Понятие линейной зависимости играет большую роль в линейной алгебре. В векторной алгебре линейная зависимость имеет простой геометрический смысл.

1) Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, два неколлинеарных вектора линейно независимы.

2) Три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три некомпланарных вектора линейно независимы.

3) Каждые четыре вектора линейно зависимы.

Определение. Векторным базисом в данной плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ этой плоскости.

Два и более векторов в пространстве называются **компланарными**, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в этой плоскости.

Определение. Векторным базисом в пространстве называют любые три некомпланарных вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Вектор $\overrightarrow{e_1}$ называют при этом первым базисным вектором, $\overrightarrow{e_2} -$ вторым, $\overrightarrow{e_2}$ - третьим.

Замечание 1. Три вектора $\overrightarrow{e_1} = \{e_{11}; e_{12}; e_{13}\}$, $\overrightarrow{e_2} = \{e_{21}; e_{22}; e_{23}\}$ и $\overrightarrow{e_3} = \{e_{31}; e_{32}; e_{33}\}$ образуют базис пространства, если определитель, составленный из их координат, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема. Пусть $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - векторный базис в пространстве. Тогда любой вектор $\vec{a}$ в пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, и $\overrightarrow{e_3}$:

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}. \qquad (**)$$

Определение. Равенство (**) называют разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, а числа *x, y, z* – координатами вектора $\vec{a}$ в базисе. пишут Кратко пишут: $\vec{a}$ =(x; y; z)

Определение. Базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ называется ортонормированным, если векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$\overrightarrow{e_1} = \vec{i},\ \overrightarrow{e_2} = \vec{j},\ \overrightarrow{e_3} = \vec{k}.$

Действия над векторами, заданными своими координатами

Теорема. Пусть на плоскости выбран векторный базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ и относительно него векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:$\vec{a} = (x_1; y_1)$,

$\vec{b} = \{x_2; y_2\}$.

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + y_1;\ x_2 + y_2\}$, $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - y_1;\ x_2 - y_2\}$, т. е. при сложении или вычитании векторов складываются или вычитаются их одноименные координаты;

$\alpha \cdot \vec{a} = \{\alpha \cdot x_1; \alpha \cdot y_1\}$т. е. при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Условие коллинеарности двух векторов

Теорема. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ в том и только в том случае, когда координаты вектора $\vec{b}$пропорциональны соответственным координатам вектора $\vec{a}$, т. е.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$

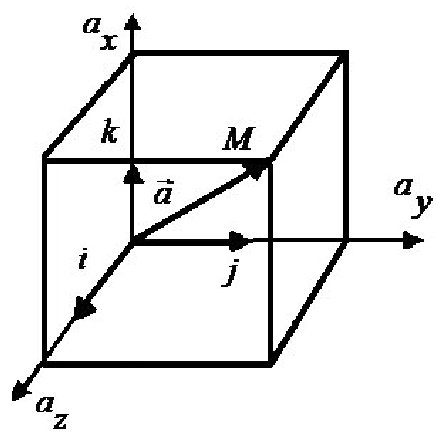
Линейные операции над векторами, заданными своими координатами в пространстве, производятся аналогично.

3. ПДСК

На практике Вы встречаетесь с величинами двух типов: для задания одних достаточно **числа,** например, температура С°=36,6, для задания других требуется указать и направление - например: сила или скорость. Величины первого типа называются **скалярными,** а второго **- векторными.**

Под вектором будем понимать направленный отрезок, который обозначим а.

Свободный вектор а (т.е. такой вектор, который без изменения длины и направления, может быть перенесен в любую точку пространства), заданный в координатном пространстве **Oxyz,** может быть представлен в виде:



$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},,$$

где a_x , a_y , a_z - проекции вектораа на соответствующие оси координат (их называю координатами вектора а), $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$, орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).

Такое представление вектора а, называется **разложением по ортам.**

Длина (модуль) вектора а обозначается $|\vec{a}|$ и определяется по формуле:

$$\left|\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right|$$

Направление вектора а определяется углами $\alpha, \beta, \gamma,$ образованными им с осями координат Ox Oy Oz. Косинусы **этих** углов (**направляющие косинусы** вектора) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$\cos^2 a + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

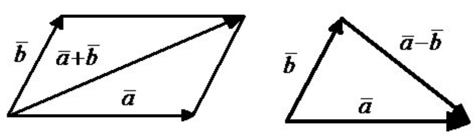
Найдем координаты вектора, соединяющего точки А(1;2;3) и М(3;4;3). Искомый вектор можно записать так:

$$\vec{a} = (3-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j}, + (3-3)\vec{k}, \ = A\vec{M}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложением по ортам, то их сумма и разность определяются по формулам:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\ \vec{i} + (a_y + b_y)\ \vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\ \vec{i} + (a_y - b_y)\ \vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k},$$



Нахождение суммыи разностивекторов

Сумма любого числа векторов может быть найдена по правилу многоугольника (смотри рис).

Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называют **коллинеарными.**

Произведение вектора **а** на скалярный множитель **m**, определяется формулой

$$m\vec{a} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k},$$

Заметим, что векторы а и ma параллельны (коллинеарны) и направлены в одну и **тужe**сторону, если **m**>0, и в противоположные стороны, если **m**<0.

Пример 1: Найти длину вектора а и его направляющие косинусы.

$$\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70; \cos\alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}; \cos\beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}; \cos\gamma = -\frac{60}{70} = \frac{6}{7};$$

Вспомним теперь введенные раньше орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Так как они не компланарны, то образуют базис, который называется **ортонормированным базисом или декартовой системой координат в пространстве.**

1.5 Лекция № 5 (2 часа).

Тема: «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и вычисление, приложения»

1.5.1 Вопросы лекции:

1.Скалярное произведение, его свойства, вычисление.

2. Векторное произведение, его свойства, вычисление.

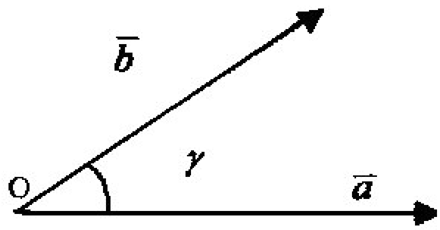
3. Смешанное произведение, его свойства, вычисление.

4. Решение типовых задач.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Скалярное произведение, его свойства, вычисление

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла γ между ними:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$

и обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, *или* $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \textit{если}\ \vec{a}=0,\ \textit{или}\ \vec{b}=0,\ \textit{либо}\ \ \vec{a}\perp\vec{b}$ (ортогональность двух ненулевых векторов)

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон)

4. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон)

5. $\left(m\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(m\vec{b}\right)=m\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю)

Скалярные произведения ортов осей координат:

$$\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1 \qquad\qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

Пусть векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k} \qquad\qquad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

Тогда скалярное произведение этих векторов определяется формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Используя скалярное произведение векторов, можно найти угол между ними:

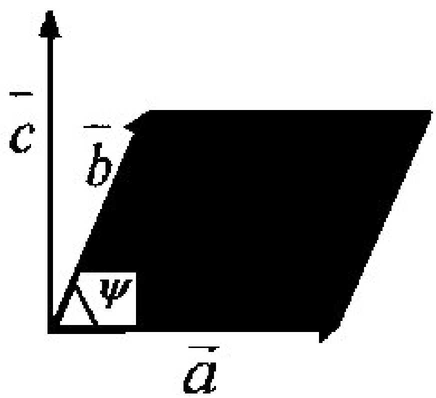
$$\cos\gamma=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)}}$$

Например, угол γ между векторами (1,2,0) и (2,3,5) имеет косинус

$$\cos\gamma=\frac{1\cdot2+2\cdot3+0\cdot5}{\sqrt{\left(1^2+2^2+0^2\right)}\cdot\sqrt{\left(2^2+3^2+5^2\right)}}=\frac{8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{38}}$$

2. Векторное произведение, его свойства, вычисление

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$ (см. рисунок), определяемый следующим образом:



- модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ ($\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$);

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$;

- векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$ *или* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$, т.е векторное произведение не обладает переместительным свойством;

2. $\vec{a}\times\vec{b}=0,\ если\ \ \vec{a}=0,\ или\ \ \vec{b}=0,\ \ либо\ \ \vec{a}\,||\,\vec{b}$ (коллинеарность нулевых векторов);

3. $\left(m\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(m\vec{b}\right)=m\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю;

4. $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ распределительное свойство;

Векторные произведения ортов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$$

Векторное произведение векторов

$$\vec{a}=x_1\times\vec{i}+y_1\times\vec{j}+z_1\times\vec{k} \qquad \vec{b}=x_2\times\vec{i}+y_2\times\vec{j}+z_2\times\vec{k}$$

удобнее всего находить по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

3. Смешанное произведение, его свойства, вычисление

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:

- хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю;
- перемножаемые векторы коллинеарны;
- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - компланарны.

2. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного (х) и скалярного (•) умножения, т.е. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ условимся записывать в виде $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

3. Смешанное произведение не изменится, если переставлять перемножаемые векторы местами, следующим образом $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$.

4. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак: $\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c};\ \vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c};\ \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Пусть векторы заданы их разложениями по ортам:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k} \qquad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k} \qquad \vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$$

Тогда:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Из свойств смешанного произведения трех векторов вытекает следующее:

- необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$

- Объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и объем V_2 образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам:

$$V_1=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| \qquad V_2=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$$

4. Решение типовых задач

Пример 1: Найти скалярное произведение векторов

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \qquad \vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

Решение: находим скалярное произведение этих векторов

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 = 0$. Так как

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\; и \;\; \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \;\; то \;\; \vec{a} \perp \vec{b}$$

Пример 2: Даны векторы: $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} \qquad \vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

Решение: находим скалярное произведение этих векторов

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28, \;\; так \;\; как \;\; \vec{a} \perp \vec{b} = 0.$ Следовательно, 7m-28=0 и m=4.

Пример 3: Найти векторное произведение векторов

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \qquad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

Решение: имеем:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$т.е. \;\; \vec{a} \times \vec{b} = -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

Пример 4: Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах:

$$\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \qquad \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

Решение: находим

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то:

$$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49(кв.ед)$$

1.6 Лекция № 6 (2 часа).

Тема: «Алгебраические линии. Прямая на плоскости и в пространстве. Метрическая теория прямых»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Способы задания прямой на плоскости.
2. Метрическая теория прямых на плоскости.
3. Прямая в пространстве

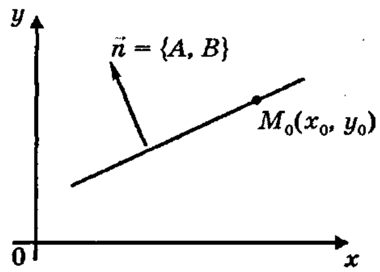
1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Способы задания прямой на плоскости

Если на плоскости произвольно введена декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно текущих координат xи y

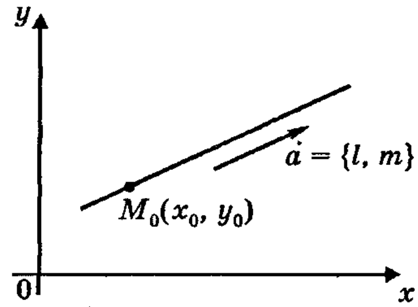
Ax + By + C =0,

где A и B одновременно не равны нулю, определяют прямую в этой системе координат.



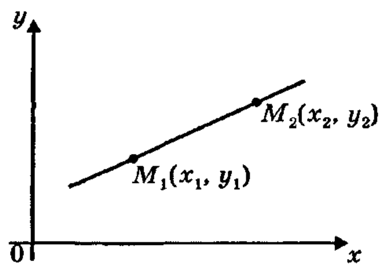
1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = \{A, B\}$;

2) $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой;



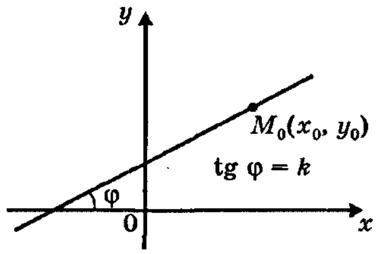
3) $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a} = \{l, m\}$ {каноническое уравнение прямой);

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt; \end{cases}$ $t \in R$ – параметрические уравнения прямой;



5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых на координатных осях Ох и Оу соответственно;

6) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$;



7) $y-y_0=k(x-x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$, k - угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ох;

8) $y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом k; b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Оу.

2. Метрическая теория прямых на плоскости

$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ – тангенс острого угла между двумя прямыми

$y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$;

$k_1=k_2$ и $k_2=-\frac{1}{k_1}$ – условия параллельности и перпендикулярности двух мых$y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$;

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$до прямой$Ax + By + C = 0$;

$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ - координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении λ, $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$;

$x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ – координаты середины отрезка M_1M_2, $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$.

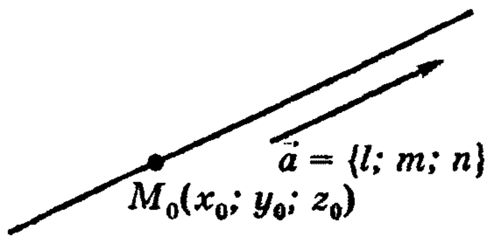
14) $\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$ – уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Пусть на плоскости заданы точка$M_0(x_0;y_0)$ и прямая Ах + Ву+ С = 0. Под расстоянием от точки M_0 до прямой Ах + Ву+ С = 0принимается длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0на прямую. Данное расстояние можно определить по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

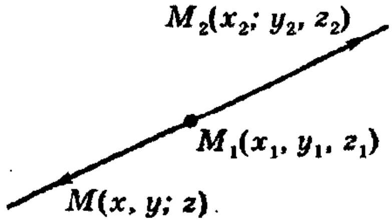
3. Прямая в пространстве

1) $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ – канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a}=\{l;m;n\}$;



2) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$;

3) уравнения $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt; \end{cases}$



$t \in R$ есть параметрические уравнения прямой в пространстве.

4) Пусть даны две прямые, заданные каноническими уравнениями

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2};$$

За угол φ между прямыми принимают угол между их направляющими векторами

$$\overrightarrow{a_1} = \{l_1; m_1; n_1\}, \overrightarrow{a_2} = \{l_2; m_2; n_2\}:$$

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2})}{|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|},$$

или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

5) $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ - условие перпендикулярности двух прямых L_1 и L_2.

6) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ - условие параллельности двух прямых L_1 и L_2 в пространстве.

7) Общие уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2. В данном случае прямая задана как линия пересечения плоскостей.

1.7 Лекция № 7 (4 часа).

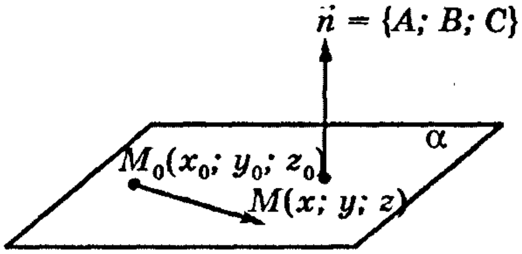
Тема: «Плоскость. Способы задания. Метрическая теория плоскостей. Кривые второго порядка, их свойства и уравнения. Поверхности вращения»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Способы задания плоскости в пространстве.
2. Метрическая теория плоскостей
3. Окружность.
4. Эллипс.
5. Гипербола.
6. Парабола.
7. Поверхности вращения.

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

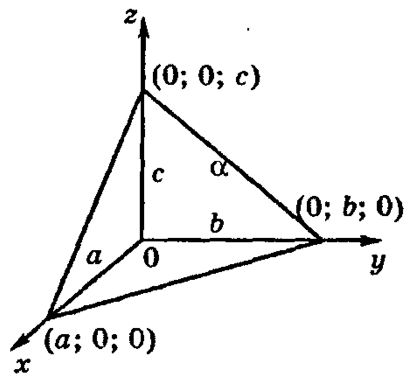
1. Способы задания плоскости в пространстве.



1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}$ = ={A;B;C).

2) Ax + By + Cz + D = 0 – общее уравнение плоскости, $\vec{n}$ = {A, B, C} - нормальный вектор этой плоскости.

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в отрезках, где a, b, c - величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью а на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно.



2. Метрическая теория плоскостей

Пусть даны две плоскости α_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

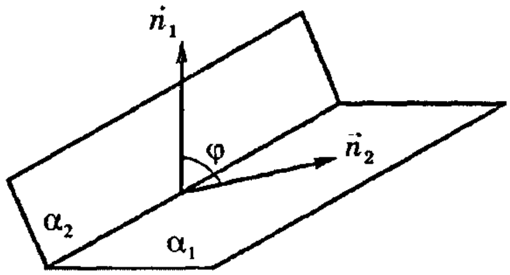
$\overrightarrow{n_1}$={A,B,C},

α_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

$\overrightarrow{n_2}$= {A; B; C}.

В качестве угла φ между плоскостями α_1 и α_2 принимают угол между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$



или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

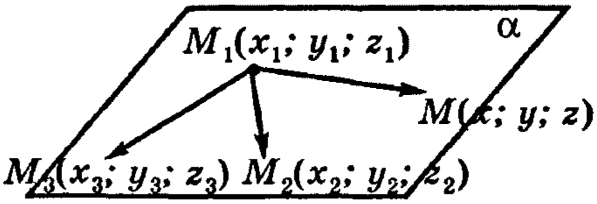
Условие перпендикулярности двух плоскостей α_1 и α_2: $(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}) = 0$ или в координатной форме:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Условие параллельности двух плоскостей α_1 и α_2:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$:



$\left(\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$ или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

8) Если плоскость α задана общим уравнением Ax + By + Cz + D = 0, а $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - некоторая точка пространства, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

есть формула расстояния от точки M_0 до плоскости α.

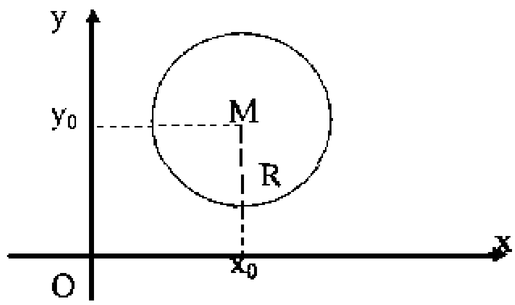
Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется пучком плоскостей.

Если $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть уравнения двух различных непараллельных плоскостей, пересечением которых служит некоторая прямая L, а числа α, β - любые не равные одновременно нулю, то

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

есть уравнение плоскости, проходящей через прямую L. Более того, какова бы ни была проходящая через прямую L плоскость, она может быть определена из пучка плоскостей при определенных значениях α, β.

3. Окружность



Кривые второго порядка - это линии на плоскости, координаты точек которых связаны уравнениями второй степени относительно x и ув декартовой системе координат. Рассмотрим следующие виды кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность - это совокупность точек на плоскости, равноудаленных от одной фиксированной точки (центра). Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра называется радиусом окружности.

Каноническое уравнение окружности имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \quad где \quad M(x_0,y_0)$ -центр окружности, R – радиус.

Пример: Построить линию, заданную уравнением $x^2-x+y^2-y=0$.

Решение: Приведем к стандартному виду. Для этого выделим полный квадрат разности для x и для y.

$$x^2-2x\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2y\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow$$

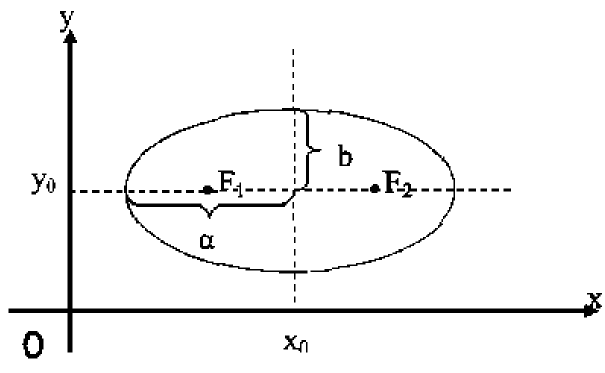
$$\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Приведя уравнение кривой второго порядка к каноническому виду,видим, что наша кривая есть окружность с центром в точке $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов



примято обозначать через 2а. Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 *и* F_2, расстояние между ними - через 2с. По определению эллипса 2а >2с или а > с.

Данная фигура обладает двумя осями симметрии и центром симметрии.

Если фокусы (F_1 *и* F_2) расположенные на прямой, параллельной оси OX, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\,.$$

Здесь точка $A(x_0\,;y_0)$ - центр эллипса, a *и* b - большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса F_1 *и* F_2 расположены в точках, удаленных на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от центра эллипса.

Отношение $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается ε.

Пример: Определить вид кривой второго порядка

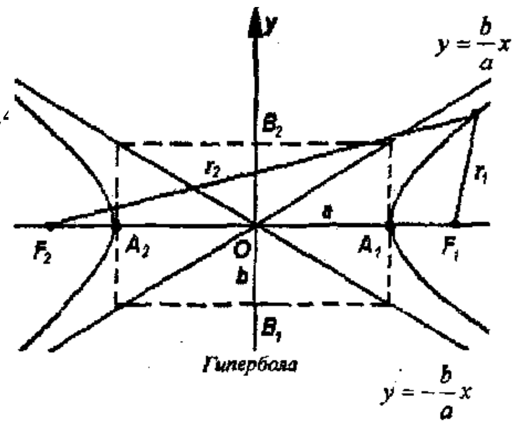
$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{2(y-3)^2}{36}=1$$

Решение:

$$\frac{(x+1)^2}{6^2}+\frac{(y-3)^2}{(3\sqrt{2})^2}=1$$

Наша линия есть эллипс с центром в точке А(-1,3), с большой полуосью а=6, малой полуосью $b=3\sqrt{2}$.

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-18}=3\sqrt{2}\approx 4,2$$



Фокусы:

$$F_1: x=-1-4{,}24=-5{,}24 \quad y=3$$
$$F_2: x=-1+4{,}24=3{,}24 \quad y=3$$

5. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается обычно через 2а. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 расстояние между ними - через 2с. По определению гиперболы 2а <2с или а < с.

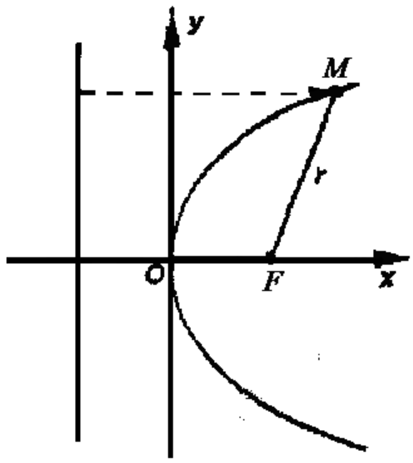
Данная фигура также обладает двумя осями симметрии и центром. Если фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ох, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр гиперболы, a и b - действительная и мнимая полуось.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Пример: Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$.



парабола

Решение: Согласно определению эксцентриситета, имеем

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{2},\ или\ \ c^2=2a^2.$$

Но $c^2=a^2+b^2$, следовательно $a^2+b^2=2a^2,\ или\ \ a^2=b^2$, т.е. гипербола равнобочная.

Другое равенство получим из условия нахождения точки М на гиперболе, т.е.

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1,\ или\ \ \frac{3}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1.$$

Поскольку $a^2=b^2$, получим $\frac{3}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1,\ т.е.\ a^2=1$

6. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой р. Число р называется параметром параболы.

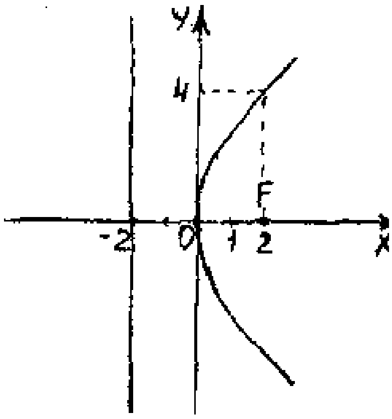
Фигура обладает осью симметрии. Если директриса параболы перпендикулярна Ox (Ox - ось симметрии), то уравнение параболы имеет вид:

$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$, где p - расстояние от фокуса до директрисы, точка (x_0; y_0) - вершина параболы.

Уравнение директрисы: $x = x_0 - \dfrac{p}{2}$.

Фокус в точке $F\left(x_0 + \dfrac{p}{2}; y_0\right)$.

Если Oy - ось симметрии, то уравнение параболы имеет вид: $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$. Уравнение директрисы: $y = y_0 - \dfrac{p}{2}$. Фокус в точке $F\left(x_0; y_0 + \dfrac{p}{2}\right)$.



Пример: Построить параболу $y^2=8x$. Найти фокус и уравнение директрисы.

Решение; Сравнивая данное уравнение с уравнением параболы видим, что OX -ось симметрии. Вершина параболы находится в начале координат.

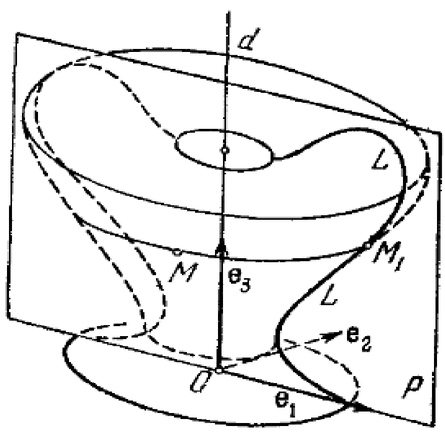
2p=8 следовательно p=4, а значит фокус имеет координаты F(2; 0), уравнение директрисы - y= - 2.

7. Поверхности вращения

Опишем важнейшие поверхности второго порядка. Составить себе общее представление о большинстве поверхностей второго порядка можно, рассматривая поверхности вращения линий второго порядка вокруг их осей симметрии.

Поверхность S называется **поверхностью вращения с осью d,** если она составлена из окружностей, которые имеют центры на прямой d и лежат в плоскостях, перпендикулярных этой прямой.

В основе этого определения лежит следующее представление. Рассмотрим линию L, которая лежит в плоскости P, проходящая через ось вращения d (рис. 1), и будем вращать ее вокруг этой оси. Каждая точка линии опишет окружность, а вся линия – поверхность вращения.



Выберем начало декартовой прямоугольной системы координат O, e1, e2, e3 на оси вращения d, вектор e3 на оси вращения d, а вектор e1 поместим в плоскости P. Таким образом, точка O и векторы e1 и e3 образуют на плоскости P декартову систему координат. Допустим, что линия L, вращением которой получена поверхность, имеет в этой системе координат уравнение φ (x, z)=0

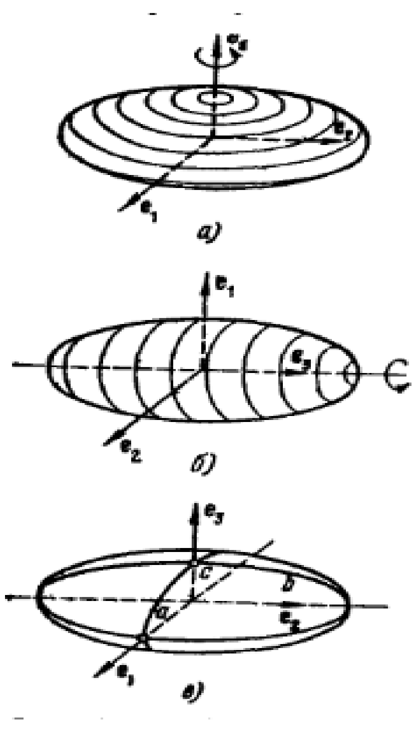
Рассмотрим точку M(x, y, z). Через нее проходит окружность, которая имеет центр на оси d и лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси. Радиус окружности равен расстоянию от M до оси, т.е. $\sqrt{x^2+y^2}$. Точка M лежит на поверхности вращения тогда и только тогда и только тогда, когда на указанной окружности имеется точка M, принадлежащая вращаемой линии L.

Точка M_1 (x_1, y_1, z_1) лежит в плоскости P, и потому $y_1=0$. Кроме того, $z_1=z$ и $|x_1|=\sqrt{x^2+y^2}$, так как M_1 лежит на окружности, проходящей через M. Координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению линии L: $\varphi(x_1, z_1)=0$. Подставляя в это уравнение x_1 и z_1, мы получаем следующее условие на координаты точки M, необходимое и достаточное для того чтобы M лежала на поверхности вращения S:

$$\varphi(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0 \quad (1)$$

равенство должно быть выполнено хотя бы при одном из двух знаков перед корнем. Это условие, которое может быть записано в эквивалентном виде:

$$\varphi(\sqrt{x^2+y^2}, z)\varphi(-\sqrt{x^2+y^2}, z)=0, \quad (2)$$



И является уравнением поверхности вращения линии L вокруг оси d.

Эллипсоид

Рассмотрим поверхности, которые получаются при вращении эллипса вокруг его осей симметрии. Направив вектор e_3 сначала вдоль малой оси эллипса, а затем вдоль большой оси, мы получим уравнение эллипса в следующих видах:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{c^2}=1.$$

(Здесь через с обозначена полуось эллипса). В силу формулы (1) уравнения соответствующих поверхностей вращения будут

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (3)$$

И

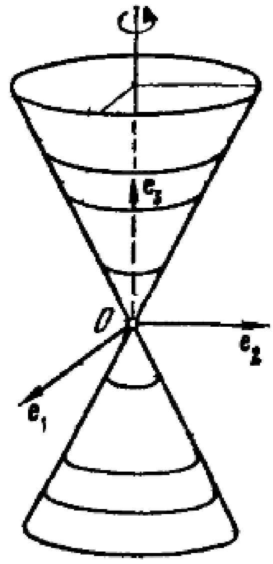
$$\frac{z^3}{a^2}+\frac{x^3+y^3}{c^2}=1. \quad (4)$$

Поверхности (3) и (4) называются сжатым и вытянутым эллипсоидами вращения. Они изображены на рис.2

Каждую точку M (x, y, z) на эллипсоиде вращения (3) сдвинем к плоскости Y (координатной

плоскости, проходящей через e1 и e3) так, чтобы расстояние от точки до этой плоскости уменьшилось в постоянном для всех точек отношения $\lambda<1$. После сдвига точка M совпадает с точкой M' , координаты которой определяются равенствами x'=x, y'= λy, z'=z. Таким образом, все точки эллипсоида вращения (3) переходят в точки поверхности с уравнением

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1. \quad (5)$$



Где b=λa. Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение (5), назовем эллипсоидом (см. рис. 46 в). Если случайно окажется b=c, мы получим снова эллипсоид вращения, но уже вытянутый.

Эллипсоид, так же как и эллипсоид вращения, из которого он получен, представляет собой замкнутую ограниченную поверхность. Из уравнения (5) видно, что начало координат – центр симметрии для эллипсоида, а координатные плоскости – его плоскости симметрии.

Эллипсоид получается из эллипсоида вращения сжатием так же, как эллипс получается сжатием окружности. Сжатием сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ можно получить эллипсоид вращения (3). Для того, чтобы из сферы получить вытянутый эллипсоид, нужно сделать аналогичное преобразование, но с $\lambda>1$ – растяжение.

В этом параграфе нам часто придется прибегать к сжатию, и мы не будем каждый раз описывать его подробно.

Конус второго порядка

Рассмотрим на плоскости P пару пересекающихся прямых, задаваемую в системе координат O, e_1, e_2 уравнением $a^2x^2 - c^2z^2 = 0.$

Рис. 3

Поверхность (рис. 3), получаемая вращением этой линии вокруг оси аппликат, имеет уравнение

$$a^2(x^2 + y^2) - c^2z^2 = 0. \quad (6)$$

и носит название прямого кругового конуса. Сжатие к плоскости Y переводит прямой круговой конус в поверхность с уравнением

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0. \quad (7)$$

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение (7), называется конусом или, подробнее, конусом второго порядка. Конус состоит из прямых линий, проходящих через начало координат. Сечения конуса плоскостями с уравнениями z=a для различных α представляют собой эллипсы

$$a^2x^2 + b^2y^2 = c^2\alpha^2$$

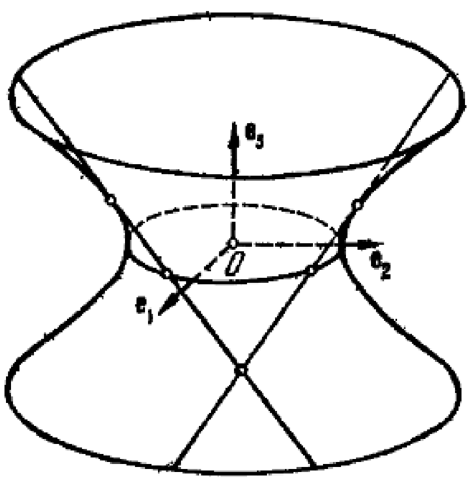
Однополостной гиперболоид

Однополостной гиперболоид вращения – это поверхность вращения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

вокруг той ее оси, которая ее не пересекает. По формуле (1) мы получаем уравнение однополостного гиперболоида вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (8)$$



В результате сжатия этой поверхности мы получаем поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (9)$$

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение (9), называется однополостным гиперболоидом

(рис. 4).

Интересное свойство однополостного гиперболоида – наличие у него прямолинейных образующих. Так называются прямые линии, всеми своими точками лежащие на поверхности. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямолинейные образующие, уравнения которых можно получить следующим образом. Перенесем член

y^2/b^2 в правую часть уравнения (9) и разложим обе части равенства на множители:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Рассмотрим теперь прямую линию с уравнениями

$$\left.\begin{aligned}&\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \qquad (10)\\ &\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}$$

где λ и μ - некоторые числа. Координаты каждой точки прямой удовлетворяют обоим уравнениям, а, следовательно, и их произведению – уравнению (9). Поэтому все точки прямых линий лежат на однополостном гиперболоиде. Такое же рассуждение можно провести и для семейства прямых

$$\lambda'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu'\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

$$\mu'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{b}\right)=\lambda'\left(1+\frac{y}{b}\right). \qquad (11)$$

Подставляя координаты точки, лежащей на однополостном гиперболоиде, в одно из уравнений (10) и в одно из уравнений (11), мы найдем значения параметров λ,μ и λ',μ', которые соответствуют прямолинейным образующим, проходящим через эту точку. Естественно, что каждая пара параметров определена с точностью до общего множителя.

Если вместе с гиперболой мы будем вращать и ее асимптоты, то они опишут прямой круговой конус, называемый асимптотическим конусом гиперболоида вращении. При сжатии гиперболоида вращения в общий однополостный гиперболоид прямой круговой конус сжимается в некоторый конус, который называется асимптотическим конусом однополостного гиперболоида.

Двуполостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид вращения – это поверхность вращения гиперболы

$$\frac{2^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

вокруг той ее оси, которая ее пересекает. По формуле (1) мы получаем уравнение двуполостного гиперболоида вращения

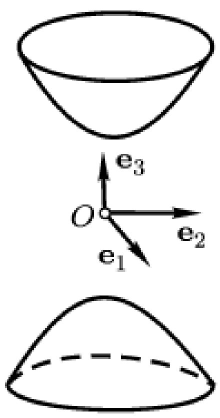
$$\frac{2^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1.$$

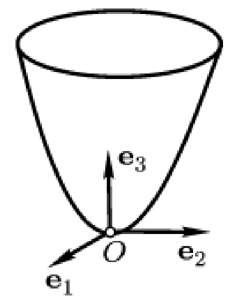
В результате сжатия этой поверхности получается поверхность с уравнением

$$\frac{2^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение вида (13), называется двуполостным гиперболоидом. Двум ветвям гиперболы соответствуют здесь две не связанные между собой части («полости») поверхности, в то время как при построении однополостного гиперболоида вращения каждая ветвь гиперболы описывает всю поверхность.

Асимптотический конус для двуполостного гиперболоида определяется так же, как и для однополостного.





Эллиптический параболоид

При вращении параболы $x^2 = 2pz$ вокруг ее оси симметрии мы получаем поверхность с уравнением

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

называемую параболоидом вращения. Сжатие к плоскости y=0 переводит параболоид вращения в поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 2x \ .$$

Поверхность, которая имеет такое уравнение в некоторой декартовой прямоугольной системе координат, называется эллиптическим параболоидом. Внешний вид эллиптического параболоида ясен из способа его построения. Отметим, что сечения этой поверхности плоскостями z=α при α>0 представляют собой эллипсы

$$\frac{x^2}{2\alpha a^2}+\frac{y^2}{2\alpha b^2}=1,\ z=\alpha,$$

а сечения плоскостями, параллельными другим координатным плоскостям, например плоскостями y=α, - параболы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\alpha^2}{b^2}=2z,\ y=\alpha.$$

Гиперболический параболоид

По аналогии с уравнением (15) мы можем написать уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Поверхность, которая имеет в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнение вида (16), назовем гиперболическим параболоидом. Исследуем внешний вид этой поверхности. Для этого рассмотрим сечение гиперболического параболоида плоскостью x=α при произвольном α. В этой плоскости выберем декартову прямоугольную систему координат $0'$, e_2, e_3 с началом в точке $0'$ (α, 0,0). Относительно этой системы линия пересечения имеет уравнение

$$-\frac{y^2}{b^2}=2\times\left(z-\frac{\alpha^2}{2a^2}\right)$$

Эта линия – парабола, в чем легко убедиться, перенеся начало координат в точку $0'$ с координатами ($0'$, $\alpha^2/2a^2$) (координаты относительно исходной системы координат 0, e_1, e_2, e_3 в пространстве равны ($\alpha, 0, \alpha^2/2a^2$)).

Точка $0''$, очевидно, является вершиной параболы, ось параболы параллельна вектору e_3, а знак минус в левой части равенства (17) означает, что ветви параболы направлены в сторону, противоположную направлению вектора e_3. Заметим, что после переноса начала координат в точку $0''$ величина α не входит в уравнение параболы, n, следовательно, все сечения гиперболического параболоида плоскостями x=α представляют собой равные параболы.

Будем теперь менять величину α и проследим за смещением вершины $0''$, параболы в зависимости от α. Из приведенных выше координат точки $0''$ в системе 0, e_1, e_2, e_3 следует, что эта точка смещается по линии с уравнениями

$$z = \frac{x^2}{2a^2}, \text{ y=0}$$

В системе координат 0, e_1, e_2, e_3. Эта линия- парабола в плоскости y=0. Вершина параболы находится в начале координат, ось симметрии совпадает с осью аппликат, а ветви параболы направлены в ту же сторону, что и вектор e_3.

Теперь мы можем построить гиперболический параболоид следующим образом: зададим две параболы и будем перемещать одну на них так, чтобы ее вершина скользила по другой, оси обеих парабол были параллельными, параболы лежали во взаимно перпендикулярных плоскостях и ветви их были направлены в противоположные стороны. При таком перемещении подвижная парабола описывает гиперболический параболоид (рис. 5).

Сечение гиперболического параболоида плоскостью z=α представляет собой гиперболу, которая в этой плоскости имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\alpha,$$

В системе координат $0^{\bullet}, e_1, e_2, e_3$ с началом в точке $0^{\bullet}$ (0,0, α). Эта линия парабола в плоскости y=0. Вершина параболы находится в начале координат, ось симметрии совпадает с осью аппликат, а ветви параболы направлены в ту же сторону, что и вектор e_3.

Теперь мы можем построить гиперболический параболоид следующим образом: зададим две параболы и будем перемещать одну из них так, чтобы её вершина скользила по другой, оси обеих парабол были параллельны, параболы лежали во взаимно перпендикулярных плоскостях и ветви их были направлены в противоположные стороны. При таком перемещении подвижная парабола описывает гиперболический параболоид (рис. 5).

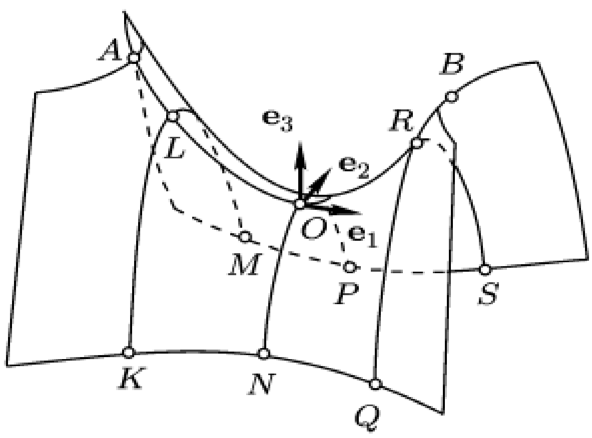


Рис. 5 AOB – неподвижная парабола, KLM, NOP и QRS – разные положения подвижной параболы.

Сечение гиперболического параболоида плоскостью z=a представляет собой гиперболу, которая в этой плоскости имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\alpha,$$

в системе координат $0^{\bullet}, e_1, e_2$ с началом в точке $0^{\bullet}$ (0,0, α). Для больших положительных α полуоси гиперболы $\sqrt{2\alpha a}$ и $\sqrt{2\alpha b}$ велики и уменьшаются с уменьшением α.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие № 1 (2 часа).

Тема: «Элементы теории матриц»

2.1.1 Задание для работы:

1. Матрицы, их классификация.
2. Арифметические операции над матрицами.
3. Транспонирование матриц.
4. Вычисление определителей второго, третьего порядка.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Матрицы, их классификация

Квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали равны нулю, называется **диагональной матрицей.**

$$B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны между собой, называется **скалярной матрицей.**

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны 1, называется **единичной матрицей.**

$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ единичная матрица 3-его порядка

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей (0).**

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором (или вектор- столбец, или вектор-строка соответственно).**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е.$(5)_{1\times1}$ есть 5.

Одноразмерные матрицы **равны между собой**, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

2. Арифметические операции над матрицами

Пример. Найти сумму матриц A и B, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+1 & 3-3 & 5+4 & 7+0 \\ 1+2 & 4+1 & 2+3 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Пример. Вычислить матрицу 2A + 5B, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$2A+5B=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 9 & 12 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 9 & 12 & 17 \end{pmatrix}$

Пример. Найти произведение AB матрицы-строки $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$на матрицу $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Решение: $(5 \quad 7 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \big(5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + (-2)(-2) + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \quad 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + (-2)(-1)\big)$$

$$= (21 \;\; 37 \;\; 21).$$

Ответ: матрица-строка размера (1 х 3) –(21 37 21).

3. Транспонирование матриц

Пример. Найти присоединенную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Присоединенная матрица является транспортированной матрицей из алгебраических дополнений данной матрицы.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Для данной матрицы $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17; \;\; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -3; \;\; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6; \;\; A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11; \;\; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Итак, присоединенная матрица A^* равна

$$A^* = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^* = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

4. Вычисление определителей второго, третьего порядка

Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5.$

Ответ: 5.

б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Ответ: 1.

в)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 = 1$$

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия теории матриц и определителей;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в теории матриц и определителей;

- выработали навыки по проведению арифметических операций над матрицами, по вычислению определителей.

2.2 Практическое занятие № 2 (2 часа).

Тема: «Элементы теории определителей»

2.2.1 Задание для работы:

1. Миноры и алгебраические дополнения.
2. Вычисление определителей порядка выше третьего.
3. Нахождение обратной матрицы.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Миноры и алгебраические дополнения

Найти миноры и алгебраические дополнения для элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Для данной матрицы $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

2. Вычисление определителей порядка выше третьего

Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

Решение:

Воспользуемся свойствами определителя. Из второй третьей, четвертой строки вычтем первую строку, получим определитель и разложение его по элементам 1-го столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 19 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (95 - 81) - 2 \cdot (2 \cdot 19 - 3 \cdot 9) + 3 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 5) = 14 - 2 \cdot 11 + 9 = 1$$

Ответ: 1.

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение:

Из второй строки определителя вычтем первую строку, умноженную на 2; из третьей строки вычтем утроенную первую строку, из четвертой - вычтем первую строку, умноженную на 4. Получим нули в первом столбце. Тогда и разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)(-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -36 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot (18 + 20) = 304.$$

Ответ: 304.

3. Нахождение обратной матрицы

Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице А

Из предыдущего примера.

Решение: Так как $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, то найдем

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 17 + 20 =$ 36. Тогда $A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и свойства теории определителей;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в теории определителей;

- выработали навыки по вычислению миноров и алгебраических дополнений элементов матрицы, нахождению матрицы, обратной к данной.

2.3 Практическое занятие № 3, 4 (4 часа).

Тема: «Системы линейных уравнений»

2.3.1 Задание для работы:

1. СЛУ, основные понятия.
2. Метод Крамера.
3. Метод обратной матрицы.
4. Метод Гаусса
5. СЛОУ

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. СЛУ, основные понятия

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

или в матричной форме, AX = b, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$- матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$- матрица-столбец свободных членов данной системы.

2. Метод Крамера

Решить систему уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 15,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 + 2 \quad = -5;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3;\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{+5}{5} = 1.$

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1$

3. Метод обратной матрицы

Решить систему линейных алгебраических уравнений матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$- матрица системы уравнений,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов данной системы.

Так как в первом примере вычислен определитель системы и он равенdet A = 5 ≠ 0, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Вычислим $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*, A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Получили присоединенную матрицу

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.Тогда $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ирешение системы

найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot b$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5+18-8 \\ -15+6+4 \\ 5-12+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда:$x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 1$.

4. Метод Гаусса

Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

Данную систему мы приведем к виду:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right)$.С помощью элементарныхпреобразований приведем

матрицу А к единичному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right) \underset{\sim}{-\frac{1}{11}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} (2)-9(3) \\ \sim \\ (1)+(3) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\frac{1}{4}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$.

Проверка. Подставим эти значения неизвестных всистему примера 5.

2 - 3 - (-1) = 0, 5 • 2 - 1 • 3 + 4 • (-1) = 10 – 7 = 30,

1 • 2 + 2 • 3 + 3(-1) = 8-3 = 5.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1.$

Пример. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33. \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 4 & 8 & 1 & 18 \\ 3 & 5 & 4 & 33 \end{array}\right) \begin{array}{c} (2)-4(1) \\ \sim \\ (3)-3(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & -16 & -11 & -66 \\ 0 & -13 & -5 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{c} -(2) \\ \sim \\ -16(3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & 16 & 11 & 66 \\ 0 & 208 & 80 & 480 \end{array}\right) \begin{array}{c} (3)-13(2) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & 16 & 11 & 66 \\ 0 & 0 & -63 & -378 \end{array}\right).$$

$r(A) = 3, r(A|b) = 3, n = 3.$

Система совместна и определенна. Найдем ее решение.

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ \quad 16x_2 + 11x_3 = 66, \\ \qquad\quad 4x_3 = 378. \end{cases} \quad 16x_2 + 6 \cdot 11 = 66, x_2 = 0;\ x_1 + 18 = 21,$$

$$x_1 = 3, x_3 = \frac{378}{63} = 6.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 6.$

5. СЛОУ

Исследовать систему $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (2)+(1) \\ \sim \\ (3)+(1) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{6}(2) \\ \sim \\ \frac{1}{2}(3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (3)-(2) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

r (A) = 2, r(A |b) =2, n = 4, r(A) = r(A |b) = 2 < 4.

Ответ: система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Пример. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right)\underset{\sim}{(1)\leftrightarrow(4)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2 & -1\end{array}\right)\begin{matrix}(2)-3(1)\\ \sim\\ (3)+3(1)\\ (4)-2(1)\end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -4 & -8\\ 0 & 5 & 4 & 10\\ 0 & -3 & -4 & -7\end{array}\right)\begin{matrix}-\frac{1}{4}(2)\\ \sim\\ -1\cdot(4)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 4 & 10\\ 0 & 3 & 4 & 7\end{array}\right)\begin{matrix}(3)-5(2)\\ \sim\\ (4)-3(2)\end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{(4)+(3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right), r(A)=3,$$

$$r(A|b)=4, r(A)\neq r(A|b).$$

Ответ: система несовместна

Пример. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 0\\ 5 & -1 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{array}\right)$.

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 0\\ 5 & -1 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{array}\right)\begin{matrix}(2)-5(1)\\ \sim\\ (3)-(1)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 9 & 3\\ 0 & 3 & 4 & 5\end{array}\right)\underset{\sim}{4(3)}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 9 & 3\\ 0 & 12 & 16 & 20\end{array}\right)\underset{\sim}{(3)-3(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 9 & 3\\ 0 & 0 & -11 & 11\end{array}\right).$$

$r(A)=3, r(A|b)=3, n=3.$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение.

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и свойства теории СЛУ;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении СЛУ;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые в исследовании СЛОУ;
- выработали навыки по решению определенных СЛУ методами Крамера и методом обратной матрицы.
- выработали навыки по решению неопределенных и определенных СЛУ методом Гаусса.

2.4 Практическое занятие № 5 (2 часа).

Тема: «Алгебраические структуры»

2.4.1 Задание для работы:

1. Бинарное отношение, операция.

2. Алгебраические системы.

3. Комплексные числа и операции над ними.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Бинарное отношение, операция

Декартовым произведением $A \times B$ множеств A, B называется множество

$$A \times B = \{(a, b) | \ a \in A, \quad b \in B\}$$

Задача 1. Если $|A|, |B|$ – количества элементов конечных множеств A, B, то

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Задача 2. Дать определение декартова произведения $A \times B \times C$ и доказать, что

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

N- местным предикатом, определенным на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$,

называется функция $P : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N \ \rightarrow \{0{,}1\},\ 1 -$ **истина**, $0 -$ **ложь.**

Примеры.

1. Для целого числа $k \in Z$ положим

$\text{Divisible}_2(k) = (\text{число } k \text{ делится на 2 нацело}),$ - одноместный предикат, определенный на множестве целых чисел.

2. Для действительных чисел $x, y \in R$ отношение $x \leq y$ двуместный предикат, определенный на множестве

$$R^2 = R \times R$$

2. Алгебраические системы

Определение. Два вектора называются равными, если равны их соответствующие координаты

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

Среди n-мерных векторов есть вектор, нейтральный относительно операции сложения. Это вектор с нулевыми координатами. Его называют нулевым вектором и обозначают через 0:

0 = (0, 0, ..., 0).

Каждый вектор x имеет противоположный; его обозначают - x, причем

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

Введенные операции сложения векторов и умножение вектора на число обладают восемью свойствами:

1) x + y = y + x;

2) (x + y) + z = x + (y + z);

3) x + 0 = 0;

4) x + (-x) = 0;

5)λ(μx) = (λμ)x;

6) λ(x + y) = λx + λy;

7) (λ + μ)x = λx + μx;

8) 1 · x = x.

Определение. Множество всех n-мерных векторов,для которых установлены операции сложения иумножения на число, называется n-мерным векторным(линейным) пространством R_n.

Определение. Система n-мерных векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$называется линейно зависимой, если найдутся числ$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю, такие, что

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_s x_s = 0.$$

В противном случае эта система называется линейно независимой.

Определение. Пусть Q - произвольное множество n-мерных векторов ваR_n. Система векторов $B = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$называется базисом в Q, если выполняются следующие условия:

1)$e_k \in Q, k = 1,2, \dots, s$;

2) система $B = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ линейно независима;

3) для любого вектора $x \in Q$ найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$такие, что $x = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k e_k$.

Определение. Формула $x = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k e_k$ называется разложением вектора x по базису$B = (e_1, e_2, \dots, e_s)$.Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$однозначно определяются вектором x и называются координатами этого вектора в базисе B.

Справедливы следующие утверждения:

1) Всякая система векторов $Q \in R_n$имеет по меньшей мере один базис; при этом все базисы этой системы состоят из одинакового числа векторов, называемого рангом системы Q, и обозначаются r(Q).

2) Ранг всего пространства R_n равен n и называется размерностью этого пространства; при этом в качестве базиса R_n можно взять следующую систему:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0),$

$\dots$

$e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$

Этот базис принято называть каноническим.

Зафиксируем произвольный базис $B = (e_1, e_2, \dots, e_s)$ впространстве R_n. Тогда всякому вектору x можно поставить во взаимно однозначное соответствие столбец его координат в этом базисе, т. е.

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3. Комплексные числа и операции над ними

Пример. Найти значение комплексного числа z и изобразить на комплексной плоскости

$z = 1 + 2i - (\overline{2 + i}).$

Решение:

Так как $(\overline{2 + i}) = 2 - i$,то $z = 1 + 2i - (2 - i) = 1 + 2i - 2 + i = -1 + 3i.$

Ответ: $z = -1 + 3i$- комплексное число в алгебраической форме записи.

Пример. Вычислить $z = (1 + 2i)(2 + i)$

Решение:

Комплексные числа перемножаются как двучлены, причем i^2 заменяется на –

1.

$z = (1 + 2i)(2 + i) = 2 + 4i + i + 2i^2 = 2 + 5i - 2 = 5i.$

Ответ: $5i$.

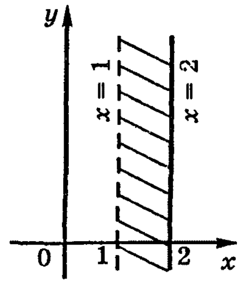
Пример. Разделить число $z_1 2 + 3i$на число$z_2 1 + 4i$.

Решение: Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$ - это значит представить его в алгебраической форме. Для этого числитель и знаменатель дроби надо умножить на число, сопряженное знаменателю, т. е. на $\bar{z}_2 = \overline{1 + 4i} = 1 - 4i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 + 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{2 + 3i - 8i - 12i^2}{1 + 16} = \frac{14 - 5i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i.$$

Ответ: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i$- в алгебраической форме.

Пример. Выполнить операции и представить результат в алгебраической форме:



а) $z = (2i - i^2)^2 + (1 - 3i)^3$.

Решение:

Так как $i^2 = -1$, то $z = (2i + i^2)^2 + (1 - 3i)^3 = (2i)^2 + 2 \cdot (2i) + 1 + 1 - 3(3i) + 3 \cdot (3i)^2 - (3i)^3 = -4 + 4i + 1 + 1 - 9i - 27 + 27i = -29 + 22i$.

Ответ: $z = -29 + 22i$.

б) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

Решение:

Представим сначала дробь $\frac{1-i}{1+i}$ в алгебраической форме:

$$\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i+i^2}{1+1} = \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Тогда $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = -i^3 = -i^2 \cdot i = i$.

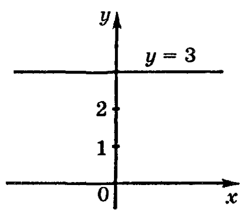
Ответ: $z = i$.

Пример. Какие множества точек плоскости задаются условиями:

а) Re z = 2.

Решение:

Так как Re z = x, то условие Re z = 2 эквивалентно уравнению x = 2 и задает прямую, параллельную мнимой оси Oy.



Ответ: Re z = 2 ⇔ x = 2.

б) 1 <Re z ≤ 2.

Так как Re z = x, то условие 1 <Re z ≤ 2 эквивалентно условию 1 < x ≤ 2. Получаем бесконечную вертикальную полосу между прямыми x = 1 и x = 2, включая и правую прямую x=2.

Ответ: 1 < x ≤ 2.

Пример. Вычислить $z_1\bar{z}_2$ и $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, если $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 2 + 2i$.

Решение.

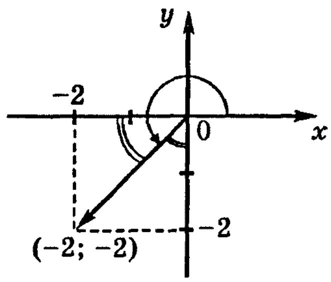
Так как $\bar{z}_1 = \overline{3 + 2i} = 3 - 2i, \bar{z}_2 = \overline{2 + 2i} = 2 - 2i$, то $z_1\bar{z}_2 = (3 + 2i)(2 - 2i) = 2(3 + 2i)(1 - i) = 2(3 + 2i - 3i - 2i^2) = 2(3 - i + 2) = 2(5 - i) = 10 - 2i$;

$$\frac{\bar{z}_1^2}{z_2} = \frac{(3-2i)^2}{2+2i} = \frac{9-12i+4i^2}{2(1+i)} = \frac{9-12i-4}{2(1+i)} = \frac{5-12i}{2(1+i)} = \frac{(5-12i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \frac{5-12i-5i+12i^2}{2\cdot 2} =$$
$$\frac{-17i+5-12}{4} = -\frac{7}{4} - \frac{17}{4}i.$$

Ответ: $z_1\bar{z}_2 = 10 - 2i, \frac{\bar{z}_1^2}{z_2} = -\frac{7}{4} - \frac{17}{4}i.$

Пример. Найти модули и главные значения аргументов следующих чисел:

а) -1; б) -2 + 2i; в) -2 - 2i.



Решение:

а) Изобразим число -1 в полярной системе координат.

Следовательно, |-1| =1 =r, arg (-1) = π.

б) r = -2 + 2i.

Решение:

Здесь x = -2, y = 2, значит, $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

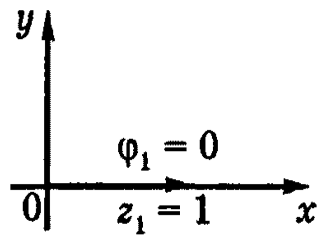
Следовательно, $|-2+2i| = 2\sqrt{2}, \arg(-2+2i) = \frac{3\pi}{4}.$

Пример. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

а) $z_1 = 1$; б) $z_2 = i$; в) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$; г) $z_4 = -2$, взяв для аргумента главное значение.

Решение:

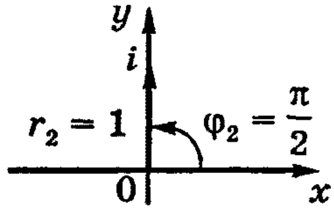
а) Для числа$z_1 = 1$ имеем $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ и $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1$;для всех действительных положительных чисел argz = 0, следовательно, и$\varphi_1 = \arg z_1 = \arg 1 = 0$. Таким образом



$$z_1 = 1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) =$$
$$= 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0).$$

Изобразим $z_1 = 1$ в виде вектора

Очевидно, $r_1 = 1, \varphi_1 = 0.$



б) Для числа$z_2 = i$имеем $x_2 = 0$,

$$y_2 = 1, r_2 = 1.$$

Геометрически:

Для всех чисто мнимых чисел с положительной мнимой частью$\arg z = \frac{\pi}{2}$, следовательно, и $\varphi_2 = \arg z_2 = \arg i = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $z_2 = i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

в) Для числа $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$имеем$x_3 = -1, y_3 = \sqrt{3}, r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2$, а так как по формулам (3)$\cos\varphi = -\frac{1}{2}, \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$,то для z_3 аргумент $\varphi_3 = \arg z_3 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$(точка z_3 принадлежит второму квадранту). Таким образом, $z_3 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

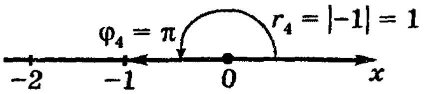
г) Для числа $z_4 = -2$ имеем$x_4 = -2, y_4 = 0, r_4 = 2$.

Для всех действительных отрицательных чисел arg = π,следовательно, и$\varphi_4 = \arg z_4 = \arg(-2) = \pi$.

Таким образом,

$z_4 = -2 = +2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Геометрически:



2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и свойства теории множеств;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в исследовании алгебраических систем;

- выработали навыки операций с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

2.5 Практическое занятие № 6, 7 (4 часа).

Тема: «Вектора, их классификация, арифметические действия. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис. ПДСК»

2.5.1 Задание для работы:

1. Вектор, его характеристики, классификация, изображение.

2. Проекция вектора на ось. Орт вектора.

3. Арифметические действия над векторами в векторной и координатной форме.

4. Базис векторного пространства, разложение вектора по базисным векторам.

5. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.

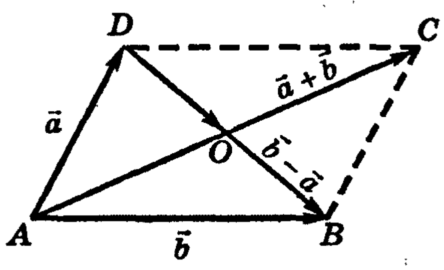
6. Признаки коллинеарности и ортогональности векторов.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вектор, его характеристики, классификация, изображение

Пример. Доказать равенства:

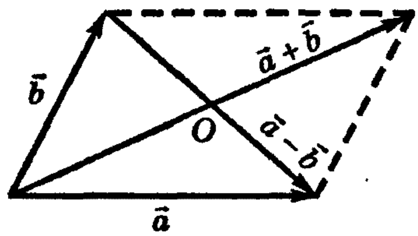
а) $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;



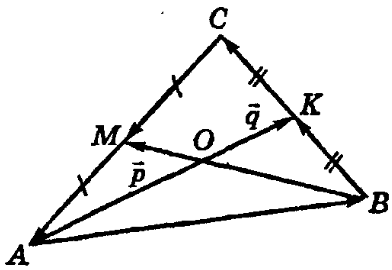
б) $\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

и выяснить, каков их геометрический смысл.

Решение: а) В левой части равенства раскроем скобки, приведем подобные члены, получим вектор в правой части. Поясним это равенство геометрически. Пусть даны два вектора, а и b, отложим их от общего начала и построим параллелограмм и его диагонали, получим:



По правилу построения разности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$ Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то



$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

Тогда $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$ или $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

б) Аналогично объясняется второе равенство.

Равенства доказаны.

Пример. $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ медианы треугольника ABC. Выразить через $\vec{p} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

Решение:

Из ABC получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{\frac{2}{3}q}$; $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{p}$.

Поэтому $\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{p}$; $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{p} - \vec{q})$.

Из ABK получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{p}$; $\left(\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$;

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{p} - \overrightarrow{AB} = \vec{p} - \frac{2}{3}(\vec{p} - \vec{q})$.

Умножим это равенство на 2, получим

$\overrightarrow{BC} = 2\vec{p} - \frac{4}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$.

Из ΔBCM получаем: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM}$. Но $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{q}$, поэтому $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \vec{q}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \vec{q} - \overrightarrow{BC} = \vec{q} - \frac{2}{3}\vec{p} - \frac{4}{3}\vec{q}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{3}\vec{q} - \frac{2}{3}\vec{p}$, $\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{p} - \vec{q})$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$, $\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}$.

2. Проекция вектора на ось. Орт вектора

Пример. Пусть даны векторы$\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c} = (1; 0; 1)$ в некотором векторном базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Найти координаты линейной комбинации $2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$.

Решение: Введем обозначение для линейной комбинации

$\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + (-4)\vec{c}$. Коэффициенты линейной комбинации $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = -4$. Запишем данное векторное равенство в координатной форме

$$\vec{d} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что каждая координата линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации одноименных координат, т. е.

$$x = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 = 7,$$

$$y = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 = 10,$$

$$z = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 = -3.$$

Координаты вектора $\vec{d}$базисе$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. будут:

$$\vec{d} = (7; 10; -3).$$

Ответ: $\vec{d} = (7; 10; -3)$.

Пример. Найти длину и направляющие косинусы вектора

$\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

Решение: Найдем разложение вектора $\vec{p}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$\vec{p} = 3(4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}) - 5(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) = 9\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$.

Найдем длину вектора $\vec{p}$: $\vec{p} = \sqrt{9^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{154}$. Тогда орт вектора $\vec{p}$ – вектор $\overrightarrow{p_0} = \frac{9}{\sqrt{154}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{154}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{154}}\vec{k}$. Известно, что координаты орта вектора есть его направляющие косинусы. Следовательно,$\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{154}}$, $\cos\beta = \frac{8}{\sqrt{154}}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{154}}$

Ответ:$\vec{p} = \sqrt{154}$, $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{154}}$, $\cos\beta = \frac{8}{\sqrt{154}}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{154}}$

3. Арифметические действия над векторами в векторной и координатной форме

Пример. Заданы векторы$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Найти:

а) координаты вектора$\overrightarrow{a_0}$; б) координаты вектора$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

в) разложение вектора$\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$по базису$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; г) пр$_i(\vec{a} - \vec{b})$.

Решение:

а) Так как $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, то найдем сначала длину вектора $\vec{a}$ по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$|\vec{a}| = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$. Тогда $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2;3;0) = (\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}};0)$.

б) Вычислим координаты вектора

$\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = (2;3;0) - \frac{1}{2}(0;-3;-2) + (1;1;-1) = (3;\frac{11}{2};0)$.

в) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = (2;3;0) + (0;-3;-2) - 2(1;1;-1) = (0;-2;0) = -2\vec{j}$;

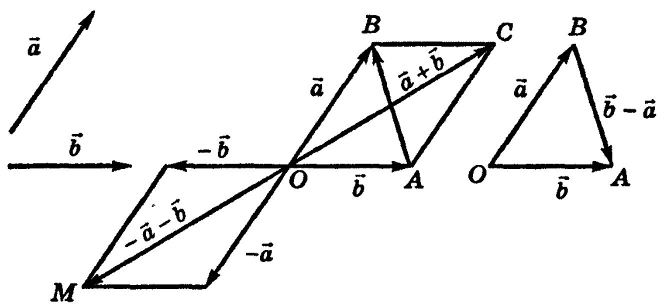
г) $\text{пр}_i(\vec{a} - \vec{b})$; $\vec{a} - \vec{b} = (2;3;0) - (0;-3;-2) = (2;6;2)$;

$\text{пр}_i(\vec{a} - \vec{b}) = 6$.

Ответ: а) $\overrightarrow{a_0} = (\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}};0)$; б) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$=$(3;\frac{11}{2};0)$; в) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = -2\vec{j}$; г) $\text{пр}_i(\vec{a} - b=6$

Пример. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: а) $\vec{a}$+$\vec{b}$; б) $\vec{a}$-$\vec{b}$; в) $\vec{b}$-$\vec{a}$; г) $-\vec{a} - \vec{b}$

Решение: Пусть даны два вектора, а и В, отложим их от общего начала и построим указанные векторы либо по правилу параллелограмма, либо по правилу треугольника.



Ответ: а) $\vec{a}$+$\vec{b}$=$\overrightarrow{OC}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$ =$\overrightarrow{BA}$; г) -$\vec{a}$-$\vec{b}$ = $\overrightarrow{OM}$

4. Базис векторного пространства, разложение вектора по базисным векторам

Пример. Показать, что тройка векторов $\overrightarrow{e_1}(1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2}(1,1,0)$, $\overrightarrow{e_3}(1,1,1)$ образуют базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ и написать соответствующее разложение по базису.

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x = -2, y = 1, z = -1$$

Ответ: $\vec{a} = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$.

Пример. Разложить вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем неколлинеарным векторам $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$,$\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$,$\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение:

а) Покажем, что векторы неколлинеарны. В этом случае тройки коэффициентов их линейных комбинаций должны быть линейно независимы, т.е. определитель, составленный из коэффициентов линейных комбинаций, должен быть не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 7 = -10 \neq 0.$$

(Определитель вычислен разложением по элементам первого столбца).

б) Решим систему уравнений относительно $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \vec{p} \\ \vec{a} - \vec{b} = \vec{q} \\ 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{r} \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим систему двух уравнений относительно $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\begin{cases} 2\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{p} - \vec{q} \\ 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{r} \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое.

Отсюда $\vec{c} = \frac{\vec{q} - \vec{p} + \vec{r}}{5}$, $\vec{b} = \frac{3\vec{p} - 3\vec{q} + 2\vec{r}}{10}$, $\vec{a} = \frac{3\vec{p} + 7\vec{q} + 2\vec{r}}{10}$ и

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \frac{4\vec{p} + 6\vec{q} + 6\vec{r}}{10} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}$.

Ответ: $\vec{s} = (\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{3}{5})$в базисе $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

5. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения

Пример. Дано: $|\overrightarrow{a_1}| = 3$, $|\overrightarrow{a_2}| = 4$, $(\overrightarrow{a_1}, \ \overrightarrow{a_2}) = \frac{2\pi}{3}$.

Вычислить: а) $\overrightarrow{a_1}^2 = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_1}$; б) $(3\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2})$;в) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})^2$.

Решение:

а)$\overrightarrow{a_1}^2 = |\overrightarrow{a_1}|^2 = 9$;

б)$(3\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2}) = 3\,\overrightarrow{a_1}^2 - 2(\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_1}) + 6(\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}) - 4\overrightarrow{a_2}^2 = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot 4^2 = 27 - 24 - 64 = -61$

в)$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})^2=\overrightarrow{a_1}^2+2(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2})+\overrightarrow{a_2}^2=|\overrightarrow{a_1}|^2+2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\cos\frac{2\pi}{3}+4\,\overrightarrow{a_2}^2=9-3\cdot 4+16=13.$

Ответ: а) 9; б) –61; в) 13.

Пример. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}=(3;-5;2)$,когда ее точка приложенияперемещается из начала в конец вектора

$\vec{S}=(2;-5;-7)$.

Решение:

$A=\left(\vec{F}\cdot\vec{S}\right)=3\cdot 2+(-5)\cdot(-5)+2\cdot(-7)=6+25-14=17.$

Ответ: А =17.

6. Признаки коллинеарности и ортогональности векторов

Пример. Определить, при каких значениях α, β коллинеарны векторы

$\vec{a}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+\beta\vec{k}$и $\vec{b}=\alpha\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+2\vec{k}.$

Решение: Из условия коллинеарности двух векторов следуют равенства:

$\frac{-2}{\alpha}=\frac{3}{-6}=\frac{\beta}{2}$. Тогда $\frac{-2}{\alpha}=\frac{3}{-6};\ \alpha=4, \frac{3}{-6}=\frac{\beta}{2};\ \ \beta=-1$.

Ответ: $\alpha=4, \beta=-1$.

Пример. Дано: $|\overrightarrow{a_1}|=3$, $|\overrightarrow{a_2}|=5$. Определить, при каком значении α векторы $\overrightarrow{a_1}+\alpha\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_1}-\alpha\overrightarrow{a_2}$ будут перпендикулярны.

Решение:

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\left(\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0\right)$(условие отрогональности векторов).

Следовательно

$(\overrightarrow{a_1}+\alpha\overrightarrow{a_2})\cdot(\overrightarrow{a_1}-\alpha\overrightarrow{a_2})=0, \overrightarrow{a_1}^2-\alpha^2\overrightarrow{a_2}^2=0,$

$|\overrightarrow{a_1}|^2-\alpha^2|\overrightarrow{a_2}|^2=0;\ \ \alpha^2=\frac{|\overrightarrow{a_1}|^2}{|\overrightarrow{a_2}|^2}=\frac{9}{25}, \alpha=\pm\frac{3}{5}.$

Ответ: $\pm\frac{3}{5}$.

Пример. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=1$ и $\left|\vec{b}\right|=2$, вычислить:

1) $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]^2$; 2)$\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right]^2$; 3)$\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right]^2$.

Решение:

1) По определению скалярного произведения имеем:

$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2\cos 0°=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left[|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\frac{2\pi}{3}\right]^2==\left[1\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2=3.$

2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right]^2=\left[(2\vec{a}\times\vec{a})+\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+4\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)++2\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)\right]^2=$ $\left[2\cdot 0-\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]+4\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+2\cdot 0\right]^2=\left|3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|^2=\quad 9\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|^2=9\cdot 3=27.$

3) $\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right]^2=\left[(\vec{a}\times 3\vec{a})+9\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-3\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)\right]^2=$ $\left[-9\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]^2=\left[10\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]^2=100\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|^2=300.$

Ответ: 1) 3; 2) 27; 3)300.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и теоремы векторной алгебры;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач векторной алгебры;

- выработали навыки операций с векторами в векторной и координатной форме.

- освоили основные понятия и теорем, связанные векторным пространством;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение скалярного произведения, для установления коллинеарности и ортогональности векторов;

- выработали навыки нахождения скалярного произведения, косинуса угла между векторами в координатной форме, по свойствам, по определению.

2.6 Практическое занятие № 8, 9, 10 (6 часов).

Тема: «Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов, их свойства и вычисление, приложения»

2.6.1 Задание для работы:

1. Векторное произведение векторов, его вычисление, приложения.
2. Признаки коллинеарности
3. Решение комплексных геометрических задач на векторный метод.
4. Смешанное произведение векторов, его вычисление, приложения.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Векторное произведение векторов, его вычисление, приложения

Пример. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;-2)$и$\vec{b}=(1;2;-1)$. Найти координаты векторных произведений: $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$; 2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}\right]$; 3) $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$.

Решение.

1). $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}==5\vec{\imath}+\vec{\jmath}+7\vec{k},$

$\vec{a}\times\vec{b}=5\vec{\imath}+\vec{\jmath}+7\vec{k}=\{5;1;7\}.$

2). $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}\right]=\left(2\vec{a}\times\vec{b}\right)+\vec{b}\times\vec{b}=2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=2\{5;1;7\}=\{10;2;14\}.$

3). $\left[(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})\right]=4(\vec{a}\times\vec{a})-2(\vec{b}\times\vec{a})+2(\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{b}\times\vec{b})=$ $4(\vec{a}\times\vec{b})=4(5;1;7)=(20;4;28)$. Ответ: 1) (5;1;7); 2) (10;2;14); 3) (20;4;28).

Пример. Сила $\vec{P}=(2;2;9)$приложена к точке A(4; 2; -3).Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки C(2; 4; 0).

Решение: $\vec{M}=\overrightarrow{CA}\times\vec{P}$, поэтому найдем координаты $\overrightarrow{CA}$ и $\vec{M}$: $\overrightarrow{CA}=(2;-2;-3)$, $\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 3 & 3 & 9\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & 9\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & 9\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=4(-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k})$. Величина M – это его модуль: $\vec{M}=4\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=4\sqrt{49}=28$.Найдем орт вектора $\vec{M}$: $\vec{M}_0=-\frac{3}{7}\vec{i}-\frac{6}{7}\vec{j}+\frac{2}{7}\vec{k}$. Ответ: 28;$\cos\alpha=-\frac{3}{7},\cos\beta=-\frac{6}{7},\cos\gamma=\frac{2}{7}$.

2. Признаки коллинеарности

Пример. Проверить, что векторы$\vec{a}=(-1;3)$ и $\vec{b}=(2;2)$ на плоскости не коллинеарны, и разложить вектор $\vec{c}=(7;-5)$ по базису $\vec{a}и\vec{b}$.

Решение: Проверить для векторов $\vec{a}и\vec{b}$ условие коллинеарности. Так как $-\frac{1}{2}\neq\frac{3}{2}$, то векторы не коллинеарны. Следовательно, они образуют базис на плоскости. Пусть$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. В координатной форме будет линейная система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}7=x\cdot(-1)+y\cdot 2\\ -5=x\cdot 3+y\cdot 2\end{cases}$$

Решив ее, находим $x=-3, y=2$. Итак,$\vec{c}=-3\vec{a}+2\vec{b}$.Ответ: $\vec{c}=-3\vec{a}+2\vec{b}$.

3. Решение комплексных геометрических задач на векторный метод

Пример. Даны вершины треугольника A(1;–1; 2),B(5;–6;2) и C(1;3;–1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Решение: Находим $|\overrightarrow{AC}|$ и $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

$\overrightarrow{AC}=\{0;40-3\},\overrightarrow{AB}=(4;-5;0)$. $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$;

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 5 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k}$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=|15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k}|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\sqrt{625}=25$.

Тогда длина искомой высоты $h=\frac{25}{5}=5$. Ответ: 5.

Пример. Даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; –3), C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение: Находим векторы$\overrightarrow{AB}$и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (3-1)\vec{\imath} + (0-2)\vec{\jmath} + (-3-0)\vec{k} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} = \{2; -2; -3\};$

$\overrightarrow{AC} = (5-1)\vec{\imath} + (2-2)\vec{\jmath} + (6-0)\vec{k} = 4\vec{\imath} + 6\vec{k} = \{4; 0; 6\}.$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{\imath} - 24\vec{\jmath} + 8\vec{k}.$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left|-3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right| = 2\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 2\sqrt{9+36+4} = 2 \cdot 7 = 14$ (кв. ед.). Ответ: 14.

4. Смешанное произведение векторов, его вычисление, приложения

Пример. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$, заданных своими координатами:

1)$\vec{a} = (1; -1; 1), \vec{b} = (7; 3; -5), \vec{c} = (-2; 2; -2);$

2)$\vec{a} = (3; 5; 1), \vec{b} = (4; 0; -1), \vec{c} = (2; 1; 1);$

3) $\vec{a} = (2; 1; 0), \vec{b} = (3; 4; -1), \vec{c} = (-1; -3; 1);$

4) $\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (5; -2; 1), \vec{c} = (2; 1; -2).$

Решение.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 4 - 24 + 20 = 0.$

Пример. Доказать, что четыре точки A(1;2; -1), B(0; 1; 5), C (-1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежат в одной плоскости.

Решение:

Векторы$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$имеют координаты:$\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 6)$,

$\overrightarrow{AC} = (-2; 0; 2)$,$\overrightarrow{AD} = (1; -1; 4)$. Если эти векторы компланарны, то их смешанное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 12 \neq 0.$$

Значит, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Ответ: точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Пример. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках O(0; 0; 0), A(5; 2; 0), B(2; 5; 0), C(1; 2; 4).

Решение.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\cdot 4\cdot\left\|\begin{matrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}\right\| = 14 \text{(куб. ед.)}.$$

(При вычислении определителя мы пользовались разложением его по элементам третьего столбца).

Ответ: 14.

2.6.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и теоремы, связанные с векторным, скалярным произведением;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение скалярного и векторного произведения, для установления коллинеарности и ортогональности векторов;

- выработали навыки нахождения скалярного и векторного произведения, косинуса и синуса угла между векторами в координатной форме, по свойствам, по определению, работы с приложениями векторного и скалярного произведения.

2.7 Практическое занятие № 11, 12, 13 (6 часов).

Тема: «Алгебраические линии. Прямая на плоскости и в пространстве. Метрическая теория прямых»

2.7.1 Задание для работы:

1. Параметрическое уравнение прямой, уравнение в отрезках.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Параллельные, перпендикулярные прямые.
4. Расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми.

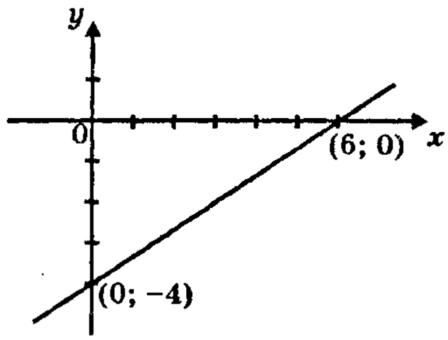
2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Параметрическое уравнение прямой, уравнение в отрезках

$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt; \end{cases}$ $t \in R$ – параметрические уравнения прямой;

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых на координатных осях Ох и Оу соответственно

Пример. Определить точки пересечения прямой 2х - 3у - 12 = 0 с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.



Решение: Пусть х = 0, у = –4, (0; –4);

у = 0, х = 6, (6; 0)

Уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1$$

Ответ:(6; 0) и (0; –4).

Пример. Преобразовать уравнение $3x - 4y + 12 = 0$ к уравнению в отрезках.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пример. Дана прямая *5х + 3у*– 3 = 0.

Определить угловой коэффициент «k»

прямой:

а) параллельной данной прямой;

б) перпендикулярной данной прямой.

Решение:$3y = -5x + 3$;

$y = -\frac{5}{3}x + 1$; $k_1 = -\frac{5}{3}$.

а) Угловой коэффициент любой прямой, параллельной данной, равен$k_2 = -\frac{5}{3}$; $(k_1 = k_2)$;

б) Угловой коэффициент любой прямой, перпендикулярной данной, $-k_2 = \frac{3}{5}$, $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$.

Ответ: а) $k_2 = -\frac{5}{3}$; б) $k_2 = \frac{3}{5}$

3. Параллельные, перпендикулярные прямые

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку М пересечения прямых 5х – у + 10 = 0 и 8х + 4у + 9 = 0 и параллельной прямой x + 3y = 0.

Решение:

1-й способ.

1) Найдем координаты точки M пересечения прямых5x – y + 10 = 0 и 8x + 4y + 9 = 0:

$$+\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ 8x + 4y + 9 = 0 \end{cases}\Bigg| \cdot 4$$

$$28x = -49; x = -\frac{49}{28} = -\frac{7}{4}; x = -\frac{7}{4}, y = \frac{5}{4}; M\left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

2) Прямаях + 3y = 0 имеет нормальный вектор $\vec{n}$ = (1; 3). Так как уравнение искомой прямой имеет тот же нормальный вектор, то

$\left(x + \frac{7}{4}\right) \cdot 1 + \left(y - \frac{5}{4}\right) \cdot 3 = 0,$

$4x + 7 + 12y - 15 = 0,\ 4x + 12y - 8 = 0,\ x + 3y - 2 = 0.$

Пример. Дана прямая 2x + 3y + 4 = 0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку$M_0(2; 1)$:

а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

Решение:

1-й способ.

Нормальный вектор данной прямой - $\vec{n}$= (2; 3).

а) Поэтому уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{M}_0(2; 1)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}$ = (2; 3) будет:

(x - 2) • 2 + (y - 1) • 3 = 0, 2x + 3y - 7 = 0.

б) Уравнение прямой, проходящей через данную точку$\mathrm{M}_0(2; 1)$; параллельно вектору $\vec{n}$ (перпендикулярно данной прямой), будет:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{3}; 3x - 6 = 2y - 2; 3x - 2y - 4 = 0.$$

2-й способ.

Представим уравнение данной прямой, как уравнение с угловым коэффициентом, $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3};\ k_1 = -\frac{2}{3}$.

а) Тогда уравнение прямой, проходящей через данную точку $\mathrm{M}_0(2; 1)$ параллельно данной прямой, будет:$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ или

$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2); 3y - 3 = -2x + 4; 2x + 3y - 7 = 0.$

б) Так как угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной, равен $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, то уравнение искомой прямой будет: $y - y_0 = -\frac{1}{k_1}(x - x_0)$ или $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2$, $2y-2=3x-6$, $3x-2y-4=0$.

Ответ: а) $2x + 3y - 7 = 0$; б) $3x - 2y - 4 = 0$.

4. Расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку А(2; 4) и удаленной от начала координат на расстояние d = 2.

Решение:

Уравнение прямой, проходящей через точку А(2; 4), запишем в виде:

$A(x - 2) + B(y - 4) = 0$. Если B = 0, то имеем x = 2; если B ≠ 0,

то$y - 4 - k(x - 2) = 0$, где $k = -\frac{A}{B}$, $-kx + y + 2k - 4 = 0$. По условию$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $2 = \frac{|2k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$; $\sqrt{k^2 + 1} = |k - 2|$;

$$(x_0 = 0, y_0 = 0);\ k^2 + 1 = k^2 - 4k + 4;\ -4k + 3 = 0,$$

$k = \frac{3}{4}$; $y - 4 - \frac{3}{4}(x - 2)$; $3x - 4y + 10 = 0$.

Ответ: $3x - 4y + 10 = 0, x = 2$.

Пример. Определить угол φ между двумя прямыми:

5x - y + 7 = 0, 3x + 2y = 0.

Решение: За угол между прямыми возьмем угол между их нормальными векторами: $\vec{n}_1$ = (5; -1), $\vec{n}_2$ = (3; 2).

Тогда $\cos\varphi = \frac{(\vec{n_1} \cdot \vec{n_2})}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{15-2}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{2}\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;отсюда φ = 45°.

Ответ: φ = 45°.

2.7.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные методы задания прямой на плоскости, основные формулы метрической теории прямых;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение уравнений прямой на плоскости;

- выработали навыки нахождения уравнений прямых и их компонентов.

2.8 Практическое занятие № 14, 15, 16, 17 (8 часов).

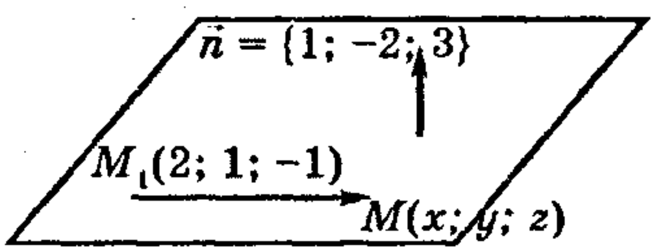
Тема: «Плоскость. Способы задания. Метрическая теория плоскостей. Кривые второго порядка, их свойства и уравнения. Поверхности вращения»

2.8.1 Задание для работы:

1. Уравнение плоскости через точку и нормальный вектор.
2. Уравнение плоскости через три точки.
3. Расстояние от точки до плоскости.
4. Окружность.
5. Эллипс.
6. Гипербола.
7. Парабола
8. Поверхности вращения.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Уравнение плоскости через точку и нормальный вектор



Пример. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$и имеет нормальный вектор

$\vec{n} = (1; -2; 3)$.

Решение:

Для вывода уравнения плоскости возьмем на этой плоскости точку M(x; y; z) с текущими координатами.

Получим вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - 2; y - 1; z + 1)$. По условию $\left(\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{n}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n}\right) = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \cdot 1 + (y - 1) \cdot (-2) + (z + 1) \cdot 3 = 0$.

Ответ: $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Пример. Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$и$M_2(4; -2; -1)$.Составить уравнение плоскости, проходящей через M_1перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение:

По условию вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является нормальным вектором искомой плоскости$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{n} = (1; -1; -3)$.Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$есть

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, или

$1 \cdot (x - 3) + (-1) \cdot (y + 1) + (-3) \cdot (z - 2) = 0, x - y - 3z + 2 = 0$.

Ответ: $x - y - 3z + 2 = 0$.

2. Уравнение плоскости через три точки

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки$M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$.

Решение

Возьмем на плоскости точку с текущими координатами M(x; y; z), будем иметь векторы

$\overrightarrow{M_1M}=(x-3;y+1;z-2)$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=(1;0;-3)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(-1;1;0)$. Эти векторы по условию компланарны. Следовательно, равен нулю определитель, составленный из координат этих векторов:

$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$, или 3x + 3y + z - 8 = 0.

Ответ: 3x + 3y+ z - 8 = 0.

3. Расстояние от точки до плоскости.

Пример. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(2;3;1)$ на плоскость 3x + y + 2z - 11 = 0.

Решение.

Нормальный вектор $\vec{n}$ = (3; 1; 2) данной плоскости будет по условию направляющим вектором прямой, проходящей через точку $M_0(2;3;1)$.

Ее уравнение

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$.   Ответ:$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Пример. Заданы плоскость

P: x + y - z + 1 = 0 и прямая L: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, причем $L\in P$.

Требуется найти:

а) угол между прямой и плоскостью;

б) координаты точек пересечения прямой и плоскости.

Решение:

$$\cos(\vec{a},\vec{n})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi;\ \vec{a}=(0;2;1),\vec{n}=(1;1;-1),$$

$$\sin\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\vec{a}||\vec{n}|}=\frac{2-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{15}},\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

б) Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}=t$, или параметрических$x=1,y=2t,z=t-1$.

Подставим параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости, найдем значение t: 1 + 2t - t + 1 + 1 = 0; t = -3. Тогда координаты точки пересечения прямой и плоскости будут: x = 1, y = -6, z = -4.

Ответ: а) $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}$, б)(1;-6;-4).

Пример:

Найти расстояние от точки $N(10;20;-30)$ до плоскости $8x+6z+15=0$

Решение: $\rho(N;\sigma)=\frac{|8\cdot10+0\cdot20+6\cdot(-30)+15|}{\sqrt{8^2+0^2+6^2}}=\frac{|80+0-180+15|}{\sqrt{64+36}}=\frac{|-85|}{\sqrt{100}}=\frac{85}{10}=\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$

Ответ: $\rho(N;\sigma)=8\frac{1}{2}$ ед.

Пример: Найти расстояние между параллельными плоскостями

$\sigma_1: 3x+y-4z-11=0$

$\sigma_2: 3x+y-4z-34=0$.

Решение: Используем формулу:

$$\rho(\sigma_1;\sigma_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-34-(-11)|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{|-34+11|}{\sqrt{9+1+16}}=\frac{|-23|}{\sqrt{26}}=\frac{23\sqrt{26}}{26}$$

Ответ: $\rho(\sigma_1;\sigma_2)=\frac{23\sqrt{26}}{26}$ ед. $\approx 4{,}51$ ед.

4. Окружность

Пример. Написать уравнение окружности радиуса R = 8 с центром в точке C(2; -5).

Решение:

Подставив значения координат точки C и значение радиуса в формулу (1), получим $(x-2)^2+(y-(-5))^2=8^2$или $(x-2)^2+(y+5)^2=8^2$.

Ответ:$(x-2)^2+(y+5)^2=8^2$.

Пример. Доказать, что уравнение $x^2+y^2+8x-4y-5=0$является уравнением окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение:

Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив полные квадраты относительно x и y:

$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 5 = 0$, или

$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$. Это уравнение представляет собой уравнение окружности с центром C(-4; 2) и радиусом, равным 5.

Ответ: C(-A; 2), R = 5.

5. Эллипс

Пример. Найти каноническое уравнение эллипса, зная его большую полуось a = 5 и эксцентриситет e = 0,6.

Решение:

По условию$e = \frac{c}{a} = 0{,}6$. Следовательно, $c = a \cdot 0{,}6 = 5 \cdot 0{,}6 = 3$. Но тогда квадрат малой полуоси эллипса$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Таким образом, искомое каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Ответ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M_1(2; -3)$ и имеющегобольшую полуось a = 4.

Решение:

Каноническое уравнение эллипса при a = 4 имеет следующий вид:

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (**)

Этому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M_1(2; -3)$. Следовательно, $\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$. Найдя отсюда $b^2 = 12$и подставив его в уравнение (**), получим искомое каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

6. Гипербола

Пример. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку M(8√5;12), если фокальное расстояние гиперболы равно 20.

Решение:

По условию 2c = 20, или c = 10. Запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

По условию точка M(8√5; 12) принадлежит гиперболе, следовательно,$\frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1$.

Второе уравнение для определения a^2и b^2 даетсоотношение $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - a^2$.

Решив систему уравнений $\begin{cases} \frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1, \\ b^2 = 100 - a^2 \end{cases}$ относительно

a^2и $b^2 (a > 0, b > 0)$, найдем$a^2 = 64$, $b^2 = 36$. Искомым уравнением будет уравнение $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Ответ:$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Пример. Доказать, что уравнение $21x^2 - 43y^2 = 903$является уравнением гиперболы. Найти координаты фокусов.

Решение:

Разделив обе части уравнения на 903, получим: $\frac{x^2}{43} - \frac{y^2}{21} = 1$

Это уравнение гиперболы, для которой$a^2 = 43$, $b^2 = 21$. Из соотношения$c^2 = a^2 + b^2$ находим $c^2 = 64$ и c = 8 (c > 0). Следовательно, фокусы гиперболы находятся в точках$F_1(8; 0)$ и $F_2(-8; 0)$.

Ответ:$F_1(8; 0)$ и $F_2(-8; 0)$.

7. Парабола

Пример. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Решение:

Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что 2p = 6,p = 3. Так как уравнение директрисы имеет уравнение$x = -\frac{p}{2}$, а фокус - координаты $\frac{p}{2}$ и 0, то для рассматриваемого случаяполучим уравнение директрисы $x = -\frac{3}{2}$и фокус $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Ответ: $x = -\frac{3}{2}, F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Пример. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

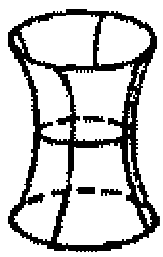
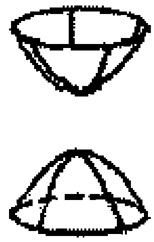
Решение:

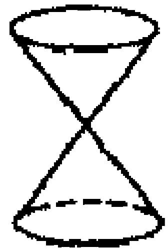
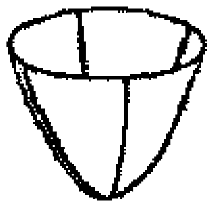
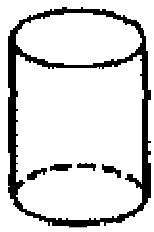
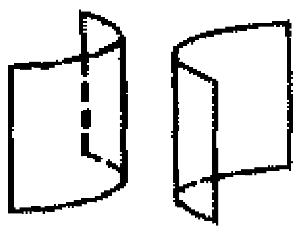
Так как известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды - точки М, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$; полагая в нем х = 6, у = 8, находим $8^2 = 2p \cdot 6$, откуда$2p = \frac{32}{3}$. Итак, уравнение искомой параболы $y^2 = \frac{32}{3}x$. Ответ:$y^2 = \frac{32}{3}x$.

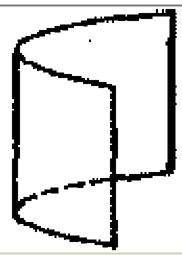
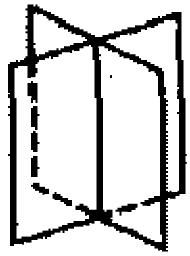
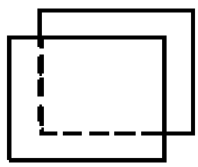
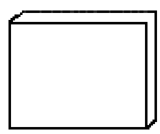
8. Поверхности вращения

Представлена таблица поверхностей второго порядка с каноническими уравнениями и схематическими изображениями. Также известны и мнимые поверхности, не имеющие внешних признаков (сводящихся на нет).

Поверхности второго порядка

Название поверхности	Каноническое уравнение	Схематическое изображение
Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	1	
Однополостный гиперболоид	1	
Двухполостный гиперболоид	-1	

Конус второго порядка	0	
Эллиптический параболоид	z = p q	
Гиперболический параболоид	z = p q	
Эллиптический цилиндр	1	
Гиперболический цилиндр	1	

Параболи-ческий цилиндр	2px	
Пара пересекающихся плоскостей	0	
Пара параллельных плоскостей	1	
Пара совпадающих плоскостей	0	
Мнимый конус второго порядка с действительной вершиной (0;0;0)	0	

Пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой)	0	
Мнимый эллипсоид	-1	
Мнимый эллиптический цилиндр	-1	
Пара мнимых параллельных плоскостей	-1	

Пример: Привести к каноническому виду уравнение

$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$

Решение: Сгруппируем слагаемые с одинаковыми переменными:

$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) + 13 = 0.$

Дополним каждую из скобок до полного квадрата:

$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 + 13 = 0,$

$4(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 + 36(z - 1)^2 = 36.$

Делим полученное уравнение на 36, получаем $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} + \dfrac{(z-1)^2}{1} = 1$.

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O'(1;\,1;\,1)$. Формулы преобразования координат имеют вид:

$x = x' + 1, \quad y = y' + 1, \quad z = z' + 1.$

Тогда уравнение поверхности примет вид: $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} + \dfrac{z'^2}{1} = 1$.

Это уравнение эллипсоида с центром в точке $O'(1;\,1;\,1)$ и полуосями 3, 2 и 1 соответственно.

Пример: Привести к каноническому виду уравнение

$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0.$

Решение: Сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые переменные:

$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) - 2z = 0.$

Выделим полные квадраты:

$(x^2 - 4x + 4) - 4 - (y^2 - 8y + 16) + 16 - 2z = 0,$

$(x - 2)^2 - (y - 4)^2 - 2(z - 6) = 0.$

Введем обозначения

$x' = x - 2,$

$y' = y - 4,$

$z' = z - 6,$

перенеся начало координат в точку $O'(2;\,4;\,6)$. Уравнение поверхности будет иметь вид:

$x'^2 - y'^2 = 2z'.$

Это уравнение гиперболического параболоида.

Решение комплексных задач

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz.$

Ее матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. В примере, рассмотренном в лекции 9, найдены собственные числа и ортонормированные собственные векторы этой матрицы: $\{\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$, $\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\}$.

Составим матрицу перехода к базису из этих векторов:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(порядок векторов изменен, чтобы они образовали правую тройку). Преобразуем координаты по формулам:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$
$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$

Получим:

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + 5(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + 2(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z') + 6(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}z') + 2(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z')(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z') = -2x'^2 + 6y'^2 + 3z'^2$$

Итак, квадратичная форма приведена к каноническому виду с коэффициентами, равными собственным числам матрицы квадратичной формы.

2.8.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные методы задания прямой на плоскости

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение уравнений прямой на плоскости;

- выработали навыки нахождения уравнений прямых и их компонентов.

- освоили формулы, задающие кривые второго порядка;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение уравнений кривых второго порядка;

- выработали навыки нахождения уравнений кривых второго порядка и их параметров.