ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Б1.Б.05 Алгебра и геометрия

Направление подготовки (специальность) 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Профиль образовательной программы “Автоматизированные системы обработки информации и управления”

Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция № 1 (2 часа).

Тема: «Элементы теории матриц»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Матрицы, их классификация
2. Действия над матрицами
3. Решение типовых задач

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Матрицы, их классификация

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

Прямоугольная таблица, содержащая *m* строки *n* столбцов действительных чисел называется **числовой матрицей.**

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\dots & a_{1\gamma}\dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2\gamma}\dots & a_{2n}\\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{ij}\dots & a_{in}\\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mj}\dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Сокращенно $A_{m\times n}=(a_{ij})$. Далее будем рассматривать числовые матрицы.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее **элементами**, где i=1,2,…m номер строки, j=1,2,…n номер столбца.

Матрицы обозначается заглавными буквами латинского алфавита A, B, C…, элементы строчными буквами.

Если число строк и столбцов одной матрицы равно числу строк и столбцов другой матрицы, то они называются **одноразмерными матрицами.**

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной матрицей**. Квадратную матрицу размером n×n называют матрицей **n-ого порядка**.

$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-ого порядка

a_{11}, a_{22} элементы главной диагонали

a_{12}, a_{21} элементы побочной диагонали

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ квадратная матрица 3-его порядка

a_{11}, a_{22}, a_{33} элементы главной диагонали

a_{13}, a_{22}, a_{31} элементы побочной диагонали

Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие выше (ниже) главной диагонали равны нулю, называется **треугольной матрицей.**

Квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали равны нулю, называется **диагональной матрицей.**

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны между собой, называется **скалярной матрицей.**

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны 1, называется **единичной матрицей.**

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ единичная матрица 3-его порядка

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей (0).**

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором (или вектор- столбец, или вектор-строка соответственно).**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е.$(5)_{1\times1}$ есть 5.

Одноразмерные матрицы **равны между собой**, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице А. тогда и только тогда, когда $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$

2. Действия над матрицами

Одноразмерные матрицы можно складывать.

Алгебраической суммой двух матриц$A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$такая, что $c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$ (i=1,2..m, j=1,2…n)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -9 & 8 \\ 6 & -4 & 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 12 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -7 & 15 \\ 6 & 0 & -2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Операция сложения одноразмерных матриц обладает следующими свойствами:

-коммутативность (переместительный закон) A+B=B+A

-ассоциативность (сочетательный закон)

(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C

- A+**0**=A

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число k называется матрица

$B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}= ka_{ij}$(i=1,2..m, j=1,2…n). Т.е. **Произведением числа k на матрицу А** называется матрица, определяемая равенством:

$$\mathbf{k}\bullet\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Пример:

A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, число k=2, 2A=$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

Матрица (–А), все элементы которой получены путем умножения соответствующих элементов матрицы А на (-1) называется матрицей **противоположной А.**

Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

- $1\cdot A=A$
- $\kappa\cdot(A+B)=\kappa\cdot A+\kappa\cdot B$
- $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
- $(\alpha\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta A)$
- $A+(-A)=\mathbf{0}$

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы**.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$, где i=1,2..m, k=1,2,..

…p, т.е. элемент i-й строки и k-ого столбца матрицы произведения С равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы k-ого столбца матрицы В.

Иными словами: **Произведение двух матриц А и В** обозначается символом АВ и определяется **равенством:**

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

Пример: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 9 & 10 & 1 \\ -19 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

$c_{11}=3\cdot 5+1\cdot(-2)+2\cdot(-2)=9$

$c_{12}=3\cdot 1+1\cdot 3+2\cdot 2=10$

$c_{13}=3\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 0=1$

$c_{21}=-1\cdot 5+0\cdot(-2)+7\cdot(-2)=-19$

$c_{22}=-1\cdot 1+0\cdot 3+7\cdot 2=13$

$c_{23}=-1\cdot 0+0\cdot 1+7\cdot 0=0$

Если матрицы А и В - квадратные одного размера, то произведения АВ и ВА всегда существуют.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

- $AB\neq BA$, если данное равенство выполняется, то матрицы А и В называют перестановочными (обладают свойством коммутации);

- $A\cdot(B\cdot C)= (A\cdot B)\cdot C$ (ассоциативность);

- $A\cdot(B+C)=AB+AC$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

- $A\cdot E=A$

- $\alpha\cdot(AB)= (\alpha\cdot A)B$.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строк столбцами с с сохранением нумерации, называется **матрицей, транспонированной к данной**. Обозначается A^T (A').

Пусть дана матрица $A_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, тогда

$$A^{T}_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

3. Решение типовых задач

Пример: Вычислить матрицу: $\mathbf{D=A\cdot B^T - 2E + C^2}$ **,**

если $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

1. Составим матрицу B^T, поменяв строки и столбцы матрицы B местами с сохранением нумерации $B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найдем произведение матриц $A\cdot B^T$

$$A\cdot B^T=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-3)\cdot 3+1\cdot(-2) & 2\cdot 0+(-3)\cdot 4+1\cdot 2 \\ 1\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot(-2) & 1\cdot 0+2\cdot 4+0\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Найдем произведение $2\cdot E=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Найдем матрицу $C^2=C\cdot C$

$$C^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 3 \\ -1\cdot 2+3\cdot(-1) & -1\cdot 1+3\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Найдем матрицу $D=A\cdot B^T - 2E + C^2$, подставив найденные матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-9 & -10\\ 7 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9-2+3 & -10-0+5\\ 7-0-5 & 8-2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ 2 & 14\end{pmatrix}$$

Ответ: $D=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ 2 & 14\end{pmatrix}$

Пример: A=$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Найдём обратную матрицу для A с помощью элементарных преобразований.

Для этого припишем к матрице A единичную матрицу и будем применять элементарные преобразования к обеим матрицам A и E так, чтобы на месте матрицы A получить единичную матрицу. Тогда на месте единичной матрицы получится обратная матрица A^{-1}.

$$A/E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}-2\\ \hookleftarrow\\ \hookleftarrow\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right):(-3)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0\\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\\ -2;\,6\\ \hookleftarrow\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & -1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1\end{array}\right)1/9\ \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & -1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & 1/9\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\\ \leftarrow;\\ -2\ \ 2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & 2/9\\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & 1/9 & -2/9\\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & 1/9\end{array}\right)=E/A^{-1}$$

Итак, нашли $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

1.2 Лекция № 2 (2 часа).

Тема: «Вектора, их свойства, классификация, арифметические действия. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис. ПДСК»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Определения и основные понятия, линейные операции над векторами.

2. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис пространства.

3. ПДСК.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определения и основные понятия, линейные операции над векторами

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек).

Обозначают: $\overrightarrow{AB}$ (точка A - начало вектора, точка B - конец вектора) или одной буквой - $\vec{a}$.

Определение. Длиной вектора (модулем) называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора обозначается $\overline{|a|}$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение. Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначают: $\vec{0}$.

Определение. Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с данным вектором $\vec{a}$, называется ортом вектора а и обозначается обычно символом $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{\overline{|a|}}$

Определение. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение. Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковое направление.

Определение. Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение вектора на число.

Определение. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух неравных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (правило треугольника).

В случае неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вместо правила треугольника использовать правило параллелограмма: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от общего начала и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущего из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от общего начала, то их разность есть вектор, исходящий из конца вектора $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу вектора $\vec{a}$ («уменьшаемого»).

Определение. Два коллинеарных вектора равной длины, направленные в противоположные стороны, называются противоположными. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается - $\vec{a}$.

Замечание.

1. Разность векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\vec{a}$и (-$\vec{b}$): $\vec{a}$- $\vec{b}$ = $\vec{a}$+ (-$\vec{b}$).

2. Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника (правило многоугольника).

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\vec{a}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$;

б) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

в) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ сонаправлены, если $0<\alpha$ (если же $\alpha=0$, то $\vec{b} = \vec{0}$).

Произведение вектора $\vec{a}$ на число α обозначают $\alpha\vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число обладают следующими свойствами:

1) сложение векторов ассоциативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ выполняются равенство:

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

2) сложение векторов коммутативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ выполняется равенство:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

3) прибавление нулевого вектора к любому вектору $\vec{a}$ не меняет последнего:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор - $\vec{a}$, такой что

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) умножение вектора на действительное число ассоциативно, т. е. для любых чисел α и βи любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство:

$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$;

6) умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел, т. е. для любых чисел α и βи любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство:

$(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+(\beta\vec{a})$;

7) умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов, т. е. для любых векторов α и β и любого числа α выполняется равенство:

$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

8)умножение вектора на единицу не меняет этого вектора: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Теорема (о коллинеарных векторах). Если $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ - два коллинеарных вектора, причем вектор $\overrightarrow{e_1}$ - ненулевой, то существует единственное число x такое, что

$\overrightarrow{e_2}= x\,\overrightarrow{e_1}$

Определение. Ортом ненулевого вектора $\vec{a}$ называется вектор$\overrightarrow{a_0}$, удовлетворяющий равенству:

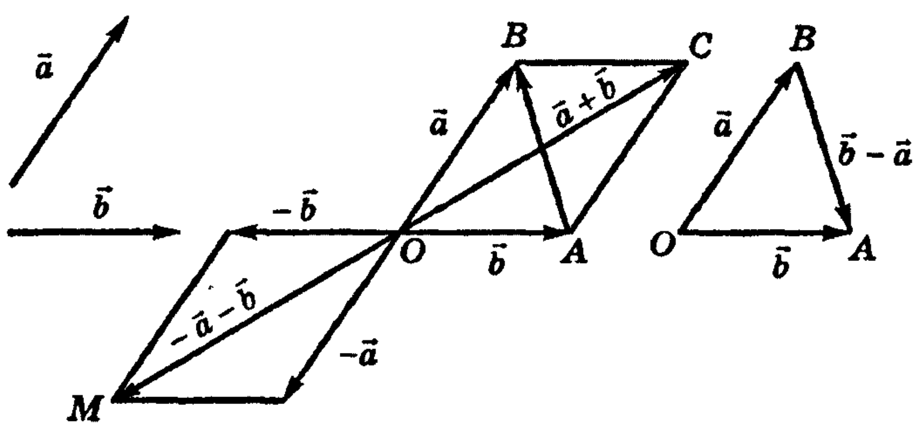
$\vec{a} =|\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a_0}$

Сформулированные свойства линейных операций позволяют преобразовать выражения, составленные из векторов, по обычным правилам алгебры: можно раскрыть скобки, приводить подобные члены, переносить некоторые члены в другую часть равенства с противоположным знаком и т.д.

Пример 1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}$

Решение. Пусть даны два вектора, а и В, отложим их от общего начала и построим указанные векторы либо по правилу параллелограмма, либо по правилу треугольника.



Ответ: а) $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$; б) $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}$;

в)$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OM}$.

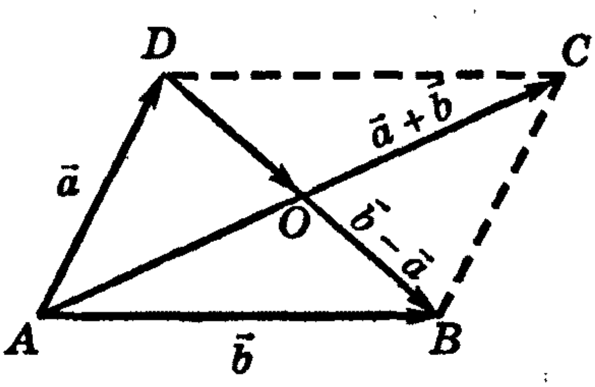
Пример 2. Доказать равенства:

а) $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}\,)$=$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;

б) $\vec{a}$ -$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \overrightarrow{b})$

и выяснить, каков их геометрический смысл.

Решение. а) В левой части равенства раскроем скобки, приведем подобные члены, получим вектор в правой части. Поясним это равенство геометрически. Пусть даны два вектора, a и b, отложим их от общего начала и построим параллелограмм и его диагонали, получим:



По правилу построения разности двух векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$, получим $\overrightarrow{DB}$=$\vec{b}$-$\vec{a}$ Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то

$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{b}$-$\vec{a})$

Тогда $\overrightarrow{AO}$=$\overrightarrow{AD}$+$\overrightarrow{DO}$ или $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}\,)$ = $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

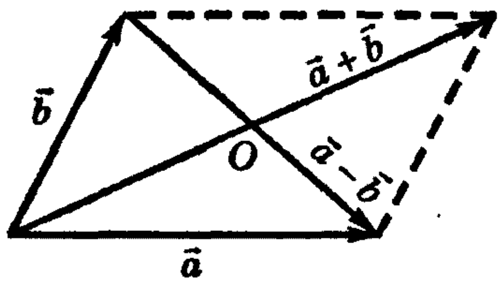
б) Аналогично объясняется второе равенство.

Равенства доказаны.

Пример 3. Дано: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ и $|\vec{a} + \vec{b}|$= 24. Вычислить

Решение. Пусть даны векторы $\vec{a} + \vec{b}$, и на них построен параллелограмм. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ диагонали параллелограмма, $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$длины его диагоналей. Известна теорема: сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон параллелограмма. Поэтому:

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}\,|^2 + |\vec{b}\,|^2)$, и $24^2 + |\vec{a}\text{-}b|^2 = 2(13^2+19^2)$



Отсюда $|\vec{a}-\vec{b}|^2$ =484, $|\vec{a}-\vec{b}|$=22, ($|\vec{a}-\vec{b}|$>0).

Ответ: 22.

2. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис пространства

Обобщением понятия вектора служит N-мерный вектор, которым называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде x=($x_1, x_2, \ldots x_n$), где x_i – i-я компонента вектора x. Необходимо знать, что линейные операции над n-мерными векторами удовлетворяют 8 аксиомам, схожими с аксиомами для действительных чисел.

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ называют линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, среди которых есть по крайней мере одно, не равное нулю, такое, что

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} = \vec{0}. \qquad (***)$$

Это определение линейной зависимости векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ эквивалентно такому: векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ линейно зависимы, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных (или разложить по остальным).

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ называются линейно зависимыми, если равенство (***) возможно в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Понятие линейной зависимости играет большую роль в линейной алгебре. В векторной алгебре линейная зависимость имеет простой геометрический смысл.

1) Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, два неколлинеарных вектора линейно независимы.

2) Три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три некомпланарных вектора линейно независимы.

3) Каждые четыре вектора линейно зависимы.

Определение. Векторным базисом в данной плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ этой плоскости.

Два и более векторов в пространстве называются **компланарными**, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в этой плоскости.

Определение. Векторным базисом в пространстве называют любые три некомпланарных вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Вектор $\overrightarrow{e_1}$ называют при этом первым базисным вектором, $\overrightarrow{e_2}$ – вторым, $\overrightarrow{e_2}$ - третьим.

Замечание 1. Три вектора $\overrightarrow{e_1} = \{e_{11}; e_{12}; e_{13}\}$, $\overrightarrow{e_2} = \{e_{21}; e_{22}; e_{23}\}$ и $\overrightarrow{e_3} = \{e_{31}; e_{32}; e_{33}\}$ образуют базис пространства, если определитель, составленный из их координат, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема. Пусть $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - векторный базис в пространстве. Тогда любой вектор $\vec{a}$ в пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, и $\overrightarrow{e_3}$:

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}. \qquad (**)$$

Определение. Равенство (**) называют разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, а числа *x, y, z* – координатами вектора $\vec{a}$ в базисе. пишут Кратко пишут: $\vec{a}$ =(x; y; z)

Определение. Базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ называется ортонормированным, если векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$$\overrightarrow{e_1} = \vec{i},\ \overrightarrow{e_2} = \vec{j},\ \overrightarrow{e_3} = \vec{k}.$$

Действия над векторами, заданными своими координатами

Теорема. Пусть на плоскости выбран векторный базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ и относительно него векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1; y_1)$,

$\vec{b} = \{x_2; y_2\}$.

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + y_1;\ x_2 + y_2\}$, $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - y_1;\ x_2 - y_2\}$, т. е. при сложении или вычитании векторов складываются или вычитаются их одноименные координаты;

$\alpha \cdot \vec{a} = \{\alpha \cdot x_1; \alpha \cdot y_1\}$т. е. при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Условие коллинеарности двух векторов

Теорема. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ в том и только в том случае, когда координаты вектора $\vec{b}$пропорциональны соответственным координатам вектора $\vec{a}$, т. е.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

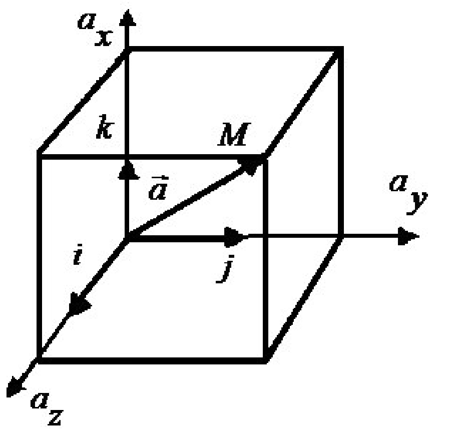
Линейные операции над векторами, заданными своими координатами в пространстве, производятся аналогично.

3. ПДСК

На практике Вы встречаетесь с величинами двух типов: для задания одних достаточно **числа,** например, температура С°=36,6, для задания других требуется указать и направление - например: сила или скорость. Величины первого типа называются **скалярными,** а второго **- векторными.**

Под вектором будем понимать направленный отрезок, который обозначим а.

Свободный вектор а (т.е. такой вектор, который без изменения длины и направления, может быть перенесен в любую точку пространства), заданный в координатном пространстве **Oxyz,** может быть представлен в виде:



$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, ,$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектораа на соответствующие оси координат (их называю координатами вектора а),$\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$, орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).

Такое представление вектора а, называется **разложением по ортам.**

Длина (модуль) вектора а обозначается $|\vec{a}|$ и определяется по формуле:

$$\left|\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right|$$

Направление вектора а определяется углами $\alpha, \beta, \gamma,$ образованными им с осями координат $Ox\ Oy\ Oz$.Косинусы **этих** углов (**направляющие косинусы** вектора) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$\cos^2 a + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Найдем координаты вектора, соединяющего точки А(1;2;3) и М(3;4;3). Искомый вектор можно записать так:

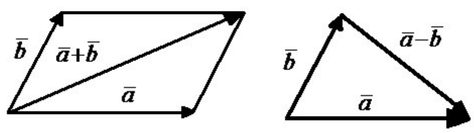
$$\vec{a} = (3\text{-}1)\vec{i} + (4 - 2)\vec{j}, + (3 - 3)\vec{k}, = \vec{AM}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложением по ортам, то их сумма и разность определяются по формулам:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y)\,\vec{j} + (a_z + b_z)\,\vec{k},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\,\vec{i} + (a_y - b_y)\,\vec{j} + (a_z - b_z)\,\vec{k},$$

Сумма любого числа векторов может быть найдена по правилу многоугольника (смотри рис).



Нахождение суммы и разности векторов

Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называют **коллинеарными.**

Произведение вектора **а** на скалярный множитель **m**, определяется формулой

$$m\vec{a} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k},$$

Заметим, что векторы а и mа параллельны (коллинеарны) и направлены в одну и **туже**сторону, если **m**>0, и в противоположные стороны, если **m**<0.

Пример 1: Найти длину вектора а и его направляющие косинусы.

$$\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70; \cos\alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}; \cos\beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}; \cos\gamma = -\frac{60}{70} = \frac{6}{7};$$

Вспомним теперь введенные раньше орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Так как они не компланарны, то образуют базис, который называется **ортонормированным базисом или декартовой системой координат в пространстве.**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие № 1 (2 часа).

Тема: «Элементы теории определителей»

2.1.1 Задание для работы:

1. Миноры и алгебраические дополнения.

2. Вычисление определителей порядка выше третьего.

3. Нахождение обратной матрицы.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Миноры и алгебраические дополнения

Найти миноры и алгебраические дополнения для элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Для данной матрицы $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

2. Вычисление определителей порядка выше третьего

Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

Решение:

Воспользуемся свойствами определителя. Из второй третьей, четвертой строки вычтем первую строку, получим определитель и разложение его по элементам 1-го столбца:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&5&9\\0&3&9&19\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&9\\3&9&19\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&9\\9&19\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&9\\3&19\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2&5\\3&9\end{vmatrix}$$

$$=(95-81)-2\cdot(2\cdot19-3\cdot9)+3\cdot(2\cdot9-3\cdot5)=14-2\cdot11+9=1$$

Ответ: 1.

б) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.

Решение:

Из второй строки определителя вычтем первую строку, умноженную на 2; из третьей строки вычтем утроенную первую строку, из четвертой - вычтем первую строку, умноженную на 4. Получим нули в первом столбце. Тогда и разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&-2&-8&-10\\0&-7&-10&-13\end{vmatrix}=1\cdot(-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix}1&2&7\\2&8&10\\7&10&13\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}1&2&7\\1&4&5\\7&10&13\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1&1&7\\1&2&5\\7&5&13\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1&1&7\\0&1&-2\\0&-2&-36\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&-2\\1&18\end{vmatrix}$$

$$=8\cdot(18+20)=304.$$

Ответ: 304.

3. Нахождение обратной матрицы

Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице А

Из предыдущего примера.

Решение: Так как $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^{*}$, то найдем

$\det A=\begin{vmatrix}3&1&-2\\4&2&1\\3&-1&5\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}2&1\\-1&5\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}4&1\\3&5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&2\\3&-1\end{vmatrix}=3\cdot11-17+20=$ 36. Тогда $A^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}11&-3&5\\-17&21&-11\\-10&6&2\end{pmatrix}$.

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и свойства теории определителей;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в теории определителей;

- выработали навыки по вычислению миноров и алгебраических дополнений элементов матрицы, нахождению матрицы, обратной к данной.

2.2 Практическое занятие № 2 (2 часа).

Тема: «Системы линейных уравнений»

2.2.1 Задание для работы:

1. СЛУ, основные понятия.
2. Метод Крамера.
3. Метод обратной матрицы.
4. Метод Гаусса
5. СЛОУ

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. СЛУ, основные понятия

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

или в матричной форме, AX = b, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$- матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$- матрица-столбец неизвестных,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$- матрица-столбец свободных членов данной системы.

2. Метод Крамера

Решить систему уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 15,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 + 2 \quad = -5;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3;\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{+5}{5} = 1.$

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1$

3. Метод обратной матрицы

Решить систему линейных алгебраических уравнений матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$- матрица системы уравнений,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов данной системы.

Так как в первом примере вычислен определитель системы и он равенdet A = 5 ≠ 0, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Вычислим $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*, A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Получили присоединенную матрицу

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.Тогда $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ирешение системы найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot b$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5+18-8 \\ -15+6+4 \\ 5-12+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда:$x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 1.$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 1.$

4. Метод Гаусса

Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

Данную систему мы приведем к виду:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right)$.С помощью элементарныхпреобразований приведем матрицу А к единичному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right) \underset{\sim}{-\frac{1}{11}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} (2)-9(3) \\ \sim \\ (1)+(3) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{4}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1.$

Проверка. Подставим эти значения неизвестных всистему примера 5.

2 - 3 - (-1) = 0, 5 • 2 - 1 • 3 + 4 • (-1) = 10 – 7 = 30,

1 • 2 + 2 • 3 + 3(-1) = 8-3 = 5.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1.$

Пример. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33. \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 4 & 8 & 1 & 18 \\ 3 & 5 & 4 & 33 \end{array}\right) \begin{matrix} (2)-4(1) \\ \sim \\ (3)-3(1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & -16 & -11 & -66 \\ 0 & -13 & -5 & -30 \end{array}\right) \begin{matrix} -(2) \\ \sim \\ -16(3) \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&6&3&21\\0&16&11&66\\0&208&80&480\end{array}\right)\underset{\sim}{(3)-13(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&6&3&21\\0&16&11&66\\0&0&-63&-378\end{array}\right).$$

$r(A)=3, r(A|b)=3, n=3.$

Система совместна и определенна. Найдем ее решение.

$$\begin{cases}x_1+6x_2+3x_3=21,\\ \quad 16x_2+11x_3=66,\\ \qquad\quad 4x_3=378.\end{cases}\qquad 16x_2+6\cdot 11=66, x_2=0;\ x_1+18=21,$$

$$x_1=3, x_3=\frac{378}{63}=6.$$

Ответ: $x_1=3, x_2=0, x_3=6.$

5. СЛОУ

Исследовать систему $\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&-1&1&1\\1&-2&1&5&5\\1&-2&1&1&1\end{array}\right).$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&-1&1&1\\1&-2&1&5&5\\1&-2&1&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}(2)+(1)\\\sim\\(3)+(1)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&-1&1&1\\0&0&0&6&6\\0&0&0&2&2\end{array}\right)\begin{array}{c}\frac{1}{6}(2)\\\sim\\\frac{1}{2}(3)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&-1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\underset{\sim}{(3)-(2)}\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&-1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&-1&1&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right).$$

r (A) = 2, r(A |b) =2, n = 4, r(A) = r(A |b) = 2 < 4.

Ответ: система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Пример. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-2&-1\\3&-1&-1&1\\-3&2&1&1\\1&1&1&3\end{array}\right).$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-2&-1\\3&-1&-1&1\\-3&2&1&1\\1&1&1&3\end{array}\right)\underset{\sim}{(1)\leftrightarrow(4)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\3&-1&-1&1\\-3&2&1&1\\2&-1&-2&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}(2)-3(1)\\\sim\\(3)+3(1)\\(4)-2(1)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-4&-4&-8\\0&5&4&10\\0&-3&-4&-7\end{array}\right)\begin{array}{c}-\frac{1}{4}(2)\\\sim\\-1\cdot(4)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&5&4&10\\0&3&4&7\end{array}\right)\begin{array}{c}(3)-5(2)\\\sim\\(4)-3(2)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{array}\right)\underset{\sim}{(4)+(3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{array}\right), r(A)=3,$$

$$r(A|b)=4, r(A)\neq r(A|b).$$

Ответ: система несовместна

Пример. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\5&-1&4&3\\1&2&3&5\end{array}\right)$.

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\5&-1&4&3\\1&2&3&5\end{array}\right)\begin{array}{c}(2)-5(1)\\\sim\\(3)-(1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&4&9&3\\0&3&4&5\end{array}\right)\underset{\sim}{4(3)}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&4&9&3\\0&12&16&20\end{array}\right)\underset{\sim}{(3)-3(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&4&9&3\\0&0&-11&11\end{array}\right).$$

$r(A)=3, r(A|b)=3, n=3.$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение.

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и свойства теории СЛУ;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении СЛУ;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в исследовании СЛОУ;

- выработали навыки по решению определенных СЛУ методами Крамера и методом обратной матрицы.

- выработали навыки по решению неопределенных и определенных СЛУ методом Гаусса.

2.3 Практическое занятие № 3 (2 часа).

Тема: «Вектора, их классификация, арифметические действия. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис. ПДСК»

2.3.1 Задание для работы:

1. Вектор, его характеристики, классификация, изображение.

2. Проекция вектора на ось. Орт вектора.

3. Арифметические действия над векторами в векторной и координатной форме.

4. Базис векторного пространства, разложение вектора по базисным векторам.

5. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.

6. Признаки коллинеарности и ортогональности векторов.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

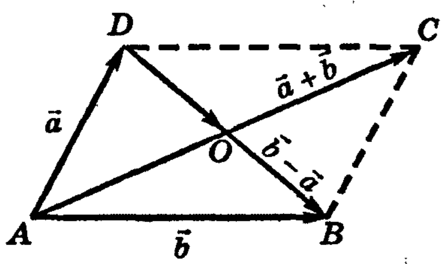
1. Вектор, его характеристики, классификация, изображение

Пример. Доказать равенства:

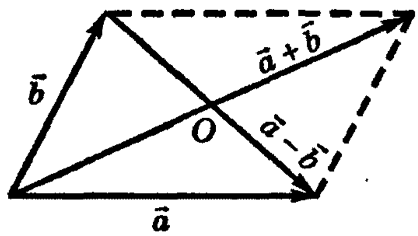
а) $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}\ )=\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b});$

б) $\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a - b})$

и выяснить, каков их геометрический смысл.



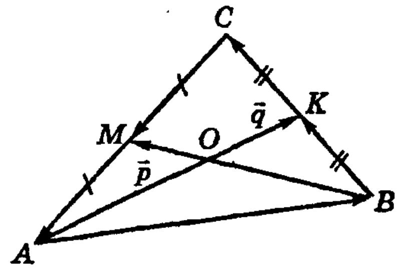
Решение: а) В левой части равенства раскроем скобки, приведем подобные члены, получим вектор в правой части. Поясним это равенство геометрически. Пусть даны два вектора, a и b, отложим их от общего начала и построим параллелограмм и его диагонали, получим:



По правилу построения разности двух векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$, получим $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$ Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то

$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

Тогда $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}$ или $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}\ ) = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$



б) Аналогично объясняется второе равенство.

Равенства доказаны.

Пример. $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ медианы треугольника *ABC*. Выразить через $\vec{p} = \overrightarrow{AK}$и $\vec{q} = \overrightarrow{BM}$векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

Решение:

Из *ABC* получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO};\ \overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{\frac{2}{3}q};\ \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{p}.$

Поэтому $\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{p};\ \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{p} - \vec{q}).$

Из *ABK* получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK};\ \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{p};\ \left(\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right);$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{p} - \overrightarrow{AB} = \vec{p} - \frac{2}{3}(\vec{p} - \vec{q}).$

Умножим это равенство на 2, получим

$\overrightarrow{BC} = 2\vec{p} - \frac{4}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q};\ \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}.$

Из ΔBCM получаем: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}$. Но $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BM}=\vec{q}$, поэтому $\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{q}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\vec{q}-\overrightarrow{BC}=\vec{q}-\frac{2}{3}\vec{p}-\frac{4}{3}\vec{q}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{3}\vec{q}-\frac{2}{3}\vec{p}$, $\overrightarrow{CA}=-\frac{4}{3}\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{q}$.

Ответ:$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(\vec{p}-\vec{q})$, $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\vec{p}+\frac{4}{3}\vec{q}$, $\overrightarrow{CA}=-\frac{4}{3}\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{q}$.

2. Проекция вектора на ось. Орт вектора

Пример. Пусть даны векторы$\vec{a}=(1;2;-1)$, $\vec{b}=(3;2;1)$, $\vec{c}=(1;0;1)$ в некотором векторном базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Найти координаты линейной комбинации $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$.

Решение: Введем обозначение для линейной комбинации

$\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}+(-4)\vec{c}$. Коэффициенты линейной комбинации $\alpha_1=2,\ \alpha_2=3,\ \alpha_3=-4$. Запишем данное векторное равенство в координатной форме

$$\vec{d}=(x,y,z)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+(-4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что каждая координата линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации одноименных координат, т. е.

$$x=2\cdot1+3\cdot3+(-4)\cdot1=7,$$
$$y=2\cdot2+3\cdot2+(-4)\cdot0=10,$$
$$z=2\cdot(-1)+3\cdot1+(-4)\cdot0=-3.$$

Координаты вектора $\vec{d}$базисе$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. будут:

$$\vec{d}=(7;10;-3).$$

Ответ: $\vec{d}=(7;10;-3)$.

Пример. Найти длину и направляющие косинусы вектора

$\vec{p}=3\vec{a}-5\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}=4\vec{\imath}+7\vec{\jmath}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-\vec{k}$.

Решение: Найдем разложение вектора $\vec{p}$ по базису $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$:

$\vec{p}=3(4\vec{\imath}+7\vec{\jmath}+3\vec{k})-5(\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k})+(2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-\vec{k})=9\vec{\imath}+8\vec{\jmath}+3\vec{k}$.

Найдем длину вектора $\vec{p}$: $\vec{p}=\sqrt{9^2+8^2+3^2}=\sqrt{154}$. Тогда орт вектора $\vec{p}$ – вектор $\overrightarrow{p_0}=\frac{9}{\sqrt{154}}\vec{\imath}+\frac{8}{\sqrt{154}}\vec{\jmath}+\frac{3}{\sqrt{154}}\vec{k}$. Известно, что координаты орта вектора есть его направляющие косинусы. Следовательно,$\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{154}}$, $\cos\beta=\frac{8}{\sqrt{154}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{154}}$

Ответ:$\vec{p}=\sqrt{154}$, $\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{154}}$, $\cos\beta=\frac{8}{\sqrt{154}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{154}}$

3. Арифметические действия над векторами в векторной и координатной форме

Пример. Заданы векторы$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Найти:

а) координаты вектора$\overrightarrow{a_0}$; б) координаты вектора$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

в) разложение вектора$\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$по базису$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; г) пр$_i(\vec{a} - \vec{b})$.

Решение:

а) Так как$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, то найдем сначала длину вектора$\vec{a}$по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 0 + 9} = \sqrt{13}$. Тогда $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2; 3; 0) = (\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}; 0)$.

б) Вычислим координаты вектора

$\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = (2; 3; 0) - \frac{1}{2}(0; -3; -2) + (1; 1; -1) = (3; \frac{11}{2}; 0)$.

в)$\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = (2; 3; 0) + (0; -3; -2) - 2(1; 1; -1) = (0; -2; 0) = -2\vec{j}$;

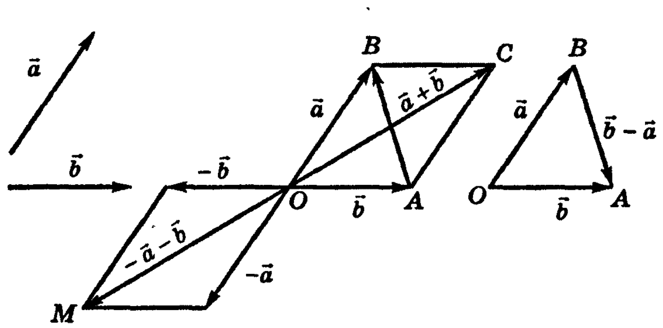
г) пр$_i(\vec{a} - \vec{b})$; $\vec{a} - \vec{b} = (2; 3; 0) - (0; -3; -2) = (2; 6; 2)$;

пр$_i(\vec{a} - \vec{b}) = 6$.

Ответ: а) $\overrightarrow{a_0} = (\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}; 0)$; б)$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$=$(3; \frac{11}{2}; 0)$; в)$\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = -2\vec{j}$; г) пр$_i(\vec{a} - b$=6

Пример. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: а) $\vec{a}$+$\vec{b}$; б) $\vec{a}$-$\vec{b}$; в) $\vec{b}$-$\vec{a}$; г) $-\vec{a} - \vec{b}$

Решение: Пусть даны два вектора, а и В, отложим их от общего начала и построим указанные векторы либо по правилу параллелограмма, либо по правилу треугольника.



Ответ: а) $\vec{a}$+$\vec{b}$=$\overrightarrow{OC}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB}$; в)$\vec{b} - \vec{a}$ =$\overrightarrow{BA}$; г) -$\vec{a}$-$\vec{b}$ = $\overrightarrow{OM}$

4. Базис векторного пространства, разложение вектора по базисным векторам

Пример. Показать, что тройка векторов $\overrightarrow{e_1}(1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2}(1,1,0)$, $\overrightarrow{e_3}(1,1,1)$ образуют базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$и написать соответствующее разложение по базису.

Решение:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.\ \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

$$x=-2, y=1, z=-1$$

Ответ: $\vec{a}=-2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}$.

Пример. Разложить вектор $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трем неколлинеарным векторам $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$,$\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$,$\vec{r}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

Решение:

а) Покажем, что векторы неколлинеарны. В этом случае тройки коэффициентов их линейных комбинаций должны быть линейно независимы, т.е. определитель, составленный из коэффициентов линейных комбинаций, должен быть не равен нулю:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3-7=-10\neq 0.$$

(Определитель вычислен разложением по элементам первого столбца).

б) Решим систему уравнений относительно $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\begin{cases}\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}=\vec{p}\\ \vec{a}-\vec{b}=\vec{q}\\ 2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{r}\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим систему двух уравнений относительно $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\begin{cases}2\vec{b}-2\vec{c}=\vec{p}-\vec{q}\\ 2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{r}\end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое.

Отсюда $\vec{c}=\frac{\vec{q}-\vec{p}+\vec{r}}{5}$, $\vec{b}=\frac{3\vec{p}-3\vec{q}+2\vec{r}}{10}$, $\vec{a}=\frac{3\vec{p}+7\vec{q}+2\vec{r}}{10}$ и

$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{4\vec{p}+6\vec{q}+6\vec{r}}{10}=\frac{2}{5}\vec{p}+\frac{3}{5}\vec{q}+\frac{3}{5}\vec{r}$.

Ответ: $\vec{s}=(\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{3}{5})$в базисе $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

5. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения

Пример. Дано: $|\overrightarrow{a_1}|=3$, $|\overrightarrow{a_2}|=4$, $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})=\frac{2\pi}{3}$.

Вычислить: а) $\overrightarrow{a_1}^2=\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_1}$; б) $(3\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2})\cdot(\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2})$;в) $(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})^2$.

Решение:

а)$\overrightarrow{a_1}^2=|\overrightarrow{a_1}|^2=9$;

б)$(3\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2})\cdot(\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2})=3\,\overrightarrow{a_1}^2-2(\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_1})+6(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2})-4\overrightarrow{a_2}^2=3\cdot9+4\cdot3\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-4\cdot4^2=27-24-64=-61$

в)$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})^2=\overrightarrow{a_1}^2+2(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2})+\overrightarrow{a_2}^2=|\overrightarrow{a_1}|^2+2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\cos\frac{2\pi}{3}+4\,\overrightarrow{a_2}^2=9-3\cdot 4+16=13.$

Ответ: а) 9; б) –61; в) 13.

Пример. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}=(3;-5;2)$,когда ее точка приложенияперемещается из начала в конец вектора

$\vec{S}=(2;-5;-7)$.

Решение:

$A=(\vec{F}\cdot\vec{S})=3\cdot2+(-5)\cdot(-5)+2\cdot(-7)=6+25-14=17.$

Ответ: А =17.

6. Признаки коллинеарности и ортогональности векторов

Пример. Определить, при каких значениях α, β коллинеарны векторы

$\vec{a}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+\beta\vec{k}$и $\vec{b}=\alpha\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+2\vec{k}$.

Решение: Из условия коллинеарности двух векторов следуют равенства:

$\frac{-2}{\alpha}=\frac{3}{-6}=\frac{\beta}{2}$. Тогда $\frac{-2}{\alpha}=\frac{3}{-6}$; $\alpha=4$,$\frac{3}{-6}=\frac{\beta}{2}$; $\beta=-1$.

Ответ: $\alpha=4,\beta=-1$.

Пример. Дано: $|\overrightarrow{a_1}|=3$, $|\overrightarrow{a_2}|=5$. Определить, при каком значении α векторы $\overrightarrow{a_1}+\alpha\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_1}-\alpha\overrightarrow{a_2}$ будут перпендикулярны.

Решение:

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\left((\vec{a}\cdot\vec{b})=0\right)$(условие отрогональности векторов).

Следовательно

$(\overrightarrow{a_1}+\alpha\overrightarrow{a_2})\cdot(\overrightarrow{a_1}-\alpha\overrightarrow{a_2})=0,\overrightarrow{a_1}^2-\alpha^2\overrightarrow{a_2}^2=0,$

$|\overrightarrow{a_1}|^2-\alpha^2|\overrightarrow{a_2}|^2=0;\ \alpha^2=\frac{|\overrightarrow{a_1}|^2}{|\overrightarrow{a_2}|^2}=\frac{9}{25},\alpha=\pm\frac{3}{5}.$

Ответ: $\pm\frac{3}{5}$.

Пример. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=1$ и $|\vec{b}|=2$, вычислить:

1) $[\vec{a}\times\vec{b}]^2$; 2)$[(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})]^2$; 3)$[(\vec{a}+2\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})]^2$.

Решение:

1) По определению скалярного произведения имеем:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2\cos 0^\circ=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left[|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\frac{2\pi}{3}\right]^2==\left[1\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2=3.$$

2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right]^2=\left[(2\vec{a}\times\vec{a})+\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+4\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)++2\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)\right]^2=$ $\left[2\cdot 0-\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]+4\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+2\cdot 0\right]^2=\left|3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|^2=\quad 9\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|^2=9\cdot 3=27.$

3) $\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right]^2=\left[(\vec{a}\times 3\vec{a})+9\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-3\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)\right]^2=$ $\left[-9\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]^2=\left[10\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]^2=100\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|^2=300.$

Ответ: 1) 3; 2) 27; 3)300.

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и теоремы векторной алгебры;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач векторной алгебры;

- выработали навыки операций с векторами в векторной и координатной форме.

- освоили основные понятия и теорем, связанные векторным пространством;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение скалярного произведения, для установления коллинеарности и ортогональности векторов;

- выработали навыки нахождения скалярного произведения, косинуса угла между векторами в координатной форме, по свойствам, по определению.

2.4 Практическое занятие № 4 (2 часа).

Тема: «Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов, их свойства и вычисление, приложения»

2.4.1 Задание для работы:

1. Векторное произведение векторов, его вычисление, приложения.

2. Признаки коллинеарности

3. Решение комплексных геометрических задач на векторный метод.

4. Смешанное произведение векторов, его вычисление, приложения.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Векторное произведение векторов, его вычисление, приложения

Пример. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;-2)$и$\vec{b}=(1;2;-1)$. Найти координаты векторных произведений: $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$; 2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}\right]$; 3) $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$.

Решение.

1). $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}==5\vec{\imath}+\vec{\jmath}+7\vec{k}$,

$\vec{a}\times\vec{b}=5\vec{\imath}+\vec{\jmath}+7\vec{k}=\{5;1;7\}$.

2). $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}\right]=\left(2\vec{a}\times\vec{b}\right)+\vec{b}\times\vec{b}=2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=2\{5;1;7\}=\{10;2;14\}$.

3). $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=4(\vec{a}\times\vec{a})-2\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)=$

$4\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=4(5;1;7)=(20;4;28)$. Ответ: 1) (5;1;7); 2) (10;2;14); 3) (20;4;28).

Пример. Сила $\vec{P}=(2;2;9)$приложена к точке А(4; 2; -3).Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки С(2; 4; 0).

Решение: $\vec{M}=\overrightarrow{CA}\times\vec{P}$, поэтому найдем координаты $\overrightarrow{CA}$ и $\vec{M}$: $\overrightarrow{CA}=(2;-2;-3)$, $\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 3 & 3 & 9\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & 9\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & 9\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-12\vec{\imath}-24\vec{\jmath}+8\vec{k}=4(-3\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+2\vec{k})$. Величина М – это его модуль: $\vec{M}=4\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=4\sqrt{49}=28$.Найдем орт вектора $\vec{M}$: $\vec{M}_0=-\frac{3}{7}\vec{\imath}-\frac{6}{7}\vec{\jmath}+\frac{2}{7}\vec{k}$. Ответ: 28;$\cos\alpha=-\frac{3}{7},\cos\beta=-\frac{6}{7},\cos\gamma=\frac{2}{7}$.

2. Признаки коллинеарности

Пример. Проверить, что векторы$\vec{a}=(-1;3)$ и $\vec{b}=(2;2)$ на плоскости не коллинеарны, и разложить вектор $\vec{c}=(7;-5)$ по базису $\vec{a}и\vec{b}$.

Решение: Проверить для векторов $\vec{a}и\vec{b}$ условие коллинеарности. Так как $-\frac{1}{2}\neq\frac{3}{2}$, то векторы не коллинеарны. Следовательно, они образуют базис на плоскости. Пусть$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. В координатной форме будет линейная система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}7=x\cdot(-1)+y\cdot 2\\ -5=x\cdot 3+y\cdot 2\end{cases}$$

Решив ее, находим $x=-3, y=2$. Итак,$\vec{c}=-3\vec{a}+2\vec{b}$.Ответ: $\vec{c}=-3\vec{a}+2\vec{b}$.

3. Решение комплексных геометрических задач на векторный метод

Пример. Даны вершины треугольника А(1;–1; 2),В(5;–6;2) и С(1;3;–1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины В на сторону АС.

Решение: Находим $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ и $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

$\overrightarrow{AC}=\{0;40-3\},\overrightarrow{AB}=(4;-5;0)$. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$;

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 5 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}=15\vec{i}+12\vec{j}+$$

$16\vec{k}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left|15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k}\right|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\sqrt{625}=25.$$

Тогда длина искомой высоты $h=\frac{25}{5}=5$. Ответ: 5.

Пример. Даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; –3), C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение: Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=(3-1)\vec{i}+(0-2)\vec{j}+(-3-0)\vec{k}=2\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}=\{2;-2;-3\};$$

$$\overrightarrow{AC}=(5-1)\vec{i}+(2-2)\vec{j}+(6-0)\vec{k}=4\vec{i}+6\vec{k}=\{4;0;6\}.$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+$$

$8\vec{k}$.

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left|-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right|=2\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=$$

$2\sqrt{9+36+4}=2\cdot 7=14$ (кв. ед.). Ответ: 14.

4. Смешанное произведение векторов, его вычисление, приложения

Пример. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, заданных своими координатами:

1) $\vec{a}=(1;-1;1),\vec{b}=(7;3;-5),\vec{c}=(-2;2;-2)$;

2) $\vec{a}=(3;5;1),\vec{b}=(4;0;-1),\vec{c}=(2;1;1)$;

3) $\vec{a}=(2;1;0),\vec{b}=(3;4;-1),\vec{c}=(-1;-3;1)$;

4) $\vec{a}=(1;2;3),\vec{b}=(5;-2;1),\vec{c}=(2;1;-2)$.

Решение.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & 3 & -5\\ -2 & 2 & -2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & -2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}7 & -5\\ -2 & -2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}7 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=4-24+20=0.$$

Пример. Доказать, что четыре точки A(1;2; -1), B(0; 1; 5), C (-1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежат в одной плоскости.

Решение:

Векторы$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$имеют координаты:$\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 6)$,

$\overrightarrow{AC} = (-2; 0; 2)$,$\overrightarrow{AD} = (1; -1; 4)$. Если эти векторы компланарны, то их смешанное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 12 \neq 0.$$

Значит, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Ответ: точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Пример. Вычислить объем пирамиды с вершинами в

точках O(0; 0; 0), A(5; 2; 0), B(2; 5; 0), C(1; 2; 4).

Решение.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \left\|\begin{matrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}\right\| = 14(\text{куб. ед.}).$$

(При вычислении определителя мы пользовались разложением его по элементам третьего столбца).

Ответ: 14.

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и теоремы, связанные с векторным, скалярным произведением;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение скалярного и векторного произведения, для установления коллинеарности и ортогональности векторов;

- выработали навыки нахождения скалярного и векторного произведения, косинуса и синуса угла между векторами в координатной форме, по свойствам, по определению, работы с приложениями векторного и скалярного произведения.

2.5 Практическое занятие № 5 (2 часа).

Тема: «Алгебраические линии. Прямая на плоскости и в пространстве. Метрическая теория прямых»

2.5.1 Задание для работы:

1. Параметрическое уравнение прямой, уравнение в отрезках.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

3. Параллельные, перпендикулярные прямые.

4. Расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми.

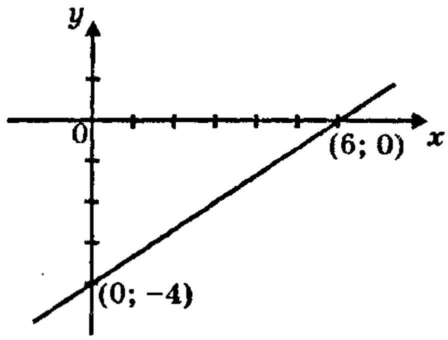
2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Параметрическое уравнение прямой, уравнение в отрезках

$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt; \end{cases}$ $t \in R$ – параметрические уравнения прямой;

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых на координатных осях Ох и Оу соответственно

Пример. Определить точки пересечения прямой 2х - 3у - 12 = 0 с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.



Решение: Пусть х = 0, у = –4, (0; –4);

у = 0, х = 6, (6; 0)

Уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1$$

Ответ:(6; 0) и (0; –4).

Пример. Преобразовать уравнение $3x - 4y + 12 = 0$ к уравнению в отрезках.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пример. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$.

Определить угловой коэффициент «k»

прямой:

а) параллельной данной прямой;

б) перпендикулярной данной прямой.

Решение:$3y = -5x + 3$;

$y = -\frac{5}{3}x + 1$; $k_1 = -\frac{5}{3}$.

а) Угловой коэффициент любой прямой, параллельной данной, равен$k_2 = -\frac{5}{3}$; $(k_1 = k_2)$;

б) Угловой коэффициент любой прямой, перпендикулярной данной, $-k_2 = \frac{3}{5}$, $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$.

Ответ: а) $k_2 = -\frac{5}{3}$; б) $k_2 = \frac{3}{5}$

3. Параллельные, перпендикулярные прямые

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку М пересечения прямых 5x – y + 10 = 0 и 8x + 4y + 9 = 0 и параллельной прямой

x + 3y = 0.

Решение:

1-й способ.

1) Найдем координаты точки М пересечения прямых5x – y + 10 = 0 и

8x + 4y + 9 = 0:

$$+\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ 8x + 4y + 9 = 0 \end{cases}\Bigg| \cdot 4$$

$$28x = -49; x = -\frac{49}{28} = -\frac{7}{4}; x = -\frac{7}{4}, y = \frac{5}{4}; M\left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

2) Прямаях + 3y = 0 имеет нормальный вектор $\vec{n}$ = (1; 3). Так как уравнение искомой прямой имеет тот же нормальный вектор, то

$\left(x + \frac{7}{4}\right) \cdot 1 + \left(y - \frac{5}{4}\right) \cdot 3 = 0,$

$4x + 7 + 12y - 15 = 0,\ 4x + 12y - 8 = 0,\ x + 3y - 2 = 0.$

Пример. Дана прямая 2x + 3y + 4 = 0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку$M_0(2; 1)$:

а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

Решение:

1-й способ.

Нормальный вектор данной прямой - $\vec{n}$= (2; 3).

а) Поэтому уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{M}_0(2; 1)$, перпендикулярно вектору $\vec{\mathrm{n}}$ = (2; 3) будет:

(x - 2) • 2 + (y - 1) • 3 = 0, 2x + 3y - 7 = 0.

б) Уравнение прямой, проходящей через данную точку$\mathrm{M}_0(2; 1)$; параллельно вектору $\vec{\mathrm{n}}$ (перпендикулярно данной прямой), будет:

$$\frac{\mathrm{x} - 2}{2} = \frac{\mathrm{y} - 1}{3}; 3\mathrm{x} - 6 = 2\mathrm{y} - 2; 3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} - 4 = 0.$$

2-й способ.

Представим уравнение данной прямой, как уравнение с угловым коэффициентом, $\mathrm{y} = -\frac{2}{3}\mathrm{x} - \frac{4}{3};\ \mathrm{k}_1 = -\frac{2}{3}.$

а) Тогда уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(2;1)$ параллельно данной прямой, будет:$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ или

$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2); 3y - 3 = -2x + 4; 2x + 3y - 7 = 0.$

б) Так как угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной, равен $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, то уравнение искомой прямой будет: $y - y_0 = -\frac{1}{k_1}(x - x_0)$ или $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2, 2y{-}2{=}3x{-}6, 3x{-}2y{-}4{=}0.$

Ответ: а) $2x + 3y - 7 = 0$; б) $3x - 2y - 4 = 0$.

4. Расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(2; 4) и удаленной от начала координат на расстояние d = 2.

Решение:

Уравнение прямой, проходящей через точку A(2; 4), запишем в виде:

$A(x - 2) + B(y - 4) = 0$. Если B = 0, то имеем x = 2; если B ≠ 0,

то$y - 4 - k(x - 2) = 0$, где $k = -\frac{A}{B}, -kx + y + 2k - 4 = 0$. По условию$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}; 2 = \frac{|2k - 4|}{\sqrt{k^2 + 1}};\ \sqrt{k^2 + 1} = |k - 2|;$

$$(x_0 = 0, y_0 = 0);\ k^2 + 1 = k^2 - 4k + 4;\ -4k + 3 = 0,$$

$k = \frac{3}{4}; y - 4 - \frac{3}{4}(x - 2); 3x - 4y + 10 = 0.$

Ответ: $3x - 4y + 10 = 0, x = 2.$

Пример. Определить угол φ между двумя прямыми:

5x - y + 7 = 0, 3x + 2y = 0.

Решение: За угол между прямыми возьмем угол между их нормальными векторами: $\vec{n}_1$ = (5; -1), $\vec{n}_2$ = (3; 2).

Тогда $\cos\varphi = \frac{(\vec{n_1} \cdot \vec{n_2})}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{15 - 2}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{2}\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;отсюда φ = 45°.

Ответ: φ = 45°.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные методы задания прямой на плоскости, основные формулы метрической теории прямых;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение уравнений прямой на плоскости;

- выработали навыки нахождения уравнений прямых и их компонентов.

2.6 Практическое занятие № 6, 7 (4 часа).

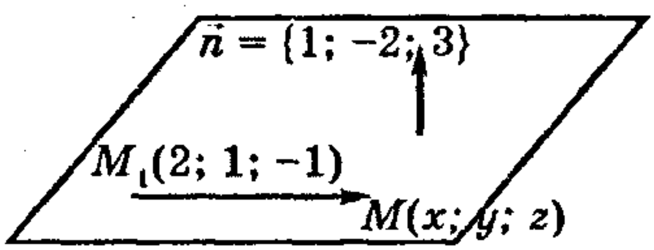
Тема: «Плоскость. Способы задания. Метрическая теория плоскостей. Кривые второго порядка, их свойства и уравнения. Поверхности вращения»

2.6.1 Задание для работы:

1. Уравнение плоскости через точку и нормальный вектор.
2. Уравнение плоскости через три точки.
3. Расстояние от точки до плоскости.
4. Окружность.
5. Эллипс.
6. Гипербола.
7. Парабола
8. Поверхности вращения.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Уравнение плоскости через точку и нормальный вектор



Пример. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;1;-1)$и имеет нормальный вектор

$\vec{n} = (1;-2;3)$.

Решение:

Для вывода уравнения плоскости возьмем на этой плоскости точку M (x; y; z) с текущими координатами.

Получим вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x-2;y-1;z+1)$. По условию $\left(\overrightarrow{M_1M}\perp\vec{n}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}\right) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot 1 + (y-1)\cdot(-2) + (z+1)\cdot 3 = 0$.

Ответ: x – 2y + 3z + 3 = 0.

Пример. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$и$M_2(4;-2;-1)$.Составить уравнение плоскости, проходящей через M_1перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение:

По условию вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является нормальным вектором искомой плоскости$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{n} = (1;-1;-3)$.Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$есть

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, или

$1\cdot(x-3)+(-1)\cdot(y+1)+(-3)\cdot(z-2)=0, x-y-3z+2=0.$

Ответ: $x-y-3z+2=0.$

2. Уравнение плоскости через три точки

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки$M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$.

Решение

Возьмем на плоскости точку с текущими координатами M(x; y; z), будем иметь векторы

$\overrightarrow{M_1M}=(x-3;y+1;z-2),$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(1;0;-3)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(-1;1;0)$. Эти векторы по условию компланарны. Следовательно, равен нулю определитель, составленный из координат этих векторов:

$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$, или 3x + 3y + z - 8 = 0.

Ответ: 3x + 3y+ z - 8 = 0.

3. Расстояние от точки до плоскости.

Пример. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(2;3;1)$ на плоскость 3x + y + 2z - 11 = 0.

Решение.

Нормальный вектор $\vec{n}$ = (3; 1; 2) данной плоскости будет по условию направляющим вектором прямой, проходящей через точку $M_0(2;3;1)$.

Ее уравнение

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}.$ Ответ:$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}.$

Пример. Заданы плоскость

P: x + y - z + 1 = 0 и прямая L: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, причем $L\in P$.

Требуется найти:

а) угол между прямой и плоскостью;

б) координаты точек пересечения прямой и плоскости.

Решение:

$$\cos(\vec{a},\vec{n})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi;\ \vec{a}=(0;2;1),\vec{n}=(1;1;-1),$$

$\sin\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\vec{a}||\vec{n}|} = \frac{2-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}, \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}.$

б) Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} = t$, или параметрических$x = 1, y = 2t, z = t - 1.$

Подставим параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости, найдем значение t: 1 + 2t - t + 1 + 1 = 0; t = -3. Тогда координаты точки пересечения прямой и плоскости будут: x = 1, y = -6, z = -4.

Ответ: а) $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}$, б)(1;-6;-4).

Пример:

Найти расстояние от точки $N(10;20;-30)$ до плоскости $8x + 6z + 15 = 0$

Решение: $\rho(N;\sigma) = \frac{|8\cdot 10 + 0\cdot 20 + 6\cdot(-30) + 15|}{\sqrt{8^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{|80 + 0 - 180 + 15|}{\sqrt{64+36}} = \frac{|-85|}{\sqrt{100}} = \frac{85}{10} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$

Ответ: $\rho(N;\sigma) = 8\frac{1}{2}$ ед.

Пример: Найти расстояние между параллельными плоскостями

$\sigma_1 : 3x + y - 4z - 11 = 0$

$\sigma_2 : 3x + y - 4z - 34 = 0$.

Решение: Используем формулу:

$$\rho(\sigma_1;\sigma_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-34-(-11)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-34+11|}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{|-23|}{\sqrt{26}} = \frac{23\sqrt{26}}{26}$$

Ответ: $\rho(\sigma_1;\sigma_2) = \frac{23\sqrt{26}}{26}$ ед. $\approx 4{,}51$ ед.

4. Окружность

Пример. Написать уравнение окружности радиуса R = 8 с центром в точке C(2; -5).

Решение:

Подставив значения координат точки C и значение радиуса в формулу (1), получим $(x-2)^2 + (y-(-5))^2 = 8^2$или $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 8^2$.

Ответ:$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 8^2$.

Пример. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$является уравнением окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение:

Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив полные квадраты относительно x и y:

$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 5 = 0$, или

$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$. Это уравнение представляет собой уравнение окружности с центром C(-4; 2) и радиусом, равным 5.

Ответ: C(-А; 2), R = 5.

5. Эллипс

Пример. Найти каноническое уравнение эллипса, зная его большую полуось a = 5 и эксцентриситет e = 0,6.

Решение:

По условию$e = \frac{c}{a} = 0{,}6$. Следовательно, $c = a \cdot 0{,}6 = 5 \cdot 0{,}6 = 3$. Но тогда квадрат малой полуоси эллипса$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Таким образом, искомое каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Ответ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M_1(2; -3)$ и имеющегобольшую полуось a = 4.

Решение:

Каноническое уравнение эллипса при a = 4 имеет следующий вид:

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (**)

Этому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M_1(2; -3)$. Следовательно, $\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$. Найдя отсюда $b^2 = 12$и подставив его в уравнение (**), получим искомое каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

6. Гипербола

Пример. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку M(8√5;12), если фокальное расстояние гиперболы равно 20.

Решение:

По условию 2с = 20, или с = 10. Запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

По условию точка М($8\sqrt{5}$; 12) принадлежит гиперболе, следовательно, $\frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1.$

Второе уравнение для определения a^2и b^2 даетсоотношение $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - a^2$.

Решив систему уравнений $\begin{cases} \frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1, \\ b^2 = 100 - a^2 \end{cases}$ относительно

a^2и $b^2 (a > 0, b > 0)$, найдем$a^2 = 64$, $b^2 = 36$. Искомым уравнением будет уравнение $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Ответ:$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Пример. Доказать, что уравнение $21x^2 - 43y^2 = 903$является уравнением гиперболы. Найти координаты фокусов.

Решение:

Разделив обе части уравнения на 903, получим: $\frac{x^2}{43} - \frac{y^2}{21} = 1$

Это уравнение гиперболы, для которой$a^2 = 43$, $b^2 = 21$. Из соотношения$c^2 = a^2 + b^2$ находим $c^2 = 64$ и с = 8 (с > 0). Следовательно, фокусы гиперболы находятся в точках$F_1(8; 0)$ и $F_2(-8; 0)$.

Ответ:$F_1(8; 0)$ и $F_2(-8; 0)$.

7. Парабола

Пример. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Решение:

Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что 2р = 6,р = 3. Так как уравнение директрисы имеет уравнение$x = -\frac{p}{2}$, а фокус - координаты $\frac{p}{2}$ и 0, то для рассматриваемого случаяполучим уравнение директрисы $x = -\frac{3}{2}$и фокус $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Ответ: $x = -\frac{3}{2}, F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Пример. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ох, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ох, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

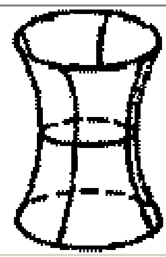
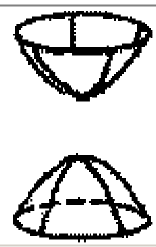
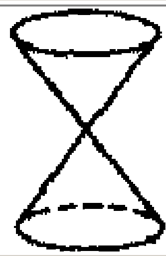
Решение:

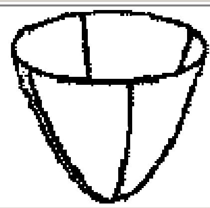
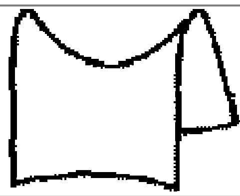
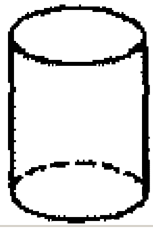
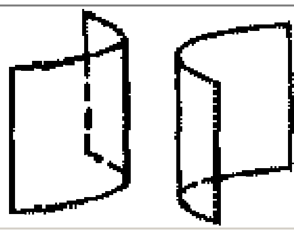
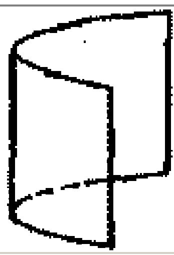
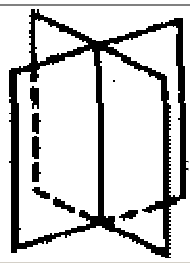
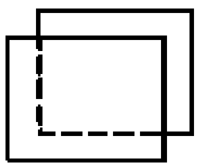
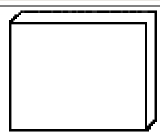
Так как известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды - точки М, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$; полагая в нем x = 6, y = 8, находим $8^2 = 2p \cdot 6$, откуда$2p = \frac{32}{3}$. Итак, уравнение искомой параболы $y^2 = \frac{32}{3}x$. Ответ:$y^2 = \frac{32}{3}x$.

8. Поверхности вращения

Представлена таблица поверхностей второго порядка с каноническими уравнениями и схематическими изображениями. Также известны и мнимые поверхности, не имеющие внешних признаков (сводящихся на нет).

Поверхности второго порядка

Название поверхности	Каноническое уравнение	Схематическое изображение
Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Двухполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	

Эллиптический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	
Гиперболический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$	
Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$	
Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	
Пара параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	
Пара совпадающих плоскостей	$x^2 = 0$	
Мнимый конус второго порядка с действительной	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	

вершиной (0;0;0)	$a^2 \quad b^2 \quad c^2$	
Пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	
Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	
Пара мнимых параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	

Пример: Привести к каноническому виду уравнение

$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$.

Решение: Сгруппируем слагаемые с одинаковыми переменными:

$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) + 13 = 0$.

Дополним каждую из скобок до полного квадрата:

$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 + 13 = 0$,

$4(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 + 36(z - 1)^2 = 36$.

Делим полученное уравнение на 36, получаем $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$.

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O'(1;\ 1;\ 1)$. Формулы преобразования координат имеют вид:

$x = x' + 1, \quad y = y' + 1, \quad z = z' + 1$.

Тогда уравнение поверхности примет вид: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{1} = 1$.

Это уравнение эллипсоида с центром в точке $O'(1;\ 1;\ 1)$ и полуосями 3, 2 и 1 соответственно.

Пример: Привести к каноническому виду уравнение

$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0.$

Решение: Сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые переменные:

$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) - 2z = 0.$

Выделим полные квадраты:

$(x^2 - 4x + 4) - 4 - (y^2 - 8y + 16) + 16 - 2z = 0,$

$(x - 2)^2 - (y - 4)^2 - 2(z - 6) = 0.$

Введем обозначения

$x' = x - 2,$

$y' = y - 4,$

$z' = z - 6,$

перенеся начало координат в точку $O'(2;\ 4;\ 6)$. Уравнение поверхности будет иметь вид:

$x'^2 - y'^2 = 2z'.$

Это уравнение гиперболического параболоида.

Решение комплексных задач

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz.$

Ее матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. В примере, рассмотренном в лекции 9, найдены собственные числа и ортонормированные собственные векторы этой матрицы: $\{\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$, $\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\}$.

Составим матрицу перехода к базису из этих векторов:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(порядок векторов изменен, чтобы они образовали правую тройку). Преобразуем координаты по формулам:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$
$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$

Получим:

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + 5(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + 2(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z') + 6(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}z') + 2(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z')(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z') = -2x'^2 + 6y'^2 + 3z'^2$$

Итак, квадратичная форма приведена к каноническому виду с коэффициентами, равными собственным числам матрицы квадратичной формы.

2.6.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные методы задания прямой на плоскости

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение уравнений прямой на плоскости;

- выработали навыки нахождения уравнений прямых и их компонентов.

- освоили формулы, задающие кривые второго порядка;

- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение уравнений кривых второго порядка;

- выработали навыки нахождения уравнений кривых второго порядка и их параметров.