ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.10 Теория принятия решений

Направление подготовки *09.03.01 Информатика и вычислительная техника*

Профиль образовательной программы *Автоматизированные системы обработки информации и управления*

Форма обучения *заочная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).
Тема: «Задачи линейного программирования»
1.1.1 Вопросы лекции:
1. Классификация задач принятия решений
2. Формы задач линейного программирования.
3. Геометрический метод решения задачи линейного программирования.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:
1. Классификация задач принятия решений

Задачи принятия решений отличаются большим многообразием, классифицировать их можно по различным признакам, характеризующим количество и качество доступной информации. В общем случае задачи принятия решений можно представить следующим набором информации [8, 17, 18]: , где Т- постановка задачи (например, выбрать лучшую альтернативу или упорядочить весь набор); А - множество допустимых альтернативных вариантов; К- множество критериев выбора; Х- множество методов измерения предпочтений (например, использование различных шкал); F- отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок (исходы); G - система предпочтений эксперта; D - решающее правило, отражающее систему предпочтений. Любой из элементов этого набора может служить классификационным признаком принятия решений. Рассмотрим традиционные классификации: 1. 1. По виду отображения F. Отображение множества А и К может иметь детерминированный характер, вероятностный или неопределенный вид, в соответствии с которым задачи принятия решений можно разделить на задачи в условиях риска и задачи в условиях неопределенности. 2. 2. Мощность множества К. Множество критериев выбора может содержать один элемент или несколько. В соответствии с этим задачи принятия решений можно разделить на задачи со скалярным критерием и задачи с векторным критерием (многокритериальное принятие решений). 3. 3. Тип системы G. Предпочтения могут формироваться одним лицом или коллективом, в зависимости от этого задачи принятия решений можно классифицировать на задачи индивидуального принятия решений и задачи коллективного принятия решений.

2. Формы задач линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования* (в дальнейшем ЗЛП) может быть сформулирована как задача нахождения наибольшего значения линейной функции

$$f(x)=\sum_{i=1} c_j x_j = cx \qquad (1.1)$$

на некотором множестве $D Ì R^n$, где x D удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}\ x_1 + a_{1,2}\ x_2 + \ldots + a_{1,n}\ x_n \le b_1,\\
&a_{2,1}\ x_1 + a_{2,2}\ x_2 + \ldots + a_{2,n}\ x_n \le b_2,\\
&\ldots\\
&a_{m,1}\ x_1 + a_{m,2}\ x_2 + \ldots + a_{m,n}\ x_n \le b_m, \qquad (1.2)\\
&a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \ldots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1},\\
&\ldots\\
&a_{m+l,1}x_1 + a_{m+l,2}x_2 + \ldots + a_{m+l,n}x_n = b_{m+l},
\end{aligned}$$

и, возможно, ограничениям

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,..., $x_j \ge 0$,..., $x_n \ge 0$. (1.3)

* Напомним, что частные примеры, сводящиеся к задаче линейного программирования, были описаны во введении.

Не умаляя общности, можно считать, что в системе (1.2) первые m ограничений являются неравенствами, а последующие — l-уравнениями. Очевидно, этого всегда можно добиться за счет простого переупорядочения ограничений. Относительно направления знака неравенства будем предполагать, что левая часть меньше или равна правой. Добиться этого можно, умножив на (-1) обе части тех неравенств, которые имеют противоположный знак. Ограничения (1.3), вообще говоря, могут быть рассмотрены как частный случай ограничений в форме неравенств, но в силу особой структуры их обычно выделяют отдельно и называют *условиями неотрицательности* (или*тривиальными ограничениями).*

Дополнительно следует заметить, что выбор типа искомого экстремума (максимума или минимума) также носит относительный характер. Так, задача поиска максимума функции

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.4)$$

эквивалентна задаче поиска минимума функции

$$-f(x)=\sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j\,. \qquad (1.5)$$

Часто условия задачи (1.1)-(1.3), содержащей ограничения только типа неравенств, бывает удобно записывать в сокращенной матричной форме

$f(x) = cx \to \max$, $A_x \le b$, $x \ge 0$, (1.6)

где c и x — векторы из пространства R^n, b — вектор из пространства R^m, а A — матрица размерности m x n.

Задачу линейного программирования, записанную в форме (1.1)-(1.3), называют **общей задачей линейного программирования** (ОЗЛП).

Если все ограничения в задаче линейного программирования являются уравнениями и на все переменные x_j наложены условия неотрицательности, то она называется задачей линейного программирования в канонической форме, или **канонической задачей линейного программирования** (КЗЛП). В матричной форме КЗЛП можно записать в следующем виде:

$$f(x)=cx\to\max,\ D=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\ge 0\}\,. \qquad (1.7)$$

Поскольку любая оптимизационная задача однозначно определяется целевой функцией f и областью D, на которой отыскивается оптимум (максимум), будем обозначать эту задачу парой (D,f).

3. Геометрический метод решения задачи линейного программирования.

Геометрический метод решения ЗЛП – простой и наглядный способ решения стандартных ЗЛП с двумя переменными:

$$F=c_1x_1+c_2x_2\to\max(\min) \qquad (1.8)$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\ge b_i, \quad i=1,\dots,l,\\ &a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\le b_i, \quad i=l+1,\dots,m,\\ &x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

Рассмотрим следующие геометрические объекты.

Выпуклые множества и их свойства.

Множество точек называется *выпуклым*, если оно вместе с произвольными двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Справедливо утверждение: *пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество*.

Каждое неравенство системы ограничений (19) геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i,\ i=1,\dots,m$, или $x_1=0$, или $x_2=0$.

Поясним сказанное. Рассмотрим, например, неравенство $3x_1+4x_2\le 12$.

Посмотрим прямую L: $3x_1 + 4x_2 = 12$ (см. рис.2).

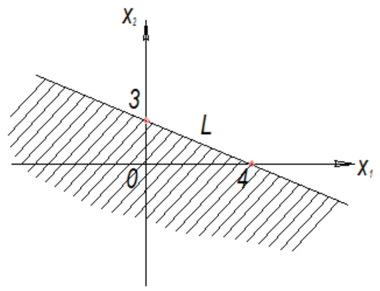


Рис. 2

Для того чтобы определить, какая полуплоскость удовлетворяет заданному неравенству, необходимо выбрать любую точку, не лежащую на L, и подставить ее координаты в неравенство. Если неравенство будет выполняться, то данная точка является допустимым решением, и полуплоскость, содержащая точку, удовлетворяет неравенству. Как правило, в качестве «пробной» берут точку $O(0; 0)$.

Подставим $x_1 = x_2 = 0$ в заданное неравенство: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \le 12$. Получим истинное утверждение. Следовательно, заданному неравенству соответствует нижняя полуплоскость (заштрихованная на рис. 2), содержащая точку $O(0; 0)$.

Полуплоскости, описываемые неравенствами (19) – выпуклые множества. Их пересечение – область допустимых решений ЗЛП, которая является также выпуклым множеством.

Это множество называют также *многоугольником решений*. Он может быть точкой, отрезком, лучом, ограниченным или неограниченным многоугольником. (Случай вырождения, когда система ограничений (19) – пустое множество и ЗЛП не имеет решения, исключается).

Ввиду неравенств $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ многоугольник решений всегда находится в первом квадранте координатной плоскости Ox_1x_2.

Для нахождения экстремума целевой функции F воспользуемся вектором набла ∇ - градиентом F:

$$\nabla = grad\,F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$$

Он показывает направление наискорейшего изменения целевой функции F.

Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ называется *линией уровня функции F*. Иными словами на множестве всех точек (x_1, x_2) линии уровня функции F она сохраняет постоянное значение α.

1. 2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Решение задач теории игр в чистых и смешанных стратегиях»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия и задачи теории игр.
2. Антагонистические матричные игры.
3. Решение игры в смешанных стратегиях.
4. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия и задачи теории игр

Теория игр занимается изучением т.н. конфликтных ситуаций, где сталкиваются интересы индивидов, партий, государств и т. п.

Как утверждал Г.Лейбниц, "...и игры заслуживают изучения; и если какой-нибудь проницательный математик посвятит себя их изучению, то получит много важных результатов, ибо нигде человек не показывает столько изобретательности, как в игре ".

Нет математической теории, которая могла бы дать алгоритм любой ре-альной игры, но существуют ситуации, подобные игровым и допускающие математический анализ.

Остановимся на классификации игр.

Интересы участников игры (игроков) могут оказаться несовпадающими и даже противоположными. В последнем случае игра называется*антагонистической*.

В игре могут участвовать два или более игроков. Случай игры с одним участником (пасьянс, управление физическим объектом и т.д.) в сущности является игрой двух лиц, где вторым участником выступает природа (судьба, рок, провидение).

Игроки могут в игре выступать каждый за себя или объединяться в группы. В последнем случае игра называется *коалиционной*.

Игры, в которых игроки осведомлены о состоянии своем и партнеров, а также о прошлом поведении участников игры, относятся к категории игр с*полной информацией* (типичные примеры - шахматы, "крестики-нолики" и т.п.). Большинство же игр протекает в условиях неполной информации, где сведения о состоянии партнеров исчерпываются лишь вероятностными характеристиками (домино, карточные игры, игры против "природы").

Антагонистическую игру, где выигрыш одного коллектива равен проигрышу другого, называют *игрой с нулевой суммой*.

Система правил, однозначно определяющая выбор хода игрока в зави-симости от сложившейся ситуации, называется *стратегией*.

Каждая фиксированная стратегия игрока, где любой ситуации сопоставлен конкретный выбор, называется *чистой*. В реальности чаще используются т.н. *смешанные* стратегии, где чистые стратегии смешиваются с некоторыми частотами.

Простейшими являются игры 2 лиц с нулевой суммой.

Пусть в такой игре игрок 1 имеет m выборов и игрок 2 - n выборов. Если игрок 1 делает свой i-й выбор, а игрок 2 - свой j-й выбор, то выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) равен Rij. Такая игра называется *матричной* и матрица $R = [\ R_{ij} \ / \ i=1..m\ ,\ j=1..n\ ]$ называется *матрицей выигрышей* (пла-тежной матрицей).

При ведении игры игрок должен ориентироваться на оптимальную политику партнера и наказывать его за отступления от таковой.

Проведем рассуждения за игрока 1. Если Я воспользуюсь i-м выбором, мой противник для минимизации моего выигрыша сделает тот из своих выборов, который даст $\min R_{ij}$. Соответственно, Я должен использовать тот выбор, который гарантирует мне выигрыш, не меньший

$$V_1 = \max_{i=1..m} \min_{j=1..n} R_{ij} .$$

Противник, рассуждая аналогично, приходит к выводу о гарантированном проигрыше, не превышающем

$$V_2 = \max_{i=1..m} \min_{j=1..n} R_{ij} .$$

Если в матрице выигрышей существует элемент $R_{kl} = V_1 = V_2$, то говорят о наличии оптимальной политики "в пространстве чистых стратегий" и оптимальными выборами для игроков соответственно являются выборы k и l. Пару (k, l) называют *седловой* точкой.

<u>Пример 1.</u> Пусть игра определяется матрицей

$$R=\begin{Vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&3&4&6\\6&6&8&10\end{Vmatrix}\quad,\quad V_1=\max\begin{Vmatrix}2\\4\\3\\6\end{Vmatrix}=6\quad,V_2=\min[\,6,6,8,10\,]=6.$$

Седловые точки - (4, 1) и (4, 2). Цена игры = 6; оптимальный выбор для игрока 1 - четвертый, для игрока 2 равнозначны первый и второй (*под ценой игры понимают гарантированный выигрыш-проигрыш при оптимальной политике обоих игроков*).

Пример 2. Пусть игра определяется матрицей

$$R=\begin{Vmatrix}5&4&3&7&6\\6&2&4&3&5\\2&7&3&5&4\\7&3&4&4&4\end{Vmatrix}\quad,\quad V_1=\max\begin{Vmatrix}3\\2\\2\\3\end{Vmatrix}=3\ ,\quad V_2=\min[\,7,7\,4,7,6\,]=4.$$

Здесь равенство $V_1 = V_2$ не выполняется; оптимальной чистой стратегии для игроков нет.

При анализе игр часто прибегают к попыткам обнаружить доминирование между строками и столбцами. Так в примере 1 элементы четвертой строки больше элементов других строк: использование выбора 4 выгоднее других выборов при любой политике противника. Противник видит, что в такой ситуации использовать выборы 3 и 4 неразумно.

Использование доминирования т.о. позволяет уменьшить размеры изучаемой матрицы исключением "невыгодных" строк и столбцов.

При отсутствии седловой точки среди чистых стратегий приходится искать таковую среди смешанных.

Если игрок 1 прибегает к своему выбору i с вероятностью P_i, а игрок 2 - к своему j-му выбору с вероятностью Q_j, то ожидаемый выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) равен $\sum_{i=1}^{m} R_{ij} P_i Q_j = P^T R Q.$

Основная теорема теории игр (теорема Джона фон Неймана) утверждает, что любая матричная игра с нулевой суммой всегда имеет седловую точку, т.е. существуют векторы P и Q такие, что

$$\max_P \min_Q P^T RQ = \min_Q \max_P P^T RQ = V,$$

(V - цена игры).

2. Антагонистические матричные игры.

Самым простым случаем, подробно разработанным в теории игр, является конечная парная игра с нулевой суммой (антагонистическая игра двух лиц или двух коалиций). Рассмотрим такую игру G, в которой участвуют два игрока А и В, имеющие противоположные интересы: выигрыш одного равен проигрышу другого. Так как выигрыш игрока А равен выигрышу игрока В с обратным знаком, мы можем интересоваться только выигрышем а игрока А. Естественно, А хочет максимизировать, а В — минимизировать а. Для простоты отождествим себя мысленно с одним из игроков (пусть это будет А) и будем его на- вывать «мы», а игрока В — «противник» (разумеется, никаких реальных преимуществ для А из этого не вытекает). Пусть у нас имеется т возможных стратегий A_1, A_2, ..., $A_т$, а у противника — п возможных стратегий B_1, B_2, ..., $B_п$ (такая игра называется игрой т X п). Обозначим a_{it} наш выигрыш в случае, если мы пользуемся стратегией A_i, а противник — стратегией B_i. Предположим, что для каждой пары стратегий A_i, B_i выигрыш (или средний выигрыш) a_{ij} нам известен. Тогда в принципе можно составить прямоугольную, таблицу (матрицу), в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие выигрыши (см. таблицу 26.1).

Если такая таблица составлена, то говорят, что игра G приведена к матричной форме (само по себе приведение игры к такой форме уже может составить трудную задачу, а иногда и практически невыполнимую, из-за необозримого множества стратегий). Заметим, что если игра приведена к матричной форме, то многоходовая игра фактически сведена к одноходовой — от игрока требуется сделать только один ход: выбрать стратегию. Будем кратко обозначать матрицу игры (a_{iJ}).

Таблица 26.1

$_i B_i$	1	2	. .	n
1	11	12	.	$1n$
2	21		. .	$2n$
3	m1	m	.	mn

Рассмотрим пример игры G (4X5) в матричной форме. В нашем распоряжении (на выбор) четыре стратегии, у противника — пять стратегий. Матрица игры дана в таблице 26.2

Давайте, поразмышляем о том, какой стратегией нам (игроку А) воспользоваться? В матрице 26.2 есть соблазнительный выигрыш «10»; нас так и тянет выбрать стратегию A_3, при которой этот «лакомый кусок» нам достанется. Но постойте: противник тоже не дурак! Если мы выберем стратегию A_3, он, назло нам, выберет стратегию B_3, и мы получим какой-то жалкий выигрыш «1». Нет, выбирать стратегию A_3 нельзя! Как же быть? Очевидно, исходя из принципа осторожности (а он — основной принцип теории игр), надо выбрать ту стратегию, при которой *наш минимальный выигрыш максимален.* Это — так называемый «принцип мини- макса»: *поступай так, чтобы при наихудшем для тебя поведении противника получить максимальный выигрыш.*

3. Решение игры в смешанных стратегиях.

Если матричная игра содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса. Если же платежная матрица не имеет седловых точек, то применение минимаксных стратегий каждым из игроков показывает, что игрок I обеспечит себе выигрыш не меньше a, а игрок II обеспечит себе проигрыш не больше b. Так как a < b, то игрок I стремится увеличить выигрыш, а игрок II уменьшить проигрыш. Если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, то игроки будут многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью. Такая стратегия в теории игр называется смешанной стратегией. Смешанная стратегия игрока — это полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями. Для применения смешанных стратегий должны быть следующие условия:

1) в игре отсутствует седловая точка;

2) игроками используется случайная смесь чистых стратегий с соответствующими вероятностями;

3) игра многократно повторяется в одних и тех же условиях;

4) при каждом из ходов один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком;

5) допускается осреднение результатов игр.

<u>*Основная теорема теории игр Дж. фон Неймана:*</u> *Любая парная конечная игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, возможно среди смешанных стратегий.*

Отсюда следует, что каждая конечная игра имеет цену, которую обозначим через g, средний выигрыш, приходящийся на одну партию, удовлетворяющий условию a £ g £ b. Каждый игрок при многократном повторении игры, придерживаясь смешанных стратегий, получает более выгодный для себя результат. Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает следующим свойством: каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Чистые стратегии игроков в их оптимальных смешанных стратегиях называются Активными.

Теорема об активных стратегиях. Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры G, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.

Смешанные стратегии игроков S1 и S2 обозначим соответственно A1 , A2 , … Am и B1 , B2 , B3 … Bn, а вероятности их использования через pA = (p1, p2, ..., pm) и qB = (q1, q2, ..., qn), где pi ³ 0, qj ³ 0, при этом $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_i = 1$.

Тогда смешанная стратегия игрока I — SI, состоящая из стратегий A1, A2, ..., Am, имеет вид:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_m \end{pmatrix}.$$

Соответственно для игрока II:

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1, B_2, \ldots, B_m \\ q_1, q_2, \ldots, q_m \end{pmatrix}.$$

Зная матрицу A для игрока I можно определить средний выигрыш (математическое ожидание) $M(A, \bar{p}, \bar{q})$:

$$M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j,$$

Игрок I, применяя свои смешанные стратегии, стремится увеличить свой средний выигрыш, достигая

$$\beta = \min_{q} \max_{p} M(A, \bar{p}, \bar{q}).$$

Игрок II добивается:

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} M(A, \bar{p}, \bar{q}).$$

Обозначим через p_A^* и q_B^* векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков I и II, при которых выполняется равенство:

$$\min_{q} \max_{p} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \max_{p} \min_{q} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = M(A, p_A^*, q_B^*).$$

При этом выполняется условие:

$$M(A, \bar{p}, q_A^*) \le M(A, p_A^*, q_B^*) \le M(A, p_A^*, \bar{q})$$

Решить игру — это означает найти цену игры и оптимальные стратегии.

Рассмотрим наиболее простой случай конечной игры 2 ´ 2 без седловой точки с матрицами:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1, A_2 \\ p_1, p_2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} B_1, B_2 \\ q_1, q_2 \end{pmatrix},$$

С платежной матрицей

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $S_1^* = (p_1^*, p_2^*)$ $(p_1 + p_2 = 1)$, $S_2^* = (q_1^*, q_2^*)$ $(q_1 + q_2 = 1)$ и цену игры g.

Каковы бы ни были действия противника, выигрыш будет равен цене игры g. Это означает, что если игрок I придерживается своей оптимальной стратегии $S_1^*(p_1, p_2)$, то игроку II нет смысла отступать от своей оптимальной стратегии $S_2^*(q_1, q_2)$.

В игре 2 ´ 2, не имеющей седловой точки, обе стратегии являются активными.

Для игрока I имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Для игрока II аналогично:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = \gamma \\ a_{12}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma \\ q_1 + aq_2 = 1 \end{cases}$$

Если g ¹ 0 и игроки имеют только смешанные оптимальные стратегии, то определитель матрицы не равен нулю, следовательно, эти системы имеют единственное решение.

Решая систему уравнений (10) и (11) находим оптимальные ешения $S_1^* = (p_1^*, p_2^*)$, $S_2^* = (q_1^*, q_2^*)$ и g:

$$\left.\begin{aligned} p_1^* &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \\ p_2^* &= \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \\ q_1^* &= \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \\ q_2^* &= \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{aligned}\right\}$$

$$\gamma = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

<u>*Пример:*</u> Дана платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Найти решение.

<u>*Решение.*</u> Так как a = 3, b = 5, то a ¹ b, то и матрица игра не имеет седловой точки. Следовательно, решение ищем в смешанных стратегиях. Запишем системы уравнений:

Для игрока I:

$$\begin{cases} 6p_1 - 2p_2 = \gamma \\ 3p_1 - 5p_2 = \gamma \\ p_1 - p_2 = 1 \end{cases}$$

Для игрока II:

$$\begin{cases} 6q_1 - 3q_2 = \gamma \\ -2q_1 - 5q_2 = \gamma \\ q_1 - q_2 = 1 \end{cases}$$

Решив эти системы находим:

$$p_1^* = \frac{7}{10}, \quad p_2^* = \frac{3}{10}, \quad q_1^* = \frac{1}{5}, \quad q_2^* = \frac{4}{5}, \quad \gamma = \frac{18}{5}.$$

Следовательно оптимальные стратегии игроков имеют вид:

$$S_1^* = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right), \quad S_2^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

4. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей$P=(a_{ij})$,$i= 1, 2, ...,m$;$j= 1,2, ...,n$. Игрок А обладает стратегиями A_1 ,A_2 ,…, A_m, игрок В — стратегиями B_1 , B_2, ..., B_n. Необходимо определить оптимальные стратегии$S^*_A= (p^*_1 ,p^*_2,..., p^*_m)$ и$S^*_B= (q^*_1 ,q^*_2,...,q^*_n)$ гдеp_i,q_j— вероятности применения соответствующих чистых стратегийA_iиB_j, $\sum p_i= 1$,$p_i\geq 0$, ($i= 1, 2,...,$ т); $\sum q_j= 1$,$q_j\geq 0$, ($j= 1,2, ...,n$).

Оптимальная стратегия S^*_Aудовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку А средний выигрыш, не меньший, чем цена игрыv, при любой стратегии игрока В и выигрыш, равный цене игрыv, при оптимальной стратегии игрока В. Без ограничения общности полагаем$v> 0$: этого можно добиться, сделав все элементы$a_{ij}\geq 0$. Если игрок А применяет смешанную стратегию$S^*_A(p^*_1 ,p^*_2,..., p^*_m)$ против любой чистой стратегииB_jигрока В, то он получает средний выигрыш, или математическое ожидание выигрыша $a_j=a_{1j}p_1+a_{2j}p_2+. ..+a_{mj}p_m$,$j=I, 2, ...,n$(т.е. элементы$j$-го столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий A_1 ,A_2 ,…, A_mи результаты складываются).

Для оптимальной стратегии S^*_Aвсе средние выигрыши не меньше цены игрыv, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq v \\ .... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq v \end{cases}$$

Каждое из неравенств можно разделить на число $v> 0$. Введем новые переменные:

$X1 =p1/v$, $x2=p2/V,...,xm=pm/V$.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1 \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases}$$

Цель игрока А — максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v.

Разделив на $v\neq 0$ равенство $p_1+ p_2+...+p_m= 1$, получаем, что переменные x_i($i=1,2,...,m$) удовлетворяют условию:$x_1+x_2+ +.. .+x_m= 1/v$. Максимизация цены игрыvэквивалентна минимизации величины $1/v$, поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения$x_i\geq 0$ ($i=1,2,...,m$), так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям и при этом линейная функция

$Z=x_1 +x_2+...+x_m$

обращалась в минимум. Это задача линейного программирования.

Решая задачу, получаем оптимальное решение $p^*_1 ,p^*_2,..., p^*_m$и оптимальную стратегиюS^*_A.

Для определения оптимальной стратегии $S^*_B = (q^*_1, q^*_2, ..., q^*_n)$ следует учесть, что игрок B стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найти $\max 1/\nu$. Переменные $q_1, q_2, ..., q_n$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le \nu \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le \nu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le \nu \end{cases}$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока B не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок A.

Если обозначить

$y_j = q_j/\nu, j = 1,2, ..., n$

то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1 \end{cases}$$

Переменные y_j, ($j = 1,2, ..., n$) удовлетворяют условию $y_1 + y_2 + ... + y_n = l/\nu$.

Игра свелась к следующей задаче.

Определить значения переменных $y_j \ge 0$, ($j = 1,2, ..., n$) , которые удовлетворяют системе неравенств и максимизируют линейную функцию

$Z' = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$,

Решение задачи линейного программирования определяет оптимальную стратегию $S^*_B = (q^*_1, q^*_2, ..., q^*_n)$. При этом цена игры

$\nu = 1/\max Z' = 1/\min Z$.

Приведем примеры экономических задач, которые описываются игровыми моделями mxnи могут быть решены методами линейного программирования.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическоезанятие №1,2 (4 часа).
Тема: «Задачи линейного программирования».
2.1.1 Задание для работы:
1. Решения задач ЛП.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности.

Несколько слов о самом термине *линейное программирование*. Он требует правильного понимания. В данном случае программирование - это, конечно, не составление программ для ЭВМ. Программирование здесь должно интерпретироваться как планирование, формирование планов, разработка программы действий.

К математическим задачам линейного программирования относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. Это, например:

- задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании;
- задача о смесях (планирование состава продукции);
- задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах (управление товарно-материальными запасами или "задача о рюкзаке");
- транспортные задачи (анализ размещения предприятия, перемещение грузов).

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования (кроме того, сюда относят: целочисленное, динамическое, нелинейное, параметрическое программирование). Это объясняется следующим:

- математические модели большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- данный тип задач в настоящее время наиболее изучен. Для него разработаны специальные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие программы для ЭВМ;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли широкое применение;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Экономико-математическая модель любой задачи линейного программирования включает: **целевую функцию**, оптимальное значение которой (максимум или минимум) требуется отыскать;**системуограничений**в виде системы линейных уравнений или неравенств;**условиенеотрицательности**переменных.

В общем виде модель записывается следующим образом:

1.Целевая функция:

$$F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max(min); \qquad (1)$$

2. Система ограничений:

$\begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\ \ldots\ +\ a_{1n}x_n\{\le\ =\ \ge\}\ \ b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\{\le=\ge\}\ b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\{\le=\ge\}\ b_m; \end{cases}$	(2)

3. Условие неотрицательности:

$x_j\ge 0, j=\overline{1,n}.$	(3)

При этом a_{ij}, b_i, c_j($i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$) - заданные постоянные величины.

Задача состоит в нахождении оптимального значения функции (1) при соблюдении ограничений (2) и (3).

Систему ограничений (2) называют функциональными ограничениями задачи, а ограничения (3) - прямыми.

Вектор $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2) и (3), называется**допустимым решением (планом)**задачи линейного программирования. План $\bar{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$, при котором функция (1) достигает своего максимального (минимального) значения, называется**оптимальным**.

2. Примеры задач линейного программирования

Далее приведем примеры некоторых типовых задач, решаемых при помощи методов линейного программирования. Такие задачи имеют реальное экономическое содержание. Сейчас лишь сформулируем их в терминах ЗЛП, а методы решения подобных задач рассмотрим ниже.

1. *Задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании.*

Общий смысл задач этого класса сводится к следующему.

Предприятие выпускает n различных изделий. Для их производства требуется m различных видов ресурсов (сырья, материалов, рабочего времени и т.п.). Ресурсы ограничены, их запасы в планируемый период составляют, соответственно, b_1, b_2,..., b_mусловных единиц.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые показывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы изделия j-го вида ( ).

Прибыль, получаемая предприятием при реализации изделия j-го вида, равна c_j.

В планируемом периоде значения величин a_{ij}, b_iиc_jостаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей.

Далее приведем простой пример задачи такого класса.

Компания специализируется на выпуске хоккейных клюшек и наборов шахмат. Каждая клюшка приносит компании прибыль в размере $2, а каждый шахматный набор - в размере $4. На изготовление одной клюшки требуется четыре часа работы на участке А и два часа работы на участке В. Шахматный набор изготавливается с затратами шести часов на участке А, шести часов на участке В и одного часа на участке С. Доступная производственная мощность участка А составляет 120 н-часов в день, участка В - 72 н-часа и участка С - 10 н-часов.

Сколько клюшек и шахматных наборов должна выпускать компания ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль?

Условия задач указанного класса часто представляют в табличной форме (см. таблицу 1).

Таблица 1 Исходные данные задачи об использовании производственных ресурсов

Производственные участки	**Затраты времени на единицу продукции, н-час**		**Доступный фонд времени, н-час**
	клюшки	наборы шахмат	

A	4	6	120
B	2	6	72
C	-	1	10
Прибыль на единицу продукции, $	2	4	

По данному условию сформулируем задачу линейного программирования.

Обозначим: x_1- количество выпускаемых ежедневно хоккейных клюшек, x_2- количество выпускаемых ежедневно шахматных наборов.

Формулировка ЗЛП:

$= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 120, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Подчеркнем, что каждое неравенство в системе функциональных ограничений соответствует в данном случае тому или иному производственному участку, а именно: первое - участку А, второе - участку В, третье - участку С.

Повторимся, методы решения ЗЛП мы будем рассматривать чуть позднее, а сейчас - пример задачи другого типа.

2. *Задача о смесях (планирование состава продукции)*.

К группе задач о смесях относят задачи по отысканию наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Иными словами, получаемые смеси должны иметь в своем составе m различных компонентов в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями n исходных материалов.

На птицеферме употребляются два вида кормов - I и II. В единице массы корма I содержатся единица вещества А, единица вещества В и единица вещества С. В единице массы корма II содержатся четыре единицы вещества А, две единицы вещества В и не содержится вещество С. В дневной рацион каждой птицы надо включить не менее единицы вещества А, не менее четырех единиц вещества В и не менее единицы вещества С. Цена единицы массы корма I составляет 3 рубля, корма II - 2 рубля.

Составьте ежедневный рацион кормления птицы так, чтобы обеспечить наиболее дешевый рацион.

Представим условие задачи в таблице 2.2.

Таблица 2 - Исходные данные задачи о смесях

Питательные вещества	**Содержание веществ в единице массы корма, ед.**		**Требуемое количество в смеси, ед.**
	корм I	корм II	
A	1	4	1
B	1	2	4
C	1	-	1
Цена единицы массы корма, р	2	4	

Сформулируем задачу линейного программирования.

Обозначим: x_1- количество корма I в дневном рационе птицы, x_2- количество корма II в дневном рационе птицы.

Формулировка ЗЛП:

$$= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 1; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

3. Графический метод решения ЗЛП

Если система ограничений задачи линейного программирования представлена в виде системы линейных неравенств с двумя переменными, то такая задача может быть решена геометрически. Таким образом, данный метод решения ЗЛП имеет очень узкие рамки применения.

Однако метод представляет большой интерес с точки зрения выработки наглядных представлений о сущности задач линейного программирования.

Геометрический (или графический) метод предполагает последовательное выполнение ряда шагов. Ниже представлен порядок решения задачи линейного программирования на основе ее геометрической интерпретации.

1. Сформулировать ЗЛП.

2. Построить на плоскости $\{x_1, x_2\}$ прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

3. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

4. Найти область допустимых решений.

5. Построить прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, где h - любое положительное число, желательно такое, чтобы проведенная прямая проходила через многоугольник решений.

6. Перемещать найденную прямую параллельно самой себе в направлении увеличения (при поиске максимума) или уменьшения (при поиске минимума) целевой функции. В результате, либо отыщется точка, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо будет установлена неограниченность функции на множестве решений.

7. Определить координаты точки максимума (минимума) функции и вычислить значение функции в этой точке.

Далее рассмотрим пример решения ЗЛП графическим методом. Для этого воспользуемся представленной выше задачей о хоккейных клюшках и шахматных наборах.

1. Выше уже приводилась формулировка задачи, здесь нам остается лишь повторить ее:

$$= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 120, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

2. Теперь построим прямые, соответствующие каждому из функциональных ограничений задачи (см. рисунок 1). Эти прямые обозначены на рисунке (1), (2) и (3).

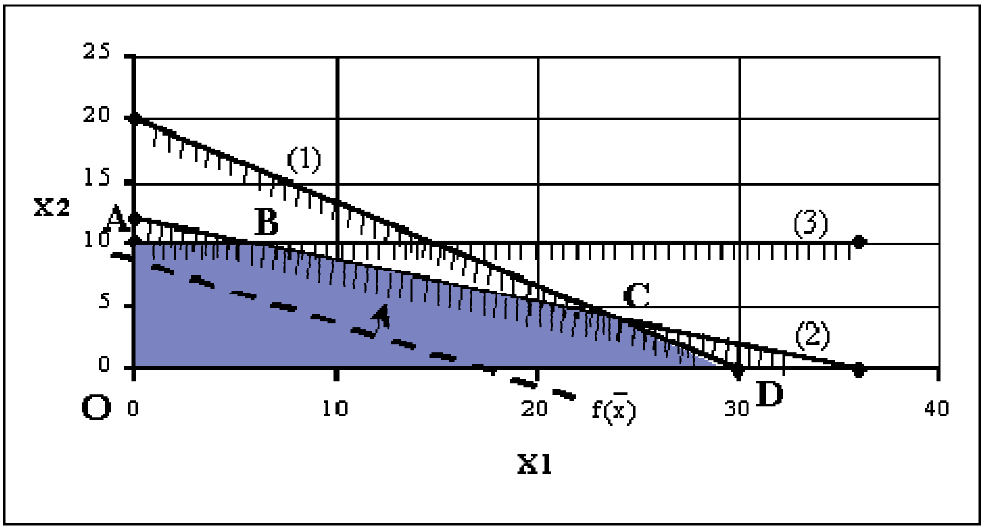


Рисунок 1. Геометрическое решение ЗЛП

3. Штрихи на прямых указывают полуплоскости, определяемые ограничениями задачи.

4. Область допустимых решений включает в себя точки, для которых выполняются все ограничения задачи. В нашем случае область представляет собой пятиугольник (на рисунке обозначен ABCDO и окрашен синим цветом).

5. Прямая, соответствующая целевой функции, на рисунке представлена пунктирной линией.

6. Прямую передвигаем параллельно самой себе вверх (направление указано стрелкой), поскольку именно при движении в этом направлении значение целевой функции увеличивается. Последней точкой многоугольника решений, с которой соприкоснется передвигаемая прямая, прежде чем покинет его, является точка С. Это и есть точка, соответствующая оптимальному решению задачи.

7. Осталось вычислить координаты точки С. Она является точкой пересечения прямых (1) и (2). Решив совместно уравнения этих прямых, найдем: $x_1^* = 24, x_2^* = 4$. Подставляя найденные величины в целевую функцию, найдем ее значение в оптимальной точке $f(\bar{x}^*) = 64$.

Таким образом, для максимизации прибыли компании следует ежедневно выпускать 24 клюшки и 4 шахматных набора. Реализация такого плана обеспечит ежедневную прибыль в размере $64.

2.1.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить технологию решения задач ЛПразными методами.

2.2 Практическое занятие №3 (2 часа).

Тема: «Двойственная задача ЛП»

2.2.1 Задание для работы:

1. Решения двойственной задачи ЛП

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Рассмотрим двойственные задачи в общей форме.

Прямая задача:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,l};\, l \le n\right).$$

Двойственная задача:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \mathbf{min}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ \ldots \\ a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{mi}y_m \ge c_i, \\ a_{1,i+1}y_1 + a_{2,i+1}y_2 + \ldots + a_{m,i+1}y_m = c_{i+1}, \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_m, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,k};\, k \le m\right).$$

Двойственная задача по отношению к прямой составляется следующим образом:

1. Целевая функция исходной задачи задаётся на максимум, а в двойственной – на минимум.

2. Матрицы коэффициентов прямой и двойственной задач получаются друг из друга заменой строк столбцами, а столбцов – строками (операция транспонирования):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\, a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots \\ a_{1n}\, a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче (и наоборот).

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в ограничениях исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи являются коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

Задача 7. Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$$f = -x_1 + 2x_2 \to \mathbf{max},$$

$$2x_1 - x_2 \ge 1,$$

$$-x_1 + 4x_2 \le 24,$$

$$x_1 - x_2 \le 3,$$

$$x_1 + x_2 \ge 5,$$

$$x_i \ge 0.$$

Поскольку прямая задача на максимум, то приведём все неравенства системы ограничений к виду «£» (обе части первого и четвёртого неравенства умножим на –1):

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 - x_2 \le -5. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & f \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица:

$$A_1^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & z \end{pmatrix}.$$

Сформулируем двойственную задачу:

$$z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0.$$

Теоремы двойственности

Сначала сформулируем *основное неравенство теории двойственности*.

Пусть имеется пара двойственных задач. Для любых допустимых решений $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ прямой и двойственной задач справедливо неравенство

$$f(X) \le z(Y)$$

или в координатном виде

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Теперь сформулируем *достаточный признак оптимальности*.

Если X^* и Y^* – допустимые решения соответственно прямой и двойственной задач, для которых справедливо равенство

$$f(X^*) = z(Y^*),$$

то X^* – оптимальное решение прямой задачи, а Y^* – двойственной задачи.

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Первая теорема двойственности. *Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причём оптимальные значения их целевых функций равны*:

$f_{\max} = z_{\min}$ или $f(X^*) = z(Y^*)$.

Если целевая функция одной из задач не достигает оптимума, то условия другой задачи противоречивы.

Экономический смысл первой теоремы двойственности состоит в следующем.

План производства X^* и набор цен ресурсов Y^* оптимальны тогда и только тогда, когда прибыль (выручка) от продукции, найденная при «внешних» (известных заранее) ценах $c_1, c_2, \ldots, c_n$, равна затратам на ресурсы по «внутренним» (определяемым только из решения задачи) ценам $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Связь между двойственными задачами проявляется не только в равенстве оптимальных значений их целевых функций (первая теорема двойственности).

Пусть даны двойственные задачи.

Прямая:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \mathbf{max},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Двойственная:

$$z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \mathbf{min},$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_1 \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_2 \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge c_m, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,m}).$$

Если каждую из этих задач решать симплекс-методом, то необходимо привести их к каноническому виду, для чего в систему ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

прямой задачи следует ввести m неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$, а в систему ограничений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j \quad (j = \overline{1,n})$$

двойственной задачи следует ввести n неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+i}, \ldots, y_{m+n}$, где – *номер неравенства, в которое введена дополнительная переменная* $x_{n+i} \ge 0 \ (y_{m+i} \ge 0)$. *Системы ограничений каждой из задач примут соответственно вид:*

прямая задача –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

двойственная задача –

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j \quad (j=\overline{1,n})$$

Соответствие между переменными двойственных задач иллюстрирует таблица:
Переменные прямой задачи
Первоначальные
Дополнительные

x_1	x_2	...	x_j	...	x_n
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+j}	...	y_{m+n}
x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+i}	...	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_1	y_2	...	y_i	...	y_m

Дополнительные

2.2.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить технологию решения двойственной задачи.

2.3 Практическое занятие №4 (2 часа).

Тема: «Решение задач теории игр в чистых и смешанных стратегиях»

2.3.1 Задание для работы:

1. Теория игр.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

Теория игр - это логико-математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу - в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Теория игр - раздел теории исследования операций. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, чуть реже в других общественных науках - социологии, политологии, психологии, этике и других. Начиная с 1970-х годов её взяли на вооружение биологи для исследования поведения животных и теории эволюции. Очень важное значение она имеет для искусственного интеллекта и кибернетики, особенно с проявлением интереса к интеллектуальным агентам.

Оптимальные решения или стратегии в математическом моделировании предлагались ещё в XVIII в. Задачи производства и ценообразования в условиях олигополии, которые стали позже хрестоматийными примерами теории игр, рассматривались в XIX в. А. Курно и Ж. Бертраном. В начале XX в. Э. Ласкер, Э. Цермело, Э. Борель выдвигают идею математической теории конфликта интересов.

Математическая теория игр берёт своё начало из неоклассической экономики. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в классической книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна “Теория игр и экономическое поведение” (англ. TheoryofGamesandEconomicBehavior).

Американский математик Дж. Нэш в 1949 году написал диссертацию по теории игр, а через 45 лет получил Нобелевскую премию по экономике. Дж. Нэш после окончания Политехнического института Карнеги с двумя дипломами — бакалавра и магистра — поступил в Принстонский университет, где посещал лекции Джона фон Неймана. В своих трудах Дж. Нэш разработал принципы “управленческой динамики”.

Первые концепции теории игр анализировали антагонистические игры, когда есть проигравшие и выигравшие за их счет игроки. Нэш разрабатывает методы анализа, в которых все участники или выигрывают, или терпят поражение. Эти ситуации получили названия "**равновесие по Нэшу**", или "некооперативное равновесие", в ситуации стороны используют оптимальную стратегию, что и приводит к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое изменение ухудшит их положение. Эти работы Дж. Нэша сделали серьёзный вклад в развитие теории игр, были пересмотрены математические инструменты экономического моделирования. Дж. Нэш показывает, что классический подход к конкуренции Адама Смита, когда каждый сам за себя, не оптимален. Более оптимальными являются такие стратегии, когда каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других.

Хотя теория игр первоначально и рассматривала экономические модели, вплоть до 1950-х она оставалась формальной теорией в рамках математики. Но уже с 1950-х гг. начинаются попытки применить методы теории игр не только в экономике, но в биологии, кибернетике, технике, антропологии. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьёзно заинтересовались военные, которые увидели в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений.

В 1960—1970 гг. интерес к теории игр угасает, несмотря на значительные математические результаты, полученные к тому времени. С середины 1980-х гг. начинается активное практическое использование теории игр, особенно в экономике и менеджменте. За последние 20 — 30 лет значение теории игр и интерес значительно растет, некоторые направления современной экономической теории невозможно изложить без применения теории игр.

Большим вкладом в применение теории игр стала работа Томаса Шеллинга, нобелевского лауреата по экономике 2005 г. "Стратегия конфликта". Т. Шеллинг рассматривает различные "стратегии" поведения участников конфликта. Эти стратегии совпадают с тактиками управления конфликтами и принципами анализа конфликтов в конфликтологии (это психологическая дисциплина) и в управлении конфликтами в организации (теория менеджмента). В психологии и других науках используют слово "игра" в других смыслах, нежели чем в математике. Некоторые психологи и математики скептически относятся к использованию этого термина в других смыслах, сложившихся ранее. Культурологическое понятие игры было дано в работе Йохана Хёйзинги "HomoLudens" (статьи по истории культуры), автор говорит об использовании игр в правосудии, культуре, этике; говорит о том, что игра старше самого человека, так как животные тоже играют. Понятие игры встречается в концепции Эрика Бёрна "Игры, в которые играют люди, люди, которые играют в игры". Это сугубо психологические игры, основанные на транзакционном анализе. Понятие игры у Й. Хёйзинга отличается от интерпретации игры в теории конфликтов и математической теории игр.

Математическая теория игр сейчас бурно развивается, рассматриваются динамические игры. Однако, математический аппарат теории игр является предельно затратным и на самом деле субъективным. Математики применяют его для оправданных задач: политика, экономика монополий и распределения рыночной власти и т. п., часто скрывая реально используемые совсем не математические механизмы принятия решений. Ряд известных ученых стали Нобелевскими лауреатами по экономике за вклад в развитие теории игр, которая описывает социально-экономические процессы. Дж. Нэш, благодаря своим исследованиям в теории игр, стал одним из ведущих специалистов в области ведения "холодной войны", что подтверждает масштабность задач, которыми занимается теория игр.

Нобелевскими лауреатами по экономике за достижения в области теории игр и экономической теории стали: Роберт Ауманн, РайнхардЗелтен, Джон Нэш, Джон Харсаньи, Уильям Викри, Джеймс Миррлис, Томас Шеллинг, Джордж Акерлоф, Майкл

Спенс, Джозеф Стиглиц, Леонид Гурвиц, Эрик Мэскин, Роджер Майерсон, Ллойд Шепли, Элвин Рот.

Представление игр

Игры представляют собой строго определённые логико-математические объекты. Игра образуется игроками, набором стратегий для каждого игрока и указания выигрышей, или платежей, игроков для каждой комбинации стратегий. Большинство кооперативных игр описываются характеристической функцией, в то время как для остальных видов чаще используют нормальную или экстенсивную форму.

Характеризующие признаки игры - как математической модели ситуации:

- наличие нескольких участников;
- неопределенность поведения участников, связанная с наличием у каждого из них нескольких вариантов действий;
- различие (несовпадение) интересов участников;
- взаимосвязанность поведения участников, поскольку результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех участников;
- наличие правил поведения, известных всем участникам.

Применение теории игр

Теория игр, как один из подходов в прикладной математике, применяется для изучения поведения человека и животных в различных ситуациях. Первоначально теория игр начала развиваться в рамках экономической науки, позволив понять и объяснить поведение экономических агентов в различных ситуациях. Позднее область применения теории игр была расширена на другие социальные науки; в настоящее время теория игр используется для объяснения поведения людей в политологии, социологии и психологии. Теоретико-игровой анализ был впервые использован для описания поведения животных Рональдом Фишером в 30-х годах XX века (хотя даже Чарльз Дарвин использовал идеи теории игр без формального обоснования). В работе Рональда Фишера не появляется термин "теория игр". Тем не менее, работа по существу выполнена в русле теоретико-игрового анализа. Разработки, сделанные в экономике, были применены Джоном Майнардом Смитом в книге "Эволюция и теория игр". Теория игр используется не только для предсказания и объяснения поведения; были предприняты попытки использовать теорию игр для разработки теорий этичного или эталонного поведения. Экономисты и философы применяли теорию игр для лучшего понимания хорошего (достойного) поведения. Вообще говоря, первые теоретико-игровые аргументы, объясняющие правильное поведения, высказывались ещё Платоном.

Описание и моделирование

Первоначально теория игр использовалась для описания и моделирования поведения человеческих популяций. Некоторые исследователи считают, что с помощью определения равновесия в соответствующих играх они могут предсказать поведение человеческих популяций в ситуации реальной конфронтации. Такой подход к теории игр в последнее время подвергается критике по нескольким причинам. Во-первых, предположения, используемые при моделировании, зачастую нарушаются в реальной жизни. Исследователи могут предполагать, что игроки выбирают поведения, максимизирующее их суммарную выгоду (модель экономического человека), однако на практике человеческое поведение часто не соответствует этой предпосылке. Существует множество объяснений этого феномена — нерациональность, моделирование обсуждения, и даже различные мотивы игроков (включая альтруизм). Авторы теоретико-игровых моделей возражают на это, говоря, что их предположения аналогичны подобным предположениям в физике. Поэтому даже если их предположения не всегда выполняются, теория игр может использовать как разумная идеальная модель, по аналогии с такими же моделями в физике. Однако, на теорию игр обрушился новый вал критики, когда в результате экспериментов было выявлено, что люди не следуют равновесным стратегиям на практике. Например, в играх "Сороконожка", "Диктатор" участники часто не используют профиль стратегий, составляющий равновесие по Нешу. Продолжаются споры о значении подобных экспериментов. Согласно другой точке зрения, равновесие по Нешу не является предсказанием ожидаемого поведения, но лишь объясняет, почему популяции, уже находящиеся в равновесии по Нешу, остаются в этом состоянии. Однако вопрос о том, как эти популяции приходят к равновесию Неша, остается открытым. Некоторые исследователи в поисках ответа на этот вопрос переключились на изучение эволюционной теории игр. Модели эволюционной теории игр предполагают ограниченную рациональность или нерациональность игроков. Несмотря на название, эволюционная теория игр занимается не только и не столько вопросами естественного отбора биологических видов. Этот раздел теории игр изучает модели биологической и культурной эволюции, а также модели процесса обучения.

Нормативный анализ (выявление наилучшего поведения)

С другой стороны, многие исследователи рассматривают теорию игр не как инструмент предсказания поведения, но как инструмент анализа ситуаций с целью выявления наилучшего поведения для рационального игрока. Поскольку равновесие Неша включает стратегии, являющиеся наилучшим откликом на поведение другого игрока, использование концепции равновесия Неша для выбора поведения выглядит вполне обоснованным. Однако, и такое использование теоретико-игровых моделей подверглось критике. Во-первых, в некоторых случаях игроку выгодно выбрать стратегию, не входящую в равновесие, если он ожидает, что другие игроки также не будут следовать равновесным стратегиям. Во-вторых, знаменитая игра “Дилемма заключенного” позволяет привести ещё один контрпример. В “Дилемме заключенного” следование личным интересам приводит к тому, что оба игрока оказываются в худшей ситуации в сравнении с той, в которой они пожертвовали бы личными интересами.

2.3.3 Результаты и выводы:В результате работы студенты должны усвоить технологию теории игр.

2.4 Практическое занятие №5 (2 часа).

Тема: «Решение задачи теории игр в условиях риска и неопределённости»

2.4.1 Задание для работы:

1.Статистические игры.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Эти игры иначе называются играми с экспериментом. Всегда ли выгодно проводить эксперимент? Если цена игры (допустим, потери) плюс затраты на эксперимент меньше цены игры без эксперимента, то в этом случае имеет смысл перейти к статистической игре.

Опишем статистическую игру на **пример**е. Предположим, что у нас имеется матрица потерь первого игрока.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Пусть δ_1, δ_2, δ_3 – чистые стратегии первого игрока, θ_1, θ_2 – чистые стратегии второго игрока. Найдем $a^* = 3$, $a_* = 2$, $a^* \neq a_*$. Проведем эксперимент, который имеет следующие исходы: t_1, t_2, t_3. Предположим, что известны вероятности $\mathbf{P}(t_i/\theta_j)$:

	t_1	t_2	t_3
θ_1	0,6	0,25	0,15
θ_2	0,2	0,3	0,5

Обозначим через S_{ijk} стратегию первого игрока. Она интерпретируется так: если исходом эксперимента является t_1, то первый игрок применит стратегию S_i, если t_2 – стратегию S_j, если t_3 – S_k; i, j, k =1, 2, 3.

Определенные таким образом стратегии будут чистыми стратегиями первого игрока в статистической игре. Всего таких стратегий будет $B_*^k = n^k$, где n – число стратегий первого игрока, k – число исходов в эксперименте. В нашем случае таких исходов будет 3^3=27.

$B_*^k = n^k$. Определим потери первого игрока: $L(S_{ijk}, q_1)$, $L(S_{ijk}, q_2)$.

Например,

$L(S_{231}, q_1) = 0{,}6\times1 + 0{,}25\times3 + 0{,}15\times0 = 1{,}35$,

$L(S_{231}, q_2) = 0{,}2\times3 + 0{,}3\times2 + 0{,}5\times5 = 3{,}7$.

Мы получаем в данном случае 27 пар таких значений и получаем игру порядка 27´2 с матрицей потерь, элементами которой и являются эти значения. Составление этой матрицы предлагается читателю (см.задачу 11.1)

Эту задачу можно решить обычными способами. Но мы перейдем к S-игре.

На плоскости отмечаем точки $S_{ijk}(L(S_{ijk}, q_1), L(S_{ijk}, q_2))$ (схематически – см.рис.1).

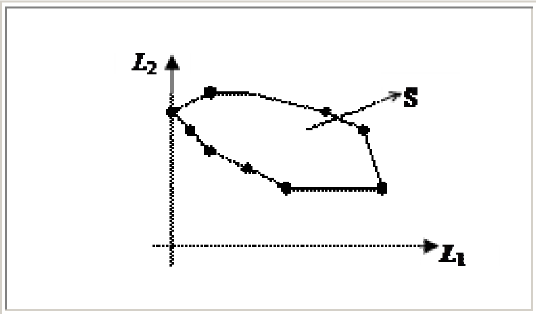


Рис.1

Наряду с исходными, чистыми стратегиями рассматриваем смешанные стратегии первого игрока.

$$x = (x_1, \ldots, x_{27}), \quad \sum_{i=1}^{27} x_i = 1.$$

Класс всех смешанных стратегий S есть некоторое выпуклое множество:

$$S = \sum_{k=1}^{27} x_k S_k, \quad x_k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, 27, \quad \sum_{k=1}^{27} x_k = 1.$$

Решение в этой игре выглядит так: x = (x_1, ¼, x_{27}). Для нахождения оптимальной стратегии можно применить два подхода: минимаксный и байесовский.

Минимаксный подход

Алгебраически: рассмотрим матрицу 27´2, затем процедурой доминирования приходим к матрице 7´2 и решаем задачу как игру n´2.

2.4.3 Результаты и выводы:В результате работы студенты должны усвоить технологию статистических игр.

2.5Практическое занятие №6 (2 часа).

Тема: «Многокритериальные решения при объективных моделях»

2.5.1 Задание для работы:

1. Многокритериальные решения при объективных моделях.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

Для анализа и исследования реальных объектов исследователи создают их копии или упрощенные образы, описанные с помощью формального языка. Целями создания модели являются обычно: использование её в решении задач, которые трудно решать на реальном объекте; лучшее понимание объекта; построение улучшенного объекта путем внесения изменений в модель. Естественным требованием к модели является её идентичность реальному объекту. Мы изучаем внешний мир, создавая модели. Мы улучшаем искусственные системы, используя их модели. В обоих случаях роль моделей чрезвычайно велика.

Необходимо подчеркнуть, что модели, применяемые в естественных науках, отличаются от моделей, используемых в экономике. Экономические модели описывают процессы, в которых важную роль играют люди. Совершаемые ими действия и их результаты находят отражение в модели.

Модели, описывающие поведение людей, активно используются в исследовании операций. Под исследованием операций понимают применение математических количественных методов для обоснования решений во всех областях человеческой деятельности.

Основными этапами решения любой задачи в исследовании операций являются:

1. построение модели
2. выбор критерия оптимальности
3. нахождение оптимального решения

Для подхода исследования операций характерны следующие особенности.

1. Используемые модели носят объективный характер. Модель отражает существующую реальность, т. е. опираясь на одни и те же данные, различные специалисты-аналитики должны получать одинаковые результаты.

2. Руководитель получает научно-обоснованное решение. Аналитик исследует реальную ситуацию и пытается построить адекватную модель. В этой работе сам ЛПР чаще всего не нужен. Он дает заказ и получает готовое решение.

3. Существует объективный критерий успехов в применении методов исследования операций. Если проблема, требующая решения, ясна и критерий определен, то аналитический метод сразу показывает насколько новое решение лучше старого.

Многокритериальность

При широком применении методов исследования операций аналитики стали сталкиваться с задачами, где имеется не один, а несколько критериев оценки качества решения.

Опыт использования методов математического моделирования и компьютеров в различных областях человеческой деятельности привел к пониманию многих принципиальных трудностей, возникающих при их внедрении в реальную практику. Оказалось, что ЛПР, при принятии решения учитывает огромное число показателей, которые только в редких случаях удаётся представить в виде одного критерия.

Стало очевидно, что методы исследования операций, которые успешно применялись при моделировании различных ситуаций, совершенно недостаточны для решения более сложных проблем, которые по сути своей являются многокритериальными. Многие факторы (социальные, организационные, политические, психологические и т. д.), имеющие существенное влияние на альтернативы не поддаются формализации. Такого рода задачи имеют следующую характерную особенность – модель, описывающая множество допустимых решений объективна, но качество решения оценивается по многим критериям.

Для выбора наилучшего варианта решения необходим компромисс между оценками по разным критериям. В условиях задачи отсутствует информация, позволяющая найти такой компромисс. Следовательно, он не может быть определен на основе объективных расчетов.

Анализ многих реальных практических проблем, с которыми сталкивались специалисты, естественным образом привел к появлению класса многокритериальных задач.

Задачи со многими критериями имеют следующие особенности:

-Задача имеет уникальный, новый характер – нет статистических данных, позволяющих обосновать соотношения между различными критериями

-На момент принятия решения принципиально отсутствует информация, позволяющая объективно оценить возможные последствия выбора того или иного варианта решения. Это может быть сделано лишь людьми на основе их опыта и интуиции.

^ **Разные типы проблем**

Подходы исследования операций и принятия решений существенно различаются, так как они направлены на принципиально разные проблемы принятия решений, существующие в окружающем нас реальном мире.

Так, в одной классификации, предложенной в 1958 году Г. Саймоном и А. Нотоэллом, выделяются так называемые хорошо и слабо структурированные проблемы.

Хорошо структурированные, или количественно сформулированные проблемы – те, в которых существенные зависимости хорошо определены и могут быть выражены в числах или символах, получающих численные оценки.

Неструктурированные проблемы, содержащие лишь описание важнейших ресурсов, признаков и характеристик, количественные зависимости между которыми совершенно неизвестны.

Слабоструктурированные, или смешанные проблемы, которые содержат как качественные, так и количественные элементы.

Можно сказать, что типичные проблемы исследования операций являются хорошо структурированными.

По иному обстоит дело в многокритериальных задачах. Здесь часть информации, необходимой для полного и однозначного определения к решению, принципиально отсутствует. Поэтому такие проблемы являются слабоструктурированными.

Слабоструктурированные и неструктурированные проблемы исследуются в рамках научного направления, называемого принятием решений при многих критериях.

Появление многокритериальности привело к принципиальному изменению характера решаемой задачи.

^ **4.Многокритериальные модели принятия решений в условиях определенности.**

Рассмотрим следующую модель задачи ПР:

X- множество альтернатив;

Y- множество исходов;

$f_i : Y \to R, i = 1,...,m$ - множество показателей качества (критериев);

$\varphi : X \to Y$- детерминистская функция, отображающая множество альтернатив во множество исходов. (*R* – множество вещественных чисел.).

Таким образом, мы здесь предполагаем, что каждому решению $x \in X$

Соответствует единственный элемент $y \in Y$, где $y = \varphi(y)$. «Качество» или «полезность» исхода y, а тем самым и соответствующего решения x оценивается несколькими (m) числами в соответствии с зависимостями f_i. Для определенности будем полагать, что функции f_i - максимизируются.

С помощью суперпозиции $J_i(x) = f_i(\varphi(x)), i = 1,...,m$ Мы имеем возможность непосредственно оценивать качество самого решения x т. е. считаем, что задано отображение

$$J : X \to F \subset R^m.$$

В результате мы приходим к очень распространенной в приложениях многокритериальной модели принятия решений, или задаче многокритериальной оптимизации вида $J_i(x) \to \max\limits_{x \in X}, i = 1,...,m, X \subset R^n$.

^ **5. Методы многокритериальной оптимизации.**

Пусть рассматривается задача многокритериальной оптимизации

$$f_i(x) \to \max_{x \in D}, i = 1,...,m. \quad (1)$$

Вначале рассмотрим традиционные «инженерные» методы многокритериальной оптимизации, сводящие задачу (1) к некоторой ее однокритериальной версии.

Рассматривая задачу (1), отметим, что в идеальном случае можно вести поиск такого решения, которое принадлежит пересечению множеств оптимальных решений всех однокритериальных задач. Однако такое пересечение обычно оказывается пустым множеством, поэтому приходится рассматривать так называемое «переговорное» множество эффективных решений (*оптимальных по Парето*).

Некоторые частные критерии могут противоречить друг другу, другие действуют в одном направлении, третьи – индеферентны, безразличны друг другу.

Поэтому процесс решения многокритериальных задач неизбежно связан с экспертными оценками, как самих критериев, так и взаимоотношений между ними.

Известен ряд методов решения задач многокритериальной оптимизации. Рассмотрим некоторые из них:

^ **Метод главного критерия.** В данном методе в качестве целевой функции выбирается один из функционалов f_i, например f_1, наиболее полно с точки зрения исследователя отражающий цель ПР. Остальные требования к результату, описываемые функционалами $f_2,..., f_m$, учитываются с помошью введения необходимых дополнительных ограничений. Таким образом, вместо задачи (1) решается другая, уже однокритериальная задача вида

$$f_1(x) \to \max_{x \in D^0}, D^0 \subseteq D;$$

$$D^0 = \{x \in D / f_i(x) \ge t_i, i = 2,...,m\}.$$

Формально получили более простую задачу поиска максимума функционала f_1 на новом допустимом множестве D^0. Добавились ограничения вида $f_i(x) \ge t_i$, показывающие что мы согласны не добываться максимальных значений для функционалов $f_2,..., f_m$, сохраняя требование их ограниченности снизу на приемлемых уровнях.

^ **Метод линейной свертки.** Он основан на линейном объединении всех частных целевых функционалов $f_1,..., f_m$ в один:

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D}; \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1. \quad (2)$$

Весовые коэффициенты α_i могут при этом рассматриваться как показатели относительной значимости отдельных критериальных функционалов f_i.

Метод максиминной свертки. Обычно применяется в форм

$$J(x) = \min_{i} f_i(x) \to \max_{x \in D}.$$

Здесь, в отличие от метода линейной свертки, на целевой функционал $J(x)$ оказывает влияние только тот частный критерий оптимальности, которому в данной точке x соответствует наименьшее значение соответствующей функции f_i. Данный критерий определяет гарантированную нижнюю оценку для всех функционалов $f_i(x)$.

При необходимости нормировки отдельных частных целевых функционалов может быть использована «взвешенная» форма максиминного критерия:

$$J(x) = \min_{i} \alpha_i \cdot f_i(x) \to \max_{x \in D},$$

где весовые коэффициенты α_i удовлетворяют требованиям (2).

^ **Метод последовательных уступок.** Он применяется в случае, когда частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывания их важности.

Предположим, что все частные критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности. Находим максимальное значение f_1* первого по важности критерия в области допустимых решений путем решения однокритериальной задачи.

$f_1 (X) \to max,$

$X \in Q.$

Затем, исходя из практических соображений и принятой точности, назначается величина допустимого отклонения $\delta_1 > 0$ (экономически оправданные уступки) критерия f_1 и находится максимальное значение второго критерия f_2* при условии, что значение первого критерия не должно отклоняться от своего максимального значения более чем на величину допустимой уступки, т. е. решается задача:

$f_2(X) \to max$

$f_1(X) \geq f_1{}^* - \delta_1$

$X \in Q$

Снова назначается величина уступки $\delta_2 > 0$ по второму критерию, которая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного максимума третьего частного критерия:

$f_3(X) \to max$

$f_1(X) \geq f_1{}^* - \delta_1$

$f_2(X) \geq f_2{}^* - \delta_2$

$X \in Q$

Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока не будет выявлено максимальное значение последнего по важности критерия f_m. Рассмотрим следующий **пример**: для выпуска 2-х видов продукции используются 3 вида ресурсов. Известна матрица норм расхода A, цены Qна ресурсы, цены реализации P продукции и запасы B ресурсов.

1 *2* *20*

A= 1 1 Q = (1, 1, 4), P = (17, 12), B= 15

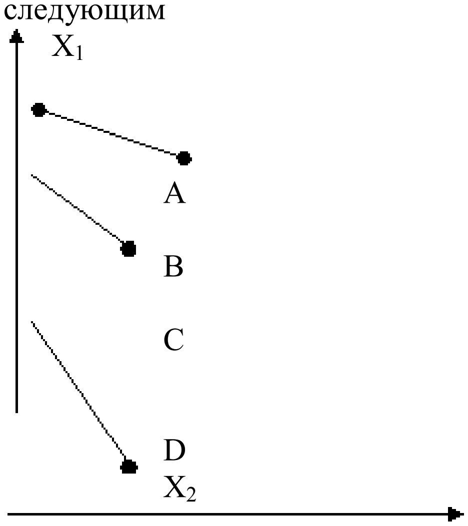
1 39

На основе исходной информации могут быть определены 2 критерия: прибыли и выручка с двумя переменными X_1– выпуск продукции 1-го вида и X_2– выпуск продукции 2-го вида. Тогда задача может быть записана следующим образом: ^ $F_1 = 17 X_1 + 12 X_2 \to max$ – *выручка*

$F_2 = (17\ X_1 + 12\ X_2) - X_1(1\cdot1 + 1\cdot1 + 4\cdot3) - X_2(2\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot4) \rightarrow max$ – *прибыль.*

$$\begin{cases} X_1 + 2\,X_2 \le 20 \\ X_1 + X_2 \le 15 \\ X_1 + X_2 \le 39 \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Графически множество допустимых решений может быть изображено следующим образом:



Значения критериев в угловых точках заданы в таблице:

	A(0;10)	*B(10;5)*	*C(12;3)*	*D(13;0)*
F_1	*120*	*230*	*240*	*221*
F_2	*50*	*55*	*51*	*39*

Окончательный выбор останется за ЛПР.

Критерий оптимальности итальянского экономиста В. Парето применяется при решении таких задач, когда оптимизация означает улучшение одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшались.

Определение: Решение задачи (1) $X^* \in Q$ называется эффективным (*оптимальным по Парето*) решением, если не существует такого другого решения $X \in Q$, что

$f_i(X) \ge f_i(X^*),\ i = 1, m,$ (3)

Причем хотя бы для одного значения i имеет место строгое неравенство.

Определение: Множество допустимых решений, для которых невозможно одновременно улучшить все частные показатели эффективности (т. е. улучшить хотя бы один из них, не ухудшая остальных), принято называть **областью Парето,** или областью компромиссов, а принадлежащие ей решения **эффективными**, или **оптимальными по Парето.**

В общем случае эффективные решения не эквивалентны друг другу, так что про два оптимальных по Парето решения нельзя сказать, какое из них лучше. Поэтому при решении многокритериальных задач необходимо дополнительное изучение эффективных решений.

В рассмотренном выше примере точки *B* и *C* определяют решения оптимальные поПарето. Сказать однозначно какое из этих решений лучше нельзя, поэтому необходимо получить от ЛПР дополнительную информацию для принятия решения.

2.5.3 Результаты и выводы: В результате работы студенты должны усвоить многокритериальные решения при объективных моделях.

2.6 Практическое занятие №7 (2 часа).

Тема: «Подход аналитической иерархии»

2.6.1 Задание для работы:

1. Подход аналитической иерархии.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

Подход аналитической иерархии (AnalyticHierarchyProcess — AHP) широко известен в настоящее время. Мы можем найти в журналах оживленные дискуссии между противниками и сторонниками этого подхода.

При подходе MAUT одни и те же усилия ЛПР по построению функции полезности могут быть затрачены при большом и малом числе альтернатив. Не всегда такой подход является обоснованным. В случае небольшого числа заданных альтернатив (задачи первой группы) представляется разумным направить усилия ЛПР на сравнение только заданных альтернатив. Именно такая идея лежит в основе метода AHP [1].

Постановка задачи, решаемой с помощью метода AHP, заключается обычно в следующем.

Дано: общая цель (или цели) решения задачи; N критериев оценки альтернатив; n альтернатив.

Требуется: выбрать наилучшую альтернативу.

Подход AHP состоит из совокупности этапов.

1. Первый этап заключается в структуризации задачи в виде иерархической структуры с несколькими уровнями: цели-критерии—альтернативы .

2. На втором этапе ЛПР выполняет попарные сравнения элементов каждого уровня. Результаты сравнений переводятся в числа при помощи специальной таблицы (см. далее).

3. Вычисляются коэффициенты важности для элементов каждого уровня. При этом проверяется согласованность суждений ЛПР.

4. Подсчитывается количественный индикатор качества каждой из альтернатив и определяется наилучшая альтернатива.

Рассмотрим эти этапы подробнее применительно к основному методу AHP, разработанному Т. Саати [1], используя для иллюстрации приведенный выше пример выбора площадки для строительства аэропорта.

2.6.3 Результаты и выводы:В результате работы студенты должны усвоитьподход аналитической иерархии.