ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.10 Теория принятия решений

Направление подготовки *09.03.01 Информатика и вычислительная техника*

Профиль образовательной программы *Автоматизированные системы обработки информации и управления*

Форма обучения *очная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Задачи линейного программирования»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Классификация задач принятия решений
2. Формы задач линейного программирования.
3. Геометрический метод решения задачи линейного программирования.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Классификация задач принятия решений

Задачи принятия решений отличаются большим многообразием, классифицировать их можно по различным признакам, характеризующим количество и качество доступной информации. В общем случае задачи принятия решений можно представить следующим набором информации [8, 17, 18]: , где T- постановка задачи (например, выбрать лучшую альтернативу или упорядочить весь набор); A - множество допустимых альтернативных вариантов; K- множество критериев выбора; X- множество методов измерения предпочтений (например, использование различных шкал); F- отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок (исходы); G - система предпочтений эксперта; D - решающее правило, отражающее систему предпочтений. Любой из элементов этого набора может служить классификационным признаком принятия решений. Рассмотрим традиционные классификации: 1. 1. По виду отображения F. Отображение множества A и K может иметь детерминированный характер, вероятностный или неопределенный вид, в соответствии с которым задачи принятия решений можно разделить на задачи в условиях риска и задачи в условиях неопределенности. 2. 2. Мощность множества K. Множество критериев выбора может содержать один элемент или несколько. В соответствии с этим задачи принятия решений можно разделить на задачи со скалярным критерием и задачи с векторным критерием (многокритериальное принятие решений). 3. 3. Тип системы G. Предпочтения могут формироваться одним лицом или коллективом, в зависимости от этого задачи принятия решений можно классифицировать на задачи индивидуального принятия решений и задачи коллективного принятия решений.

2. Формы задач линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования* (в дальнейшем ЗЛП) может быть сформулирована как задача нахождения наибольшего значения линейной функции

$$f(x)=\sum_{j=1} c_j x_j = cx \qquad (1.1)$$

на некотором множестве $D \grave{I} R^n$, где x D удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}\ x_1 + a_{1,2}\ x_2 + \ldots + a_{1,n}\ x_n \le b_1,\\
&a_{2,1}\ x_1 + a_{2,2}\ x_2 + \ldots + a_{2,n}\ x_n \le b_2,\\
&\ldots\\
&a_{m,1}\ x_1 + a_{m,2}\ x_2 + \ldots + a_{m,n}\ x_n \le b_m, \qquad (1.2)\\
&a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \ldots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1},\\
&\ldots\\
&a_{m+l,1}x_1 + a_{m+l,2}x_2 + \ldots + a_{m+l,n}x_n = b_{m+l},
\end{aligned}$$

и, возможно, ограничениям

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_j \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$ (1.3)

* Напомним, что частные примеры, сводящиеся к задаче линейного программирования, были описаны во введении.

Не умаляя общности, можно считать, что в системе (1.2) первые m ограничений являются неравенствами, а последующие — l-уравнениями. Очевидно, этого всегда можно добиться за счет простого переупорядочения ограничений. Относительно направления знака неравенства будем предполагать, что левая часть меньше или равна правой. Добиться этого можно, умножив на (-1) обе части тех неравенств, которые имеют противоположный знак. Ограничения (1.3), вообще говоря, могут быть рассмотрены как частный случай ограничений в форме неравенств, но в силу особой структуры их обычно выделяют отдельно и называют *условиями неотрицательности* (или *тривиальными ограничениями)*.

Дополнительно следует заметить, что выбор типа искомого экстремума (максимума или минимума) также носит относительный характер. Так, задача поиска максимума функции

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad (1.4)$$

эквивалентна задаче поиска минимума функции

$$-f(x)=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j\ . \qquad (1.5)$$

Часто условия задачи (1.1)-(1.3), содержащей ограничения только типа неравенств, бывает удобно записывать в сокращенной матричной форме

$f(x) = cx \to \max$, $A_x \leq b$, $x \geq 0$, (1.6)

где c и x — векторы из пространства R^n, b — вектор из пространства R^m, а A — матрица размерности m х n.

Задачу линейного программирования, записанную в форме (1.1)-(1.3), называют **общей задачей линейного программирования** (ОЗЛП).

Если все ограничения в задаче линейного программирования являются уравнениями и на все переменные x_j наложены условия неотрицательности, то она называется задачей линейного программирования в канонической форме, или **канонической задачей линейного программирования** (КЗЛП). В матричной форме КЗЛП можно записать в следующем виде:

$$f(x)=cx\to\max,\ D=\{x\in R^n\mid Ax=b,\ x\geq 0\}\ . \qquad (1.7)$$

Поскольку любая оптимизационная задача однозначно определяется целевой функцией f и областью D, на которой отыскивается оптимум (максимум), будем обозначать эту задачу парой *(D,f)*.

3. Геометрический метод решения задачи линейного программирования.

Геометрический метод решения ЗЛП – простой и наглядный способ решения стандартных ЗЛП с двумя переменными:

$$F=c_1x_1+c_2x_2\to\max(\min) \qquad (1.8)$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{ll} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\geq b_i, & i=1,\ldots,l,\\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\leq b_i, & i=l+1,\ldots,m,\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0, & \end{array}\right\} \qquad (1.9)$$

Рассмотрим следующие геометрические объекты.

Выпуклые множества и их свойства.

Множество точек называется *выпуклым*, если оно вместе с произвольными двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Справедливо утверждение: *пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество*.

Каждое неравенство системы ограничений (19) геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = 1, \dots, m$, или $x_1 = 0$, или $x_2 = 0$.

Поясним сказанное. Рассмотрим, например, неравенство $3x_1 + 4x_2 \le 12$.

Посмотрим прямую *L*: $3x_1 + 4x_2 = 12$ (см. рис.2).

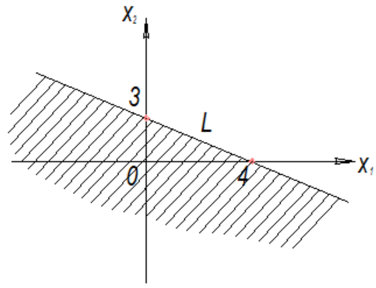


Рис. 2

Для того чтобы определить, какая полуплоскость удовлетворяет заданному неравенству, необходимо выбрать любую точку, не лежащую на *L*, и подставить ее координаты в неравенство. Если неравенство будет выполняться, то данная точка является допустимым решением, и полуплоскость, содержащая точку, удовлетворяет неравенству. Как правило, в качестве «пробной» берут точку $O(0; 0)$.

Подставим $x_1 = x_2 = 0$ в заданное неравенство: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \le 12$. Получим истинное утверждение. Следовательно, заданному неравенству соответствует нижняя полуплоскость (заштрихованная на рис. 2), содержащая точку $O(0; 0)$.

Полуплоскости, описываемые неравенствами (19) – выпуклые множества. Их пересечение – область допустимых решений ЗЛП, которая является также выпуклым множеством.

Это множество называют также *многоугольником решений*. Он может быть точкой, отрезком, лучом, ограниченным или неограниченным многоугольником. (Случай вырождения, когда система ограничений (19) – пустое множество и ЗЛП не имеет решения, исключается).

Ввиду неравенств $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ многоугольник решений всегда находится в первом квадранте координатной плоскости Ox_1x_2.

Для нахождения экстремума целевой функции *F* воспользуемся вектором набла ∇ - градиентом *F*:

$$\nabla = grad\, F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$$

Он показывает направление наискорейшего изменения целевой функции *F*.

Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ называется *линией уровня функции F*. Иными словами на множестве всех точек (x_1, x_2) линии уровня функции *F* она сохраняет постоянное значение α.

1. 2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Двойственная задача ЛП»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Отыскание минимума линейной функции.
2. Определение первоначального допустимого базисного решения.
3. Двойственная задача ЛП.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Отыскание минимума линейной функции

При определении минимума линейной функции Z возможны два пути:

1) отыскать максимум функции F, полагая $F = -Z$ и учитывая, что $Z_{\min} = -F_{\max}$

2) модифицировать симплексный метод: на каждом шаге уменьшать линейную функцию за счет той неосновной переменной, которая входит в выражение линейной функции с отрицательным коэффициентом.

Рассмотрим это на следующем примере.

3.2. Решить симплексным методом задачу

$$Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Введем дополнительные неотрицательные переменные y_5 и y_6 со знаком "минус", так как неравенства имеют вид " $\ge$ ". Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 - y_5 = 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 - y_6 = 3. \end{cases}$$

Если на первом шаге в качестве основных взять дополнительные переменные, то получим недопустимое базисное решение: (0;0; 0; 0; -2; -3). В данном случае в качестве основных удобно взять переменные y_3 и y_4 (это согласуется с правилом выбора основных переменных, сформулированным в разд. 5.2), коэффициенты при y_3 и y_4 положительны, поэтому в качестве первоначального получим допустимое базисное решение.

I шаг. Основные переменные: y_3, y_4

Неосновные переменные: y_1, y_2, y_5, y_6

Выражаем основные переменные через основные:

$$\begin{cases} y_3 = 3 - 3y_1 - y_2 + y_6 \\ y_4 = (2/3) - (1/3)y_1 - (2/3)y_2 + (1/3)y_5 \end{cases}$$

$$Y_1 = \left(0; 0; 3; \frac{2}{3}; 0; 0\right)$$

- первое базисное решение. Оно допустимое. Выражаем линейную функцию через неосновные переменные:

$$Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 = 18y_1 + 16y_2 + 5(3 - 3y_1 - y_2 + y_6) + 21(2/3 - 1/3y_1 - 2/3y_2 + 1/3y_5) =$$
$$= 29 - 4y_1 - 3y_2 + 7y_5 + 5y_6$$

$Z_1 = Z(Y_1) = 29$ - это значение не является минимальным, так как функцию Z можно уменьшить за счет перевода в основные любой из переменных y_1 или y_2, имеющих в выражении для Z отрицательные коэффициенты. Так как y_2 имеет больший по абсолютному значению коэффициент, то начнем с этой переменной.

Для нее наибольшее возможное значение: $y_1 = \min\left\{\frac{3}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\} = 1$, т.е. первое уравнение является разрешающим; y_3 становится неосновной переменной, $\Delta Z_1 = -4*1 = -4$

II шаг. Основные переменные: y_1, y_4

Неосновные переменные: y_2, y_3, y_5, y_6

Получим после преобразований:

$$\begin{cases} y_1 = 1-(1/3)y_2-(1/3)y_3+(1/3)y_6 \\ y_4 = 1/3-(5/9)y_2+(1/9)y_3+(1/3)y_5-(1/9)y_6 \end{cases}$$

$Z = 25-(5/3)y_2+(4/3)y_3+7y_5+(11/3)y_6$ -линейная функция. При базисном решении $Y_2 = (1;0;0;1/3;0;0)$ получаем $Z_2 = Z(Y_2) = 25$. $Z_2 - Z_1 = 25-29 = -4 = \Delta Z_1$. Переменную y_2 переводим в основные, так как в выражение для *Z* она входит с отрицательным коэффициентом. Наибольшее возможное значение $y_2 = \min\{3;3/5\} = 3/5$, второе уравнение разрешающее и y_4 переходит в неосновные переменные; $\Delta Z = 3/5(-5/3) = -1$

III шаг. Основные переменные: y_1, y_2

Неосновные переменные: y_3, y_4, y_5, y_6

Получим после преобразований:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{4}{5}-\frac{2}{5}y_3+\frac{3}{5}y_4-\frac{1}{5}y_5+\frac{2}{5}y_6 \\ y_2 = \frac{3}{5}+\frac{1}{5}y_3-\frac{9}{5}y_4+\frac{3}{5}y_5-\frac{1}{5}y_6 \end{cases}$$

$Z = 24+y_3+3y_4+6y_5+4y_6$ базисное решение $Y_3 = (\frac{4}{5};\frac{3}{5};0;0;0;0)$ оптимальное, так как в выражении для Z нет неосновных переменных с отрицательными коэффициентами. Поэтому $Z_{\min} = Z_3 = Z(Y_3) = 24$ $Z_3 - Z_2 = 24-25 = -1 = \Delta Z_2$. Сформулируем ***критерий оптимальности при отыскании минимума линейной функции****: если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют отрицательные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально.*

2. Определение первоначального допустимого базисного решения

В рассмотренных выше примерах оптимальное решение по-лучено путем последовательного перехода от первоначального допустимого базисного решения к следующему, “лучшему”, и так — до достижения критерия оптимальности. Однако не всегда на первом же шаге получается допустимое базисное ре-шение. В следующем примере рассмотрим один из возможных алгоритмов получения допустимого базисного решения. Дру-гой, так называемый А/-метод, будет изложен в разд. 5.7.

^ 5.3. Решить симплексным методом задачу

P = x1 + 2x2 -> шах

при ограничениях:

x1 - x2 £ -1,

• $x_1 - x_2 > -3$,

$x, < 3$,

$X! > 0, x_2 > 0$.

Решение. Вводим дополнительные неотрицательные пе-ременные хз, Х4, Х5 с соответствующими знаками:

$X | — X 2 + X\} = —1$,

$- x, - x_2 - x_4 = -3$,

$x, + x_5 = 3$.

В соответствии с правилом, сформулированным в разд. 5.2, на

I шаге в качестве основных возьмем дополнительные переменные.

I ш а г . Основные переменные: x3, X4, x5.

Неосновные переменные: X], хг.

Выражаем основные переменные через неосновные: $x_3 = -1 - x_1 + x_2$,

• $x_4 = 3 + x, - x_2$ $x_5 = 3 - X$,

X\ — (0; 0; -1; 3; 3) — первое базисное решение недопустимое (отрицательная компонента выделена), поэтому оно не может быть оптимальным. Линейную функцию на недопустимом решении не рассматриваем! В системе (5.6) выберем то уравнение, которое со-держит отрицательный свободный член, т.е. первое уравнение (если таких уравнений несколько, выбираем любое из них).

Поскольку переменная хз принимает отрицательное значе-ние при первом базисном решении, то ее необходимо увели-чить. Это можно сделать за счет увеличения любой из неос-новных переменных, входящих в первое уравнение с положи-тельным коэффициентом, в данном случае — переменной x2.

I ели перевести эту переменную в основные, то она, став по-ложительной, увеличит переменную Хз. Как ТОЛЬКО Х2 достиг-ает уровня 1, то хз обратится в 0, т.е. исчезнет отрицательная шпонента в решении. Можно считать, что переменная x3 анет неосновной. Однако рост переменной x2 ограничен ,оловиями неотрицательности остальных переменных, которые определяют x2 = тт{1; 3; оо} = 1, т.е. первое уравнение — раз-решающее. При x2 = 1 переменная хз = 0 и переходит в неос-новные переменные.

II шаг. Основные переменные: x2, X4, X5.

Неосновные переменные: X[, X3.

Выражая новые основные переменные через новые неоснов-ные, начиная с разрешающего уравнения, получаем

$X_2 = 1 + X] + x_3$,

• $x_4 = 2 - x_3$,

$x_5 = 3 - X!$

И базисное решение X2 = (0; I; 0; 2; 3), которое является допусти-мым. Поэтому выражаем через неосновные переменные линей-ную функцию X] + x2 = 1 + 2x) + хз и продолжаем решение в соответствии с алгоритмом, изложенным в разд. 5.2 (читателю рекомендуется провести его самостоятельно).►

Однако не всегда первый же шаг избавляет от недопустимого решения.

. ^ 5.4. Решить симплексным методом задачу

Р = -2х, + 3x2 -> шах

при офаничениях:

2^ +3x2 2: 12,

-X! + x2 £ 7,

2^1 + x2 < 10,

x2 2: 2,

X, 2: 0.

Решение. После введения дополнительных неотрица-тельных переменных с соответствующими знаками получим сис-тему уравнений:

$2x, +3x_2 - x_3 = 12$,

-x, + x2 + x4 =7,

2X! + x2 + x5 = 10, x2 - X6 = 2.

На I шаге дополнительные переменные возьмем в качестве основных, так как они удовлетворяют правилу, изложенному в разд. 5.2: входят во все уравнения и только по одному разу.

тельный свободный член (первое или четвертое), например первое, и в нем — любую неосновную переменную с положи-тельным коэффициентом: X] или x2, например X]. Наибольшее возможное значение x, = тт{12/2; »; 10/2;

x3 = -6 + 2x1 + 3x6,

x4 = 5 + X! н[11]

1

x5 = 8 - 2x! - X6.

X2 — (0; 2; —б; 5; 8; 0) — недопустимое базисное решение с одной отрицательной компонентой. Рассмотрим второе уравнение (с отрицательным свободным членом) и переведем в основные одну ИЗ неосновных переменных, X\ ИЛИ X6, входящих в уравнение с положительными коэффициентами.

Получим из уравнений их наибольшие возможные значения: X! = тт{

Замечание 1. Если базисное решение недопустимое и для его улучшения есть возможность выбора переменной, переводимой из неосновных в основные, то рекомендуется выбрать такую неосновную переменную, которая определит в качестве разре-шающего то уравнение системы, где содержится отрицатель-ный свободный член. Только в этом случае новое базисное решение будет содержать, по крайней мере, на одну отрица-тельную компоненту меньше. Если в качестве разрешающего будет получено уравнение, не содержащее отрицательного сво-бодного члена, то в новом базисном решении число отрица-тельных компонент не уменьшится.

Замечание 2. Из задачи 5.4 не следует делать вывод о том, что чем больше отрицательных компонент в первоначальном базисном решении, тем больше потребуется шагов, чтобы по-лучить допустимое базисное решение. Оказывается, что в не-которых случаях невозможно получить допустимое базисное решение даже при одной отрицательной компоненте, а иногда его можно получить за один шаг, хотя все компоненты перво-начального базисного решения отрицательны. Дальнейшие примеры пояснят это замечание.

Рассмотрим задачу о составлении рациона, приведенную Be разд. 1.2 и решенную геометрически в-задаче 4.2.

1.5. Решить симплексным методом задачу

p = 4x, + 6x2 -> тіп

при ограничениях:

3*! + x2 і 9,

X, + 2x2 і в,

*1 + 6x2 > 12,

X,> 0, x2 IV

p

3. Двойственная задача ЛП.

Понятие двойственной задачи ЛП. Пусть задана КЗЛП (1.7). Если целевая функция $f(x) = cx$ достигает максимального значения на множестве D, то обоснованным представляется вопрос о том, каким образом можно построить верхнюю оценку для нее. Очевидно, что если через u обозначить некоторый m-мерный вектор, то

$$cx = cx + u(-Ax + b) = (c - uA)x + bu\,.$$

Предположим, что u можно выбрать таким образом, чтобы $uA \geq c$. Тогда при любых $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$cx \leq bu\,. \qquad (1.47)$$

Стремясь получить наилучшую оценку (1.47), мы приходим к формулировке некоторой новой кстремальной задачи, которая в некотором смысле логически сопряжена с задачей (1.7) называется*двойственной*. Оговоримся, что приведенные рассуждения не носят строгого характера и предназначены только для того, чтобы подготовить читателя к приводимому ниже формальному определению двойственной задачи линейного программирования.

F *Если задана каноническая задача ЛП*

$$f(x)=cx \to \max,\ D=\{x \in R^n \mid Ax=b,\ x \geq 0\}, \qquad (1.48)$$

то задача ЛП

$$f^*(u)=ub \to \min,\ D^*=\{u \in R^m \mid uA \geq c\} \qquad (1.49)$$

называется **двойственной** *по отношению к ней. Соответственно, задача* (*D, f*) *по отношению к*

(*D*,f**) *называется* **прямой** *(или исходной).*

1. 3 Лекция №3 (2 часа).

Тема: «Решение задач теории игр в чистых и смешанных стратегиях»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия и задачи теории игр.
2. Антагонистические матричные игры.
3. Решение игры в смешанных стратегиях.
4. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия и задачи теории игр

Теория игр занимается изучением т.н. конфликтных ситуаций, где сталкиваются интересы индивидов, партий, государств и т. п.

Как утверждал Г.Лейбниц, "...и игры заслуживают изучения; и если какой-нибудь проницательный математик посвятит себя их изучению, то получит много важных результатов, ибо нигде человек не показывает столько изобретательности, как в игре ".

Нет математической теории, которая могла бы дать алгоритм любой ре-альной игры, но существуют ситуации, подобные игровым и допускающие математический анализ.

Остановимся на классификации игр.

Интересы участников игры (игроков) могут оказаться несовпадающими и даже противоположными. В последнем случае игра называется*антагонистической*.

В игре могут участвовать два или более игроков. Случай игры с одним участником (пасьянс, управление физическим объектом и т.д.) в сущности является игрой двух лиц, где вторым участником выступает природа (судьба, рок, провидение).

Игроки могут в игре выступать каждый за себя или объединяться в группы. В последнем случае игра называется *коалиционной*.

Игры, в которых игроки осведомлены о состоянии своем и партнеров, а также о прошлом поведении участников игры, относятся к категории игр с*полной информацией* (типичные примеры - шахматы, "крестики-нолики" и т.п.). Большинство же игр протекает в условиях неполной информации, где сведения о состоянии партнеров исчерпываются лишь вероятностными характеристиками (домино, карточные игры, игры против "природы").

Антагонистическую игру, где выигрыш одного коллектива равен проигрышу другого, называют *игрой с нулевой суммой*.

Система правил, однозначно определяющая выбор хода игрока в зави-симости от сложившейся ситуации, называется *стратегией*.

Каждая фиксированная стратегия игрока, где любой ситуации сопоставлен конкретный выбор, называется *чистой*. В реальности чаще используются т.н. *смешанные* стратегии, где чистые стратегии смешиваются с некоторыми частотами.

Простейшими являются игры 2 лиц с нулевой суммой.

Пусть в такой игре игрок 1 имеет m выборов и игрок 2 - n выборов. Если игрок 1 делает свой i-й выбор, а игрок 2 - свой j-й выбор, то выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) равен Rij. Такая игра называется *матричной* и матрица $R = [\ R_{ij}\ /\ i=1..m\ ,\ j=1..n\ ]$ называется *матрицей выигрышей* (пла-тежной матрицей).

При ведении игры игрок должен ориентироваться на оптимальную политику партнера и наказывать его за отступления от таковой.

Проведем рассуждения за игрока 1. Если Я воспользуюсь i-м выбором, мой противник для минимизации моего выигрыша сделает тот из своих выборов, который даст min R_{ij}. Соответственно, Я должен использовать тот выбор, который гарантирует мне выигрыш, не меньший

$$V_1 = \max_{i=1..m} \min_{j=1..n} R_{ij}.$$

Противник, рассуждая аналогично, приходит к выводу о гарантированном проигрыше, не превышающем

$$V_2 = \max_{i=1..m} \min_{j=1..n} R_{ij}.$$

Если в матрице выигрышей существует элемент $R_{kl} = V_1 = V_2$, то говорят о наличии оптимальной политики "в пространстве чистых стратегий" и оптимальными выборами для игроков соответственно являются выборы k и l. Пару (k, l) называют *седловой* точкой.

Пример 1. Пусть игра определяется матрицей

$$R = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & 10 \end{Vmatrix} \quad , \quad V_1 = \max \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{Vmatrix} = 6 \quad , V_2 = \min [\ 6, 6, 8, 10\ ] = 6.$$

Седловые точки - (4, 1) и (4, 2). Цена игры = 6; оптимальный выбор для игрока 1 - четвертый, для игрока 2 равнозначны первый и второй (*под ценой игры понимают гарантированный выигрыш-проигрыш при оптимальной политике обоих игроков*).

Пример 2. Пусть игра определяется матрицей

$$R = \begin{Vmatrix} 5 & 4 & 3 & 7 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{Vmatrix} \quad , \quad V_1 = \max \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = 3 \ , \quad V_2 = \min [\ 7, 7\ 4, 7, 6\ ] = 4.$$

Здесь равенство $V_1 = V_2$ не выполняется; оптимальной чистой стратегии для игроков нет.

При анализе игр часто прибегают к попыткам обнаружить доминирование между строками и столбцами. Так в примере 1 элементы четвертой строки больше элементов других строк: использование выбора 4 выгоднее других выборов при любой политике противника. Противник видит, что в такой ситуации использовать выборы 3 и 4 неразумно.

Использование доминирования т.о. позволяет уменьшить размеры изучаемой матрицы исключением "невыгодных" строк и столбцов.

При отсутствии седловой точки среди чистых стратегий приходится искать таковую среди смешанных.

Если игрок 1 прибегает к своему выбору i с вероятностью P_i, а игрок 2 - к своему j-му выбору с вероятностью Q_j, то ожидаемый выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) равен $\sum_{i=1}^{m} R_{ij}\, P_i\, Q_j = \mathrm{P^T R\, Q}.$

Основная теорема теории игр (теорема Джона фон Неймана) утверждает, что любая матричная игра с нулевой суммой всегда имеет седловую точку, т.е. существуют векторы P и Q такие, что

$$\max_P \min_Q P^T RQ = \min_Q \max_P P^T RQ = V,$$

(V - цена игры).

2. Антагонистические матричные игры.

Самым простым случаем, подробно разработанным в теории игр, является конечная парная игра с нулевой суммой (антагонистическая игра двух лиц или двух коалиций). Рассмотрим такую игру G, в которой участвуют два игрока А и В, имеющие противоположные интересы: выигрыш одного равен проигрышу другого. Так как выигрыш игрока А равен выигрышу игрока В с обратным знаком, мы можем интересоваться только выигрышем а игрока А. Естественно, А хочет максимизировать, а В — минимизировать а. Для простоты отождествим себя мысленно с одним из игроков (пусть это будет А) и будем его на- вывать «мы», а игрока В — «противник» (разумеется, никаких реальных преимуществ для А из этого не вытекает). Пусть у нас имеется т возможных стратегий A_1, A_2, ..., $A_т$, а у противника — п возможных стратегий B_1, B_2, ..., $B_п$ (такая игра называется игрой т X п). Обозначим a_{it} наш выигрыш в случае, если мы пользуемся стратегией A_i, а противник — стратегией B_i. Предположим, что для каждой пары стратегий A_i, B_i выигрыш (или средний выигрыш) a_{ij} нам известен. Тогда в принципе можно составить прямоугольную, таблицу (матрицу), в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие выигрыши (см. таблицу 26.1).

Если такая таблица составлена, то говорят, что игра G приведена к матричной форме (само по себе приведение игры к такой форме уже может составить трудную задачу, а иногда и практически невыполнимую, из-за необозримого множества стратегий). Заметим, что если игра приведена к матричной форме, то многоходовая игра фактически сведена к одноходовой — от игрока требуется сделать только один ход: выбрать стратегию. Будем кратко обозначать матрицу игры (a_{iJ}).

Таблица 26.1

$_i\ B_i$	*1*	*2*	. .	*n*
1	11	12	.	*1n*
2	*21*		. .	*2n*
3	m1	*m*	.	*mn*

Рассмотрим пример игры G (4X5) в матричной форме. В нашем распоряжении (на выбор) четыре стратегии, у противника — пять стратегий. Матрица игры дана в таблице 26.2

Давайте, поразмышляем о том, какой стратегией нам (игроку А) воспользоваться? В матрице 26.2 есть соблазнительный выигрыш «10»; нас так и тянет выбрать стратегию A_3, при которой этот «лакомый кусок» нам достанется. Но постойте: противник тоже не дурак! Если мы выберем стратегию A_3, он, назло нам, выберет стратегию B_3, и мы получим какой-то жалкий выигрыш «1». Нет, выбирать стратегию A_3 нельзя! Как же быть? Очевидно, исходя из принципа осторожности (а он — основной принцип теории игр), надо выбрать ту стратегию, при которой *наш минимальный выигрыш максимален.* Это — так называемый «принцип мини- макса»: *поступай так, чтобы при наихудшем для тебя поведении противника получить максимальный выигрыш.*

3. Решение игры в смешанных стратегиях.

Если матричная игра содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса. Если же платежная матрица не имеет седловых точек, то применение минимаксных стратегий каждым из игроков показывает, что игрок I обеспечит себе выигрыш не меньше a, а игрок II обеспечит себе проигрыш не больше b. Так как a < b, то игрок I стремится увеличить выигрыш, а игрок II уменьшить проигрыш. Если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, то игроки будут многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью. Такая стратегия в теории игр называется смешанной стратегией. Смешанная стратегия игрока — это полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями. Для применения смешанных стратегий должны быть следующие условия:

1) в игре отсутствует седловая точка;

2) игроками используется случайная смесь чистых стратегий с соответствующими вероятностями;

3) игра многократно повторяется в одних и тех же условиях;

4) при каждом из ходов один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком;

5) допускается осреднение результатов игр.

<u>*Основная теорема теории игр Дж. фон Неймана:*</u> *Любая парная конечная игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, возможно среди смешанных стратегий.*

Отсюда следует, что каждая конечная игра имеет цену, которую обозначим через g, средний выигрыш, приходящийся на одну партию, удовлетворяющий условию a £ g £ b. Каждый игрок при многократном повторении игры, придерживаясь смешанных стратегий, получает более выгодный для себя результат. Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает следующим свойством: каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Чистые стратегии игроков в их оптимальных смешанных стратегиях называются <u>Активными</u>.

<u>*Теорема об активных стратегиях.*</u> *Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры G, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.*

Смешанные стратегии игроков S1 и S2 обозначим соответственно A1 , A2 , … Am и B1 , B2 , B3 … Bn, а вероятности их использования через pA = (p1, p2, ..., pm) и qB = (q1, q2, ..., qn), где pi ³ 0, qj ³ 0, при этом $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_i = 1$.

Тогда смешанная стратегия игрока I — SI, состоящая из стратегий A1, A2, ..., Am, имеет вид:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_m \end{pmatrix}.$$

Соответственно для игрока II:

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1, B_2, \ldots, B_m \\ q_1, q_2, \ldots, q_m \end{pmatrix}.$$

Зная матрицу A для игрока I можно определить средний выигрыш (математическое ожидание) $M(A, \bar{p}, \bar{q})$:

$$M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$,

Игрок I, применяя свои смешанные стратегии, стремится увеличить свой средний выигрыш, достигая

$$\beta = \min_{q} \max_{p} M(A, \bar{p}, \bar{q})$$.

Игрок II добивается:

$$\alpha = \max_{p} \min_{q} M(A, \bar{p}, \bar{q})$$.

Обозначим через p_A^* и q_B^* векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков I и II, при которых выполняется равенство:

$$\min_{q} \max_{p} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \max_{p} \min_{q} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = M(A, p_A^*, q_B^*)$$.

При этом выполняется условие:

$$M(A, \bar{p}, q_A^*) \le M(A, p_A^*, q_B^*) \le M(A, p_A^*, \bar{q})$$

Решить игру — это означает найти цену игры и оптимальные стратегии.

Рассмотрим наиболее простой случай конечной игры 2 ´ 2 без седловой точки с матрицами:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1, A_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} B_1, B_2 \\ q_1, q_2 \end{pmatrix}$$,

С платежной матрицей

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix}$$.

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $S_1^* = (p_1^*, p_2^*)$ $(p_1 + p_2 = 1)$, $S_2^* = (q_1^*, q_2^*)$ $(q_1 + q_2 = 1)$ и цену игры g.

Каковы бы ни были действия противника, выигрыш будет равен цене игры g. Это означает, что если игрок I придерживается своей оптимальной стратегии $S_1^*(p_1, p_2)$, то игроку II нет смысла отступать от своей оптимальной стратегии $S_2^*(q_1, q_2)$.

В игре 2 ´ 2, не имеющей седловой точки, обе стратегии являются активными.

Для игрока I имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Для игрока II аналогично:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = \gamma \\ a_{12}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma \\ q_1 + aq_2 = 1 \end{cases}$$

Если g ¹ 0 и игроки имеют только смешанные оптимальные стратегии, то определитель матрицы не равен нулю, следовательно, эти системы имеют единственное решение.

Решая систему уравнений (10) и (11) находим оптимальные ешения $S_1^* = (p_1^*, p_2^*)$, $S_2^* = (q_1^*, q_2^*)$ и g:

$$\left.\begin{aligned}
p_1^* &= \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}\\
p_2^* &= \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}\\
q_1^* &= \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}\\
q_2^* &= \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\gamma = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

Пример: Дана платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Найти решение.

Решение. Так как a = 3, b = 5, то a ¹ b, то и матрица игра не имеет седловой точки. Следовательно, решение ищем в смешанных стратегиях. Запишем системы уравнений:

Для игрока I:

$$\begin{cases} 6p_1 - 2p_2 = \gamma \\ 3p_1 - 5p_2 = \gamma \\ p_1 - p_2 = 1 \end{cases}$$

Для игрока II:

$$\begin{cases} 6q_1 - 3q_2 = \gamma \\ -2q_1 - 5q_2 = \gamma \\ q_1 - q_2 = 1 \end{cases}$$

Решив эти системы находим:

$$p_1^* = \frac{7}{10},\quad p_2^* = \frac{3}{10},\quad q_1^* = \frac{1}{5},\quad q_2^* = \frac{4}{5},\quad \gamma = \frac{18}{5}.$$

Следовательно оптимальные стратегии игроков имеют вид:

$$S_1^* = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right),\quad S_2^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

4. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицейP=(a_{ij}),i= 1, 2, ...,m;j= 1,2, ...,n. Игрок А обладает стратегиями A_1 ,A_2 ,…, A_m, игрок В — стратегиями B_1 , B_2, ..., B_n. Необходимо определить оптимальные стратегииS^*_A= (p^*_1 ,p^*_2,..., p^*_m) иS^*_B= (q^*_1 ,q^*_2,...,q^*_n) гдеp_i,q_j— вероятности применения соответствующих чистых стратегийA_iи B_j, $\sum p_i$= 1,$p_i \geq 0$, (i= 1, 2,..., т); $\sum q_j$= 1,$q_j \geq 0$, (j= 1,2, ...,n).

Оптимальная стратегия S^*_Aудовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку А средний выигрыш, не меньший, чем цена игрыv, при любой стратегии игрока В и выигрыш, равный цене игрыv, при оптимальной стратегии игрока В. Без ограничения общности полагаемv> 0: этого можно добиться, сделав все элементы$a_{ij} \geq 0$. Если игрок А применяет смешанную стратегиюS^*_A(p^*_1 ,p^*_2,..., p^*_m) против любой чистой стратегииB_jигрока В, то он получает средний выигрыш, или математическое ожидание выигрыша a_j=$a_{1j}p_1$+$a_{2j}p_2$+. ..+$a_{mj}p_m$,j=I, 2, ...,n(т.е. элементыj-го столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий A_1 ,A_2 ,…, A_mи результаты складываются).

Для оптимальной стратегии S^*_Aвсе средние выигрыши не меньше цены игрыv, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge v \end{cases}$$

Каждое из неравенств можно разделить на число v> 0. Введем новые переменные:

X1 =p1/v , x2=p2/V,...,xm=pm/V.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1 \end{cases}$$

Цель игрока А — максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v.

Разделив на v≠ 0 равенство $p_1+ p_2+\ldots+p_m= 1$, получаем, что переменные $x_i(i=1,2,\ldots,m)$ удовлетворяют условию:$x_1+x_2+ +.. .+x_m= 1/v$. Максимизация цены игрыvэквивалентна минимизации величины 1/v, поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения$x_i\ge 0$ (i=1,2,...,m), так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям и при этом линейная функция

$Z=x_1 +x_2+\ldots+x_m$

обращалась в минимум. Это задача линейного программирования.

Решая задачу, получаем оптимальное решение $p^*_1 ,p^*_2,\ldots, p^*_m$и оптимальную стратегию$S^*_A$.

Для определения оптимальной стратегии $S^*_B= (q^*_1 ,q^*_2,\ldots,q^*_n)$ следует учесть, что игрок В стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найтиmax1/v. Переменные$q_1 ,q_2,\ldots,q_n$удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le v \end{cases}$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока В не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок А.

Если обозначить

$y_j=q_j/v, j= 1,2, \ldots,n$

то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1 \end{cases}$$

Переменные y_j, (j= 1,2, ...,n) удовлетворяют условию $y_1+y_2+\ldots+y_n=l/v$.

Игра свелась к следующей задаче.

Определить значения переменных $y_j \geq 0$, ($j= 1,2, ...,n$) , которые удовлетворяют системе неравенств и максимизируют линейную функцию

$Z' = y_1 + y_2 + … + y_n$,

Решение задачи линейного программирования определяет оптимальную стратегию $S^*_B= (q^*_1 ,q^*_2,...,q^*_n)$. При этом цена игры

$\nu= 1/\max Z' =1/\min Z$.

Приведем примеры экономических задач, которые описываются игровыми моделями mxnи могут быть решены методами линейного программирования.

1. 4 Лекция №4 (2 часа).

Тема: «Решение задачи теории игр в условиях риска и неопределённости»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Понятие о статистических играх.
2. Принятие решений в условиях риска.
3. Принятие решений в условиях неопределённости.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие о статистических играх.

Принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется *статистической игрой* или «*игрой с природой*». Игрок в этой игре называется *лицом, принимающим решение (ЛПР*). [3,6,9,10].

В общем виде платёжная матрица статистической игры приведена на рисунке 3.1.

	S1	S2	…	Sn
A1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
…	...	...	...	...
Am	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Рис. 3.1. Общий вид платёжной матрицы статистической игры

В данной игре строки матрицы (A_i) - стратегии ЛПР, а столбцы матрицы (S_j) – состояния окружающей среды.

Критерии принятия решения

ЛПР определяет наиболее выгодную стратегию в зависимости от целевой установки, которую он реализует в процессе решения задачи. Результат решения задачи ЛПР определяет по одному из *критериев принятия решения*. Для того, чтобы прийти к однозначному и по возможности наиболее выгодному решению, необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом каждой стратегии ЛПР (A_i) приписывается некоторый результат W_i, характеризующий все последствия этого решения. Из массива результатов принятия решений ЛПР выбирает элемент W, который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

2. Принятие решений в условиях риска

Последствия решений менеджера, экономиста, инженера проявятся в будущем. А будущее неизвестно. Мы обречены принимать решения в условиях неопределенности. Мы всегда рискуем, поскольку нельзя исключить возможность нежелательных событий. Но можно сократить вероятность их появления. Для этого необходимо спрогнозировать дальнейшее развитие событий, в частности, последствия принимаемых решений.

Методы социально-экономического прогнозирования. Кратко рассмотрим различные методы прогнозирования (предсказания, экстраполяции), используемые в социально-экономической области. По вопросам прогнозирования имеется большое число публикаций (см., например, книги [18-26]). Как часть теории принятия решений существует научная дисциплина "Математические методы прогнозирования". Ее целью является разработка, изучение и применение современных математических методов эконометрического (в частности, статистического, экспертного, комбинированного) прогнозирования социально-экономических явлений и процессов, причем методы должны быть проработаны до уровня, позволяющего их использовать в практической деятельности экономиста, инженера и менеджера. К основным задачам этой дисциплины относятся:

- разработка, изучение и применение современных математико-статистических методов прогнозирования (в том числе непараметрических методов, включая методы наименьших квадратов с оцениванием точности прогноза, адаптивных методов, методов авторегрессии и др.),
- развитие теории и практики экспертных методов прогнозирования, в том числе методов анализа экспертных оценок на основе статистики нечисловых данных,
-методов прогнозирования в условиях риска,
- комбинированных методов прогнозирования с использованием совместно экономико-математических и эконометрических (как статистических, так и экспертных) моделей.

Теоретической основой методов прогнозирования являются математические дисциплины (прежде всего, теория вероятностей и математическая статистика, дискретная математика, исследование операций), а также экономическая теория, экономическая статистика, менеджмент, социология, политология и другие социально-экономические науки.

Как общепринято со времен основоположника научного менеджмента Анри Файоля, прогнозирование и планирование - основа работы менеджера. Сущность эконометрического прогнозирования состоит в описании и анализе будущего развития, в отличие от планирования, при котором директивным образом задается будущее движение. Например, вывод прогнозиста может состоять в том, что за час мы сможем отойти пешком от точки А не более чем на 5 км, а указание плановика - в том, что через час необходимо быть в точке Б. Ясно, что если расстояние между А и Б не более 5 км, то план реален (осуществим), а если более 10 км - не может быть осуществлен в заданных условиях. Необходимо либо отказаться от нереального плана, либо перейти на иные условия его реализации, например, двигаться не пешком, а на автомашине. Рассмотренный пример демонстрирует возможности и ограниченность методов прогнозирования. А именно, эти методы могут быть успешно применены при условии некоторой стабильности развития ситуации и отказывают при резких изменениях.

Часто оказывается полезным промежуточный путь между прогнозированием и планированием – так называемое нормативное прогнозирование. При его применении задается цель, а затем разрабатывается система мероприятий, обеспечивающая достижение этой цели, и изучаются характеристики этой системы (объем необходимых ресурсов, в том числе материальных, кадровых, финансовых, временных, возникающие риски и т.п.).

Один из вариантов применения методов прогнозирования - выявление необходимости изменений путем "приведения к абсурду". Например, если население Земли каждые 50 лет будет увеличиваться вдвое, то нетрудно подсчитать, через сколько лет на каждый квадратный метр поверхности Земли будет приходиться по 10000 человек. Из такого прогноза следует, что закономерности роста численности населения должны измениться.

Учет нежелательных тенденций, выявленных при прогнозировании, позволяет принять необходимые меры для их предупреждения, а тем самым помешать осуществлению прогноза.

Есть и самоосуществляющиеся прогнозы. Например, если в вечерней телевизионной передаче будет сделан прогноз о скором банкротстве определенного банка, то наутро многие вкладчики этого банка пожелают получить свои деньги, у входа в банк соберется толпа, а банковские операции придется остановить. Такую ситуацию журналисты описывают словами: "Банк лопнул". Обычно для этого достаточно, чтобы в один "прекрасный" (для банка) момент вкладчики пожелали изъять заметную долю (скажем, 30%) денежных средств с депозитных счетов.

Прогнозирование - частный вид моделирования как основы познания и управления.

Роль прогнозирования в управлении страной, отраслью, регионом, предприятием очевидна. Необходимы учет СТЭЭП-факторов (т.е. социальных, технологических, экономических, экологических, политических), факторов конкурентного окружения и научно-технического прогресса. А также прогнозирование расходов и доходов предприятий и общества в целом (в соответствии с двумя вариантами жизненным циклом продукции - во времени и по 11-и стадиям международного стандарта ИСО 9004). Проблемы внедрения и практического использования математических методов эконометрического прогнозирования при принятии решений связаны прежде всего с отсутствием в нашей стране достаточно обширного опыта подобных исследований, поскольку в течение десятилетий планированию отдавался приоритет перед прогнозированием.

Статистические методы прогнозирования. Простейшие методы восстановления используемых для прогнозирования зависимостей исходят из заданного временного ряда, т.е. функции, определенной в конечном числе точек на оси времени. Временной ряд при этом часто рассматривается в рамках вероятностной модели, вводятся иные факторы (независимые переменные), помимо времени, например, объем денежной массы (агрегат М2). Временной ряд может быть многомерным, т.е. число откликов (зависимых переменных) может быть больше одного. Основные решаемые задачи - интерполяция и экстраполяция. Они рассматриваются давно. Метод наименьших квадратов в простейшем случае (линейная функция от одного фактора) был разработан К.Гауссом более двух столетий назад, в 1794-1795 гг.

Опыт прогнозирования индекса инфляции и стоимости потребительской корзины накоплен в Институте высоких статистических технологий и эконометрики. При этом оказалось полезным преобразование (логарифмирование) переменной - текущего индекса инфляции. Характерно, что при стабильности условий точность прогнозирования оказывалась достаточно удовлетворительной - 10-15 %. Однако спрогнозированное на осень 1996 г. значительное повышение уровня цен не осуществилось. Дело в том, что руководство страны перешло к стратегии сдерживания роста потребительских цен путем массовой невыплаты зарплаты и пенсий. Условия изменились - и статистический прогноз оказался непригодным. Влияние решений руководства Москвы проявилось также в том, что в ноябре 1995 г. (перед парламентскими выборами) цены в Москве упали в среднем на 9,5%, хотя обычно для ноября характерен более быстрый рост цен, чем в другие месяцы года, кроме декабря и января.

Наиболее часто используется метод наименьших квадратов при нескольких факторах (2-5). Метод наименьших модулей и другие методы экстраполяции применяются реже, хотя их статистические свойства зачастую лучше. Большую роль играет традиция и общий невысокий уровень знаний об эконометрических методах прогнозирования.

Оценивание точности прогноза - необходимая часть процедуры квалифицированного прогнозирования. При этом обычно используют вероятностно-статистические модели восстановления зависимости, например, строят наилучший прогноз по методу максимального правдоподобия (при использовании параметрических моделей). Разработаны параметрические (обычно на основе модели нормальных ошибок) и непараметрические оценки точности прогноза и доверительные границы для него (на основе Центральной Предельной Теоремы теории вероятностей). Так, в Институте высоких статистических технологий и эконометрики предложены и изучены методы доверительного оценивания точки наложения (встречи) двух временных рядов и их применения для оценки динамики технического уровня собственной продукции и продукции конкурентов, представленной на мировом рынке.

Применяются также эвристические приемы, не основанные на какой-либо теории: метод скользящих средних, метод экспоненциального сглаживания.

Адаптивные методы прогнозирования позволяют оперативно корректировать прогнозы при появлении новых точек. Речь идет об адаптивных методах оценивания параметров моделей и об адаптивных методах непараметрического оценивания. Отметим, что с развитием вычислительных мощностей компьютеров проблема сокращения объемов вычисления теряет свое значение.

Многомерная регрессия, в том числе с использованием непараметрических оценок плотности распределения - основной на настоящий момент эконометрический аппарат прогнозирования. Подчеркнем, что нереалистическое предположение о нормальности погрешностей измерений и отклонений от линии (поверхности) регрессии использовать не обязательно. Однако для отказа от предположения нормальности необходимо опереться на иной математический аппарат, основанный на многомерной центральной предельной теореме теории вероятностей и эконометрической технологии линеаризации. Он позволяет проводить точечное и интервальное оценивание параметров, проверять значимость их отличия от 0 в непараметрической постановке, строить доверительные границы для прогноза.

Весьма важна проблема проверки адекватности модели, а также проблема отбора факторов. Дело в том, что априорный список факторов, оказывающих влияние на отклик, обычно весьма обширен, желательно его сократить, и крупное направление современных эконометрических исследований посвящено методам отбора "информативного множества признаков". Однако эта проблема пока еще окончательно не решена. Проявляются необычные эффекты. Так, установлено [1], что обычно используемые статистические оценки степени полинома при росте объемы выборки имеют геометрическое распределение.

Перспективны непараметрические методы оценивания плотности вероятности и их применения для восстановления регрессионной зависимости произвольного вида. Наиболее общие постановки в этой области получены с помощью подходов статистики нечисловых данных [1].

К современным статистическим методам прогнозирования относятся также модели авторегрессии, модель Бокса-Дженкинса, системы эконометрических уравнений, основанные как на параметрических, так и на непараметрических подходах.

Для установления возможности применения асимптотических результатов при конечных (т.н. "малых") объемах выборок полезны компьютерные статистические технологии. Они позволяют также строить различные имитационные модели. Отметим полезность методов размножения данных (бутстреп-методов). Системы прогнозирования с интенсивным использованием компьютеров объединяют различные методы прогнозирования в рамках единого автоматизированного рабочего места прогнозиста.

Прогнозирование на основе данных, имеющих нечисловую природу, в частности, прогнозирование качественных признаков основано на результатах статистики нечисловых данных. Весьма перспективными для прогнозирования представляются регрессионный анализ на основе интервальных данных, включающий, в частности, определение и расчет нотны и рационального объема выборки (см. часть 2 выше), а также регрессионный анализ нечетких данных, разработанный в монографии [7]. Общая постановка регрессионного анализа в рамках статистики нечисловых данных и ее частные случаи - дисперсионный анализ и дискриминантный анализ (распознавание образов с учителем), давая единый подход к формально различным методам, полезна при программной реализации современных статистических методов прогнозирования.

3. Принятие решений в условиях неопределённости.

Особенностями оценки сложных систем в условиях неопределенностиявляются: 1. Наличие в управляющей системе в качестве элемента ЛПР, осуществляющему управление на основе субъективных моделей, которые приводят к большому разнообразию поведения системы. 2. Алгоритм управления строит сама система управления, преследуя помимо целей старшей системы свои цели, не всегда совпадающие с внешними. 3. На этом этапе оценки ситуации в ряде случаев исходят не из фактической ситуации, а из той модели, которую использует ЛПР. 4. В процессе принятия решений большую роль играют логические рассуждения ЛПР, не поддающиеся формализации классическими методами математики. 5. При выборе управляющего воздействия ЛПР может оперировать нечеткими понятиями, отношениями и высказываниями. 6. В большинстве классов задач управление АСУ отсутствуют объективные критерии оценивания достижения целевого и текущего состояния ОУ, а также статистических данных для определения вероятностных законов для конкретного принятого решения. Таким образом, методы принятия решений, используемые для детерминированных и вероятностных решений, для данного класса задач неприменимы Поэтому для оценки систем в условиях нестохастической неопределенности используются методы, в основе которых лежит матрица эффективности в виде: i a j n ( ) K ai k nKn1 2 n a1 2 a M am 11 k 21 k M m1 k 12 k 22 k M m2 k k k1 k k2 M mn k где i a - вектор управляемых параметров, определяющих свойства системы ; j n - вектор неуправляемых параметров, определяющих состояния обстановки ; 11 k - значение эффективности системы i a для состояния обстановки j n ; ( ) K ai - эффективность системы. В зависимости от характера неопределенности операции делятся на игровые и статистические. В игровых операциях неопределенность вносит своими сознательными действиями противник (теория игр). Условия статистически неопределенных операций зависят от объективной действительности (природы). Природа пассивно по отношению к лицу, принимающему решение – теория статических решений. Принятие решении в условиях неопределенности. Прежде всего отметим принципиальное различие между стохастическими факторами, приводящими к принятию решения в условиях рыска, и неопределенными факторами, приводящими к принятию решения в условиях неопределенности. И те, и другие приводят к разбросу возможных исходов результатов управления. Но стохастические факторы полностью описываются известной стохастической информацией, эта информация и позволяет выбрать лучшее в среднем решение. Применительно к неопределенным факторам подобная информация отсутствует. В общем случае неопределенность может быть вызвана либо противодействием разумного противника, либо недостаточной осведомленностью об условиях, в которых осуществляется выбор решения. Принятие решений в условиях разумного противодействия является объектом исследования теории игр. Мы здесь не будем касаться этих вопросов. Рассмотрим принципы выбора решений при наличии недостаточной осведомленности относительно условий, в которых осуществляется выбор. Такие ситуации принято называть «играми с природой». В терминах «игр с природой» задача принятия решений может быть сформулирована следующим образом. Пусть лицо, принимающее решение, может выбрать один из т возможных вариантов своих решений: и пусть относительно условий, в которых будут реализованы возможные варианты, можно сделать п предположений: . Оценки каждого варианта решения в каждых условиях известны и заданы в виде матрицы выигрышей лица, принимающего решения: | |. Предположим вначале, что априорная информация о вероятностях возникновения той или иной ситуации отсутствует. Теория статистических решений предлагает несколько критериев оптимальности выбора решений. Выбор того или иного критерия неформализуем, он осуществляется человеком, принимающим решения, субъективно, исходя из его опыта, интуиции и т. д. Рассмотрим эти критерии.

1. 5 Лекция №5 (2 часа).

Тема: «Многокритериальные решения при объективных моделях»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Альтернативы и критерии
2. Задачи принятия решений
3. Аксиомы рационального поведения.
4. Деревья решений.
5. Теория проспектов.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Альтернативы и критерии

В детерминированной ситуации подразумевается, что ЛПР точно знает состояние среды (в терминах игры - "природы"). Поэтому, можно точно рассчитать исходы для всех стратегий, и сделать выбор относительно несложно. Достаточно сравнить результаты, которые обеспечивают разные альтернативы, и выбрать ту, которая дает наибольший выигрыш при этом единственном состоянии. Для этого применяется операция численного сравнения (больше, меньше, равно).

В ситуации неопределенности есть несколько возможных состояний, и разные альтернативы при них обеспечивают различный выигрыш. То есть у нас есть несколько альтернатив, каждая из которых представляет собой набор значений исходов при соответствующих состояниях природы. Эти наборы нельзя просто математически сравнить "целиком", используя понятия "больше-меньше". Такую операцию можно провести только с отдельными членами данных наборов. Если все значения одного набора не меньше значений другого при этих же состояниях, а одно значение строго больше, то тогда первый набор является предпочтительным. Но такую проверку мы уже провели, когда применяли принцип доминирования по состояниям. Предполагается, что все альтернативы, которые доминировались по состояниям, уже отброшены.

Если среди альтернатив нет доминирующих по состояниям, это означает, что при разных состояниях природы наилучший результат показывают разные альтернативы. Каким же образом можно сравнить между собой эти наборы значений, и как выбрать оптимальный? Здесь на помощь приходят так называемые **критерии выбора** или просто критерии.

Основная идея любого критерия: заменить целый набор значений одним численным показателем, характеризующим данный набор с определенной точки зрения, и затем просто численно сравнить между собой эти показатели.

У какого набора этот численный показатель окажется "лучше" (больше или меньше - зависит от вида критерия и ситуации), тот и будет считаться оптимальным по данному критерию.

Идея простая, но эффективная. Однако существенным недостатком любого критерия является "потеря информации". Из-за "сжатия" целого набора значений в одно единственное число, становятся заметны одни свойства (черты) набора и не видны другие.

Это все равно, что про человека судить только по принципу (т.е. критерию) "плохой" или "хороший". Здесь все качества, черты характера, взгляды человека описываются одним словом. Это легко запомнить, но здесь нет подробной информации. Более того, может происходить ее искажение.

Во-первых, не все качества плохого человека могут быть хуже, чем у хорошего (он может быть здоровее или даже умнее).

Во-вторых, значение "плохой" или "хороший" соответствует взгляду конкретного субъекта или группы, которые оценили человека по своим субъективным. И, вполне возможно, у других людей существуют свои подходы к присвоению значения "плохой" или "хороший". Поэтому такая оценка не является точной и универсальной.

В общем случае **порядок применения критерия** выглядит следующим образом (см. рис.2.3):

1) на первом этапе выбирается критерий, по которому будет производиться выбор;

2) для каждой альтернативы рассчитывается значение выбранного критерия. По сути, в соответствие каждой альтернативе ставится одно численное значение критерия (ее количественная оценка);

3) альтернативы сравниваются путем обычного численного сравнения соответствующих им значений критериев;

4) по результатам сравнения оптимальной признается альтернатива, имеющая наилучшее значение критерия. Что считать "наилучшим" - максимальное или минимальное значение критерия - зависит от того, что показывают исходы альтернатив (прибыль, выигрыш или убытки, расходы), и по какому критерию производится сравнение.

2. Задачи принятия решений

Задача принятия решений (ЗПР) формулируется в терминах теории систем следующим образом.

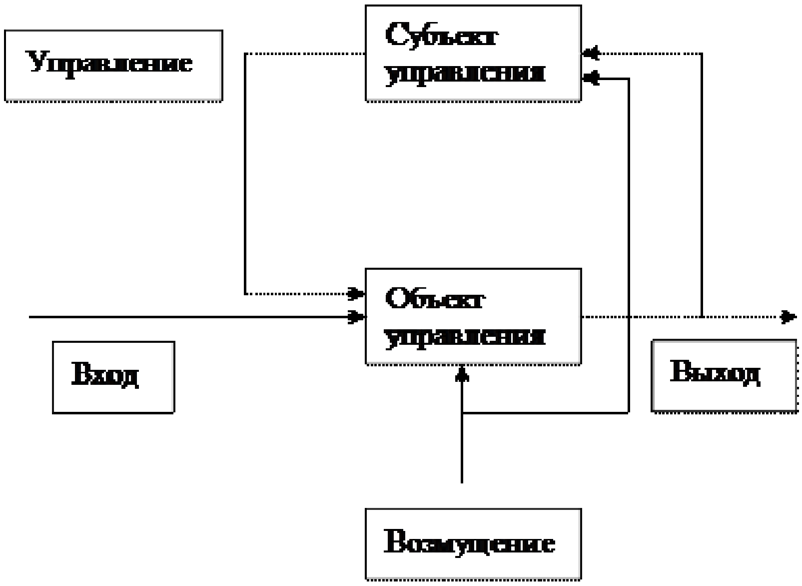


Рис. 1

Имеется некоторая система, в которой выделена управляемая подсистема (объект управления), управляющая подсистема (субъект управления) и среда (возмущение). Субъект управления воздействует на объект управления с помощью альтернативных управляющих воздействий. Состояние объекта управления определяется 2-мя факторами: выбранным управляющим воздействием со стороны субъекта управления (входы, которые в экономических системах отражают ресурсы, также относятся к числу контролируемых переменных и могут рассматриваться как управления) и состоянием среды (возмущением). Важно, что субъект управления не может воздействовать на среду и, более того, он часто не имеет полной информации о состоянии среды.

Субъект управления является целеустремленной подсистемой, причем егоцель состоит в том, чтобы перевести объект управления в наиболее предпочтительное для себя состояние (или в некоторое подмножество предпочтительных состояний).

Выбор субъектом управления управляющего воздействия (выбор допустимой альтернативы) называется принятием решения.

При принятии решения основной задачей является нахождение оптимального решения. Оптимальное решение может быть определено как наилучшее - оно в наибольшей степени соответствует цели субъекта управления в рамках имеющейся у него информации о состоянии среды (и объекта). Для построения математической модели принятия решения необходимо задать следующие 3 множества:

X - множество допустимых альтернатив (управляющих воздействий)[2];

Y - множество возможных состояний среды;

A - множество возможных исходов (состояний объекта).

Так как состояние объекта полностью определяется выбором управляющего воздействия и состоянием среды, то каждой паре $(x,y), x \in X, y \in Y$ соответствует определенный исход $a \in A$. Другими словами существует функция $F : X \times Y \rightarrow A$, которая называется *функцией реализации**[3]***. Функция реализации каждой паре вида (альтернатива, состояние среды) ставит в соответствие определяемый ею исход[4].

Набор объектов (X,Y,A,F) образует т.н. реализационную структуру задачи принятия решения. Реализационная структура определяет связь между выбираемыми альтернативами и исходами. В общем случае эта связь не является детерминированной (однозначной). В зависимости от информации, которой обладает субъект управления относительно состояния среды при принятии решения, различают несколько основных типов задач принятия решения.

3. Аксиомы рационального поведения.

Знание методов принятия решений необходимо при анализе различных задач выбора. Задача выбора является одной из центральных в экономике. Два основных действующих лица в экономике — покупатель и производитель — постоянно вовлечены в процессы выбора. Потребитель решает, что покупать и за какую цену. Производитель решает, во что вкладывать капитал, какие товары следует производить.

Одно из основных допущений экономической теории состоит в том, что человек делает рациональный выбор. Рациональный выбор означает предположение, что решение человека является результатом упорядоченного процесса мышления. Слово «упорядоченный» определяется экономистами в строгой математической форме. Вводится ряд предположений о поведении человека, которые называются аксиомами рационального поведения.

При условии, что эти аксиомы справедливы, доказывается теорема о существовании некой функции, устанавливающей человеческий выбор, — функции полезности. *Полезностью* называют величину, которую в процессе выбора максимизирует личность с рациональным экономическим мышлением. Можно сказать, что полезность — это воображаемая мера психологической и потребительской ценности различных благ.

С содержательной точки зрения делается предположение, что человек как бы взвешивает на некоторых «внутренних весах» различные альтернативы и выбирает из них ту, полезность которой больше.

Задачи принятия решений с рассмотрением полезностей и вероятностей событий были первыми, которые привлекли внимание исследователей. Постановка таких задач обычно заключается в следующем. Человек выбирает какие-то действия в мире, где на получаемый результат (исход) действия влияют случайные события, неподвластные человеку. Но, имея некоторые знания о вероятностях этих событий, человек может рассчитать наиболее выгодную совокупность и очередность своих действий.

Отметим, что в данной постановке задачи варианты действий обычно не оцениваются по многим критериям. Таким образом, используется более простое их описание. Рассматривается не одно, а несколько последовательных действий, что позволяет построить так называемые «деревья решений».

4. Деревья решений.

Деревья решений — это графическое средство анализа решений в условиях риска. Деревья решений создаются для использования в моделях, в которых принимается *последовательность* решений, каждая из которых ведет к некоторому результату (выходу модели), Например, концессионеры решают, сколько заявок послать на региональные торги. Но результат этого решения не определен, пока они не решат, в каких торгах участвовать. Только после этого можно решить, на какие суммы посылать заявки. Но и после этого результат, если его рассматривать как доход от торгов, не определен, поскольку не известен спрос на их товар.

Наше обсуждение деревьев решений будет построено следующим образом: в этом разделе будут введены основные понятия, относящиеся к деревьям решений, и будет описана надстройка TreePIan, создающая эти деревья в электронных таблицах. Эта надстройка разработана Майклом Мидлтоном (Michael Middleton) и является условно-бесплатной программой. (Если вам понравится эта программа и вы захотите использовать ее в дальнейшем, вам необходимо будет сделать небольшой регистрационный взнос. Подробности можно найти в справочной системе программы TreePIan или на Web-узле http://www.treepian.com.) Дальнейший материал будет проиллюстрирован на модели принятия решений для фирмы Sonorola, которая занимается производством мобильных телефонов.

Альтернативные стратегии

В фирме Sonorola заканчивается этап разработки и тестирования нового ряда моделей мобильных телефонов. Высшее руководство фирмы разрабатывает стратегию производства и продвижения на рынок этих моделей телефонов. Рассматриваются три основные стратегии (решения).

^ **1. Агрессивная стратегия.** Эта стратегия в наибольшей степени соответствует ожиданиям фирмы от разработанного ряда моделей. Основные капитальные вложения будут сделаны в разработку нового и эффективного производственного оборудования. Большие инвестиции должны гарантировать продвижение на рынок всех разработанных моделей телефонов. Маркетинговая компания предусматривает покупку рекламного времени на телевидении всех основных мировых рынков и скидки для дилеров.

^ **2. Базовая стратегия.** Производство текущих моделей телефонов переносится из Токио в Осаку, что, очевидно, вызовет "головную боль" у руководства фирмы. В то же время существующая производственная линия в Токио модернизируется и переналаживается для производства новых моделей телефонов. Значительные инвестиции будут сделаны для продвижения на рынок только наиболее популярных моделей. Фирма рассчитывает на проведение локальных и региональных рекламных компаний, не выходя на глобальный уровень рекламной компании.

^ **3. Осторожная стратегия.** При этой стратегии для производства новых моделей телефонов будут использоваться только "излишки" производственных мощностей, задействованные в настоящее время для производства текущих моделей телефонов. Модернизация производственных средств сведена до минимума. Объем производства новых телефонов ограничен спросом. Рекламные материалы рассылаются выборочно региональным дилерам.

5. Теория проспектов.

Теория проспектов была разработана для того, чтобы учесть реальные черты человеческого поведения в задачах с субъективными вероятностными оценками. Ставилась цель за менить теорию ожидаемой полезности в качестве средства, по зволяющего человеку выбирать предпочтительные варианты действий.

Теория проспектов позволяет учесть три поведенческих эффекта:

- эффект определенности, т.е. тенденцию придавать боль ший вес детерминированным исходам;
- эффект отражения, т.е. тенденцию к изменению пред почтений при переходе от выигрышей к потерям;
- эффект изоляции, т.е. тенденцию к упрощению выбора путем исключения общих компонентов вариантов решений.

Рассмотрим игру (x, p, y, q), где исход x осуществляется с вероятностью p, исход y — с вероятностью q , а нулевой исход — с вероятностью 1-p- q (рис. 2.10). В теории проспектов игра, представленная на рисунке, называется проспектом. Оценива ется ценность (а не ожидаемая полезность) этой игры по сле дующей формуле:

V = V (x) xor П(p)+ V (y) xor П(q),

где V (x), V (y) - ценность исходов x, y соответственно, V (0)=0 и П(p), П(q) - вес (важность) вероятностей p, q соответственно.

$$C_{гл} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i c_i$$

Рис. 2.10. Представление проспекта

Мы видим первое отличие теории проспектов: вместо веро ятностей используется функция от вероятностей.

Проанализируем другие отличия теории проспектов от тео рии полезности. Во-первых, полезность в теории полезности определялась как прибавление (может быть, и отрицательное) к первоначальному благосостоянию человека. Ценность же от считывается от любого уровня, принятого за исходный. Во- вторых, предполагается (для учета поведенческих аспектов), что функция V (x) ценности - выпуклая для выигрышей и во гнутая для потерь (рис. 2.11), причем ее изменение для потерь будет больше, чем для выигрышей.

Важное различие двух теорий состоит в учете вероятностей исходов. Если в теории полезности вероятность умножается на полезность исхода, то в теории проспектов используется функ ция вероятности П(p), представленная на рис. 2.12. Эта функ ция также построена специальным образом для учета поведен ческих аспектов. Прежде всего П(p) не подчиняется всем зако нам теории вероятностей.

1. 6 Лекция №6 (2 часа).

Тема: «Многокритериальная теория полезности»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Общая постановка многокритериальной детерминированной статической задачи принятия решений.
2. Человекомашинные процедуры.
3. Многокритериальная теория полезности.
4. Метод SMART

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Общая постановка многокритериальной детерминированной статической задачи принятия решений.

Сложность и комплексность проблем, возникающих при выработке решений в многокритериальных задачах привели к тому, что вопросы формирования практически применимых критериев перестали быть только искусством, основанным на интуиции, а превратились в серьезное научное направление, важность которого возрастает с каждым днем .

Общая постановка задачи принятия решений в таких условиях выглядит следующим образом:

1) имеется некоторое множество альтернатив $A=(a_1,a_2,\dots,a_m)$ причем каждая альтернатива a_i характеризуется определенной совокупностью свойств

$c_1, c_2, c_3,\dots, c_n$;

2) имеется совокупность критериев $q = (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n)$, т, е. каждая альтернатива характеризуется вектором

$\mathbf{q}(\boldsymbol{a}) = \langle q_1(\boldsymbol{a}), q_2(\boldsymbol{a}), \dots, q_i(\boldsymbol{a}),\dots,q_n(\boldsymbol{a})\rangle$;

3) необходимо принять решение о выборе одной из альтернатив, причем решение называется простым, если выбор производится по одному критерию, и сложным, если выбранная альтернатива не является наилучшей по какому-то одному критерию, но может оказаться наиболее приемлемой для всей их совокупности;

4) задача принятия решения по выбору альтернативы на множестве критериев формально сводится к отысканию отображения j, которое каждому вектору $\boldsymbol{q}$ ставит в соответствие действительное число

$W = j(q)= j\ (q_1, q_2,\dots, q_i,\dots, q_n)$,

определяющее степень предпочтительности данного решения.

Оператор φ называют интегральным (обобщенным) критерием. Интегральный критерий присваивает каждому решению по выбору альтернативы соответствующее значение эффективности W. Это позволяет упорядочить множество решений по степени предпочтительности. Рассмотрим основные методы формирования обобщенных критериев.

Все методы решения задач многокритериальной оптимизации в условиях определенности (задачи типа JA) *по признаку количества применений решающего правила* делятся на две большие группы: одношаговые и многошаговые, а по признаку – *способ формирования решающего правила* – на эвристические и аксиоматические.

Сущность подавляющего большинства одношаговых методов заключается в преобразовании векторного показателя эффективности в скалярный, после чего задача оптимизации решается по классической схеме.

Известно несколько способов решения многокритериальных задач, но наиболее распространенными эвристическими методами такого типа являются методы обобщенного и главного показателя, целевое программирование и т.д.

2. Человекомашинные процедуры.

Средством исследования области допустимых решений, приводящим к желаемому выбору наилучшего решения, являются *человекомашинные процедуры* (ЧМП), представляющие собой процедуры общения ЛПР и компьютера. Они состоят из совокупности шагов, каждый из которых включает в себя фазу анализа, выполняемого ЛПР, и фазу расчетов, выполняемых компьютером.

Фаза расчетов (компьютер):

• используя полученную от ЛПР на предыдущем шаге информацию, проводит дополнительные расчеты;

• вычисляет решение, соответствующее последней информации ЛПР;

• вырабатывает вспомогательную информацию для ЛПР.

Фаза анализа (ЛПР):

• оценивая предъявленное решение (или совокупность решений), определяет, является ли решение (одно из решений) приемлемым; если да, то ЧМП окончена; в противном случае ЛПР анализирует вспомогательную информацию;

• сообщает дополнительную информацию, с помощью которой компьютер вычисляет новое решение.

Существует большое количество ЧМП [3], [7]. Различные ЧМП отличаются друг от друга содержанием и способом выполнения каждой из фаз. Первые из разработанных ЧМП основаны на использовании информации об относительной важности критериев.

3. Многокритериальная теория полезности.

В силу благоприятных обстоятельств жители одного из городов некой страны стали чаще выезжать за границу. Существующие аэропорты, расположенные около города (назовем его городом М), не соответствовали по своим возможностям новому потоку пассажиров. Возникла необходимость в построении еще одного аэропорта около города М.

Правительство этой страны назначило комиссию по выбору места для аэропорта, которая приступила к работе. Были обследованы различные площадки около города, где постройка аэропорта нужного размера представлялась возможной. После многочисленных дискуссий комиссия определила три основных критерия для оценки вариантов расположения аэропорта.

• Стоимость постройки. Желательно построить аэропорт с заданной пропускной способностью за наименьшую возможную цену.

• Расстояние от города. Желательно, чтобы поездка пассажиров от аэропорта в город и обратно занимала наименьшее время.

• Минимальное шумовое воздействие. Количество людей, подвергающихся нежелательным шумовым воздействиям, должно быть, по возможности, минимальным.

Легко заметить, что все эти критерии противоречивы. Постройка аэропорта на большом расстоянии от города потребует, вероятно, меньших затрат, хотя время поездки будет больше. Противоречивы также критерии расстояния от города и числа людей, подвергающихся шумовым воздействиям. Как выбрать площадку для аэропорта? Как найти компромисс между критериями?

Подчеркнем некоторые особенности рассматриваемой задачи. Прежде всего, она может быть отнесена к так называемым неструктуризованным задачам. Если задачи с объективными моделями (см. предыдущую лекцию) находятся как бы «на границе» с задачами исследования операций, то задачи, похожие на приведенную в нашем примере, «расположены» существенно дальше от этой границы. Хотя все критерии имеют вполне ясное объективное содержание, а оценки по критериям – количественное выражение, нет единой количественной модели, описывающей проблему в целом. Есть лишь набор из трех субъективно (комиссией) определенных критериев. Необходимо выбрать ту из заданных альтернатив (место для строительства), где достигается наиболее предпочтительный, с точки зрения комиссии, компромисс между критериями. Для решения таких задач строятся модели, описывающие предпочтения ЛПР (в данном случае комиссии), применение которых позволяет сделать лучший выбор.

4. Метод SMART

Методика постановки SMART-целей - пожалуй самая известная в целеполагании. Давайте разберемся, в чем она заключается, какие есть способы ее применения, а также в каких случаях и каким людям она подходит.

Но сначала **немного истории**. В переводе с английского «smart» означает «умный» с оттенком «хитрый», «смекалистый». В нашем случае это слово является аббревиатурой, которую ввел Питер Друкер в 1954 г. SMART содержит в себе 5 критериев постановки целей:

- Specific - конкретная;
- Measurable - измеримая;
- Achievable - достижимая;
- Realistic - реалистичная;
- Timed - определенная по времени.

В дальнейшем различными авторами составлялись другие методики, связанные с целями. В результате требования к целям подгонялись под аббревиатуру SMART. И возникли другие расшифровки этих пяти букв. Их мы сейчас не будем касаться.

Как пользоваться SMART-технологией постановки целей?

Любую цель необходимо проверить по пяти описанным критериям:

1. Конкретная. Цель должна быть четкой, конкретной. Если в цели есть слова «больше», «раньше» и т.д., обязательно указать, на сколько (рублей, минут, процентов и т.д.).

2. Измеримая. Результат достижения цели должен быть измеримым. «Стать счастливой» - трудно измеримый результат (и не конкретный тоже). А вот «выйти замуж» - вполне измеримый; достаточно одного взгляда в паспорт.

3. Достижимая. Вы должны быть способны достичь этой цели, хотя бы в потенциале. Должны обладать ресурсами (внешними и внутренними) для ее достижения, либо быть способными эти ресурсы обрести.

4. Реалистичная. Необходимо реально оценивать свои ресурсы по достижению цели. Это не означает, что цель не должна быть амбициозной, как раз наоборот. Если цель не является реалистичной, разбейте ее на несколько реалистичных целей. Также должна согласовываться с другими целями, не противоречить им. Ставя цель раньше вставать, нам придется и раньше ложиться для того, чтобы высыпаться, либо искать другие способы обеспечения полного своего восстановления.

5. Определенная по времени. Должны быть четко поставлены сроки достижения цели. Без сроков конкретной цели нет.

1. 7 Лекция №7 (2 часа).

Тема: «Подход аналитической иерархии**»**

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Основные этапы подхода аналитической иерархии.
2. Структуризация.
3. Вычисление коэффициентов важности.
4. Определение наилучшей альтернативы.
5. Проверка согласованности суждений ЛПР

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные этапы подхода аналитической иерархии.

Подход аналитической иерархии (Analytic Hierarchy Process — AHP) широко известен в настоящее время. Мы можем найти в журналах оживленные дискуссии между противниками и сторонниками этого подхода.

При подходе MAUT одни и те же усилия ЛПР по построению функции полезности могут быть затрачены при большом и малом числе альтернатив. Не всегда такой подход является обоснованным. В случае небольшого числа заданных альтернатив (задачи первой группы) представляется разумным направить усилия ЛПР на сравнение только заданных альтернатив. Именно такая идея лежит в основе метода AHP [1].

Постановка задачи, решаемой с помощью метода AHP, заключается обычно в следующем.

Дано: общая цель (или цели) решения задачи; N критериев оценки альтернатив; n альтернатив.

Требуется: выбрать наилучшую альтернативу.

Подход AHP состоит из совокупности этапов.

1. Первый этап заключается в структуризации задачи в виде иерархической структуры с несколькими уровнями: цели-критерии—альтернативы .

2. На втором этапе ЛПР выполняет попарные сравнения элементов каждого уровня. Результаты сравнений переводятся в числа при помощи специальной таблицы (см. далее).

3. Вычисляются коэффициенты важности для элементов каждого уровня. При этом проверяется согласованность суждений ЛПР.

4. Подсчитывается количественный индикатор качества каждой из альтернатив и определяется наилучшая альтернатива.

Рассмотрим эти этапы подробнее применительно к основному методу AHP, разработанному Т. Саати [1], используя для иллюстрации приведенный выше пример выбора площадки для строительства аэропорта.

2. Структуризация.

При исследовании сложных систем сталкиваются с существенными неопределенностями, раскрыть которые при рассмотрении исследуемого объекта как единое целое (как систему) весьма затруднительно. Одним из важнейших этапов системного анализа, где требуется введение дополнительной информации, а, следовательно, участия экспертов, являются этапы структуризации систем.

Одним из немногих результативных методов раскрытия неопределенностей является так называемый метод «*черного ящика*», заимствованный из арсенала математического моделирования. Пусть на вход системы подается сигнал (задание X) и фиксируется поведение системы (выход Y), как реакция на входное воздействие. При таком рассмотрении система выступает в качестве оператора, преобразующего X в Y, т.е. Y=SX. Задача состоит в том, чтобы, исходя из этого соотношения, определить характеристики системы S. Этот метод требует проведения эксперимента либо непосредственно над системой, либо над достаточно адекватной ей моделью. К сожалению, для целого ряда систем, например, таких как социальные системы, реализовать этот подход крайне сложно.

В системном анализе часто используется метод структуризации (декомпозиции) или структурный анализ, реализуемый в ходе экспертизы. Суть этого метода заключается в расчленении объекта исследования на части с последующим изучением этих частей. Основная преследуемая при этом цель состоит в том, чтобы перейти от одной «большой» неопределенности к совокупности более «мелких» неопределенностей, т.е. одна проблемы заменяется совокупностью других проблем (подпроблем). Естественно, что такой подход оправдан, если последние мы можем разрешить с большей эффективностью, чем первую. Здесь уместно привести следующую цитату: “если нам удается собрать агрегат из груды деталей, то можно считать, что мы его знаем, точнее, знаем его структуру”[95].

В контексте нашего рассмотрения структуризация системы представляется как этап системного анализа. Преследуемая при этом цель - путем декомпозиции получить структуру рассматриваемого аспекта системы. Структуризации может подвергаться цель, функция, строение системы и др.

Несомненно, расчленив систему, мы временно нарушаем его целостность. Поэтому затем встанет задача восстановления целостности путем синтеза исследованных частей. При этом принципиальную трудность здесь может представлять выполнение требования синтезировать именно рассматриваемую (а не иную) систему. Поэтому рекомендуется помнить и неукоснительно следовать одному из основных принципов системного анализа: исследуя компоненты системы, необходимо всегда иметь ввиду, что все они должны быть ориентированы на обеспечение процесса достижения общесистемной цели.

3. Вычисление коэффициентов важности.

Ранжирование элементов, анализируемых с помощью матрицы парных сравнений, осуществляется на основании главных собственных векторов, получаемых в результате обработки матриц.

<u>Определение</u>. Пусть задана квадратная матрица А. Число λ называется собственным значением, а ненулевой вектор W собственным вектором квадратной матрицы А, если они связаны между собой соотношением AW=λW.

Собственные значения квадратной матрицы n могут быть вычислены как корни уравнения

$\det(A-\lambda E)=0$, (3)

а собственные векторы – как решение соответствующих однородных систем

$(A-\lambda E)W=0$. (4)

Определение. Собственный вектор, отвечающий максимальному собственному значению λ_{max} , называется главным собственным вектором.

Квадратная матрица имеет не более ***n*** различных собственных значений. Вычислить главный собственный вектор положительной квадратной матрицы ***A*** с точностью до некоторого постоянного сомножителя ***C*** можно по формуле:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = CW,$$

где e=$(1,1,\ldots 1)^T$ – вектор, составленный из ***n*** единиц.

Максимальное собственное значение вычисляется по формуле: $\lambda_{max} = e^T A W$.

Как видно из вышеприведенного примера, вычисление собственных векторов и собственных значений «в лоб» не является тривиальной задачей. При вычислении максимального собственного значения матриц порядка больше двух практически всегда требуется прибегать к приближенным методам. Такой подход существенно усложняет задачу, так как в случае одной иерархии число матриц парных сравнений может быть очень велико. В случае, когда человек не владеет численными методами, метод иерархической иерархии вообще может быть им отклонен.

Для вычисления собственных векторов и собственных значений матриц целесообразно использовать вычислительные средства и современные программные продукты.

Желательно использовать процедуры точного нахождения собственных значений и векторов матриц. Такое пожелание превращается в требование в особо ответственных задачах.

Для вычисления главного собственного вектора и наибольшего собственного значения обратно-симметрической квадратной матрицы второго, третьего и четвертого порядка существуют точные формулы. Использование формул весьма сомнительно в силу большого числа вычислений, за исключением матрицы второго порядка:

4. Определение наилучшей альтернативы.

Определение альтернатив является необходимым условием принятия рационального решения. Для выбора оптимального или близкого к нему решения необходимо (по возможности) сформулировать все технически реализуемые альтернативы, которые могли бы устранить как причины проблемы, так и саму проблему. Сокращение альтернатив может привести к случаю, когда лучшая альтернатива окажется не рассмотренной. Оценка альтернатив проводится для последующего выбора рационального управленческого решения.

Определение альтернатив достижения цели означает описание вариантов действия в подходящей для моделей принятия решений форме. Данные модели обеспечивают дальнейшую системную обработку альтернатив с целью выявления наилучшей из них.

Итак, для *определения реальных и номинальных альтернатив*, задаваемых / шкой-вопросом, нам в общем случае необходимо иметь три объекта: 1) множество X вопросительных переменных; 2) категорное отображение g в множество / Y; 3) матрицу A. Вспомним, что в разд. Поэтому даже если в каком-то частном случае два кжой-вопроса предоставляют одно и то же множество альтернатив, мы все равно будем считать два ка-кои-вопроса с разными субъектами разными.

Перспективным подходом к *определению независимых альтернатив* необходимо признать выявление независимых синтетических факторных показателей.

Теперь поясним использованные в этом *определении альтернативы*.

Синтетическая компонента по своей сущности ближе к *определению альтернативы действия*, чем исходные факторные показатели Xi. Исходный показатель отражает одно конкретное свойство или элемент хозяйственной деятельности, в то время как синтетическая компонента охватывает весь комплекс взаимосвязанных свойств и закономерностей, отражаемых системой исходных показателей.

Помимо различий личностных оценок типичным затруднением при *определении оптимальных альтернатив*является среда, в которой принимаются решения.

Выявленное расхождение теории принятия решений и анализа хозяйственной деятельности в подходе к*определению альтернатив* исходит из различий содержания рассматриваемых задач. Объектом изучения в теории принятия решений до сих пор являются в основном слабо структурированные инновационные проблемы, при решении которых большим успехом является уже выявление некоторых качественно различных вариантов действия.

Задачи исследования операций можно разделить на две группы: прямые - оценка эффективности принятых решений - п обратные - оптимизация или *определение оптимальных альтернатив*.

При планировании ресурсов основными средствами являются экспертные оценки, данные о выполнении проектов-прототипов, имеющиеся нормативы и обычная для бизнеса практика *определения альтернатив*, цель которой - решить, какие работы будут выполняться самостоятельно, а для каких необходимо будет привлечь контрагентов, а также выбрать наиболее подходящих исполнителей и контрагентов.

Анализ рассмотренных психофизиологических факторов леловека с точки зрения основных элементов совокупности, характеризующей процедуру принятия решений, показывает, что потребности влияют на*определение альтернатив*, критериев, ограничений, решающих правил и взаимосвязей с объектами задачи. Эмоции связаны с оценкой информации, определением решающих правил, конкретизацией критериев. Воля проявляется в определении критериев и решающих правил. Мышление связано с обобщением условий и выбором решения.

На первом этапе исходя из стоящей проблемы бухгалтер должен определить все возможные направления действий, которые помогут руководству разрешить эту проблему. После *определения альтернатив* бухгалтер по управленческому учету готовит полный анализ по каждому обсуждаемому варианту, рассчитывая суммарные затраты, возможную экономию ресурсов и финансовый результат хозяйственных операций. Для каждого типа решений необходима различная информация.

Главное преимущество этого метода состоит в том, что он может быть легко использован и подготовлен, так как состоит главным образом из утверждения списка требуемых баз данных без выделения определенных воздействий на параметры окружающей среды, которые могут быть вызваны данным проектом. Этот метод призван дать основную идею в *определении альтернатив* для предложенного проекта или какой-то его части.

Второй способ заключается в проведении экспертизы сверху вниз. Здесь результаты экспертизы более высокого уровня служат ограничениями при *определении допустимых альтернатив более низкого уровня*. Применительно к планированию сначала определяют допустимые планы развития отрасли, затем допустимые планы предприятий и допустимые планы цехов. Допустимыми для предприятия будут только такие планы, которые обеспечивают допустимость планов отрасли.

Два приведенных примера демонстрируют различия моделей ИО. В общем случае первым шагом в построении таких моделей является *определение альтернатив*, или переменных решения. Далее переменные решения используются для создания целевой функции и ограничений модели. Законченную типичную математическую модель ИО схематически можно представить следующим образом.

5. Проверка согласованности суждений ЛПР

При заполнении матриц попарных сравнений человек может делать ошибки. Одной из возможных ошибок является нарушение транзитивности: из $a_{ij} > a_{jk}$, $a_{jk} > a_{is}$ может не следовать $a_{ij} > a_{is}$(a_{ij} - элементы матрицы попарных сравнений). Во-вторых, возможны нарушения согласованности численных суждений: $a_{ij} \times a_{jk}$ ¹ a_{jk} .

Для обнаружения несогласованности предложен подсчет индекса согласованности сравнений, осуществляемый по матрице парных сравнений. Изложим алгоритм этого подсчета [1].

1. В матрице парных сравнений суммируются элементы каждого столбца.

2. Сумма элементов каждого столбца умножается на соответствующие нормализованные компоненты вектора весов, определенного из этой же матрицы.

3. Полученные числа суммируются, значение суммы обозначаем как l_{max}.

4. Находим индекс согласованности

$$L = (l_{max} - n)/(n-l),$$

где n — число сравниваемых элементов (размер матрицы). Заметим, что для кососимметрической матрицы l^{3} n.

5. Подсчитывается среднее значение индекса согласованности R для кососимметричных матриц, заполненных случайным образом. Так, для матрицы размера n = 7 индекс R = l,32, а для матрицы размера n = 8 индекс R = l,41.

6. Вычисляется отношение согласованности:

$$T=L/R.$$

При применении метода желательным считается уровень T £ 0,1. Если значение T превышает этот уровень, рекомендуется провести сравнения заново.

Система поддержки принятия решений
Expert Choice

Популярность метода аналитической иерархии определяется, не в последнюю очередь, высоким качеством компьютерной системы Expert Choice, реализующей этот метод. Эта система поддержки принятия решений выпускается как коммерческий продукт. Она поддерживает построение иерархии на всех уровнях, дает примеры построенных иерархий.

Система допускает ввод информации при осуществлении парных сравнений в качественном и количественном виде, а также в графическом виде. Сразу после заполнения матрицы следует проверка согласованности суждений. ЛПР может получить совет повторить сравнения, если индекс T превышает значение 0,1. На каждом этапе работы система может привести примеры и дать необходимые разъяснения для пользователя.

1. 8 Лекция №8 (2 часа).
Тема: «Методы ELECTRE.»
1.8.1 Вопросы лекции:
1. Конструктивистский подход.
2. Свойства бинарных отношений.
3. Методы ELECTRE.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:
1. Конструктивистский подход.

При заполнении матриц попарных сравнений человек может делать ошибки. Одной из возможных ошибок является нарушение транзитивности: из $a_{ij} > a_{jk}$, $a_{jk} > a_{is}$ может не следовать $a_{ij} > a_{is}$(a_{ij} - элементы матрицы попарных сравнений). Во-вторых, возможны нарушения согласованности численных суждений: $a_{ij} \times a_{jk}$ ^{1} a_{jk} .

Для обнаружения несогласованности предложен подсчет индекса согласованности сравнений, осуществляемый по матрице парных сравнений. Изложим алгоритм этого подсчета .

1. В матрице парных сравнений суммируются элементы каждого столбца.

2. Сумма элементов каждого столбца умножается на соответствующие нормализованные компоненты вектора весов, определенного из этой же матрицы.

3. Полученные числа суммируются, значение суммы обозначаем как l_{max}.

4. Находим индекс согласованности

$L = (l_{max} - n)/(n-l)$,

где n — число сравниваемых элементов (размер матрицы). Заметим, что для кососимметрической матрицы l ³ n.

5. Подсчитывается среднее значение индекса согласованности R для кососимметричных матриц, заполненных случайным образом. Так, для матрицы размера n = 7 индекс R = l,32, а для матрицы размера n = 8 индекс R = l,41.

6. Вычисляется отношение согласованности:

$T=L/R$.

При применении метода желательным считается уровень T £ 0,1. Если значение T превышает этот уровень, рекомендуется провести сравнения заново.

Система поддержки принятия решений
Expert Choice

Популярность метода аналитической иерархии определяется, не в последнюю очередь, высоким качеством компьютерной системы Expert Choice, реализующей этот метод. Эта система поддержки принятия решений выпускается как коммерческий продукт. Она поддерживает построение иерархии на всех уровнях, дает примеры построенных иерархий.

Система допускает ввод информации при осуществлении парных сравнений в качественном и количественном виде, а также в графическом виде. Сразу после заполнения матрицы следует проверка согласованности суждений. ЛПР может получить совет повторить сравнения, если индекс T превышает значение 0,1. На каждом этапе работы система может привести примеры и дать необходимые разъяснения для пользователя.

2. Свойства бинарных отношений.

Каждое бинарное (двухместное) отношение характеризуется свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Полное или частичное отсутствие этих свойств в отношении отражается в их наименовании приставками соответственно "анти" и "не". Определённым сочетаниям этих базовых свойств даны свои специальные наименования; например, антисимметричное и антирефлексивное отношение называется асимметричным. Свойство рефлексивности рассматривается для одного элемента множества. Отношение называется рефлексивным, если для любого предмета из области его определения имеет место это отношение предмета к самому себе. Отношение ровесник, определенное на области пар людей, рефлексивно, потому что любой человек ровесник самого себя. Если отношение имеет место не для любой такой пары, то оно называется нерефлексивным. Нерефлексивно отношение любит, определенное на области пар людей, так как не все люди любят себя. Если отношение не имеет места ни для одной такой пары, то отношение называется антирефлексивным. Отношение больше, определённое на области пар материальных предметов, антирефлексивно, поскольку ни один предмет не больше самого себя. Свойство симметричности рассматривается для двух разных элементов множества. Отношение называется симметричным, когда для любых пар предметов из области его определения верно, что, когда это отношение x и y , то оно имеет место и в паре (y x,) . Отношение ровесник симметрично, так как для любых двух людей верно, что, если первый ровесник второго, то и второй ровесник первого. Отношение называется несимметричным, если оно верно не для любых двух предметов из области определения. Несимметрично отношение любит, поскольку не для любых двух людей верно, что если первый любит второго, то второй любит первого. Отношение называется антисимметричным, если в области определения отношения не существует пар указанного вида, для которых это верно. Отношение больше антисимметрично, потому что ни для каких предметов не может быть так, что первый предмет больше второго, а второй больше первого. Свойство транзитивности рассматривается для трёх разных элементов множества. Отношение называется транзитивным, если оно обязательно имеет место для пары ( ) x ,z при условии его наличия в парах (x , y) и ( ) y z, . Отношение ровесник транзитивно, так как для любых трёх людей, если один человек ровесник другого, а тот ровесник третьего, первый непременно является ровесником третьего. Отношение называется нетранзитивным, если это верно не для любых предметов из области определения отношения. Нетранзитивно отношение любит, потому что неверно, что оно имеет место в паре (x ,z) всегда, когда оно наличествует в парах ( ) x , y и ( ) y ,z , т. е. не обязательно, чтобы первый человек любил третьего, когда первый любит второго, а второй любит третьего. Отношение называется антитранзитивным, если в области определения отношения не существует таких предметов, для которых это было бы верно. Антитранзитивно отношение отец, потому что не найдется таких трёх пар указанного вида, чтобы это отношение имело место во всех трёх. Никогда не может быть так, что первый человек - отец второго, второй - отец третьего, и при этом первый - отец третьего.

3. Методы ELECTRE.

Метод ELECTRE I был первым в семействе методов, принадлежащих к подходу РИПСА. В нем используются четкие бинарные отношения между альтернативами.

Индексы согласия и несогласия строятся следующим образом. Каждому из N критериев ставится в соответствие целое число w, характеризующее важность критерия. Б. Руа предложил рассматривать w как число голосов членов жюри, поданное за важность данного критерия.

Выдвигается гипотеза о превосходстве альтернативы A_i над альтернативой A_j. Множество I, состоящее из N критериев, разбивается на три подмножества:

I^+ — подмножество критериев, по которым A_i предпочтительнее A_j;

$I^=$ — подмножество критериев, по которым A_i равноценно A_j;

I^- — подмножество критериев, по которым A_j предпочтительнее A_i.

Далее формулируется индекс согласия с гипотезой о превосходстве A_iнад A_j. Индекс согласия подсчитывается на основе весов критериев. В методе ELECTRE I этот индекс определяется как отношение суммы весов критериев подмножеств 1^+ и I^- к общей сумме весов:

$$C_{A_iA_j} = \frac{\sum\limits_{i \in I^+, I^=} p_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i} .$$

Индекс несогласия d_{AB} с гипотезой о превосходстве A_i над A_jопределяется на основе самого противоречивого критерия — критерия, по которому A_j в наибольшей степени превосходит A_i.

Чтобы учесть возможную разницу длин шкал критериев, разность оценок A_j и A_i относят к длине наибольшей шкалы:

$$d_{A_iA_j} = \max_{i \in I^-} \frac{l^i_{A_j} - l^i_{A_i}}{L_i} ,$$

где : l_{Ai}, l_{Aj} — оценки альтернатив A_i и A_j по i-му критерию; L_i — длина шкалы i-го критерия.

Укажем очевидные свойства индекса согласия.

1) 0 £ C_{AiAj} £ 1;

2) C_{AiAj} = 1, если подмножество Г пусто;

3) Ca_{iAj} сохраняет значение при замене одного критерия на несколько с тем же общим весом.

Приведем свойства индекса несогласия:

l) 0 £ d_{AiAj} £ l:

2) d_{AiAj} сохраняет значение при введении более детальной шкалы по i-му критерию при той же ее длине.

Введенные индексы используются при построении матриц индексов согласия и несогласия для заданных альтернатив.

Отметим, что индекс несогласия может быть назван «вето», так как он как бы накладывает вето на сравнения.

В методе ELECTRE I бинарное отношение превосходства задается уровнями согласия и несогласия. Если C_{AiAj} £ a_1 и d_{AiAj} £ g_1, где a_1, g_1 — заданные уровни согласия и несогласия, то альтернатива А объявляется превосходящей альтернативу В.

Так же, как в методе ELECTRE I , в методе ELECTRE II ис пользуются четкие бинарные отношения между альтернативами.

Индекс согласия подсчитывается тем же способом, что и в методе ELECTRE I . В методе ELECTRE II задаются два уровня для индекса согласия: а 1> а 2 и два уровня индекса несогласия (вето): ?1 ? ?2. Далее вводятся два отношения предпочтения ?1 и ?2 между альтернативами так, что для i = l ,2 имеем:

Ясно, что ? 1 I ? 2; ? 1 называется сильным, а ? 2 - слабым отношением предпочтения.

Этап исследования множества альтернатив

На заданном конечном множестве альтернатив А выявля ются альтернативы, находящиеся в сильном, а затем - в сла бом отношении предпочтения. Далее выявляется первое ядро, в которое входят недоминируемые альтернативы. Затем они уда ляются из рассмотрения, и процедура повторяется снова уже для оставшихся альтернатив и т.д.

Присваивая ранги альтернативам, входящим в соответствующие ядра, строим полный порядок на множестве альтерна тив. Второй полный порядок строится аналогично первому, но начиная с класса худших альтернатив (недоминирующих дру гие) и переходя снизу вверх к лучшим альтернативам. Если два построенных порядка не слишком различны по упорядоче нию альтернатив, то на их основе строится средний порядок, который и предъявляется ЛПР.

Это построение осуществляется на основе следующих правил:

• A i PA j строго превосходит, если Ai имеет лучший ранг в од ном из порядков, и по крайней мере не худший в другом;

• A i IA j (эквивалентны), если они имеют одинаковые ранги в двух полных порядках;

• A i NA j (несравнимость), если они имеют одно упорядочение в одном из порядков, противоположное — в другом.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1,2 (4 часа).

Тема: «Задачи линейного программирования».

2.1.1 Задание для работы:

1. Решения задач ЛП.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности.

Несколько слов о самом термине *линейное программирование*. Он требует правильного понимания. В данном случае программирование - это, конечно, не составление программ для ЭВМ. Программирование здесь должно интерпретироваться как планирование, формирование планов, разработка программы действий.

К математическим задачам линейного программирования относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. Это, например:

- задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании;
- задача о смесях (планирование состава продукции);
- задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах (управление товарно-материальными запасами или "задача о рюкзаке");
- транспортные задачи (анализ размещения предприятия, перемещение грузов).

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования (кроме того, сюда относят: целочисленное, динамическое, нелинейное, параметрическое программирование). Это объясняется следующим:

- математические модели большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- данный тип задач в настоящее время наиболее изучен. Для него разработаны специальные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие программы для ЭВМ;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли широкое применение;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Экономико-математическая модель любой задачи линейного программирования включает: **целевую функцию**, оптимальное значение которой (максимум или минимум) требуется отыскать;**системуограничений**в виде системы линейных уравнений или неравенств;**условие неотрицательности**переменных.

В общем виде модель записывается следующим образом:

1.Целевая функция:

$F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max(\min);$	(1)

2. Система ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le = \ge\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le = \ge\} b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le = \ge\} b_m; \end{cases}$$	(2)

3. Условие неотрицательности:

$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}$.	(3)

При этом a_{ij}, b_i, c_j($i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$) - заданные постоянные величины.

Задача состоит в нахождении оптимального значения функции (1) при соблюдении ограничений (2) и (3).

Систему ограничений (2) называют функциональными ограничениями задачи, а ограничения (3) - прямыми.

Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2) и (3), называется**допустимым решением (планом)**задачи линейного программирования. План $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, при котором функция (1) достигает своего максимального (минимального) значения, называется**оптимальным**.

2. Примеры задач линейного программирования

Далее приведем примеры некоторых типовых задач, решаемых при помощи методов линейного программирования. Такие задачи имеют реальное экономическое содержание. Сейчас лишь сформулируем их в терминах ЗЛП, а методы решения подобных задач рассмотрим ниже.

1. *Задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании.*

Общий смысл задач этого класса сводится к следующему.

Предприятие выпускает n различных изделий. Для их производства требуется m различных видов ресурсов (сырья, материалов, рабочего времени и т.п.). Ресурсы ограничены, их запасы в планируемый период составляют, соответственно, b_1, b_2,..., b_mусловных единиц.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые показывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы изделия j-го вида ( ).

Прибыль, получаемая предприятием при реализации изделия j-го вида, равна c_j.

В планируемом периоде значения величин a_{ij}, b_iи c_jостаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей.

Далее приведем простой пример задачи такого класса.

Компания специализируется на выпуске хоккейных клюшек и наборов шахмат. Каждая клюшка приносит компании прибыль в размере $2, а каждый шахматный набор - в размере $4. На изготовление одной клюшки требуется четыре часа работы на участке А и два часа работы на участке В. Шахматный набор изготавливается с затратами шести часов на участке А, шести часов на участке В и одного часа на участке С. Доступная производственная мощность участка А составляет 120 н-часов в день, участка В - 72 н-часа и участка С - 10 н-часов.

Сколько клюшек и шахматных наборов должна выпускать компания ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль?

Условия задач указанного класса часто представляют в табличной форме (см. таблицу 1).

Таблица 1 Исходные данные задачи об использовании производственных ресурсов

Производственные участки	**Затраты времени на единицу продукции, н-час**		**Доступный фонд времени, н-час**
	клюшки	наборы шахмат	

A	4	6	120
B	2	6	72
C	-	1	10
Прибыль на единицу продукции, $	2	4	

По данному условию сформулируем задачу линейного программирования.

Обозначим: x_1- количество выпускаемых ежедневно хоккейных клюшек, x_2- количество выпускаемых ежедневно шахматных наборов.

Формулировка ЗЛП:

$= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 120, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Подчеркнем, что каждое неравенство в системе функциональных ограничений соответствует в данном случае тому или иному производственному участку, а именно: первое - участку A, второе - участку B, третье - участку C.

Повторимся, методы решения ЗЛП мы будем рассматривать чуть позднее, а сейчас - пример задачи другого типа.

2. *Задача о смесях (планирование состава продукции)*.

К группе задач о смесях относят задачи по отысканию наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Иными словами, получаемые смеси должны иметь в своем составе m различных компонентов в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями n исходных материалов.

На птицеферме употребляются два вида кормов - I и II. В единице массы корма I содержатся единица вещества A, единица вещества B и единица вещества C. В единице массы корма II содержатся четыре единицы вещества A, две единицы вещества B и не содержится вещество C. В дневной рацион каждой птицы надо включить не менее единицы вещества A, не менее четырех единиц вещества B и не менее единицы вещества C. Цена единицы массы корма I составляет 3 рубля, корма II - 2 рубля.

Составьте ежедневный рацион кормления птицы так, чтобы обеспечить наиболее дешевый рацион.

Представим условие задачи в таблице 2.2.

Таблица 2 - Исходные данные задачи о смесях

Питательные вещества	**Содержание веществ в единице массы корма, ед.**		**Требуемое количество в смеси, ед.**
	корм I	корм II	
A	1	4	1
B	1	2	4
C	1	-	1
Цена единицы массы корма, р	2	4	

Сформулируем задачу линейного программирования.

Обозначим: x_1- количество корма I в дневном рационе птицы, x_2- количество корма II в дневном рационе птицы.

Формулировка ЗЛП:

$= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 1; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

3. Графический метод решения ЗЛП

Если система ограничений задачи линейного программирования представлена в виде системы линейных неравенств с двумя переменными, то такая задача может быть решена геометрически. Таким образом, данный метод решения ЗЛП имеет очень узкие рамки применения.

Однако метод представляет большой интерес с точки зрения выработки наглядных представлений о сущности задач линейного программирования.

Геометрический (или графический) метод предполагает последовательное выполнение ряда шагов. Ниже представлен порядок решения задачи линейного программирования на основе ее геометрической интерпретации.

1. Сформулировать ЗЛП.
2. Построить на плоскости $\{x_1, x_2\}$ прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
3. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
4. Найти область допустимых решений.
5. Построить прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, где h - любое положительное число, желательно такое, чтобы проведенная прямая проходила через многоугольник решений.
6. Перемещать найденную прямую параллельно самой себе в направлении увеличения (при поиске максимума) или уменьшения (при поиске минимума) целевой функции. В результате, либо отыщется точка, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо будет установлена неограниченность функции на множестве решений.
7. Определить координаты точки максимума (минимума) функции и вычислить значение функции в этой точке.

Далее рассмотрим пример решения ЗЛП графическим методом. Для этого воспользуемся представленной выше задачей о хоккейных клюшках и шахматных наборах.

1. Выше уже приводилась формулировка задачи, здесь нам остается лишь повторить ее:

$= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 120, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

2. Теперь построим прямые, соответствующие каждому из функциональных ограничений задачи (см. рисунок 1). Эти прямые обозначены на рисунке (1), (2) и (3).

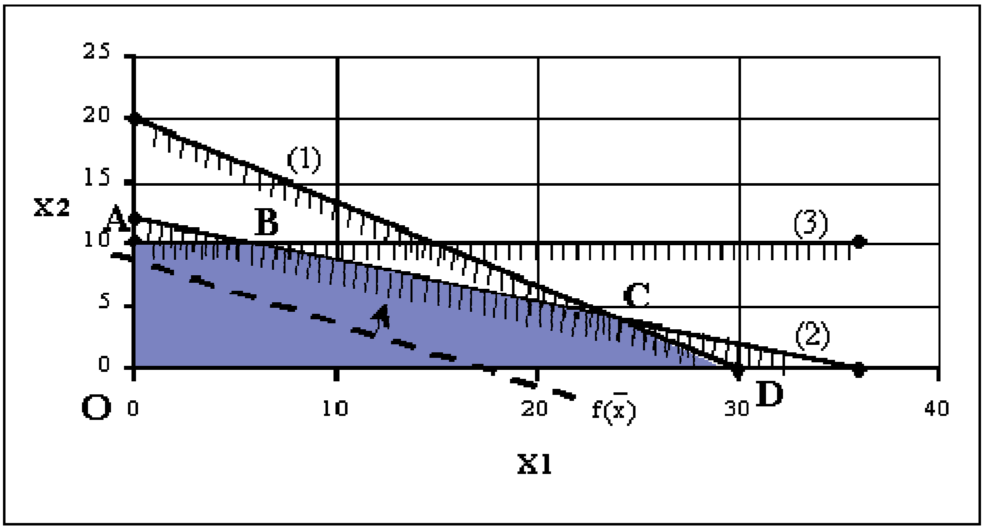


Рисунок 1. Геометрическое решение ЗЛП

3. Штрихи на прямых указывают полуплоскости, определяемые ограничениями задачи.

4. Область допустимых решений включает в себя точки, для которых выполняются все ограничения задачи. В нашем случае область представляет собой пятиугольник (на рисунке обозначен ABCDO и окрашен синим цветом).

5. Прямая, соответствующая целевой функции, на рисунке представлена пунктирной линией.

6. Прямую передвигаем параллельно самой себе вверх (направление указано стрелкой), поскольку именно при движении в этом направлении значение целевой функции увеличивается. Последней точкой многоугольника решений, с которой соприкоснется передвигаемая прямая, прежде чем покинет его, является точка C. Это и есть точка, соответствующая оптимальному решению задачи.

7. Осталось вычислить координаты точки C. Она является точкой пересечения прямых (1) и (2). Решив совместно уравнения этих прямых, найдем: $x_1^* = 24, x_2^* = 4$. Подставляя найденные величины в целевую функцию, найдем ее значение в оптимальной точке $f(\bar{x}^*) = 64$.

Таким образом, для максимизации прибыли компании следует ежедневно выпускать 24 клюшки и 4 шахматных набора. Реализация такого плана обеспечит ежедневную прибыль в размере $64.

2.1.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить технологию решения задач ЛП разными методами.

2.2 Практическое занятие №3,4 (4 часа).

Тема: «Двойственная задача ЛП»

2.2.1 Задание для работы:

1. Решения двойственной задачи ЛП

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Рассмотрим двойственные задачи в общей форме.

Прямая задача:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max\ ,$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
\ldots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\
a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}
$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,l};\ l \le n\right).$$

Двойственная задача:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \mathbf{min}$$

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\
\ldots \\
a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{mi}y_m \ge c_i, \\
a_{1,i+1}y_1 + a_{2,i+1}y_2 + \ldots + a_{m,i+1}y_m = c_{i+1}, \\
\ldots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_m,
\end{cases}
$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,k};\ k \le m\right).$$

Двойственная задача по отношению к прямой составляется следующим образом:

1. Целевая функция исходной задачи задаётся на максимум, а в двойственной – на минимум.

2. Матрицы коэффициентов прямой и двойственной задач получаются друг из друга заменой строк столбцами, а столбцов – строками (операция транспонирования):

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad
A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots \\ a_{1n}\ a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче (и наоборот).

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в ограничениях исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи являются коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

Задача 7. Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$$f = -x_1 + 2x_2 \to \mathbf{max},$$

$$2x_1 - x_2 \ge 1,$$

$$-x_1 + 4x_2 \le 24,$$

$$x_1 - x_2 \le 3,$$

$$x_1 + x_2 \ge 5,$$

$$x_i \ge 0.$$

Поскольку прямая задача на максимум, то приведём все неравенства системы ограничений к виду «£» (обе части первого и четвёртого неравенства умножим на –1):

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 - x_2 \le -5. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & f \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица:

$$A_1^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & z \end{pmatrix}.$$

Сформулируем двойственную задачу:

$$z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0.$$

Теоремы двойственности

Сначала сформулируем *основное неравенство теории двойственности.*

Пусть имеется пара двойственных задач. Для любых допустимых решений $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ прямой и двойственной задач справедливо неравенство

$$f(X) \le z(Y)$$

или в координатном виде

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Теперь сформулируем *достаточный признак оптимальности.*

Если X^* и Y^* – допустимые решения соответственно прямой и двойственной задач, для которых справедливо равенство

$$f(X^*) = z(Y^*),$$

то X^* – оптимальное решение прямой задачи, а Y^* – двойственной задачи.

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Первая теорема двойственности. *Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причём оптимальные значения их целевых функций равны*:

$f_{\max} = z_{\min}$ или $f(X^*) = z(Y^*)$.

Если целевая функция одной из задач не достигает оптимума, то условия другой задачи противоречивы.

Экономический смысл первой теоремы двойственности состоит в следующем.

План производства X^* и набор цен ресурсов Y^* оптимальны тогда и только тогда, когда прибыль (выручка) от продукции, найденная при «внешних» (известных заранее) ценах $c_1, c_2, \ldots, c_n$, равна затратам на ресурсы по «внутренним» (определяемым только из решения задачи) ценам $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Связь между двойственными задачами проявляется не только в равенстве оптимальных значений их целевых функций (первая теорема двойственности).

Пусть даны двойственные задачи.

Прямая:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Двойственная:

$$z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_1 \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_2 \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge c_m, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,m}).$$

Если каждую из этих задач решать симплекс-методом, то необходимо привести их к каноническому виду, для чего в систему ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

прямой задачи следует ввести m неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$, а в систему ограничений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j \quad (j = \overline{1,n})$$

двойственной задачи следует ввести n неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+i}, \ldots, y_{m+n}$, где – *номер неравенства, в которое введена дополнительная переменная* $x_{n+i} \ge 0 \ (y_{m+i} \ge 0)$. *Системы ограничений каждой из задач примут соответственно вид:*

прямая задача –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

двойственная задача –

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j \quad (j = \overline{1,n})$$

Соответствие между переменными двойственных задач иллюстрирует таблица:
Переменные прямой задачи
Первоначальные
Дополнительные

$$\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
y_{m+1} & y_{m+2} & \dots & y_{m+j} & \dots & y_{m+n} \\
x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{n+m} \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
y_1 & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_m
\end{array}$$

Дополнительные

2.2.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить технологию решения двойственной задачи.

2.3 Практическое занятие №5,6 (4 часа).

Тема: «Решение задач теории игр в чистых и смешанных стратегиях»

2.3.1 Задание для работы:

1. Теория игр.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

Теория игр - это логико-математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу - в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Теория игр - раздел теории исследования операций. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, чуть реже в других общественных науках - социологии, политологии, психологии, этике и других. Начиная с 1970-х годов её взяли на вооружение биологи для исследования поведения животных и теории эволюции. Очень важное значение она имеет для искусственного интеллекта и кибернетики, особенно с проявлением интереса к интеллектуальным агентам.

Оптимальные решения или стратегии в математическом моделировании предлагались ещё в XVIII в. Задачи производства и ценообразования в условиях олигополии, которые стали позже хрестоматийными примерами теории игр, рассматривались в XIX в. А. Курно и Ж. Бертраном. В начале XX в. Э. Ласкер, Э. Цермело, Э. Борель выдвигают идею математической теории конфликта интересов.

Математическая теория игр берёт своё начало из неоклассической экономики. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в классической книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна “Теория игр и экономическое поведение” (англ. Theory of Games and Economic Behavior).

Американский математик Дж. Нэш в 1949 году написал диссертацию по теории игр, а через 45 лет получил Нобелевскую премию по экономике. Дж. Нэш после окончания Политехнического института Карнеги с двумя дипломами — бакалавра и магистра — поступил в Принстонский университет, где посещал лекции Джона фон Неймана. В своих трудах Дж. Нэш разработал принципы “управленческой динамики”.

Первые концепции теории игр анализировали антагонистические игры, когда есть проигравшие и выигравшие за их счет игроки. Нэш разрабатывает методы анализа, в которых все участники или выигрывают, или терпят поражение. Эти ситуации получили названия "**равновесие по Нэшу**", или "некооперативное равновесие", в ситуации стороны используют оптимальную стратегию, что и приводит к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое изменение ухудшит их положение. Эти работы Дж. Нэша сделали серьёзный вклад в развитие теории игр, были пересмотрены математические инструменты экономического моделирования. Дж. Нэш показывает, что классический подход к конкуренции Адама Смита, когда каждый сам за себя, не оптимален. Более оптимальными являются такие стратегии, когда каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других.

Хотя теория игр первоначально и рассматривала экономические модели, вплоть до 1950-х она оставалась формальной теорией в рамках математики. Но уже с 1950-х гг. начинаются попытки применить методы теории игр не только в экономике, но в биологии, кибернетике, технике, антропологии. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьёзно заинтересовались военные, которые увидели в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений.

В 1960—1970 гг. интерес к теории игр угасает, несмотря на значительные математические результаты, полученные к тому времени. С середины 1980-х гг. начинается активное практическое использование теории игр, особенно в экономике и менеджменте. За последние 20 — 30 лет значение теории игр и интерес значительно растет, некоторые направления современной экономической теории невозможно изложить без применения теории игр.

Большим вкладом в применение теории игр стала работа Томаса Шеллинга, нобелевского лауреата по экономике 2005 г. "Стратегия конфликта". Т. Шеллинг рассматривает различные "стратегии" поведения участников конфликта. Эти стратегии совпадают с тактиками управления конфликтами и принципами анализа конфликтов в конфликтологии (это психологическая дисциплина) и в управлении конфликтами в организации (теория менеджмента). В психологии и других науках используют слово "игра" в других смыслах, нежели чем в математике. Некоторые психологи и математики скептически относятся к использованию этого термина в других смыслах, сложившихся ранее. Культурологическое понятие игры было дано в работе Йохана Хёйзинги "Homo Ludens" (статьи по истории культуры), автор говорит об использовании игр в правосудии, культуре, этике; говорит о том, что игра старше самого человека, так как животные тоже играют. Понятие игры встречается в концепции Эрика Бёрна "Игры, в которые играют люди, люди, которые играют в игры". Это сугубо психологические игры, основанные на транзакционном анализе. Понятие игры у Й. Хёйзинга отличается от интерпретации игры в теории конфликтов и математической теории игр.

Математическая теория игр сейчас бурно развивается, рассматриваются динамические игры. Однако, математический аппарат теории игр является предельно затратным и на самом деле субъективным. Математики применяют его для оправданных задач: политика, экономика монополий и распределения рыночной власти и т. п., часто скрывая реально используемые совсем не математические механизмы принятия решений. Ряд известных ученых стали Нобелевскими лауреатами по экономике за вклад в развитие теории игр, которая описывает социально-экономические процессы. Дж. Нэш, благодаря своим исследованиям в теории игр, стал одним из ведущих специалистов в области ведения "холодной войны", что подтверждает масштабность задач, которыми занимается теория игр.

Нобелевскими лауреатами по экономике за достижения в области теории игр и экономической теории стали: Роберт Ауманн, Райнхард Зелтен, Джон Нэш, Джон Харсаньи, Уильям Викри, Джеймс Миррлис, Томас Шеллинг, Джордж Акерлоф, Майкл

Спенс, Джозеф Стиглиц, Леонид Гурвиц, Эрик Мэскин, Роджер Майерсон, Ллойд Шепли, Элвин Рот.

Представление игр

Игры представляют собой строго определённые логико-математические объекты. Игра образуется игроками, набором стратегий для каждого игрока и указания выигрышей, или платежей, игроков для каждой комбинации стратегий. Большинство кооперативных игр описываются характеристической функцией, в то время как для остальных видов чаще используют нормальную или экстенсивную форму.

Характеризующие признаки игры - как математической модели ситуации:

- наличие нескольких участников;
- неопределенность поведения участников, связанная с наличием у каждого из них нескольких вариантов действий;
- различие (несовпадение) интересов участников;
- взаимосвязанность поведения участников, поскольку результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех участников;
- наличие правил поведения, известных всем участникам.

Применение теории игр

Теория игр, как один из подходов в прикладной математике, применяется для изучения поведения человека и животных в различных ситуациях. Первоначально теория игр начала развиваться в рамках экономической науки, позволив понять и объяснить поведение экономических агентов в различных ситуациях. Позднее область применения теории игр была расширена на другие социальные науки; в настоящее время теория игр используется для объяснения поведения людей в политологии, социологии и психологии. Теоретико-игровой анализ был впервые использован для описания поведения животных Рональдом Фишером в 30-х годах XX века (хотя даже Чарльз Дарвин использовал идеи теории игр без формального обоснования). В работе Рональда Фишера не появляется термин “теория игр”. Тем не менее, работа по существу выполнена в русле теоретико-игрового анализа. Разработки, сделанные в экономике, были применены Джоном Майнардом Смитом в книге “Эволюция и теория игр”. Теория игр используется не только для предсказания и объяснения поведения; были предприняты попытки использовать теорию игр для разработки теорий этичного или эталонного поведения. Экономисты и философы применяли теорию игр для лучшего понимания хорошего (достойного) поведения. Вообще говоря, первые теоретико-игровые аргументы, объясняющие правильное поведения, высказывались ещё Платоном.

Описание и моделирование

Первоначально теория игр использовалась для описания и моделирования поведения человеческих популяций. Некоторые исследователи считают, что с помощью определения равновесия в соответствующих играх они могут предсказать поведение человеческих популяций в ситуации реальной конфронтации. Такой подход к теории игр в последнее время подвергается критике по нескольким причинам. Во-первых, предположения, используемые при моделировании, зачастую нарушаются в реальной жизни. Исследователи могут предполагать, что игроки выбирают поведения, максимизирующее их суммарную выгоду (модель экономического человека), однако на практике человеческое поведение часто не соответствует этой предпосылке. Существует множество объяснений этого феномена — нерациональность, моделирование обсуждения, и даже различные мотивы игроков (включая альтруизм). Авторы теоретико-игровых моделей возражают на это, говоря, что их предположения аналогичны подобным предположениям в физике. Поэтому даже если их предположения не всегда выполняются, теория игр может использовать как разумная идеальная модель, по аналогии с такими же моделями в физике. Однако, на теорию игр обрушился новый вал критики, когда в результате экспериментов было выявлено, что люди не следуют равновесным стратегиям на практике. Например, в играх “Сороконожка”, “Диктатор” участники часто не используют профиль стратегий, составляющий равновесие по Нешу. Продолжаются споры о значении подобных экспериментов. Согласно другой точке зрения, равновесие по Нешу не является предсказанием ожидаемого поведения, но лишь объясняет, почему популяции, уже находящиеся в равновесии по Нешу, остаются в этом состоянии. Однако вопрос о том, как эти популяции приходят к равновесию Неша, остается открытым. Некоторые исследователи в поисках ответа на этот вопрос переключились на изучение эволюционной теории игр. Модели эволюционной теории игр предполагают ограниченную рациональность или нерациональность игроков. Несмотря на название, эволюционная теория игр занимается не только и не столько вопросами естественного отбора биологических видов. Этот раздел теории игр изучает модели биологической и культурной эволюции, а также модели процесса обучения.

Нормативный анализ (выявление наилучшего поведения)

С другой стороны, многие исследователи рассматривают теорию игр не как инструмент предсказания поведения, но как инструмент анализа ситуаций с целью выявления наилучшего поведения для рационального игрока. Поскольку равновесие Неша включает стратегии, являющиеся наилучшим откликом на поведение другого игрока, использование концепции равновесия Неша для выбора поведения выглядит вполне обоснованным. Однако, и такое использование теоретико-игровых моделей подверглось критике. Во-первых, в некоторых случаях игроку выгодно выбрать стратегию, не входящую в равновесие, если он ожидает, что другие игроки также не будут следовать равновесным стратегиям. Во-вторых, знаменитая игра “Дилемма заключенного” позволяет привести ещё один контрпример. В “Дилемме заключенного” следование личным интересам приводит к тому, что оба игрока оказываются в худшей ситуации в сравнении с той, в которой они пожертвовали бы личными интересами.

2.3.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить технологию теории игр.

2.4 Практическое занятие №7, 8 (4 часа).

Тема: «Решение задачи теории игр в условиях риска и неопределённости»

2.4.1 Задание для работы:

1.Статистические игры.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Эти игры иначе называются играми с экспериментом. Всегда ли выгодно проводить эксперимент? Если цена игры (допустим, потери) плюс затраты на эксперимент меньше цены игры без эксперимента, то в этом случае имеет смысл перейти к статистической игре.

Опишем статистическую игру на **пример**е. Предположим, что у нас имеется матрица потерь первого игрока.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Пусть δ_1, δ_2, δ_3 – чистые стратегии первого игрока, θ_1, θ_2 – чистые стратегии второго игрока. Найдем $a^* = 3$, $a_* = 2$, $a^* \neq a_*$. Проведем эксперимент, который имеет следующие исходы: t_1, t_2, t_3. Предположим, что известны вероятности **P**(t_i/θ_j):

	t_1	t_2	t_3
θ_1	0,6	0,25	0,15
θ_2	0,2	0,3	0,5

Обозначим через S_{ijk} стратегию первого игрока. Она интерпретируется так: если исходом эксперимента является t_1, то первый игрок применит стратегию S_i, если t_2 – стратегию S_j, если t_3 – S_k; i, j, k =1, 2, 3.

Определенные таким образом стратегии будут чистыми стратегиями первого игрока в статистической игре. Всего таких стратегий будет $B_*^k = n^k$, где n – число стратегий первого игрока, k – число исходов в эксперименте. В нашем случае таких исходов будет $3^3=27$.

$B_*^k = n^k$. Определим потери первого игрока: $L(S_{ijk}, q_1)$, $L(S_{ijk}, q_2)$.

Например,

$L(S_{231}, q_1) = 0{,}6\times1 + 0{,}25\times3 + 0{,}15\times0 = 1{,}35$,

$L(S_{231}, q_2) = 0{,}2\times3 + 0{,}3\times2 + 0{,}5\times5 = 3{,}7$.

Мы получаем в данном случае 27 пар таких значений и получаем игру порядка 27´2 с матрицей потерь, элементами которой и являются эти значения. Составление этой матрицы предлагается читателю (см.задачу 11.1)

Эту задачу можно решить обычными способами. Но мы перейдем к S-игре.

На плоскости отмечаем точки $S_{ijk}(L(S_{ijk}, q_1), L(S_{ijk}, q_2))$ (схематически – см.рис.1).

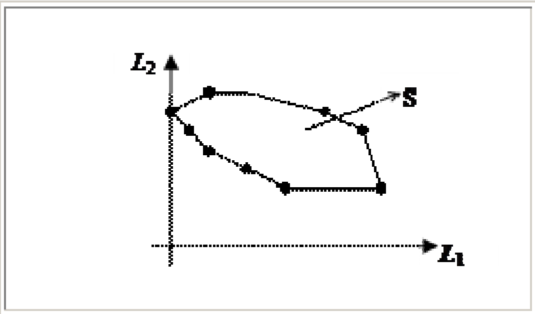


Рис.1

Наряду с исходными, чистыми стратегиями рассматриваем смешанные стратегии первого игрока.

$$x = (x_1, \ldots, x_{27}), \quad \sum_{i=1}^{27} x_i = 1.$$

Класс всех смешанных стратегий S есть некоторое выпуклое множество:

$$S = \sum_{k=1}^{27} x_k S_k, \quad x_k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, 27, \quad \sum_{k=1}^{27} x_k = 1.$$

Решение в этой игре выглядит так: x = (x_1, ¼, x_{27}). Для нахождения оптимальной стратегии можно применить два подхода: минимаксный и байесовский.

Минимаксный подход

Алгебраически: рассмотрим матрицу 27´2, затем процедурой доминирования приходим к матрице 7´2 и решаем задачу как игру n´2.

2.4.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить технологию статистических игр.

2.5 Практическое занятие №9, 10 (4 часа).

Тема: «Многокритериальные решения при объективных моделях»

2.5.1 Задание для работы:

1. Многокритериальные решения при объективных моделях.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

Для анализа и исследования реальных объектов исследователи создают их копии или упрощенные образы, описанные с помощью формального языка. Целями создания модели являются обычно: использование её в решении задач, которые трудно решать на реальном объекте; лучшее понимание объекта; построение улучшенного объекта путем внесения изменений в модель. Естественным требованием к модели является её идентичность реальному объекту. Мы изучаем внешний мир, создавая модели. Мы улучшаем искусственные системы, используя их модели. В обоих случаях роль моделей чрезвычайно велика.

Необходимо подчеркнуть, что модели, применяемые в естественных науках, отличаются от моделей, используемых в экономике. Экономические модели описывают процессы, в которых важную роль играют люди. Совершаемые ими действия и их результаты находят отражение в модели.

Модели, описывающие поведение людей, активно используются в исследовании операций. Под исследованием операций понимают применение математических количественных методов для обоснования решений во всех областях человеческой деятельности.

Основными этапами решения любой задачи в исследовании операций являются:

1. построение модели
2. выбор критерия оптимальности
3. нахождение оптимального решения

Для подхода исследования операций характерны следующие особенности.

1. Используемые модели носят объективный характер. Модель отражает существующую реальность, т. е. опираясь на одни и те же данные, различные специалисты-аналитики должны получать одинаковые результаты.

2. Руководитель получает научно-обоснованное решение. Аналитик исследует реальную ситуацию и пытается построить адекватную модель. В этой работе сам ЛПР чаще всего не нужен. Он дает заказ и получает готовое решение.

3. Существует объективный критерий успехов в применении методов исследования операций. Если проблема, требующая решения, ясна и критерий определен, то аналитический метод сразу показывает насколько новое решение лучше старого.

Многокритериальность

При широком применении методов исследования операций аналитики стали сталкиваться с задачами, где имеется не один, а несколько критериев оценки качества решения.

Опыт использования методов математического моделирования и компьютеров в различных областях человеческой деятельности привел к пониманию многих принципиальных трудностей, возникающих при их внедрении в реальную практику. Оказалось, что ЛПР, при принятии решения учитывает огромное число показателей, которые только в редких случаях удаётся представить в виде одного критерия.

Стало очевидно, что методы исследования операций, которые успешно применялись при моделировании различных ситуаций, совершенно недостаточны для решения более сложных проблем, которые по сути своей являются многокритериальными. Многие факторы (социальные, организационные, политические, психологические и т. д.), имеющие существенное влияние на альтернативы не поддаются формализации. Такого рода задачи имеют следующую характерную особенность – модель, описывающая множество допустимых решений объективна, но качество решения оценивается по многим критериям.

Для выбора наилучшего варианта решения необходим компромисс между оценками по разным критериям. В условиях задачи отсутствует информация, позволяющая найти такой компромисс. Следовательно, он не может быть определен на основе объективных расчетов.

Анализ многих реальных практических проблем, с которыми сталкивались специалисты, естественным образом привел к появлению класса многокритериальных задач.

Задачи со многими критериями имеют следующие особенности:

-Задача имеет уникальный, новый характер – нет статистических данных, позволяющих обосновать соотношения между различными критериями

-На момент принятия решения принципиально отсутствует информация, позволяющая объективно оценить возможные последствия выбора того или иного варианта решения. Это может быть сделано лишь людьми на основе их опыта и интуиции.

^ **Разные типы проблем**

Подходы исследования операций и принятия решений существенно различаются, так как они направлены на принципиально разные проблемы принятия решений, существующие в окружающем нас реальном мире.

Так, в одной классификации, предложенной в 1958 году Г. Саймоном и А. Нотоэллом, выделяются так называемые хорошо и слабо структурированные проблемы.

Хорошо структурированные, или количественно сформулированные проблемы – те, в которых существенные зависимости хорошо определены и могут быть выражены в числах или символах, получающих численные оценки.

Неструктурированные проблемы, содержащие лишь описание важнейших ресурсов, признаков и характеристик, количественные зависимости между которыми совершенно неизвестны.

Слабоструктурированные, или смешанные проблемы, которые содержат как качественные, так и количественные элементы.

Можно сказать, что типичные проблемы исследования операций являются хорошо структурированными.

По иному обстоит дело в многокритериальных задачах. Здесь часть информации, необходимой для полного и однозначного определения к решению, принципиально отсутствует. Поэтому такие проблемы являются слабоструктурированными.

Слабоструктурированные и неструктурированные проблемы исследуются в рамках научного направления, называемого принятием решений при многих критериях.

Появление многокритериальности привело к принципиальному изменению характера решаемой задачи.

^ **4.Многокритериальные модели принятия решений в условиях определенности.**

Рассмотрим следующую модель задачи ПР:

X- множество альтернатив;

Y- множество исходов;

$f_i : Y \to R, i = 1,...,m$ - множество показателей качества (критериев);

$\varphi : X \to Y$ - детерминистская функция, отображающая множество альтернатив во множество исходов. (*R* – множество вещественных чисел.).

Таким образом, мы здесь предполагаем, что каждому решению $x \in X$

Соответствует единственный элемент $y \in Y$, где $y = \varphi(y)$. «Качество» или «полезность» исхода y, а тем самым и соответствующего решения x оценивается несколькими (m) числами в соответствии с зависимостями f_i. Для определенности будем полагать, что функции f_i - максимизируются.

С помощью суперпозиции $J_i(x) = f_i(\varphi(x)), i = 1,...,m$ Мы имеем возможность непосредственно оценивать качество самого решения x т. е. считаем, что задано отображение

$$J : X \to F \subset R^m.$$

В результате мы приходим к очень распространенной в приложениях многокритериальной модели принятия решений, или задаче многокритериальной оптимизации вида $J_i(x) \to \max\limits_{x \in X}, i = 1,...,m, X \subset R^n$.

^ **5. Методы многокритериальной оптимизации.** Пусть рассматривается задача многокритериальной оптимизации

$$f_i(x) \to \max_{x \in D}, i = 1,...,m. \qquad (1)$$

Вначале рассмотрим традиционные «инженерные» методы многокритериальной оптимизации, сводящие задачу (1) к некоторой ее однокритериальной версии.

Рассматривая задачу (1), отметим, что в идеальном случае можно вести поиск такого решения, которое принадлежит пересечению множеств оптимальных решений всех однокритериальных задач. Однако такое пересечение обычно оказывается пустым множеством, поэтому приходится рассматривать так называемое «переговорное» множество эффективных решений (*оптимальных по Парето*).

Некоторые частные критерии могут противоречить друг другу, другие действуют в одном направлении, третьи – индеферентны, безразличны друг другу.

Поэтому процесс решения многокритериальных задач неизбежно связан с экспертными оценками, как самих критериев, так и взаимоотношений между ними.

Известен ряд методов решения задач многокритериальной оптимизации. Рассмотрим некоторые из них:

^ **Метод главного критерия.** В данном методе в качестве целевой функции выбирается один из функционалов f_i, например f_1, наиболее полно с точки зрения исследователя отражающий цель ПР. Остальные требования к результату, описываемые функционалами $f_2,..., f_m$, учитываются с помошью введения необходимых дополнительных ограничений. Таким образом, вместо задачи (1) решается другая, уже однокритериальная задача вида

$$f_1(x) \to \max_{x \in D^0}, D^0 \subseteq D;$$

$$D^0 = \{x \in D / f_i(x) \geq t_i, i = 2,...,m \}.$$

Формально получили более простую задачу поиска максимума функционала f_1 на новом допустимом множестве D^0. Добавились ограничения вида $f_i(x) \geq t_i$, показывающие что мы согласны не добываться максимальных значений для функционалов $f_2,..., f_m$, сохраняя требование их ограниченности снизу на приемлемых уровнях.

^ **Метод линейной свертки.** Он основан на линейном объединении всех частных целевых функционалов $f_1,..., f_m$ в один:

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D}; \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1. \qquad (2)$$

Весовые коэффициенты α_i могут при этом рассматриваться как показатели относительной значимости отдельных критериальных функционалов f_i.

Метод максиминной свертки. Обычно применяется в форм

$$J(x) = \min_{i} f_i(x) \to \max_{x \in D}.$$

Здесь, в отличие от метода линейной свертки, на целевой функционал $J(x)$ оказывает влияние только тот частный критерий оптимальности, которому в данной точке x соответствует наименьшее значение соответствующей функции f_i. Данный критерий определяет гарантированную нижнюю оценку для всех функционалов $f_i(x)$.

При необходимости нормировки отдельных частных целевых функционалов может быть использована «взвешенная» форма максиминного критерия:

$$J(x) = \min_{i} \alpha_i \cdot f_i(x) \to \max_{x \in D},$$

где весовые коэффициенты α_i удовлетворяют требованиям (2).

^ **Метод последовательных уступок.** Он применяется в случае, когда частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывания их важности.

Предположим, что все частные критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности. Находим максимальное значение f_1* первого по важности критерия в области допустимых решений путем решения однокритериальной задачи.

$f_1 (X) \to max,$

$X \in Q.$

Затем, исходя из практических соображений и принятой точности, назначается величина допустимого отклонения $\delta_1 > 0$ (экономически оправданные уступки) критерия f_1 и находится максимальное значение второго критерия f_2* при условии, что значение первого критерия не должно отклоняться от своего максимального значения более чем на величину допустимой уступки, т. е. решается задача:

$f_2(X) \to max$

$f_1(X) \ge f_1* - \delta_1$

$X \in Q$

Снова назначается величина уступки $\delta_2 > 0$ по второму критерию, которая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного максимума третьего частного критерия:

$f_3(X) \to max$

$f_1(X) \ge f_1* - \delta_1$

$f_2(X) \ge f_2* - \delta_2$

$X \in Q$

Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока не будет выявлено максимальное значение последнего по важности критерия f_m.
Рассмотрим следующий **пример**: для выпуска 2-х видов продукции используются 3 вида ресурсов. Известна матрица норм расхода A, цены Qна ресурсы, цены реализации P продукции и запасы B ресурсов.

1 2 20

A= 1 1 Q = (1, 1, 4), P = (17, 12), B= 15

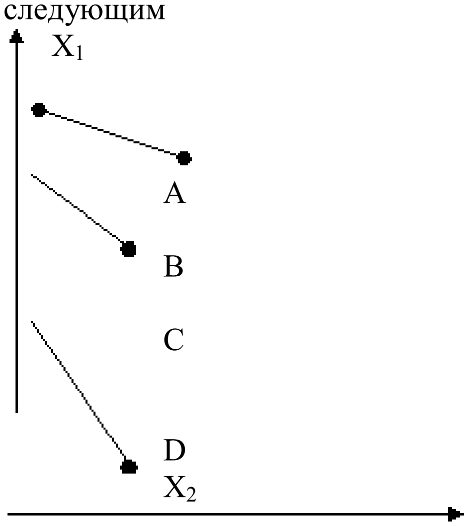
1 39

На основе исходной информации могут быть определены 2 критерия: прибыли и выручка с двумя переменными X_1 – выпуск продукции 1-го вида и X_2 – выпуск продукции 2-го вида. Тогда задача может быть записана следующим образом:
^ $F_1 = 17 X_1 + 12 X_2 \to max$ – *выручка*

$F_2 = (17\ X_1 + 12\ X_2) - X_1(1\cdot1 + 1\cdot1 + 4\cdot3) - X_2(2\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot4) \rightarrow max$ – *прибыль.*

$$\begin{cases} X_1 + 2\,X_2 \le 20 \\ X_1 + X_2 \le 15 \\ X_1 + X_2 \le 39 \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Графически множество допустимых решений может быть изображено следующим образом:



Значения критериев в угловых точках заданы в таблице:

	A(0;10)	*B(10;5)*	*C(12;3)*	*D(13;0)*
F_1	*120*	*230*	*240*	*221*
F_2	*50*	*55*	*51*	*39*

Окончательный выбор останется за ЛПР.

Критерий оптимальности итальянского экономиста В. Парето применяется при решении таких задач, когда оптимизация означает улучшение одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшались.

Определение: Решение задачи (1) $X^* \in Q$ называется эффективным (*оптимальным по Парето*) решением, если не существует такого другого решения $X \in Q$, что

$f_i(X) \ge f_i(X^*),\ i = 1, m,$ (3)

Причем хотя бы для одного значения i имеет место строгое неравенство.

Определение: Множество допустимых решений, для которых невозможно одновременно улучшить все частные показатели эффективности (т. е. улучшить хотя бы один из них, не ухудшая остальных), принято называть **областью Парето,** или областью компромиссов, а принадлежащие ей решения **эффективными**, или **оптимальными по Парето.**

В общем случае эффективные решения не эквивалентны друг другу, так что про два оптимальных по Парето решения нельзя сказать, какое из них лучше. Поэтому при решении многокритериальных задач необходимо дополнительное изучение эффективных решений.

В рассмотренном выше примере точки *B* и *C* определяют решения оптимальные по Парето. Сказать однозначно какое из этих решений лучше нельзя, поэтому необходимо получить от ЛПР дополнительную информацию для принятия решения.

2.5.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить многокритериальные решения при объективных моделях.

2.6 Практическое занятие №11,12 (4 часа).

Тема: «Многокритериальная теория полезности»

2.6.1 Задание для работы:

1. Решение многокритериальной задачи принятия решений.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

Математическая модель многокритериальной оптимизации

В теории *многокритериальной оптимизации* (МКО) решаются задачи принятия решений одновременно по нескольким критериям. Задача МКО ставится следующим образом: требуется найти числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие системе ограничений

$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i$, $i = 1,2,\dots,m$, (3.1)

для которых функции

$z_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1,2,\dots,K$, (3.2)

достигают максимального значения.

Множество точек $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе (3.1),образует *допустимую область* $D \subset R^n$. Элементы множества D называются*допустимыми решениями* или *альтернативами*, ачисловые функции f_k, – *целевыми функциями*, или *критериями*, заданными на множестве *D*. В формулировке задаче (3.1)-(3.2) присутствует K целевых функций. Эти функции отображают множество в множество $F \subset R^K$, которое называется*множеством достижимости*.

В векторной форме математическую модель МКО (3.1)-(3.2) можно записать следующим образом:

$f(X) = (f_1(X), \dots, f_K(X)) \to \max$ при $X \in D$. (3.3)

Здесь $f(X)$ – вектор-функция аргумента .

Впервые проблема МКО возникла у итальянского экономиста В.Парето в 1904 г. при математическом исследовании товарного обмена. В дальнейшем интерес к проблеме МКО усилился в связи с разработкой и использованием вычислительной техники, и уже позднее стало ясно, что многокритериальные задачи возникают также и в технике, например, при проектировании сложных технических систем.

В отличие от задач оптимизации с одним критерием в МКО имеется неопределенность целей. Действительно, существование решения, максимизирующего несколько целевых функций, является редким исключением, поэтому с математической точки зрения задачи МКО являются неопределенными и решением может быть только компромиссное решение. Например, при поиске плана предприятия, макимизирующего прибыль и минимизирующего затраты очевидна невозможность достижения обеих целей одновременно, так как чем больше затраты, тем больше должно быть продукции и тем больше прибыль.

Ввиду этого в теории МКО понятие оптимальности получает различные толкования, и поэтому сама теория содержит три основных направления:

1. Разработка концепции оптимальности.

2. Доказательство существования решения, оптимального в соответствующем смысле.

3. Разработка методов нахождения оптимального решения.

Оптимальность по Парето

Если функции $f_1, f_2, \ldots, f_K$ достигают максимум в одной и той же точке $X^* \in D$, то говорят, что задача (3.3) имеет*идеальное решение*.

Случаи существования идеального решения в многокритериальной задаче крайне редки. Поэтому основная проблема при рассмотрении задачи (3.3) – формализация *принципа оптимальности*, т.е. определение того, в каком смысле «оптимальное» решение лучше других. В случае отсутствия «идеального решения» в задаче (3.3)*ищется компромиссное решение.*

Для всякой альтернативы $X \in D$ вектор из значений целевых функций $\left(f_1(X), f_2(X), \ldots, f_K(X)\right)$ является*векторной оценкой* альтернативы X. Векторная оценка альтернативы содержит полную информацию о ценности (полезности) этой альтернативы для главного конструктора системы, или,как принято говорить в системном анализе, лица, принимающего решение (ЛПР). Сравнение любых двух исходов заменяется сравнением их векторных оценок.

Пусть $X_1, X_2 \in D$. Если для всех критериев имеют место неравенства $f_k(X_2) \geq f_k(X_1)$, , причем хотя бы одно неравенство строгое, то говорят, что решение X_2 *предпочтительнее* решения X_1. Условие предпочтительности принято обозначать в виде $X_2 \hbar X_1$.

Определение (оптимальность по Парето). В задаче МКО точка $X_0 \in D$ называется оптимальной по Парето, если не существует другой точки , которая была бы предпочтительнее, чем X_0.

Точки, оптимальные по Парето, образуют множество точек, оптимальных по Парето (множество неулучшаемых или эффективных точек) $D_p \subset D$.

Оптимальные решения многокритериальной задачи следует искать только среди элементов множества альтернатив D_p. В этой области ни один критерий не может быть улучшен без ухудшения хотя бы одного из других. Важным свойством множества Парето является возможность «выбраковывать» из множества альтернатив Dзаведомо неудачные, уступающие другим по всем критериям. Обычно решение многокритериальной задачи должно начинаться с выделения множества . При отсутствии дополнительной информации о системе предпочтений ЛПР должно принимать решение именно из множества Парето .

В векторной оптимизации кроме множества Парето в общем случае нет общих правил, по которому варианту отдается предпочтение по сравнению с другим вариантом .

Часто решение многокритериальной задачи состоит в построении множества Парето-оптимальных точек и дальнейшем выборе одной из них на основе «здравого смысла» или с помощью какого-либо другого критерия.

Во всех случаях задача многокритериальной оптимизации каким-то способом сводится к задаче с одним критерием. Существует много способов построения такого окончательного критерия, однако ни одному из них нельзя заранее отдать наибольшее предпочтение. Для каждой задачи этот выбор должен делаться ЛПР.

Заметим, что целевые функции отображают множество точек, оптимальных по Парето $D_p \subset D \subset R^n$ в множество $F_p \subset F \subset R^K$, которое называется*множеством Парето*.

3.3. Построение эффективной области для двух критериев

Пример .Пусть математическая модель задачи МКО с двумя критериями имеет вид:

$z_1 = 2x_1 + x_2 \to \max$,

$z_2 = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 100 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Требуется определить множество точек, оптимальных по Парето.

Допустимая область представляет собой четверть круга радиуса 10 с центром в начале координат, расположенную в 1-ом квадранте (рис. 3.1).

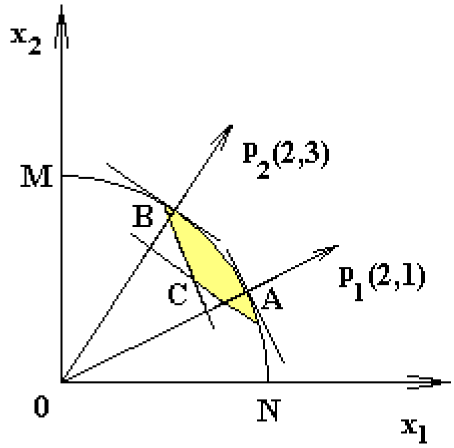


Рис. 3.1. Множество Парето-оптимальных точек

Найдем точки, оптимальные по критериям z_1 и z_2 в отдельности. Для этого построим векторы, имеющие направления векторов $p_1(2;1)$ и $p_2(2;3)$, и перпендикулярно им – линии уровня. По линиям уровня определяются оптимальные точки A и B, расположенные на окружности.

Проверим произвольную точку $C \in D$ *на Парето-оптимальность*. Через неё проведём линии уровня целевых функций и рассмотрим конус, образованный пересечением полуплоскостей, ограниченных этими линиями и лежащих в направлении увеличения соответствующих целевых функций (*конус доминирования для альтернативы* C). На рис. 3.1 этот конус закрашен. Очевидно, что точку можно улучшить по обоим критериям, и поэтому она не является эффективной. Множество эффективных точек (точек, оптимальных по Парето) расположено на дуге окружности AB. Таким образом, эффективные точки лежат только между точками оптимума, полученными при решении многокритериальной задачи отдельно по каждому из критериев.

Найдем координаты точки . Нормальный вектор к окружности имеет координаты $\overline{n}_1 = (2x_1; 2x_2)$, а к линии уровня 1-ой целевой функции – $\overline{n}_2 = (2;1)$. Из условия коллинеарности векторов следует, что их координаты пропорциональны, то есть $\frac{2x_1}{2} = \frac{2x_2}{1}$. Значит, координаты точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 100 \end{cases}.$$

Из решения системы следует, что точка имеет координаты $A\left(4\sqrt{5};\ 2\sqrt{5}\right)$.

Аналогично найдем, что точка имеет координаты $B\left(\frac{20}{\sqrt{13}};\ \frac{30}{\sqrt{13}}\right)$.

Пример .Для задачи, сформулированной в примере 3.1, определить множество достижимости и множество Парето.

Рассмотрим, что происходит в пространстве критериев для отображения с помощью вектора целевых функций.

Составим табл. 3.1, в которой поместим характерные точки допустимой области и соответствующие им образы в пространстве критериев.

Таблица 3.1

Точка в области	x_1	x_2	Образ точки в множестве F	$z_1 = 2x_1 +$	$z_2 = 2x_1 +$
O	0	0	O'	0	0
M	0	10	M'	10	30
N	10	0	N'	20	20
	$4\sqrt{5} \approx$	$2\sqrt{5} \approx$	A'	$10\sqrt{5} \approx 2$	$14\sqrt{5} \approx 3$
	$\frac{20}{\sqrt{13}} \approx$	$\frac{30}{\sqrt{13}} \approx$	B'	$\frac{70}{\sqrt{13}} \approx 19$	$\frac{130}{\sqrt{13}} \approx 36$

Для двух заданных критериев на рис. 3.2 представлено множество достижимости $F \subset R^2$ и множество Парето $F_p \subset F$, являющееся образом множества , оптимальных по Парето точек. Эти множества получены на основе данных табл. 3.1.

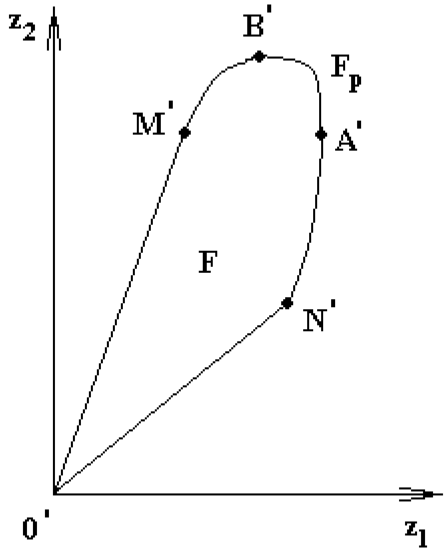


Рис. 3.2. Множество достижимости и множество Парето

Множество F_p на рис. 3.2 представляет собой дугу $A'B'$. Для двух критериев это множество образует «северо-восточную» границу множества достижимости.

Таким образом, решением задачи МКО является множество точек, оптимальных по Парето . Окончательный выбор всегда остается за ЛПР.

Проблемы и классификация методов решения задач многокритериальной оптимизации

При решении задач МКО приходится решать специфические вопросы, связанные с неопределенностью целей и несоизмеримостью критериев. Перечислим основные проблемы, возникающие при разработке методов МКО.

1. Проблема нормализации критериев, то есть приведение критериев к единому (безразмерному) масштабу измерения.

2. Проблема выбора принципа оптимальности, то есть установление, в каком смысле оптимальное решение лучше всех остальных решений.

3. Проблема учета приоритетов критериев, возникающая в тех случаях, когда из физического смысла ясно, что некоторые критерии имеют приоритет над другими.

4. Проблема вычисления оптимума задачи МКО. Речь идет о том, как использовать методы линейной, нелинейной, дискретной оптимизации для вычисления оптимума задач с определенной спецификой.

При решении многокритериальной задачи часто возникает необходимость *нормализации (нормирования)* критериев $f_k(X)$, то есть приведение всех критериев к единому масштабу и безразмерному виду. В дальнейшем будем считать, что все критерии неотрицательны, то есть $f_k(X) \geq 0$ для всех .

Наиболее часто используется замена критериев их безразмерными относительными величинами: $\lambda_k(X) = \dfrac{f_k(X)}{f_k^*}$, где $f_k^* = \max\limits_{X \in D} f_k(X)$. Нормализованные критерии обладают двумя важными свойствами: во-первых, они являются безразмерными величинами, и, во-вторых, они удовлетворяют неравенству $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1$ для любого . Эти свойства позволяют сравнивать критерии между собой.

Основные методы, применяемые при решении задач МКО, представлены на рис. 3.3.

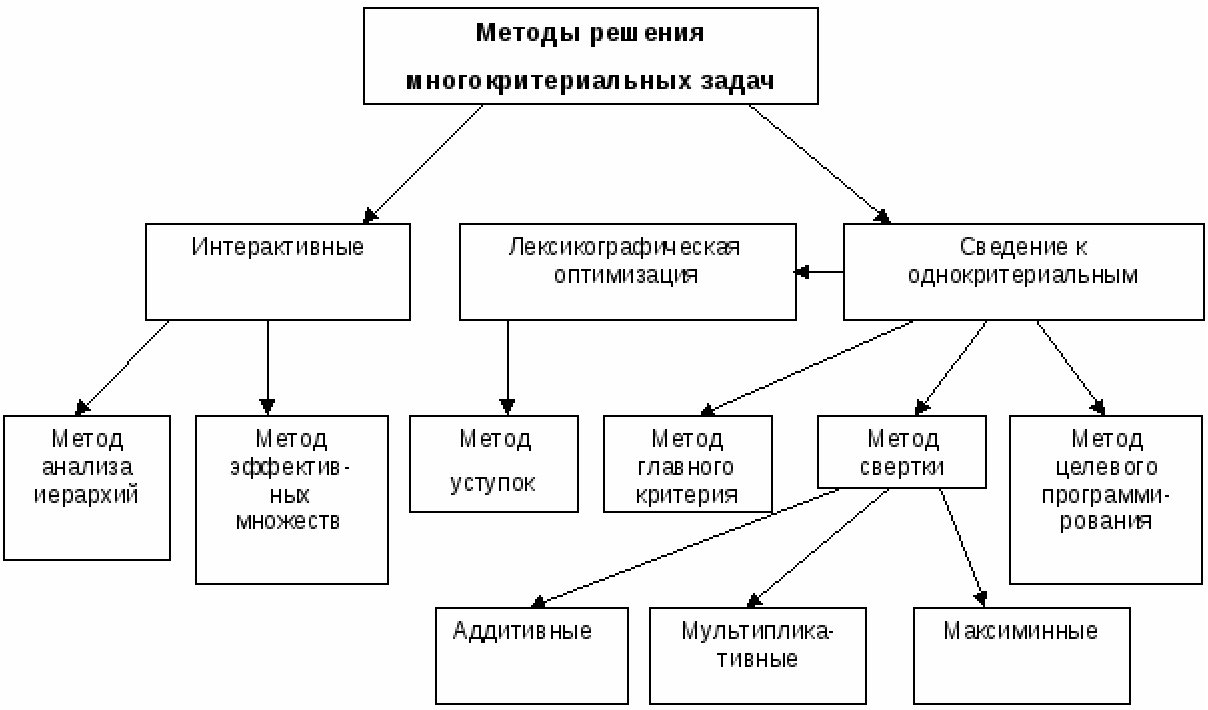


Рис. 3.3. Классификация методов решения многокритериальных задач

В следующих пунктах приведенные здесь методы рассматриваются более подробно.

Методы, основанные на свертывании критериев

Вместо частных критериев $f_1, f_2, \dots, f_K$ рассматривается один скалярный критерий, полученный путем комбинации частных критериев. Различают аддитивный и мультипликативный методы свертывания критериев.

Метод аддитивной свертки критериев

Пусть критерии соизмеримы, например, нормированы и определен вектор весовых коэффициентов критериев $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$, характеризующих важность соответствующего критерия. Это значит, что $\alpha_i \geq \alpha_j$,если критерий f_i имеет приоритет над критерием f_j. При этом

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1, \quad \alpha_k \geq 0.$$

Для *аддитивного* метода строится новая целевая функция

$$f(X) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k f_k(X)$$

и решается задача оптимизации скалярного критерия

$z = f(X) \to \max$ при условии .

Можно доказать, что решение задачи со скалярным критерием является эффективным для задачи (3.3).

Пример.Рассмотрим задачу МКО с двумя критериями

$z_1 = x_1 \to \max$

$z_2 = x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Решим задачу оптимизации по каждому критерию в отдельности. Используя графический метод (рис. 3.4а), получим оптимальное решение по первому критерию $X_1^* = (2;0)$ и оптимальное решение по второму критерию $X_2^* = (0;1)$.

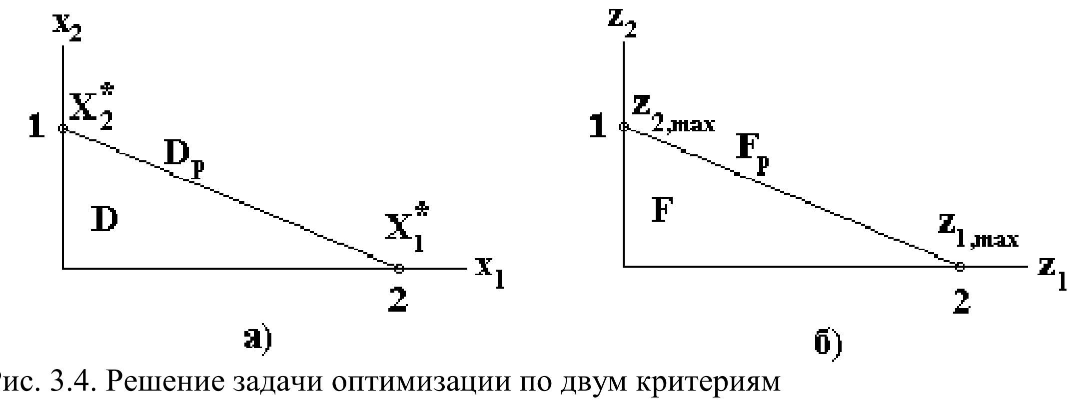


Рис. 3.4. Решение задачи оптимизации по двум критериям

На рис. 3.4б изображено множество достижимости F и указаны значения $z_{1,\max} = 2$ и $z_{2,\max} = 1$. Выполним свертку критериев:

$$z = \alpha_1 f_1(X) + \alpha_2 f_2(X) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \to \max,$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0$.

Целевая функция является линейной, поэтому в зависимости от α_1 и α_2 оптимальными будут угловые точки допустимой области X_1^*, или X_2^*, или все точки отрезка $X_1^* X_2^*$. Полагая, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, получим оптимальное решение $X^* = X_1^* = (2;0)$.

Метод мультипликативной свертки критериев

Для *мультипликативного* метода подход к решению аналогичен, только целевая функция имеет вид

$f(X) = \prod_{k=1}^{K} f_k^{\alpha_k}(X)$, причем $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1, \ \alpha_k \geq 0$.

Основной и очень существенный недостаток методов свертывания критериев состоит в субъективности выбора коэффициентов α_k.

3.6. Метод главного критерия

Выбирается основной (главный) среди критериев. Пусть это, например, $f_1(X)$.Все остальные целевые функции переводятся в разряд ограничений по приведенному ниже правилу.

В соответствии с требованиями ЛПР на все критерии накладываются определенные ограничения, которым они должны удовлетворять. Вводится система контрольных показателей $\tilde{f}_k$, относительно которых по всем критериям должны быть достигнуты значения, не меньше заданных значений :

$f_k(X) \geq \tilde{f}_k$, .

После выбора основного критерия и установления нижних границ для остальных критериев решается задача однокритериальной оптимизации:

$f_1(X) \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} f_k(X) \geq \tilde{f}_k, \ k = 1,2,...,K \\ X \in D \end{cases}.$$

Этот способ наиболее употребителен в инженерной практике.

Пример. Методом главного критерия решить задачу из примера 3.3.

Назначим значения контрольных показателей: $\tilde{f}_1 = 0{,}4$, $\tilde{f}_2 = 0{,}4$, и пусть первый критерий выбран в качестве основного. Тогда получим задачу с одним критерием:

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 0{,}4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Из рис. 3.4а ясно, что оптимальным решением является $X^* = (1{,}2;\ 0{,}4)$, $z_{\max} = 1{,}2$. Заметим, что решение, полученное этим методом может не быть эффективным.

Метод последовательных уступок

Другой способ носит название метода *последовательных уступок*. В этом методе критерии нумеруются в порядке убывания важности. Пусть критерии записаны в порядке уменьшения их важности. Тогда должны быть выполнены следующие действия.

1-й шаг. Решается однокритериальная задача по 1-му критерию:

$z_1^* = \max_{X \in D} f_1(X)$.

2-й шаг. Назначается разумная с инженерной точки зрения уступка Δz_1, составляется и решается новая задача оптимизации по 2-му критерию:

$$z_2^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \geq z_1^* - \Delta z_1}} f_2(X)$$
.

3-й шаг. Назначается уступка для 2-го критерия Δz_2, составляется и решается задача оптимизации по 3-му критерию:

$$z_3^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \geq z_1^* - \Delta z_1 \\ f_2(X) \geq z_2^* - \Delta z_2}} f_3(X)$$
.

Процесс назначения уступок по каждому критерию и решения однокритериальных задач продолжается, пока не дойдем до последнего – го шага.

-й шаг. Назначается уступка для $K-1$– го критерия Δz_{K-1}, составляется и решается задача оптимизации по последнему – му критерию:

$$z_K^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \geq z_1^* - \Delta z_1 \\ f_2(X) \geq z_2^* - \Delta z_2 \\ \dots \\ f_{K-1}(X) \geq z_{K-1}^* - \Delta z_{K-1}}} f_K(X)$$
.

Основной недостаток методов, использующих ограничения на критерии, состоит в субъективности выбора контрольных показателей и в субъективности выбора уступок. При использовании метода последовательных уступок следует помнить, что уступки могут быть несоизмеримы между собой, поэтому надо предварительно организовать нормализацию критериев. Кроме того, в общем случае уже со 2-го шага решение может оказаться не оптимальным по Парето.

Пример.В примере 2.5 была рассмотрена задача по критерию максимизации общей прибыли от реализации готовой продукции. Математическая модель была сформулирована в виде целевой функции (2.5) и ограничений (2.6)-(2.7). Согласно оптимальному плану предприятие должно изготовить 12 шкафов и 32 стола, и наибольшая прибыль составит 320 ден.ед.

Дополнительно предположим, что предприятие заинтересовано в эффективном использовании оборудования. При этом известны цены за 1 час простоя оборудования каждого вида: для строгальных станков – 3 ден.ед., для фрезерных станков – 9 ден.ед., для шлифовальных станков – 2 ден.ед.

Требуется составить задачу оптимизации с двумя критериями и решить ее методом уступок.

Обозначим через z_2 суммарные издержки предприятия за простой оборудования. Поскольку время простоя равно

$144-(4x_1+3x_2)$–для строгальных станков,

$64-(2x_1+x_2)$–для фрезерных станков,

$120-(2x_1+3x_2)$–для шлифовальных станков,

то суммарные издержки равны

$$z_2 = 3(144-4x_1-3x_2)+9(64-2x_1-x_2)+2(120-2x_1-3x_2),$$

или

$$z_2 = -34x_1 - 24x_2 + 1248 \to \min . \quad (3.4)$$

2.6.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить технологию решения многокритериальных задач принятия решений.

2.7 Практическое занятие №13, 14 (4 часа).

Тема: «Подход аналитической иерархии»

2.7.1 Задание для работы:

1. Подход аналитической иерархии.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

Подход аналитической иерархии (Analytic Hierarchy Process — AHP) широко известен в настоящее время. Мы можем найти в журналах оживленные дискуссии между противниками и сторонниками этого подхода.

При подходе MAUT одни и те же усилия ЛПР по построению функции полезности могут быть затрачены при большом и малом числе альтернатив. Не всегда такой подход является обоснованным. В случае небольшого числа заданных альтернатив (задачи первой группы) представляется разумным направить усилия ЛПР на сравнение только заданных альтернатив. Именно такая идея лежит в основе метода AHP [1].

Постановка задачи, решаемой с помощью метода AHP, заключается обычно в следующем.

Дано: общая цель (или цели) решения задачи; N критериев оценки альтернатив; п альтернатив.

Требуется: выбрать наилучшую альтернативу.

Подход AHP состоит из совокупности этапов.

1. Первый этап заключается в структуризации задачи в виде иерархической структуры с несколькими уровнями: цели-критерии—альтернативы .

2. На втором этапе ЛПР выполняет попарные сравнения элементов каждого уровня. Результаты сравнений переводятся в числа при помощи специальной таблицы (см. далее).

3. Вычисляются коэффициенты важности для элементов каждого уровня. При этом проверяется согласованность суждений ЛПР.

4. Подсчитывается количественный индикатор качества каждой из альтернатив и определяется наилучшая альтернатива.

Рассмотрим эти этапы подробнее применительно к основному методу AHP, разработанному Т. Саати [1], используя для иллюстрации приведенный выше пример выбора площадки для строительства аэропорта.

2.7.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить подход аналитической иерархии.

2.8 Практическое занятие №15, 16, 17 (6 часа).

Тема: «Методы ELECTRE»

2.8.1 Задание для работы:

1. Методы ELECTRE

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

Метод получил название от ELimination Et Choix Traduisant la REalite (франц.).

Пусть задано nобъектов, все критерии$\boldsymbol{k_j}$(j=l,…,m) измеряются по шкале интервалов или отношений. По значениям j критерия построим ориентированный граф предпочтения объектов, дуги которого указывают на факт предпочтения по$\boldsymbol{k_j}$ одних объектов над другими. Обозначим матрицу смежности вершин графа через., если по критерию$\boldsymbol{k_j}$вариант (объект)$\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$предпочтительнее$\mathbf{B}^{\boldsymbol{l}}$. В случае.

Очевидно, что для придания определенного смысла отношению предпочтения по всей совокупности критериев необходимо задать коэффициенты относительной важности (веса)

.

Для формирования логической функции, характеризующей отношение предпочтения, введем два коэффициента.

Коэффициент согласия ($b_{i,l}$), равный сумме весов критериев, по которым$\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$предпочтительнее$\mathbf{B}^{\boldsymbol{l}}$т.е.

(2.3)

Если объект *i*по всем критериям предпочтительнее объекта *l*,то$b_{i,j}$ = 1.Последнее означает, что$\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$доминирует$\mathbf{B}^{\boldsymbol{l}}$.В этой связи следует отметить, что матрицу коэффициентов согласия можно использовать для выделения подмножества эффективных объектов (оптимальных по Парето).

Если исходное множество объектов оптимально по Парето, то все элементы матрицы строго меньше единицы. Так как$b_{i,j} < 1$ то это значит, что существует хотя бы один критерий, по которому объект *i*менее предпочтительнее объекта*l*.

Это “обратное” предпочтение может быть очень существенным. Поэтому вводится в рассмотрение второй коэффициент.

Коэффициент несогласия ($d_{i,l}$) вычисляется по формуле

(2.4)

где —максимально допустимая разность значений по $\boldsymbol{k_j}$ критерию.

Если разность , то это означает, что объект *l* предпочтительнее объекта*i*независимо от значений других критериев и, значит,$\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$ должен быть исключен из исходного множества объектов. Величиныдля всех критериев задает ЛПР, исходя из своих суждений о предпочтениях объектов. В случаях, когда ЛПР затрудняется задать, её можно определить как максимальную разность значений критерия*j*на заданном множестве объектов, т.е.

Коэффициент несогласия так же, как и коэффициент согласия, меняется в интервале от нуля до единицы. Величина $d_{i,l}$ показывает, насколько “обратное предпочтение”$\mathbf{B}^{\boldsymbol{l}}$ перед$\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$ приближается к максимально допустимому.

С учетом введенных коэффициентов $b_{i,l}$и$d_{i,l}$, формальное отношение предпочтения определяется следующей логической функцией:, если

(2.5)

где *B*и*D* –заданные ЛПР пороговые значения.

Из (2.5) следует, что объект *i*предпочтительнее объекта *l* когда:

1. совокупность критериев (с учетом их важности), по которым $\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$превосходит $\mathbf{B}^{\boldsymbol{l}}$достаточно представительна. Поэтому обычно задают пороговое значение $\boldsymbol{B}$,близкое к единице;

2. обратное предпочтение $\mathbf{B}^{\boldsymbol{l}}$ перед$\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$по некоторым критериям не дает достаточно оснований (обычно порог$\boldsymbol{D}$ близок к нулю) для отказа от предположения о превосходстве объекта *l*над объектом*i*.Величины порогов $0.5 \le \boldsymbol{B} < 1$; $0 \le \boldsymbol{D} \le 1$ задаются ЛПР исходя из своих суждений о предпочтительности объектов.

Нижняя граница $\boldsymbol{B}$равна 0,5, потому что при $\boldsymbol{B}$ =0,5и $\boldsymbol{D}$=1 мы получим полносвязанный граф предпочтений, т.е. между каждой парой объектов будет обязательно установлено отношение предпочтения. Даже может получиться, что предпочтение будет установлено как при сравнении$\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$ с$\mathbf{B}^{\boldsymbol{l}}$так и при сравнении$\mathbf{B}^{\boldsymbol{l}}$ с$\mathbf{B}^{\boldsymbol{i}}$. Это следует из того, что для вычисляемых по формуле (2.3)коэффициентов согласия выполняется следующее неравенство:$b_{i,l} + b_{l,i} \ge 1$.

Для заданных порогов $\boldsymbol{B}$и$\boldsymbol{D}$, используя (2.5), получим обобщенный граф предпочтений $\|C_{i,l}\|$, причем этот граф будет не полностью связанным и не обязательно транзитивным, т.е. в нем могут присутствовать циклы.

Замкнутый цикл можно рассматривать как равноценность соответствующих объектов. Поэтому нетранзитивность можно устранить, осуществляя “стягивание” циклов, т.е. заменить замкнутый контур одной вершиной, считая, что все объекты этого контура равнопредпочтительны. Однако информацию о стягиваемых циклах необходимо предоставить ЛПР для содержательного анализа, возможно, что оно не будет согласно с равнопредпочтительностью этих объектов и тогда, по своему усмотрению, может ввести поправку в обобщенный граф и устранить цикл.

В результате получим не связанный граф, который отражает отношение предпочтения между объектами. Причем множество объектов (групп объектов) будут не сравнимы (объекты 6и 1нарис.2.4). Следует отметить, что чем меньше***B***и больше***D***), тем обобщенный граф будет более связным, но вместе с тем следует ожидать в нем большое число циклов. Поэтому рекомендуется строить обобщенный граф предпочтения, начиная с больших значений***B***и малых ***D***.Дело в том, что чем ближе значения порога***B***к единице, а ***D***к нулю, тем жестче требования к установлению предпочтения. Если, например, при***B***=0,9а***D***=0,15 получили несколько$\mathbf{C}_{i,l}$=1, то в этом случае объекты$\mathbf{B}^{l}$ следует исключить из дальнейшего рассмотрения как бесперспективные с точки зрения поставленной задачи выделения наиболее предпочтительного объекта. Тем самым сократится исходное множество объектов.

Затем можно уменьшить порог ***B***или увеличить ***D***, анализируя сокращенное множество объектов.

Вышеописанная процедура исключения объектов допустима в случаях, когда величину в формуле (2.4)для определения коэффициента несогласности ЛПР задаёт само, и тогдане зависит от исходных значений критериев. В этом случае значения коэффициентов$b_{i,l}$и$d_{i,l}$ не зависят от исходного множества объектов.

В последующих модификациях метода ELECTREдля установления отношения предпочтения используются коэффициенты, отличные от описанных выше$b_{i,l}$и$d_{i,l}$.

При сравнении двух объектов *i*и *l* по одному критерию$\boldsymbol{k_j}$ могут устанавливаться три типа отношений:

1)отношение безразличия (~),когда разность для ЛПР не существенна, поэтому выбирается такое пороговое значениеq_j, что присчитается$\mathbf{B}^{i}$~$\mathbf{B}^{l}$;

2)отношение слабого предпочтения (ф),когда для ЛПР разность уже играет определенную роль, но не очень большую. Для установления этого отношения вводится еще одно пороговое значение $p_j>q_j$. При этом считается, что$\mathbf{B}^{i}$ф$\mathbf{B}^{l}$, если;

), которое устанавливается между объектамиф3)отношение строгого предпочтения (*i*и *l*, если . Отметим, что при вычислении коэффициента согласия$b_{i,l}$ используется отношение строгого порядка для всех критериев, при этом в общем случае порогиp_j и q_jмогут зависеть от значений критериев сравниваемых объектов, часто в таких случаях используется линейная зависимость:

Таким образом, по каждому критерию $\boldsymbol{k_j}$между парой объектов устанавливается одно из вышеуказанных отношений. Все множество критериев*m*разбивается на три подмножества:–подмножество, для которого между объектами*i*и *l* установлено отношение безразличия,–подмножество с отношением слабого предпочтения и –подмножество с отношением строгого предпочтения.

Подобно коэффициенту согласия, для каждой пары объектов с учетом весов критериев вычисляются коэффициенты безразличия, слабого и строгого предпочтения. Устанавливая пороговые значения для каждого коэффициента, строятся обобщенные графы для дальнейшего анализа ЛПР.

2.8.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить метод ELECTRE.