-ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.04 Вычислительная математика

Направление подготовки (специальность) *09.03.01 Информатика и вычислительная техника*

Профиль образовательной программы *«Автоматизированные системы обработки информации и управления»*

Форма обучения *заочная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа)

Тема: «Дифференциальные уравнения первого порядка. Классификация и методы решения основных видов дифференциальных уравнений первого порядка»

1.1.1 Вопросы лекции:

1.Задачи геометрического и физического содержания, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальное уравнение, его порядок, нормальная форма, решения и интегральные кривые.

2. Уравнения с разделяющимися переменными.

3.Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

4.Линейное дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.

5. Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах

1.1.2. Краткое содержание вопросов:

1.Задачи геометрического и физического содержания, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальное уравнение, его порядок, нормальная форма, решения и интегральные кривые

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V, которая также является производной по времени t от перемещения S. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{dy}{dx}+x^2=y$$

- обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'')=0$

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

- дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях x = x0, y(x0) = y0 существует такое значение C = C0, при котором решением дифференциального уравнения является функция y = φ(x, C0).

Определение. Решение вида y = φ(x, C0) называется частным решением дифференциального уравнения.

Определение. Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида y = φ(x, C0), удовлетворяющего начальным условиям y(x0) = y0.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y'=f(x,y)$, то какова бы не была точка (x0, y0) в области D, существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения $y'=f(x,y)$, определенноfе в некотором интервале, содержащем точку x0, принимающее при x = x0 значение φ(x0) = y0, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'+y=0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx}+y=0,\quad xdy=-ydx,\quad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}.$$

Теперь интегрируем: $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$, $\ln y=-\ln x+C_0$, $\ln y+\ln x=C_0$, $\ln xy=C_0$,

$xy=e^{C_0}=C$. $y=\frac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Интегральные кривые. Поле направлений. Задача Коши. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка.

Определение. Интегральной кривой называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Определение. Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0.$ Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad \frac{dy}{y} = -dx, \quad \int\frac{dy}{y} = -\int dx, \quad \ln y = -x + C, \quad y = e^{-x}\cdot e^{C}, \quad y = C_1 \cdot e^{-x}.$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение y = 0. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение y = 0 можно получить из общего решения при C1 = 0 ошибочно, ведь C1 = eC ≠ 0.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, разрешенным относительно производной.

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

это так называемая дифференциальная форма уравнения первого порядка.

Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.

Как уже говорилось выше, линия S, которая задается функцией, являющейся каким- либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y).$

Производная y’ является угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.

В любой точке A(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки А можно наглядно изобразить поле направлений кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется полем направлений.

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

Определение. Линии равного наклона в поле направлений называются изоклинами.

2. Уравнения с разделяющимися переменными

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Уравнения вида y’ = f(x).

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале a < x < b. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x0 и y0, то можно определить постоянную С.

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде

$y' = \alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \; при \; \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $X(x)dx + Y(y)dy = 0;$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$, $y\cos y dy = -2x dx$, $\int y\cos y dy = -2\int x dx$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям

$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$, $y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$

это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается отличие общего (частного) интеграла от общего (частного) решения.

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной х.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$

$$yy' = -\frac{2x}{\cos y}$$ - верно

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии y(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y, \quad dx = \frac{\ln ydy}{y}, \quad \int dx = \int \frac{\ln ydy}{y}, \quad x + C = \int \ln yd(\ln y), \quad x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Проверка: $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, итого

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y$$ - верно.

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}, \quad y^{-2/3}dy = dx, \quad \int y^{-2/3}dy = \int dx, \quad 3y^{1/3} = x + C,$$

$27y = (x+C)^3$ - общий интеграл, $y = \frac{1}{27}(x+C)^3$ - общее решение

Пример. Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии y(1) = 0.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0, \quad ydy + xe^y dx = 0; \qquad \frac{y}{e^y}dy = -xdx; \quad \int \frac{y}{e^y}dy = -\int xdx;$$

Интеграл, стоящий в левой части будем брать по частям :

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0; \quad 2e^{-y}(y+1) = x^2 + C.$$

Если y(1) = 0, то $2e^0(0+1) = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = 1;$

Итого, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Пример. Решить уравнение $y' = x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2+1), \quad \frac{dy}{y^2+1} = xdx, \quad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int xdx; \quad arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x0 и y0. Тогда:

$$arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right).$

3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция f(x, y) называется однородной n – го измерения относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$

Пример. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3(x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется однородным, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции P(x, y) и Q(x, y) – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y).$

Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$f(tx, ty) = f(x, y).$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$y' = \varphi(u)$

Далее заменяем y = ux, $y' = u'x + ux'$.

$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right).$

Введем вспомогательную функцию u.

$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u$.

Отметим, что введенная нами функция u всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln \frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x};$

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение:

$y = xe^{Cx}$.

4. Линейное дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.

Определение. Дифференциальное уравнение называется линейным относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$y' + P(x)y = Q(x),$

при этом, если правая часть Q(x) равна нулю, то такое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением, если правая часть Q(x) не равна нулю, то такое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением.

P(x) и Q(x)- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$y' + P(x)y = 0$.

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$, $\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$ $\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$

Общее решение: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (Q(x)≠0) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$, $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию u, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим поученное выражение для функции u в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию. Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),$$ C2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом вариации произвольной постоянной.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} + C_1(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию C1(x):

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, получаем: $C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

Пример. Решить уравнение $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \frac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \frac{1}{x^2}; \quad Q = ae^{\frac{1}{x}};$

$$y = e^{-\int\frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int\frac{1}{x^2}dx}dx + C\right), \quad y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int adx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

Уравнение Бернулли

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q\cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на yn.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}}\cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q, \quad z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int P dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

Пример. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x.$

Разделим уравнение на xy2: $\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y} = \ln x.$

Полагаем $z = \dfrac{1}{y}; \quad z' = -\dfrac{y'}{y^2}.$

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Полагаем $P = -\dfrac{1}{x}, \quad Q = -\ln x.$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C\right); \qquad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C\right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Пример. Решить уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}.$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Полагаем $z = \sqrt{y}; \quad z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}y'; \quad y' = 2\sqrt{y}z';$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z' - \frac{4}{x}z = x; \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2};$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z} = 2\int\frac{dx}{x} + C_1; \quad \ln z = 2\ln x + \ln C; \quad z = Cx^2;$$

Полагаем C = C(x) и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx}; \quad 2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \qquad C(x) = \frac{1}{2}\ln x + C_2;$$

Получаем: $z = x^2\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right);$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y = x^4\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2;$$

5 . Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции u, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C.$

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции u;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u, то можно записать:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}$.

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по y, а второе – по x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем необходимое и достаточное условие того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется условием тотальности.

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции u.

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$u = \int M(x, y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину С, а некоторую функцию С(у), т.к. при интегрировании переменная у полагается постоянным параметром.

Определим функцию С(у).

Продифференцируем полученное равенство по у.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем:

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx.$$

Для нахождения функции C(y) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция C(y) не зависит от x. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по x равна нулю.

$$[C'(y)]_x' = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию C(y):

$$C(y) = \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx\right]dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции u, получаем:

$$u = \int M(x, y)dx + \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x, y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\int M(x, y)dx + \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x, y)dx\right]dy = C.$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

Пример. Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Проверим условие тотальности:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y} = 10x;$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию u.

$$u = \int M(x, y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x, y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1;$$

Итого, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1.$

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Приближенные методы решения уравнений и систем уравнений»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Отделение корней. Метод Горнера
2. Метод хорд, касательных.
3. Метод итерации, его сходимость.
4. Метод Ньютона.
5. Метод Зейделя.

1.2.2. Краткое содержание вопросов:

1. Отделение корней. Метод Горнера

В общем случае отделение корней уравнения f(x)=0 базируется на

известной теореме, утверждающей, что если непрерывная функция f(x) на

концах отрезка [a,b] имеет значения разных знаков, т.е. f(a)×f(b)< 0 , то в указанном промежутке содержится хотя бы один корень. Например, для уравнения f(x)=x3 - 6x+2=0 видим, что при $x \to \infty\ f(x)>0,$ при $x \to -\infty\ f(x)<0,$ что уже свидетельствует о наличии хотя бы одного корня.

Для уравнения $f(x)= e^x+x=0$ видим, что $f(\infty)>0,\ f(-\infty)<0.$ Обнаружив, что $f'(x) = e^x+1 \neq 0,$ устанавливаем факт наличия единственного корня, и остается лишь найти его (как говорится, за немногим стало дело).

Если предварительный анализ функции затруднителен, можно “пойти в лобовую атаку”. При уверенности в том, что все корни различны, выбираем некоторый диапазон возможного существования корней (никаких универсальных рецептов!) и производим “прогулку” по этому интервалу с некоторым шагом, вычисляя значения f(x)и фиксируя перемены знаков. При выборе шага приходится брать его по возможности большим для минимизации объема вычислений, но достаточно малым, чтобы не пропустить перемену знаков.

Графический метод

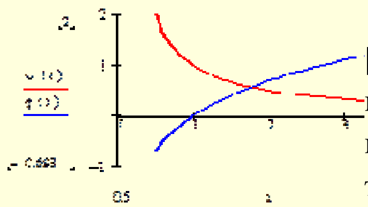
Этот метод основан на построении графика функции y=f(x). Если построить график данной функции, то искомым отрезком [a,b], содержащим корень уравнения (1), будет отрезок оси абсцисс, содержащий точку пересечения графика с этой осью. Иногда выгоднее функцию f(x) представить в виде разности двух более простых функций, т.е. $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ и строить графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет являться корнем уравнения (1), а отрезок на оси абсцисс которому принадлежит данный корень, будет являться интервалом изоляции. Этот метод отделения корней хорошо работает только в том случае, если исходное уравнение не имеет близких корней. Данный метод дает тем точнее результат, чем мельче берется сетка по оси Ox.

Пример. Графически решить уравнение $x\ln(x) = 1$.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде: $\ln(x) = \frac{1}{x}$, т.е. $\varphi(x) = \ln(x)$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

Таким образом, корни данного уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения кривых $y = \ln(x)$ и $y = \frac{1}{x}$.

Теперь построим графики функций и определим интервал изоляции корня.



Из рис.1 видно, что корень находится на отрезке [1,2]. В качестве приближенного значения этого корня можно взять значение x=1.5. Если взять шаг по оси Ox меньше, то и значение корня можно получить более точное.

Рис. 1.

Аналитический метод (табличный или шаговый).

Для отделения корней полезно помнить следующие известные теоремы:

1) если непрерывная функция f(x) принимает значения разных знаков на концах отрезка [a,b], т.е. f(a)f(b)<0, то внутри этого отрезка содержится, по крайне мере, один корень уравнения f(x)=0;

2) если непрерывная и монотонная функция f(x) на отрезке [a,b] принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри данного отрезка содержится единственный корень;

3) если функция f(x) непрерывна на отрезка [a,b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная ее сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения (1) и притом единственный.

Если исходное уравнение имеет близкие корни или функция f(x) сложная, то для отделения отрезков изоляции можно воспользоваться методом деления отрезка на части (шаговым методом).

Сначала определяют знаки функции в граничных точках области. Затем отрезок разбивается с помощью промежуточных точек x=a1 ,a2 ,…. Если окажется, что в двух соседних точках ak и ak +1 функция f(x) имеет разные знаки, то в силу приведенной теоремы, можно утверждать, то на этом отрезке имеется по крайне мере один корень.

Теперь необходимо убедиться, что на выбранном отрезке находится единственный корень. Для этого можно проверить меняет ли знак производная функции f(x) на этом интервале.

Пример. Найти интервалы изоляции корня уравнения $x^2 - 2 = 0$ на [0,4]

Решение. Построим таблицу значений, где $y(x) = x^2 - 2$:

x	y(x)
0	-2
1	-1
2	2
3	7
4	14

Из таблицы значений видно, что функция y(x) меняет знак на отрезке [1,2], поэтому корень находится на этом отрезке.

Отделение корней алгебраических уравнений

Для отделения корней алгебраического уравнения (2) с действительными коэффициентами полезно помнить следующие известные теоремы алгебры:

1) если $a = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, $b = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$, то все корни уравнения (2) расположены в кольце

$$\frac{|a_n|}{b + |a_n|} \le x \le 1 + \frac{a}{|a_0|}, \quad (3)$$

2) если а максимум модулей отрицательных коэффициентов уравнения, $a_0 > 0$ и первый отрицательный коэффициент последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ есть a_m, то все положительные корни уравнения меньше $N = 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{a_0}}$ (если отрицательных коэффициентов нет, то нет и положительных корней).

3) если $a_0 > 0$ и при $x = c > 0$ имеют место неравенства $f(c) > 0$, $f'(c) > 0$, ¼, $f^{(n)}(c) > 0$, то число с служит верхней границей положительных корней уравнения (2).

4) Пусть заданы многочлены

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$\varphi_1(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$\varphi_2(x) = f(-x) = (-1)^n \left[a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots + (-1)^n a_n\right],$$

$$\varphi_3(x) = x^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left[a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + (-1)^n a_0\right]$$

и N0 , N1 , N2 , N3 верхние границы положительных корней соответственно многочленов f(x), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Тогда все положительные корни уравнения (2) лежат на отрезке $[1/N_1; N_0]$, а все отрицательные корни на отрезке $[-N_2; -1/N_3]$.

Пример. Отделить корни данного алгебраического уравнения, используя теорему 4: $x^3 - 0.5x^2 + 0.78 = 0$.

Решение. $f(x) = x^3 - 0.5x^2 + 0.78$, $N_0 = 1 + \dfrac{0.5}{1} = 1.5$,

$$\varphi_1(x) = x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.78x^3 - 0.5x + 1, \quad N_1 = 1 + \sqrt{\frac{0.5}{0.78}} \approx 1.8006,$$

$$\varphi_2(x) = f(-x) = -x^3 - 0.5x^2 + 0.78, \quad N_2 = 1 + \sqrt[3]{0.78} \approx 1.9205,$$

$$\varphi_3(x) = x^3 f\left(-\frac{1}{x}\right) = -0.78x^3 + 0.5x + 1, \quad N_3 = 1 + \sqrt{\frac{1}{0.78}} \approx 2.1323.$$

Таким образом корни уравнения могут лежать на интервалах $[-1.9205; -0.4690]$, $[0.5554; 1.5]$.

Для определения количества действительных корней уравнения (2) необходимо воспользоваться теоремой Декарта: число положительных корней уравнения (2) с учетом их кратности равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (при этом равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число.

Теорема Декарта не требует больших вычислений, но не всегда дает точное количество действительных корней уравнения (2).

Замечание. Для определения количества отрицательных корней достаточно применить теорему Декарта к многочлену $f(-x)$.

Если уравнение (2) не имеет кратных корней на [a,b], то точное число действительных корней дает теорема Штурма.

Предположим, что уравнение (2)не имеет кратных корней. Обозначим рез $f_1(x)$ производную $f'(x)$; через $f_2(x)$ остаток от деления $f(x)$ на $f_1(x)$, взятый с обратным знаком; через $f_3(x)$ остаток от деления $f_1(x)$ на $f_2(x)$, взятый с обратным знаком и т.д., до тех пор пока не придем к постоянной. Полученную последовательность

$f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ (4)

назовем рядом Штурма.

Теорема Штурма: Число действительных корней уравнения f(x)=0, расположенных на отрезке [a,b], равно разности между числом перемен знаков в последовательности (4) при x=a и числом перемен знаков в последовательности (4) при x=b.

Замечание. Использование теоремы Штурма на практике, связано с большой вычислительной работой при построении рядя Штурма.

Пример. Отделить корни данного алгебраического уравнения, используя теорему Штурма: $x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{39}{50}=0$

Решение. $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2\div\frac{39}{50}$, $f_1(x)=3x^2-x$, $f_2(x)=\frac{1}{18}x-0.78$, $f_3(x)=-577.3248$. Построим таблицу для подсчета смены знаков:

-¥	1	- 0.4	.5	1	¥	
sign $f(x)$		-		+	+	+
sign $f_1(x)$		+		+	+	+
sign $f_2(x)$		-		-	-	+
sign $f_3(x)$		-		-	-	-
Число перемен знаков		2		1	1	1

Из таблицы подсчета смены знаков видно, что есть один корень данного уравнения, и он находится на [-1;-0.4].

Схема Горнера

Схема Горнера – способ деления многочлена

Pn(x)=∑i=0naixn−i=a0xn+a1xn−1+a2xn−2+…+an−1x+an

на бином x−a. Работать придётся с таблицей, первая строка которой содержит коэффициенты заданного многочлена. Первым элементом второй строки будет число a, взятое из бинома x−a:

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	…	a_{n-1}	a_n
a							

После деления многочлена n-ой степени на бином x−a, получим многочлен, степень которого на единицу меньше исходного, т.е. равна n−1. Непосредственное применение схемы Горнера проще всего показать на примерах.

Пример №1

Разделить 5x4+5x3+x2−11 на x−1, используя схему Горнера.

Решение

Составим таблицу из двух строк: в первой строке запишем коэффициенты многочлена 5x4+5x3+x2−11, расположенные по убыванию степеней переменной x. Заметьте, что данный многочлен не содержит x в первой степени, т.е. коэффициент перед x в первой степени равен 0. Так как мы делим на x−1, то во второй строке запишем единицу:

$$5\cdot x^4 + 5\cdot x^3 + 1\cdot x^2 + 0\cdot x - 11$$

	5	5	1	0	−11
1					

Начнем заполнять пустые ячейки во второй строке. Во вторую ячейку второй строки запишем число 5, просто перенеся его из соответствующей ячейки первой строки:

	5	5	1	0	−11
1	5				

Следующую ячейку заполним по такому принципу: 1·5+5=10:

	5	5	1	0	−11
1	5	10			

Аналогично заполним и четвертую ячейку второй строки: 1·10+1=11:

	5	5	1	0	−11
1	5	10	11		

Для пятой ячейки получим: 1·11+0=11:

	5	5	1	0	−11
1	5	10	11	11	

И, наконец, для последней, шестой ячейки, имеем: 1·11+(−11)=0:

	5	5	1	0	−11
1	5	10	11	11	0

Задача решена, осталось только записать ответ:

	5	5	1	0	−11
1	5	10	11	11	0

$$5x^4+5x^3+x^2-11=(x-1)(5x^3+10x^2+11x+11)+0$$

Как видите, числа, расположенные во второй строке (между единицей и нулём), есть коэффициенты многочлена, полученного после деления 5x4+5x3+x2−11 на x−1. Естественно, что так как степень исходного многочлена 5x4+5x3+x2−11 равнялась четырём, то степень полученного многочлена 5x3+10x2+11x+11на единицу меньше, т.е. равна трём. Последнее число во второй строке (ноль) означает остачу от деления многочлена 5x4+5x3+x2−11 на x−1. В нашем случае остача равна нулю, т.е. многочлены делятся нацело. Этот результат ещё можно охарактеризовать так: значение многочлена 5x4+5x3+x2−11 при x=1 равно нулю.

Можно сформулировать вывод и в такой форме: так как значение многочлена 5x4+5x3+x2−11 при x=1равно нулю, то единица является корнем многочлена 5x4+5x3+x2−11.

Пример №2

Разделить многочлен x4+3x3+4x2−5x−47 на x+3 по схеме Горнера.

Решение

Сразу оговорим, что выражение x+3 нужно представить в форме x−(−3). В схеме Горнера будет учавствовать именно −3. Так как степень исходного многочлена x4+3x3+4x2−5x−47 равна четырём, то в результате деления получим многочлен третьей степени:

	1	3	4	−5	−47
−3	1	0	4	−17	4

Полученный результат означает, что

x4+3x3+4x2−5x−47=(x+3)(x3+0⋅x2+4x−17)+4=(x+3)(x3+4x−17)+4

В этой ситуации остача от деления x4+3x3+4x2−5x−47 на x+3 равна 4. Или, что то самое, значение многочлена x4+3x3+4x2−5x−47 при x=−3 равно 4. Кстати, это несложно перепроверить непосредственной подстановкой x=−3 в заданный многочлен:

x4+3x3+4x2−5x−47=(−3)4+3⋅(−3)3−5⋅(−3)−47=4.

Т.е. схему Горнера можно использовать, если необходимо найти значение многочлена при заданном значении переменной. Если наша цель – найти все корни многочлена, то схему Горнера можно применять несколько раз подряд, – до тех пор, пока мы не исчерпаем все корни, как рассмотрено в примере №3.

Пример №3

Найти все целочисленные корни многочлена x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45, используя схему Горнера.

Решение

Коэффициенты рассматриваемого многочлена есть целые числа, а коэффициент перед старшей степенью переменной (т.е. перед x6) равен единице. В этом случае целочисленные корни многочлена нужно искать среди делителей свободного члена, т.е. среди делителей числа 45. Для заданного многочлена такими корнями могут быть числа 45;15;9;5;3;1 и −45;−15;−9;−5;−3;−1. Проверим, к примеру, число 1:

Табл. №1

	1	2	−21	−20	71	114	45
1	**1**	3	−18	−38	33	147	192

Как видите, значение многочлена x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45 при x=1 равно 192(последнее число в второй строке), а не 0, посему единица не является корнем данного многочлена. Так как проверка для единицы окончилась неудачей, проверим значение x=−1. Новую таблицу для этого составлять не будем, а продолжим использование табл. №1, дописав в нее новую (третью) строку. Вторую строку, в которой проверялось значение 1, выделим красным цветом и в дальнейших рассуждениях использовать её не будем.

Можно, конечно, просто переписать таблицу заново, но при заполнении вручную это займет немало времени. Тем более, что чисел, проверка которых окончится неудачей, может быть несколько, и каждый раз записывать новую таблицу затруднительно. При вычислении «на бумаге» красные строки можно просто вычёркивать.

Табл. №2

	1	2	−21	−20	71	114	45
1	1	3	−18	−38	33	147	192
−1	1	1	−22	2	69	45	0

Итак, значение многочлена x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45 при x=−1 равно нулю, т.е. число −1 есть корень этого многочлена. После деления многочлена x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45 на бином x−(−1)=x+1 получим многочлен x5+x4−22x3+2x2+69x+45, коэффициенты которого взяты из третьей строки табл. №2 (см. пример №1). Результат вычислений можно также представить в такой форме:

x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45=(x+1)(x5+x4−22x3+2x2+69x+45)(1)

Продолжим поиск целочисленных корней. Теперь уже нужно искать корни многочлена x5+x4−22x3+2x2+69x+45. Опять-таки, целочисленные корни этого многочлена ищут среди делителей его свободного члена, – числа 45. Попробуем ещё раз проверить число −1. Новую таблицу составлять не будем, а продолжим использование предыдущей табл. №2, т.е. допишем в нее еще одну строку:

	1	2	−21	−20	71	114	45
1	1	3	−18	−38	33	147	192
−1	1	1	−22	2	69	45	0
−1	1	0	−22	24	45	0	

Итак, число −1 является корнем многочлена x5+x4−22x3+2x2+69x+45. Этот результат можно записать так:

x5+x4−22x3+2x2+69x+45=(x+1)(x4−22x2+24x+45)(2)

Учитывая равенство (2), равенство (1) можно переписать в такой форме:

x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45=(x+1)(x5+x4−22x2+2x2+69x+45)==(x+1)(x+1)(x4−22x2+24x+45)=(x+1)2(x4−22x2+24x+45)(3)

Теперь уже нужно искать корни многочлена x4−22x2+24x+45, – естественно, среди делителей его свободного члена (числа 45). Проверим еще раз число −1:

	1	2	−21	−20	71	114	45
1	1	3	−18	−38	33	147	192
−1	1	1	−22	2	69	45	0
−1	1	0	−22	24	45	0	
−1	1	−1	−21	45	0		

Число −1 является корнем многочлена x4−22x2+24x+45. Этот результат можно записать так:

x4−22x2+24x+45=(x+1)(x3−x2−21x+45)(4)

С учетом равенства (4), равенство (3) перепишем в такой форме:

x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45=(x+1)2(x4−22x3+24x+45)==(x+1)2(x+1)(x3−x2−21x+45)=(x+1)3(x3−x2−21x+45)(5)

Теперь ищем корни многочлена x3−x2−21x+45. Проверим еще раз число −1:

	1	2	−21	−20	71	114	45
1	1	3	−18	−38	33	147	192
−1	1	1	−22	2	69	45	0
−1	1	0	−22	24	45	0	
−1	1	−1	−21	45	0		
−1	1	−2	−19	64			

Проверка окончилась неудачей. Выделим шестую строку красным цветом и попробуем проверить иное число, например, число 3:

	1	2	−21	−20	71	114	45
1	1	3	−18	−38	33	147	192
−1	1	1	−22	2	69	45	0
−1	1	0	−22	24	45	0	
−1	1	−1	−21	45	0		
−1	1	−2	−19	64			
3	1	2	−15	0			

В остаче ноль, посему число 3 – корень рассматриваемого многочлена. Итак, x3−x2−21x+45=(x−3)(x2+2x−15). Теперь равенство (5) можно переписать так:

x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45==(x+1)3(x3−x2−21x+45)=(x+1)3(x−3)(x2+2x−15) (6)

Проверим ещё раз число 3:

	1	2	−21	−20	71	114	45
1	1	3	−18	−38	33	147	192
−1	1	1	−22	2	69	45	0
−1	1	0	−22	24	45	0	
−1	1	−1	−21	45			
−1	1	−2	−19	64			
3	1	2	−15	0			
3	1	5	0				

Полученный результат можно записать так (это продолжение равенства (6)):

x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45=(x+1)3(x−3)(x2+2x−15)==(x+1)3(x−3)(x−3)(x+5) =(x+1)3(x−3)2(x+5)(7)

Из последней скобки видно, что число −5 также является корнем данного многочлена. Можно, конечно, формально продолжить схему Горнера, проверив значение x=−5, но необходимости в этом нет. Итак,

x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45=(x+1)3(x−3)(x2+2x−15)=(x+1)3(x−3)2(x+5)

Числа −1;3;5 – корни данного многочлена. Причем, так как скобка (x+1) в третьей степени, то −1 – корень третьего порядка; так как скобка (x−3) во второй степени, то 3 – корень второго порядка; так как скобка (x+5) в первой степени, то x=−5 – корень первого порядка (простой корень).

Вообще, обычно оформление таких примеров состоит из таблицы, в которой перебираются возможные варианты корней, и ответа:

	1	2	−21	−20	71	114	45
1	1	3	−18	−38	33	147	192
−1	1	1	−22	2	69	45	0
−1	1	0	−22	24	45	0	
−1	1	−1	−21	45			
−1	1	−2	−19	64			
3	1	2	−15	0			
3	1	5	0				

Из таблицы следует вывод, полученный нами ранее с подробным решением:
x6+2x5−21x4−20x3+71x2+114x+45=(x+1)3(x−3)(x2+2x−15)=(x+1)3(x−3)2(x+5)

2. Метод хорд, касательных

Метод дихотомии (половинного деления)

Метод дихотомии (метод деления отрезка пополам) основан на известной ***теореме Больцано-Коши:***

Если непрерывная на отрезке $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *на концах его имеет противоположные знаки, т.е.* $f(a)\cdot f(b)<0$, *то на интервале* (a,b) *она хотя бы раз обращается в нуль.*

Данная теорема не дает вопрос о количестве корней (он может быть как один, так и произвольное *нечетное* число) в случае выполнения данного условия и не позволяет утверждать, что корней точно нет, если условие не выполняется (их может быть произвольное четное число).

А вот если функция на отрезке является строго монотонной, то тогда можно утверждать

Если непрерывная и строго монотонная на отрезке $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *на концах его имеет противоположные знаки, т.е.* $f(a)\cdot f(b)<0$, *то на интервале* (a,b) *имеется один и только один корень.*

Метод дихотомии основан на последовательном делении отрезка локализации корня пополам.

Для этого выбирается начальное приближение к отрезку $[a,b]$, такое, что $f(a)\cdot f(b)<0$, затем определяется знак функции в точке $c=\dfrac{a+b}{2}$ - середине отрезка $[a,b]$. Если он противоположен знаку функции в точке a, то корень локализован на отрезке $[a,c]$, если же нет – то на отрезке $[c,b]$.

Алгоритм можно записать так

1. представить решаемое уравнение в виде $f(x)=0$
2. выбрать такие a, b, что
3. вычислить $c=\dfrac{a+b}{2}$
4. если $f(a)\cdot f(c)<0$, то $b=c$ иначе $a=c$
5. если критерий сходимости не выполнен, то перейти к п. 3

6. напечатать корень из переменной ***c***

Для нашего примера решение принимает вид:

	a	f(a)	b	f(b)	c	f©
0	1	-0,84147	2	2,090703	1,5	0,252505
1	1	-0,84147	1,5	0,252505	1,25	-0,38648
2	1,25	-0,38648	1,5	0,252505	1,375	-0,09027
3	1,375	-0,09027	1,5	0,252505	1,4375	0,075277
4	1,375	-0,09027	1,4375	0,075277	1,40625	-0,00895
5	1,40625	-0,00895	1,4375	0,075277	1,421875	0,032797
6	1,40625	-0,00895	1,421875	0,032797	1,414063	0,01183
7	1,40625	-0,00895	1,414063	0,01183	1,410156	0,001416
8	1,40625	-0,00895	1,410156	0,001416	1,408203	-0,00377

Точность до седьмой значащей цифры достигается за 20 итераций.

Скорость сходимости этого метода является линейной.

При выполнении начального условия он сходится к решению всегда.

Если задана точность, то можно точно вычислить число необходимых итераций. Действительно, на шаге k длина отрезка локализации корня составит $\frac{b-a}{2^k}=\varepsilon$

Тогда $k=\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}$

Метод половинного деления удобен при решении физически реальных уравнений, когда заранее известен отрезок локализации решения уравнения и затруднено использование *метода Ньютона*.

Близким по алгоритму к методу половинного деления является метод хорд.

Равновесные концентрации веществ при протекании химического процесса $aA+bB=cC+dD$ связаны по закону действующих масс константой равновесия реакции

$$K=\frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

Обозначим начальные концентрации веществ через $[A]_0,[B]_0,[C]_0,[D]_0$, через *x* обозначим глубину протекания химической реакции от начального состояния, тогда равновесные концентрации веществ можно выразить через начальные и величину *x*

$$[A]=[A]_0-ax$$

$$[B]=[B]_0-bx$$

$$[C]=[C]_0+cx$$

$$[D]=[D]_0+dx$$

Подставим и получим уравнение относительно величины *x*

$$K=\frac{([C]_0+cx)^c([D]_0+dx)^d}{([A]_0-ax)^a([B]_0-bx)^b}$$

Преобразовав его к виду $f(x)=0$ получим

$$\left([C]_0 + cx\right)^c \left([D]_0 + dx\right)^d - K\left([A]_0 - ax\right)^a \left([B]_0 - bx\right)^b = 0$$

Данное уравнение можно решать методом Ньютона (найдя аналитически соответствующую производную) либо методом половинного деления

Зная начальные концентрации веществ можно довольно легко найти интервал возможных значений глубины протекания реакции *x*. Для этого воспользуемся физическим ограничением – равновесные концентрации веществ должны быть неотрицательными величинами.

$$[A] = [A]_0 - ax \geq 0 \qquad x \leq \frac{[A]_0}{a}$$

$$[B] = [B]_0 - bx \geq 0 \qquad x \leq \frac{[B]_0}{b}$$

$$[C] = [C]_0 + cx \geq 0 \qquad x \geq -\frac{[C]_0}{c}$$

$$[D] = [D]_0 + dx \geq 0 \qquad x \geq -\frac{[D]_0}{d}$$

Первые два неравенства ограничивают значение сверху, последние два – снизу, что окончательно приводит к

$$\max\left(-\frac{[C]_0}{c}, -\frac{[D]_0}{d}\right) \leq x \leq \min\left(\frac{[A]_0}{a}, \frac{[B]_0}{b}\right)$$

Наиболее часто решаются задачи, в которых начальные концентрации продуктов реакции равны 0. В этом случае, как видно, нижней границей для x будет как раз значение 0.

3. Метод итерации, его сходимость

Часто встречающейся численной задачей в рамках математического моделирования химических систем и процессов является задача нахождения решения уравнений одной переменной (корней уравнений).

В общем виде любое уравнение одной переменной принято записывать так

$f(x) = 0$, при этом корнем (решением) называется такое значение x^* , что $f(x^*) \equiv 0$ оказывается верным тождеством. Уравнение может иметь один, несколько (включая бесконечное число) или ни одного корня.

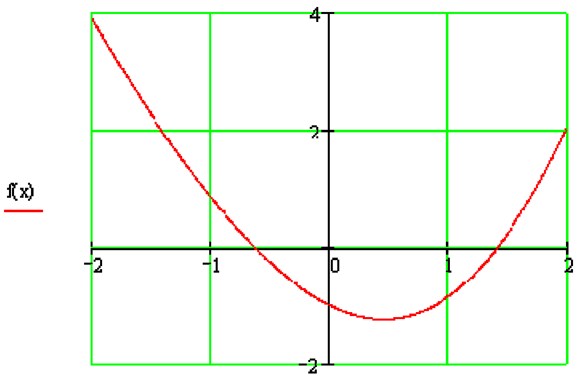
Как легко видеть, для действительных корней задача отыскания решения уравнения легко интерпретируется графически: корень есть такое значение независимой переменной, при котором происходит пересечение графика функции, стоящей в левой части уравнения $f(x)$, с осью абсцисс. Например, пусть есть уравнение

$x^2 - \sin x = 1$

Преобразуем его в $x^2 - \sin x - 1 = 0$ и определим, что

$f(x) = x^2 - \sin x - 1$

График функции имеет вид



Таким образом можно приблизительно определять *область локализации корней* уравнения. Так, видно, что данное уравнение имеет два действительных корня – один на отрезке [-1, 0] , а второй – [1, 2]. Решением с семью значащими цифрами являются : x_1= -0.6367327 $\boldsymbol{x_2}$=1.409624

Некоторые виды уравнений допускают аналитическое решение. Например, *алгебраические уравнения степени n*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ax + a_0 = 0 \quad \text{при } n <= 4.$$

Однако, в общем виде, аналитическое решение, как правило, отсутствует. В этом случае и применяются численные методы.

Все численные методы решения уравнений представляют собой <u>итерационные алгоритмы</u> последовательного приближения к корню уравнения. То есть, выбирается начальное приближение к корню x_0 и затем с помощью итерационной формулы генерируется последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k,$ сходящаяся к корню уравнения

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$$

Критерии сходимости при решении уравнений

1. Абсолютное изменение приближения на соседних шагах итерации $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$

2. Относительное изменение приближения на соседних шагах итерации $\left|\dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| \le \varepsilon$

3. Близость к нулю вычисленного значения левой части уравнения (иногда это значение называют *невязкой уравнения,* так как для корня невязка равна нулю) $|f(x_k)| \le \varepsilon$

Метод простой итерации

Это простейший из предложенных методов нахождения корней. В качестве итерационной формулы используется выражение независимой переменной из исходного уравнения:

Исходное уравнение - $f(x) = 0$ путем арифметических преобразований приводится к виду $x = g(x)$,

который может использоваться в качестве итерационной формулы.

Данное преобразование, как правило, не однозначно и совершенно отдельной задачей является оценка применимости и эффективности того или иного способа преобразования.

Например, уравнение $x^2 - \sin x = 1$ можно преобразовать, например, так

$x = \sqrt{1 + \sin x}$ или так $x = \arcsin(x^2 - 1)$ или так $x = \dfrac{1 + \sin x}{x}$ и т.д.

Задавшись начальным приближением к корню (например, из анализа графика функции или априорных соображений физически реальной модели) можно найти решение.

$x_1 = g(x_0)$, затем $x_2 = g(x_1)$ ….. $x_k = g(x_{k-1})$

Ниже приведена таблица вычислений для представленных выражений, начиная с одного и того же начального приближения.

№ итер.	Ф-ла 1	Ф-ла 2	Ф-ла 3	
0	1	1	1	
1	1,357008	0	1,841471	
2	1,406142	-1,5708	1,066316	
3	1,409424	#ЧИСЛО!	1,758789	
4	1,409613	#ЧИСЛО!	1,127128	
5	1,409623	#ЧИСЛО!	1,688524	
6	1,409624	#ЧИСЛО!	1,180367	
7	1,409624	#ЧИСЛО!	1,630633	
			1,22542	

Точность до семи значащих цифр достигается при данном выборе начального приближения для первой итерационной формулы уже на шестом шаге итерационной процедуры, для третьей – на 115-м (в таблице не показано). А вот для второй формулы уже на третьем итерационном шаге вычисления прекращаются, так как под знаком арксинуса оказывается число, большее единицы (нарушается область определения функции).

Сходимость метода простой итерации является локальной и резко зависит от выбора итерационной формулы, что является его недостатком. В случае сходимости скорость схождения не выше первой степени.

4. Метод Ньютона

Метод Ньютона основан на линеаризации функции $f(x)$ вблизи приближенного значения и нахождения точки пересечения полученной линии с осью абсцисс

Тангенс угла наклона касательной равен значению производной в точке касания.

$tg\alpha = f'(x_i)$

Координата точки пересечения будет

$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{tg\alpha} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ - это и есть итерационная формула метода Ньютона.

Пример

Для уравнения $x^2 - \sin x - 1 = 0$ имеем

$f(x) = x^2 - \sin x - 1$

$f'(x) = 2x - \cos x$

	x	f(x)	f'(x)
0	1	-0,84147	1,459698
1	1,576469	0,485272	3,158612
2	1,422835	0,035385	2,698248
3	1,409721	0,000257	2,659061
4	1,409624	1,39E-08	2,658773
5	1,409624	0	2,658773

Сходимость к положительному корню достигается за четыре шага

	x	f(x)	f'(x)
0	-1	0,841471	-2,5403
1	-0,66875	0,067236	-2,1221
2	-0,63707	0,000697	-2,07798
3	-0,63673	7,9E-08	-2,07751
4	-0,63673	0	-2,07751
5	-0,63673	0	-2,07751

Сходимость к отрицательному корню – всего за три.

Метод Ньютона является локальным квадратично сходящимся методом. Причем область сходимости, как правило, достаточно широкая. Это основные достоинства метода.

К недостаткам можно отнести необходимость вычисления производной функции и плохая обусловленность метода вблизи экстремумов функции $f(x)$

5. Метод Зейделя

Системы n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ в общем случае принято записывать следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где a_{ij} и b_i – произвольные константы. Число n неизвестных называется порядком системы.

Решением уравнения является такая совокупность значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая одновременно обращает все уравнения системы в тождество.

Необходимым и достаточным условием существования и единственности решения системы уравнений является линейная независимость уравнений. Или, более точно, неравенство нулю определителя, составленного из коэффициентов системы уравнений:

$$|A| \neq 0$$

Эквивалентной (и весьма удобной!!!) записью системы линейных уравнений является матричная запись

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

или сокращенно $(A) \cdot (X) = (B)$,

в чем легко убедится, если воспользоваться правилами перемножения матриц: элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы-результата есть скалярное произведение i-й вектор-строки первой матрицы и j-го вектор-столбца второй матрицы.

Коэффициенты при неизвестных образуют квадратную матрицу размером *n* x *n*, (A), переменные и свободные члены уравнений – векторы-столбцы длиной *n*(X) и (B), соответственно.

Решение системы уравнений есть вектор (X^*), который обращает это матричное уравнение в тождество.

$$(X^*) = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

Для решения системы линейных уравнений применяются точные методы (прямые) в которых количество арифметических, необходимых для нахождения решения, операций точно определяется порядком системы и итерационные (приближенные) методы, в которых проводится пошаговое, итерационное уточнение решения.

Оценить близость какого-либо вектора $(X)_i$ к решению системы уравнений можно оценив близость вектора невязок , вычисляемого приведенным ниже образом, к нулевому вектору:

$$(\Delta) = (B) - (A) \cdot (X)_i$$

Для выражения меры близости в виде числа используется какая-либо *норма* вектора, например, Евклидова норма или длина вектора в *n*-мерном пространстве (другое определение – это корень квадратный из скалярного произведения вектора на себя):

$$\|\Delta\| = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2} = \sqrt{((\Delta), (\Delta))}$$

Иногда используются другие векторные нормы: норма-максимум (равна наибольшей по абсолютной величине компоненте вектора)

$$\|\Delta\|_\infty = \max|\Delta_i|$$

или норма-сумма (равна сумме абсолютных величин компонентов вектора)

$$\|\Delta|_1 = \sum_{i-1}^{n} |\Delta_i$$

Обусловленность линейных алгебраических систем

Численное решение систем алгебраических уравнений является часто решаемой в рамках математического моделирования задачей. При этом как размерность задачи, так и характер матриц может существенно меняться. Вычисления, проводимые с определенной точностью, так же оказывают влияние на результат решения линейных систем. Кроме того, сами коэффициенты системы – матрица (A) и свободные члены – (B) могут быть представлены с определенной погрешностью.

Приведем такой пример:

Система уравнений

$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

Имеет, как нетрудно убедиться подстановкой, единственное решение x = 1, y = 1.

Предположим, что при подготовке системы к решению, правая часть первого уравнения была определена с небольшой абсолютной погрешностью в +0.01, то есть, правая часть первого из уравнений вместо 11 была взята равной 11,01.

$$\begin{cases} x + 10y = 11.01 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

Единственным решение этой системы уравнений уже будет вектор x=11,01 y=0.

Как нетрудно убедится, в этом случае погрешность определения значений переменных оказывается существенно больше, чем погрешность коэффициента. Задачи, в которых малое изменение исходных параметров кардинально сказывается на результате называются *плохо обусловленными*.

Рассмотрим в общем виде систему линейных уравнений, в которой вектор свободных членов (B) представлен с некоторой абсолютной погрешностью (ΔB).

Если вектор **(X)** является точным решением уравнения с "точным" вектором **(B)**.

$$(A)\cdot(X) = (B)$$

то при наличии погрешности в правой части (ΔB) решение системы уравнений будет отличаться от (X) на некоторый вектор (ΔX), что можно записать следующим образом:

$$(A)\cdot((X) + (\Delta X)) = (B) + (\Delta B)$$, раскроем скобки в правой части

$$(A)\cdot(X) + (A)(\Delta X) = (B) + (\Delta B)$$ и учтем точное уравнение

$$(B) + (A)(\Delta X) = (B) + (\Delta B)$$

$$(A)(\Delta X) = (\Delta B)$$, умножая обе части равенства на матрицу, обратную матрице коэффициентов

$$(A)^{-1}(A)(\Delta X) = (A)^{-1}(\Delta B)$$ получим $$(\Delta X) = (A)^{-1}(\Delta B)$$

т.е. абсолютная погрешность (ΔX) вычисления вектора решения (X) равна произведению матрицы, обратной матрице коэффициентов системы уравнений, на вектор абсолютной погрешности (ΔB) .

Если перейти от матриц и векторов к соответствующим нормам, то получим, что норма вектора (ΔX) будет меньше либо равна произведению норм обратной матрицы и нормы вектора погрешности

$$\|\Delta X\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta B\|$$

Таким образом, если норма обратной матрицы будет велика, то абсолютная погрешность решения может быть существенно больше абсолютной погрешности правых частей уравнений системы.

Оценим, как будут при этом соотноситься *относительная* погрешность решения и относительной погрешностью коэффициентов. Для этого пронормируем два полученных ранее уравнения:

$$\|B\| \le \|A\|\cdot\|X\| \qquad \|\Delta X\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta B\|$$

Перемножим отдельно левые и правые части неравенств, что, очевидно, не изменит знак неравенства и разделим обе части на $\|B\|\cdot\|X\|$ и, окончательно получим:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$$

Величина $\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ называется *числом (мерой) обусловленности* матрицы А. От этой величины зависит степень влияния погрешности коэффициентов системы уравнений на погрешность полученного решения. Если это число невелико, то относительная погрешность решения будет не сильно отличаться от относительной погрешности коэффициентов. Чем больше число обусловленности тем больше будет влияние погрешности коэффициентов на погрешность решения.

Аналогичный анализ можно провести и для случая наличия погрешности задания матрицы коэффициентов системы (ΔA) . И в этом случае, так же, возникает число обусловленности.

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}\le\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A+\Delta A\|}$$

Для рассмотренного числового примера

$$(A)=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 100 & 1001\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (A)^{-1}=\begin{pmatrix}1001 & -10\\ -100 & 1\end{pmatrix}$$

Если взять, например, матричную норму-максимум,

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$, то получим

для матрицы (А) норму 1011, а для матрицы, обратной (А) **-** $(A)^{-1}$ – 1101. Таким образом, число обусловленности оказывается равным более 1000000!

Метод простых итераций, метод Зейделя

Данные методы рассмотрены на примере систем нелинейных уравнений.

Метод минимальных невязок

Для решения линейных систем уравнений можно применять и различные методы поиска экстремумов. Проблема решения системы уравнений заменяется эквивалентной задачей нахождения экстремума функции *n* переменных.

Одним из примеров является *метод минимальных невязок*. Вектор невязок определяется следующим образом.

$$(\Delta)=(B)-(A)(X)$$

Очевидно, что если на место вектора **(X)** подставить вектор решения, то второе слагаемое окажется равным вектору свободных членов и вектор невязок становится нулевым.

Таким образом, минимизация компонентов вектора невязок эквивалентна задаче решения уравнений. Что бы знак невязок не влиял на результат, минимизируют сумму квадратов невязок (скалярное произведение вектора на себя):

$$(\Delta,\Delta)=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2$$

Запишем *итерационную формулу* поиска решения в следующем виде

$$(X^{(k+1)})=(X^{(k)})-\tau_k(\Delta^{(k)})$$

где индекс *k* обозначает номер итерационного шага, тау – константа, которую нам необходимо определить, $\Delta^{(k)}$(дельта) – вектор невязок на этом шаге.

Рассмотрим разность векторов невязок на двух последовательных шагах *k* и *k+1*

$$\left(\Delta^{(k)}\right) = (B) - (A)\left(X^{(k)}\right) \qquad \left(\Delta^{(k+1)}\right) = (B) - (A)\left(X^{(k+1)}\right)$$

$$\left(\Delta^{(k+1)}\right) - \left(\Delta^{(k)}\right) = (B) - (A)\left(X^{(k+1)}\right) - (B) + (A)\left(X^{(k)}\right) = (A)\left(X^{(k)}\right) - (A)\left(X^{(k+1)}\right)$$

после подстановки имеем

$$(A)\left(X^{(k)}\right) - (A)\left(X^{(k+1)}\right) = (A)\left(X^{(k)}\right) - (A)\left(\left(X^{(k)}\right) - \tau_k(\Delta^{(k)})\right) = \tau_k(A)(\Delta^{(k)})$$

$$\left(\Delta^{(k+1)}\right) = \left(\Delta^{(k)}\right) + \tau_k(A)(\Delta^{(k)})$$

Скалярное произведение этого вектора на себя имеет вид

$$\left(\Delta^{(k+1)}, \Delta^{(k+1)}\right) = \left(\Delta^{(k)}, \Delta^{(k)}\right) + 2\tau_k\left((A)(\Delta^{(k)}), \Delta^{(k)}\right) + \tau_k^2\left((A)(\Delta^{(k)}), (A)(\Delta^{(k)})\right)$$

Параметр тау можно выбрать таким образом, чтобы левая часть была минимальной. Условием экстремума является равенство нулю производной по тау правой части выражения

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\Delta^{(k+1)}, \Delta^{(k+1)}\right) = 2\left((A)(\Delta^{(k)}), \Delta^{(k)}\right) + 2\tau_k\left((A)(\Delta^{(k)}), (A)(\Delta^{(k)})\right) = 0$$

откуда,

$$\tau_k = -\frac{\left((A)(\Delta^{(k)}), \Delta^{(k)}\right)}{\left((A)(\Delta^{(k)}), (A)(\Delta^{(k)})\right)}$$

Окончательно, k-ый шаг метода выглядит следующим образом:

1. Задается начальное приближение ($\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}$)
2. Рассчитывается вектор невязок

$$\left(\Delta^{(k)}\right) = (B) - (A)\left(X^{(k)}\right)$$

3. Рассчитывается параметр тау. Для этого перемножается матрица коэффициентов и вектор невязок. Затем вычисляется его скалярный квадрат и произведение на матрицу невязок.
4. Рассчитывается новое приближение к вектору-решению

$$(X^{(k+1)}) = (X^{(k)}) - \tau_k(\Delta^{(k)})$$

5. Проверяется один из критериев сходимости и, при необходимости, происходит переход к пункту 2.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа)

Тема: «Дифференциальные уравнения n-го порядка. Основные понятия. ЛОДУ, методы их решения, свойства»

2.2.1 Задание для работы:

1. Уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнения, не содержащие искомой функции.
2. Уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнения, не содержащие независимой переменной.
3. ЛОДУ, ФСР, определитель Вронского.
4. Построение общего решения однородного линейного уравнения по ФСР.
5. Метод Лагранжа.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнения, не содержащие искомой функции.

Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = (y')^2$.

Решение. Поскольку данное уравнение не содержит в явном виде переменной y, то замена $y' = p(x)$ $y'' = p'(x)$ позволяет преобразовать его в уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $xp' + p = p^2$.

$$x\frac{dp}{dx} = p^2 - p, \quad \frac{dp}{p^2 - p} = \frac{dx}{x}, \int\frac{dp}{p^2 - p} = \int\frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{p - 0,5 - 0,5}{p - 0,5 + 0,5}\right| = \ln x + \ln C_1 = \ln C_1 x;$$

$$p(1 - C_1 x) = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - C_1 x}, \quad y = -\frac{1}{C_1}\ln\left|x - \frac{1}{C_1}\right| + C_2$$

. Учтя, что C_1 – произвольная постоянная, то полученное решение можно упростить: $y = C_1 \ln|x + C_1| + C_2$.

Ответ. $y = C_1 \ln|x + C_1| + C_2$.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнения, не содержащие независимой переменной.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = (y')^2$.

Решение. Так как решаемое уравнение не содержит явно переменной x, будем получать его решение с помощью введения новой переменной $y' = p(y)$, откуда $y'' = p'_y p$, так как в этом случае мы вычисляем производную сложной функции. Заданное уравнение в результате такой замены будет иметь вид: $p'_y p = p^2$. Решение $p = 0$ является особым, и, делая обратную замену в этой ситуации, запишем: $y' = 0 \Rightarrow y = C = const$. Оставшееся уравнение $p'_y = p$ является уравнением в разделяющихся переменных: $p'_y = p \Rightarrow \frac{dp}{dy} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = dy$. Интегрируя последнее равенство, получим $\ln p = y + C_1$. Выразим теперь функцию p : $p = e^{y+C_1} = e^y e^{C_1} = e^y C_1$. Делая вновь обратную замену $y' = p(y)$, получим: $y' = e^y C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^y C_1$. В данном уравнении можно разделить переменные: $\frac{dy}{dx} = e^y C_1 \Rightarrow e^{-y} dy = C_1 dx$. Интегрируя последнее выражение, получим $-e^{-y} = Cx + C_1$. Получившаяся неявная функция также является решением заданного дифференциального уравнения.

Ответ. $y = C = const$; $e^{-y} = C_1 x + C_2$.

2. Решить задачу Коши: $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$, y(0)=1,y'(0)=1.

Решение.

$$2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0;$$

$$y' = p(y); \quad y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$2yp'p + p^2 + p^4 = 0; \quad p = 0; \quad y' = 0; \quad y = C - \textit{первое решение}$$

$$2yp' + p + p^3 = 0;$$

$$2\frac{dp}{p(p^2+1)} = -\frac{dy}{y}; \quad 2\int\left(\frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2+1}\right)dp = -\ln|Cy|; \quad Ap^2 + A + Bp^2 + Cp = 1;$$

$$A = 1, \quad B = -1; \quad C = 0;$$

$$2\int\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)dp = -\ln|Cy|; \quad 2\left(\ln|p| - \frac{1}{2}\ln(p^2+1)\right) = -\ln|Cy|;$$

$$\ln\frac{p^2}{p^2+1} = -\ln Cy; \quad Cy = \frac{p^2+1}{p^2}; \quad Cy = 1 + \frac{1}{p^2};$$

$$p^2 = \frac{1}{Cy-1}; \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{Cy-1}};$$

$$\pm\sqrt{Cy-1}dy = dx; \quad \pm\frac{2}{3C}(Cy-1)^{\frac{3}{2}} = x + C_1;$$

$$\pm 2(Cy-1)^{\frac{3}{2}} = 3Cx + C_2; \quad \textit{общий интеграл}$$

При x=0 y'=1/√c-1,→C=2; C^2=2.

3. а) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x^2$.

Решение. Так как производная в данном случае является функцией, зависящей только от переменной x, то его решение может быть получено в результате последовательного интегрирования:

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = x^3/3 + C_1 \Rightarrow y = x^4/12 + C_1 x + C_2.$$

Ответ. $y = x^4/12 + C_1 x + C_2$.

3. ЛОДУ, ФСР, определитель Вронского.

1. Исследовать на линейную зависимость функции $y_1(x)=x$, $y_2(x)=xe^x$ в их области определения.

Решение

Областью определения данных функций есть вся числовая прямая, т.е. $x\in(-\infty;+\infty)$.

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x+xe^x \end{vmatrix}=x\cdot\left(e^x+xe^x\right)-1\cdot xe^x=x^2e^x.$$

Так как существует хотя бы одно значение $x\in R$, при котором $W\neq0$ (например, при $x=1$ имеем $W=e$), то функции $y1(x)=x$ и $y2(x)=xex$ линейно независимы на R.

2. Исследовать на линейную зависимость функции

$y_1(x)=1$, $y_2(x)=x$, $y_3(x)=x^2$, $y_4(x)=x^3$, $y_5(x)=x^4$ в их области определения.

Решение

Осуществим исследование с помощью определителя Вронского. Все рассуждения проводим в области определения данных функций, т.е. на R.

$$W(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' & y_5' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' & y_5'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' & y_5''' \\ y_1^{(4)} & y_2^{(4)} & y_3^{(4)} & y_4^{(4)} & y_5^{(4)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6x & 12x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot2\cdot6\cdot24=288.$$

Так как $W\neq0$, то данные функции линейно независимы на R.

4. Построение общего решения однородного линейного уравнения по ФСР

Дано ДУ II порядка, линейное, однородное: $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$. Найти его общее решение.

Решение

По теореме об общем решении линейных однородных уравнений II порядка имеем, что

$$y_{общ}(x)=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x),$$

где c_1,c_2 – произвольные постоянные, y_1,y_2 – это ФСЧР.

Покажем, что частными решениями данного ДУ являются функции $y_1(x)=x,\ y_2(x)=\frac{1}{x}$.

Действительно,

$$y_1=x\Rightarrow y_1'=1,\ y_1''=0\overset{ДУ}{\Rightarrow}0+\frac{1}{x}\cdot1-\frac{1}{x^2}\cdot x=0$$

- но;

$$y_2=\frac{1}{x}\Rightarrow y_2'=-\frac{1}{x^3},\ y_2''=\frac{2}{x^3}\overset{ДУ}{\Rightarrow}\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=0$$ - верно.

Проверяем линейную независимость $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = x^2 \neq 0 \Rightarrow$ функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми, то есть образуют ФСР.

Составляем ответ: $y_{общ}(x) = c_1 x + c_2 \cdot \frac{1}{x}$.

5. Метод Лагранжа.

Найти общее решение уравнения $y'' - \frac{y'}{x} = x$.

Решим сначала однородное уравнение $y'' - \frac{y'}{x} = 0$. Заметим, что $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int d\ln|y'| = \int \frac{dx}{x} + \ln C_1$. Откуда $\ln|y'| = \ln|x| + \ln C_1$ или $y' = C_1 x$. Еще раз интегрируем, получим $y(x) = C_1 x^2 + C_2$.

Считаем, что $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$. Составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2' = 0, \\ 2C_1'(x)x + C_2' \cdot 0 = x. \end{cases}$$

Откуда $C_1'(x) = \frac{1}{2},\ C_2'(x) = -\frac{x^2}{2}$ или $C_1(x) = \frac{1}{2}x + C_1,\ C_2'(x) = -\frac{x^3}{6} + C_2$.

Общее решение уравнения

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$$

2.2.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- усвоили основные определения и теоремы теории ЛОДУ;
- освоили построение общего решения по ФСР, алгоритм метода вариации произвольной постоянной;
- выработали навыки применения метода Лагранжа.
- усвоили классификацию уравнений, допускающих понижение порядка, основные определения и теоремы теории ЛОДУ;
- освоили основные алгоритмы, применяемые в решении;
- выработали навыки построения ФСР, вычисления определителя Вронского.

2.2 Практическое занятие №2,3 (4 часа)

Тема: «Приближенные методы решения уравнений и систем уравнений»

2.2.1 Задание для работы:

1.Метод касательных
2. Метод итерации.
3. Метод простых итераций.
4. Метод Ньютона.
5. Метод Зейделя.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Метод касательных (метод Ньютона)

Пусть корень **x** уравнения $f(x)=0(1)$, можно отделить

на отрезке $[a,b]$ причём $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определённые знаки при $a\le x\le b$. Найдя какое-нибудь n-ое приближённое значение корня $x_n=\xi \quad (a\le x_n\le b)$, можно его уточнить методом Ньютона следующим образом.

Предположим

$$\xi = x_n + h_n \qquad \textbf{(2)}$$

где h_n является малой величиной. Отсюда, применяя формулу Тейлора, получим

$$0=f(x_n+h_n)\approx f(x_n)+h_n f'(x_n)$$

Следовательно

$$h_k=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Внеся эту поправку в формулу (2), найдём следующее (по порядку) приближение корня

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,\ldots) \qquad \textbf{(3)}$$

Применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: **в качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала (a,b), которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.**

Замечание 1:

Если

1) Функция $f(x)$ определяется, например при $-\infty<x<+\infty$;
2) $f(a)\cdot f(b)<0$;
3) $f'(x)\ne 0$ при $a\le x\le b$;
4) $f''(x)$ существует всюду и сохраняет постоянный знак,

то при применении метода Ньютона для нахождения корня уравнения $f(x)=0$, лежащего на интервале (a,b) , за начальное приближение x_0 можно принять любое значение $c\in[a,b]$ в частности можно взять $x_0=a$ х или $x_0=b$.

Замечание 2:

Из формулы (3) видно, что чем больше значение производной $f'(x)$ в окрестности данного корня, тем меньше поправка, которую можно прибавить к полученному приближению, чтобы получить $(n=1)-e$ приближение.

Для оценки погрешности n-ого приближения x_n можно воспользоваться формулой

$$|\xi-x_n|\le\frac{|f(xn)|}{m1}$$ где m_1 - наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $[a,b]$.

Если процесс Ньютона сходится, то $x_n-x_{n-1}\to 0$ при $n\to\infty$

$$|\xi-x_n|\le|x_n-x_{n-1}|.$$

Пример: Вычислить методом Ньютона отрицательный корень уравнения $f(x)=x^4-3x^2+75x-10000=0$ с пятью верными знаками.

Решение.

Полагая в левой части уравнения $x=0_1-10_1-100_1...$, получим

$f(0)=-1000$,

$f(-10)=-1050$,

$f(-100)\approx 10^8$.

Следовательно, искомый корень находиться в интервале $-100<\xi<-10$. Сузим найденный интервал т.к. $f(-11)=3453$, то $-11<\xi<-10$. В этом последнем интервале $f'(x)<0$ и $f''(x)>0$ т.к. $f(-11)>0$ и $f''(-11)>0$, то можем принять за начальное приближение $x_0=-11$. Последовательные приближения $x_n\in(n=1,2,...)$

	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n f(x_n)/f$
	-11	3453	-5183	0,7
	-10,3	134,3	-4234	0,03
	-10,27	37,8	-4196	0,009
	-10,216	0,2	----------------	--------------

Останавливаясь на $n>3$, проверяем знак $f(x_n+0{,}001)=f(-10{,}260)$ т.к. $f(-10{,}26)<0$, то $-10{,}261<\xi<-10{,}260$, и любое из этих чисел даёт искомое приближение.

2. Метод итерации

Метод итераций предполагает замену уравнения f(x)=0 равносильным уравнением x=(x). Если корень уравнения отделен на отрезке [a;b], то исходя из начального приближения x_0[a;b], можно получить последовательность приближений к корню

$x_1=(x_0)$, $x_2=(x_1)$, …, где функция (x) называется итерирующей функцией.

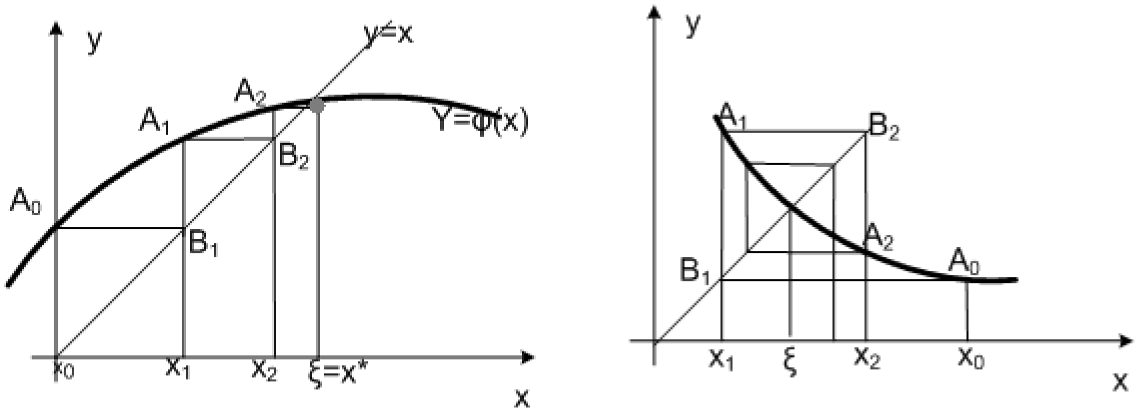
Условие сходимости метода простой итерации определяется следующей теоремой.

Пусть корень x* *уравнения* x=(x) *отделен на отрезке* [a;b] *и построена последовательность приближений по правилу* $x_n=(x_{n-1})$. *Тогда, если все члены последовательности* $x_n=(x_{n-1})$ [a;b] *и существует такое* q (0,*что для всех* x [a; b]*выполняется* |'(x)| = q<1, *то эта последовательность является сходящейся и пределом последовательности является значение корня* x*, *т.е. процесс итерации сходится к корню уравнения независимо от начального приближения.*

Таким образом, если выполняется условие сходимости метода итераций, то последовательность x_0, x_1, x_2, …, x_n,…,полученная с помощью формулы $x_{n+1}=(x_n)$, сходится к точному значению корня:

Использование итерационной формулы $x_{n+1}=(x_n)$ позволяет получить значение корня уравнения f(x)=0 с любой степенью точности.

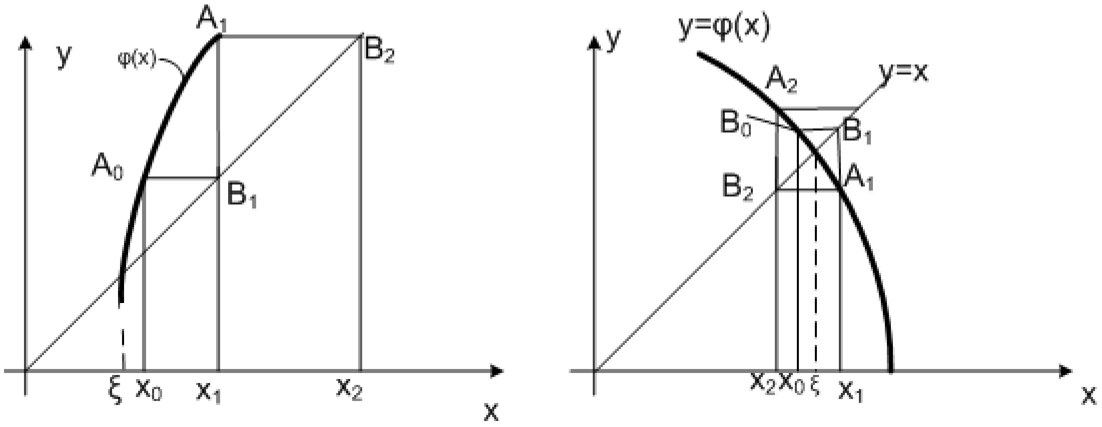
Геометрическая иллюстрация метода итераций. Построим на плоскости X0Y графики функций y=x и y=(x).Корень уравнения x=(x) является абсциссой точки пересечения графиков функции y = (x) и прямой y=x. Возьмем некоторое начальное приближение x_0 [a;b]. На кривой y = (x) ему соответствует точка $A_0=(x_0)$. Чтобы найти очередное приближение, проведем через точку A_0прямую горизонтальную линию до пересечения с прямой y = x (точкаB_1) и опустим перпендикуляр до пересечения с кривой (точкаA_1), то естьx_1=(x_0). Продолжив построение аналогичным образом, имеем ломаную линию A_0, B_1, A_1, B_2, A_2…, для которой общие абсциссы точек представляют собой последовательное приближение x_1, x_2, …, x_n («лестницу») к корню x*. Из рис. 1.2.3-3а видно, что процесс сходится к корню уравнения.



a) b)

Рис. 1.2.3-3

Теперь рассмотрим случаи, когда |’(x)|>1. На рис. 1.2.3-4a показан случай, когда ’(x)>1, а на рис. 1.2.3-4b – когда ’(x) < -1.В обоих случаях процесс итерации расходится, то есть, полученное на очередной итерации значение x все дальше удаляется от истинного значения корня.



a) b)

Рис. 1.2.3-4

Способы улучшения сходимости процесса итераций. Рассмотрим два варианта представления функции (x) при переходе от уравнения f(x) кx=(x).

Пусть функция (x) дифференцируема и монотонна в окрестностях корня и существует число k |‘(x)|, где k $_1$ (т.е. процесс расходится). Заменим уравнение x=(x) эквивалентным ему уравнением x=(x),где (x) = 1/(x)(перейдем к обратной функции). Тогда

а значит q=1/k<1 и процесс будет сходиться.

Представим функцию (x) как (x) = x - f(x), где - коэффициент, не равный

нулю. Для того чтобы процесс сходился, необходимо, чтобы 0< |(x)|=|1 - f(x)|<1. Возьмем = 2/($m_{1+M1)}$, где $m1$и$M1$– минимальное и максимальное значения f ’(x) (m1=min|f’(x)|, M1=max|f’(x)|)для x[a;b],т.е.0 m1 f(x) M11.Тогда и процесс будет сходящимся.

Если f(x) < 0, то в рекуррентной формуле f(x) следует умножить на -1.

3. Метод простых итераций.

Пример. Методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ найдём корень уравнения $4 - e^x - 2x^2 = 0$ при $x > 0$.

Решение. Выше, при отделении корней табличным способом, было установлено, что искомый корень ξ принадлежит отрезку $[0, 1]$. На каждом шаге вычислений значение корня принимаем равным

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

с погрешностью $d_n = b_n - a_n$.

Будем производить вычисления и выбирать последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, используя условие $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

Шаг 1. $[a, b] = [0, 1]$, $x_1 = \dfrac{a+b}{2} = 0{,}5$.

Так как $f(a) = 3$, $f(x_1) = 1{,}8513$ и $f(a) \cdot f(x_1) > 0$, то полагаем

$a_1 = x_1$, $b_1 = b = 1$,

$d_1 = b_1 - a_1 = 0{,}5$.

Шаг 2. $[a_1, b_1] = [0{,}5,\ 1]$, $x_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 0{,}75$.

Так как $f(a_1) = 1{,}8513$, $f(x_2) = 0{,}758$ и $f(a_1) \cdot f(x_2) > 0$, то полагаем

$a_2 = x_2$, $b_2 = b_1 = 1$,

$d_2 = b_2 - a_2 = 0{,}25$.

Шаг 3. $[a_2, b_2] = [0{,}75,\ 1]$, $x_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 0{,}875$.

Так как $f(a_2) = 0{,}758$, $f(x_3) = 0{,}07$ и $f(a_2) \cdot f(x_3) > 0$, то полагаем

$a_3 = x_3$, $b_3 = b_2 = 1$,

$d_3 = b_3 - a_3 = 0{,}125$.

Шаг 4. $[a_3, b_3] = [0{,}875,\ 1]$, $x_4 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = 0{,}9375$.

Так как $f(a_3) = 0{,}07$, $f(x_4) = -0{,}311$ и $f(a_3) \cdot f(x_4) < 0$, то полагаем

$a_4 = a_3$, $b_4 = x_4$,

$d_4 = b_4 - a_4 = 0{,}0625$.

Шаг 5. $[a_4, b_4] = [0{,}875,\ 0{,}9375]$, $x_5 = \dfrac{a_4 + b_4}{2} = 0{,}90625$.

Так как $f(a_4) = 0{,}07$, $f(x_5) = -0{,}118$ и $f(a_4) \cdot f(x_5) < 0$, то полагаем

$a_5 = a_4$, $b_5 = x_5$,

$d_5 = b_5 - a_5 = 0{,}03125$.

Шаг 6. $[a_5, b_5] = [0{,}875,\ 0{,}90625]$, $x_6 = \dfrac{a_5 + b_5}{2} = 0{,}890625.$

Так как $f(a_5) = 0{,}07,\ f(x_6) = -0{,}023$ и $f(a_5)\cdot f(x_6) < 0,$ то полагаем

$a_6 = a_5,\ b_6 = x_6,$

$d_6 = b_6 - a_6 = 0{,}015625.$

Шаг 7. $[a_6, b_6] = [0{,}875,\ 0{,}890625]$, $x_7 = \dfrac{a_6 + b_6}{2} = 0{,}8828125.$

Так как $f(a_6) = 0{,}07,\ f(x_7) = 0{,}024$ и $f(a_6)\cdot f(x_7) > 0,$ то полагаем

$a_7 = x_7,\ b_7 = b_6,$

$d_7 = b_7 - a_7 = 0{,}0078125 < \varepsilon.$

Таким образом, заданная точность достигается на седьмом шаге метода половинного деления, поэтому приближённым значением корня с точностью 10^{-2} будем считать число $x_7 = 0{,}8828125.$

Пример. Методом простых итераций найти корни уравнения $e^x + x = 0$ с точностью 10^{-2}.

Решение. Для отделения корней воспользуемся графическим методом. Для этого преобразуем исходное уравнение к виду $e^x = -x$ и построим графики функций $y = e^x$ и $y = -x$ в одной системе координат (рис. 1).

Абсцисса точки пересечения этих графиков является приближённым значением корня ξ. Из рисунка видно, что единственный корень ξ находится на отрезке $[-1,\ 0]$: $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $f(0) = e^0 > 0$, т. е. на концах отрезка функция $y = f(x)$ меняет знак и производная $f'(x) > 0$ на отрезке $[-1,\ 0].$

Запишем исходное уравнение в эквивалентном виде:

$$x = x + c(e^x + x) = \varphi(x),$$

где

$$\frac{2}{f'(x)} < c < 0 \quad \forall x \in [-1,\ 0].$$

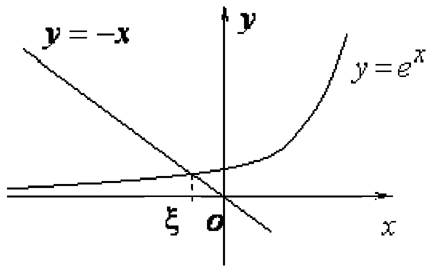


Рис. 1

Выберем для получения корня $c = -0{,}1$. Процесс итераций

$x_{n+1} = x_n - 0{,}1\left(e^{x_n} + x_n\right)$ сходится, так как

$|\varphi'(x)| = \left|0{,}9x_n - 0{,}1e^{x_n}\right| < 1 \quad \forall x \in [-1,\ 0].$

Таким образом, формула метода простых итераций для данного уравнения будет иметь вид:

$$x_{n+1} = -0{,}1\, e^{x_n} + 0{,}9x_n.$$

Пусть $x_0 = -0{,}5,$

тогда $x_1 = -0{,}1e^{-0,5} + 0{,}9\,(-0{,}5) = -0{,}511$ и $|x_1 - x_0| = 0{,}011.$

Далее

$$x_2 = -0{,}1e^{x_1} + 0{,}9\,x_1 = -0{,}1\,e^{\,0,511} + 0{,}9\,(-0{,}511) = -0{,}52.$$

При этом погрешность составит $|x_2 - x_1| = 0{,}009,$ т. е. $|x_2 - x_1| < \varepsilon = 10^{-2}.$

Следовательно, с точностью 10^{-2} в качестве приближённого значения корня данного уравнения можно взять число $x_2 = -0{,}52.$

4. Метод Ньютона.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

С действительными левыми частями. Систему (1) можно представить в матричном виде

$f(x) = 0.$ (2). Здесь приняты следующие обозначения:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ - вектор аргументов, а $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ f_n \end{bmatrix}$ - вектор – функция.

Для решения системы (2) воспользуемся методом последовательных приближений. Предположим, что найдено *P*-ое приближение *Xp* = (*X₁(P), X₂(P) , ..., Xn(P)*) одного из изолированных корней *X* = (*X₁, X₂,X₃, ..., Xn*) векторного уравнения (5.2). Тогда точный корень уравнения (2) можно представить в виде

$x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)},$ (3)

где $\varepsilon^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \varepsilon_3^{(p)}, \dots \varepsilon_n^{(p)})$ - поправка (погрешность) корня на *N* – ом шаге.

Подставив выражение (3) в (2), получим

$f(x) = f(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = 0.$ (4)

Предположим, что функция *F*(*X*) - непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей *X* и *X(P)*. Тогда левую часть уравнения (4) разложим в ряд Тейлора по степеням малого вектора *ε(P)*, ограничиваясь линейными членами:

$f(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = f(x^{(p)}) + f'(x^{(p)})\varepsilon^{(p)} = 0$, (5) Или в развернутом виде:

$$
\begin{cases}
f_1(x_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)} - \varepsilon_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}) = f_1(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}) + \\
+ f'_{1,x}(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})\varepsilon_1^{(p)} + f'_{1,x}(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})\varepsilon_2^{(p)} + \dots + \\
+ f'_{1,x}(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})\varepsilon_n^{(p)} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_n(x_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)} + \varepsilon_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}) = f_n(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}) - \\
+ f'_{n,x}(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})\varepsilon_1^{(p)} + \dots + f'_{n,x}(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})\varepsilon_n^{(p)} = 0.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Из анализа формул (5) и (6) следует, что под производной *F¢*(*X*) следует понимать матрицу Якоби системы функций F_1, F_2, ..., Fn, относительно переменных X_1, X_2, X_3, ..., Xn, то есть:

$$
f'(x) = W(x) = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix}
\tag{7}
$$

Выражение (5.7) в краткой записи можно представить:

$$
f'(x) = W(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \quad (i, j = 1, 2, \dots n).
\tag{8}
$$

Выражение (6) представляет собой линейную систему относительно поправок $\varepsilon_i^{(p)}$ (I = 1, 2, ..., N) с матрицей $W(X)$, поэтому формула (5) может быть записана в следующем виде:

$$
f(x^{(p)}) + W'(x^{(p)})\varepsilon^{(p)} = 0.
\tag{9}
$$

Отсюда, предполагая, что матрица *W*(*X(P)*) - неособенная, получим:

$$
\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}).
\tag{10}
$$

Теперь, подставив выражение (10) в формулу (3), окончательно получим:

$$
x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}) \quad (p = 0, 1, \dots k).
\tag{11}
$$

Таким образом, получили вычислительную формулу (метод Ньютона), где в качестве нулевого приближения *X(0)* можно взять приближенное (грубое) значение искомого корня.

Пример. Рассмотрим применение метода Ньютона на примере системы двух нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) = x_1 + 3\cdot lgx_1 - x_2^2 = 0, \\ f_2(x_1,x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Прежде чем разбирать конкретные шаги по решению системы (12), распишем в общем виде якобиан для системы из двух уравнений

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Здесь *A, B, C, D* – функционалы от переменных x_1, x_2. Нас фактически интересует ***W-1***. Пусть матрица *W*- неособенная, тогда обратная матрица вычисляется

$$W^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}; \qquad \Delta = |AD - BC|.$$

Теперь вернемся к системе (12). Графическое решение этой системы дает две точки пересечения: M_1 (1.4; -1.5) и M_2 (3.4; 2.2). Зададим начальное приближение:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{bmatrix}; \qquad W = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{x_1 \ln 10} & -2x_2 \\ 4x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3832 & -4.4 \\ 6.4 & -3.4 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta = \det W(x^{(0)}) = 23.457; \qquad W^{-1}(x^{(0)}) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -3.4 & 4.4 \\ -6.4 & 1.3832 \end{bmatrix}.$$

Используя формулу (11), получим:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{bmatrix} - \frac{1}{23.457}\begin{bmatrix} -3.4 & 4.4 \\ -6.4 & 1.3832 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1544 \\ -0.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4899 \\ 2.2633 \end{bmatrix}.$$

Аналогично получим:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.4891 \\ 2.2621 \end{bmatrix}; \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 3.4875 \\ 2.2616 \end{bmatrix}; \qquad \Rightarrow f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

5. Метод Зейделя.

Этот метод представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации. Основная его идея заключается в том, что при вычислении (K+1)-го приближения неизвестной XI учитываются уже вычисленные ранее (K+1)-е приближения (X1 X2, ..., Xi-1).

Пусть дана приведенная линейная система:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (I = 1, 2, \ldots N). \ (*)$$

Выберем произвольно начальные приближения корней $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, стараясь, конечно, чтобы они в какой-то мере соответствовали неизвестным x_1, x_2, x_3, ..., x_n.

Предположим, что K-е приближение $x_i^{(k)}$ корней известно, тогда в соответствии с идеей метода будем строить (K+1) – е приближение по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 - \sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 - \alpha_{21} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)}, \\ \dots\dots\dots \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)}. \end{cases} \qquad (**)$$

(K = 0, 1, 2,...).

Обычно процесс Зейделя сходится быстрее, чем метод Якоби. Бывает, что процесс Зейделя сходится, когда простая итерация расходится и, т. п. Правда, бывает и наоборот. Во всяком случае, достаточные условия сходимости для метода Якоби достаточны и для сходимости метода Зейделя. Если выполняется достаточное условие сходимости для системы (3.35) – по строкам, то в методе Зейделя выгодно расположить уравнения (**) так, чтобы первое уравнение системы имело наименьшую сумму модулей коэффициентов:

$$q_1 = \sum_{j=2}^{n} \left|\alpha_{1j}\right|. \quad (***)$$

Пример: Решить методом Зейделя систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 1x_4 = 1, \\ 10x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Для того чтобы обеспечить достаточные условия сходимости итерационного процесса (преобладающие значения диагональных элементов), преобразуем исходную систему и приведем к удобному виду. Чтобы дальнейшие преобразования были понятны, обозначим уравнения исходной системы буквами А, Б, В и Г соответственно:

X_1= -0.2X_2 +0.1X_3 – 0.2X_4 – 0.4; (Г)

X_2 = -0.2X_1 – 0.2X_3 + 0.2; (А – Б)

X_3 = 0.2X_1 – 0.4X_2 + 0.2X_4 – 0.4; (Б)

X_4 = 0.333x_1 - 1.111. (2А – Б + 2В – Г)

Преобразованную систему будем решать методом Зейделя, тогда, с учетом требования (**), окончательно получим:

$$x_4^{(k+1)} = 0.333 x_1^{(k)} - 1.111;$$
$$x_2^{(k+1)} = -0.2 x_1^{(k)} + 0.2 x_3^{(k)} + 0.2;$$
$$x_1^{(k+1)} = -0.2 x_2^{(k+1)} + 0.1 x_3^{(k)} - 0.2 x_4^{(k+1)} - 0.4;$$
$$x_3^{(k+1)} = 0.2 x_1^{(k+1)} - 0.4 x_2^{(k+1)} + 0.2 x_4^{(k+1)} - 0.4.$$

В качестве нулевого приближения (K = 0) возьмем $x_i^{(0)} = \beta_i$. Зададим количество итераций K = 2 и все результаты вычислений сведем в табл. 3.1.

Таблица 1

Итерация, k	Значения неизвестных	Невязки						
X1	X2	X3	X4	ε1	ε2	ε3	ε4	
0	-0.4	0.2	-0.4	-1.111	-2.711	-1.911	0.444	-1.422
1	-0.263	0.36	-0.846	-1.244	-0.309	1.0	0.734	0.446
2	-0.329	0.422	-0.874	-1.199	0.095	-0.000	0.009	0.029

В приведенной таблице кроме значений неизвестных на каждом шаге оценивались Невязки. Вспомним, что корнями уравнения $f(\bar{x}) = 0$ называются такие значения неизвестных, которые превращают его в тождество. Так как мы используем итерационный (приближенный) метод, значения неизвестных вычисляем приближенно (три, четыре знака после десятичной точки), то, подставляя значения неизвестных в Исходную систему, справа получим не ноль, а некоторые значения, называемые Невязкой первого, второго, … уравнений на K –ом шаге.

2.2.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- усвоили основные теоремы и формулы, применяемые при уточнении корней;
- освоили, алгоритм метода касательных, итерации, простой итерации;
- выработали навыки приближенного отыскания корней уравнений;
- усвоили основные теоремы и формулы, применяемые в методе Ньютона, методе Зейделя;
- освоили, алгоритм метода Ньютона, метода Зейделя;
- выработали навыки приближенного решения систем уравнений.