ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

___Б1.Б.20 ЭВМ и периферийные устройства__

Направление подготовки (специальность) *09.03.01 Информатика и вычислительная техника*
Профиль подготовки (специализация) *“Автоматизированные системы обработки информации и управления”*
Форма обучения *очная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Задачи линейного программирования»

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Классификация задачи принятия решения
2. Формы задачи линейного программирования
3. Геометрический метод решения задачи линейного программирования

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Классификация задачи принятия решения

Задачи принятия решений отличаются большим многообразием, классифицировать их можно по различным признакам, характеризующим количество и качество доступной информации. В общем случае задачи принятия решений можно представить следующим набором информации:

<T, A, K, X, F, G, D>,

где T— постановка задачи (например, выбрать лучшую альтернативу или упорядочить весь набор);

A — множество допустимых альтернативных вариантов;

K— множество критериев выбора;

X— множество методов измерения предпочтений (например, использование различных шкал);

F— отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок (исходы);

G — система предпочтений эксперта;

D — решающее правило, отражающее систему предпочтений.

Любой из элементов этого набора может служить классификационным признаком принятия решений.

Рассмотрим традиционные классификации:

1. По виду отображения F. Отображение множества A и K может иметь детерминированный характер, вероятностный или неопределенный вид, в соответствии с которым задачи принятия решений можно разделить на задачи в условиях риска и задачи в условиях неопределенности.

2. Мощность множества K. Множество критериев выбора может содержать один элемент или несколько. В соответствии с этим задачи принятия решений можно разделить на задачи со скалярным критерием и задачи с векторным критерием (многокритериальное принятие решений).

3. Тип системы G. Предпочтения могут формироваться одним лицом или коллективом, в зависимости от этого задачи принятия решений можно классифицировать на задачи индивидуального принятия решений и задачи коллективного принятия решений.

Задачи принятия решений в условиях определенности. К этому классу относятся задачи, для решения которых имеется достаточная и достоверная количественная информация. В этом случае с успехом применяются методы математического программирования, суть которых состоит в нахождении оптимальных решений на базе математической модели реального объекта. Основные условия применимости методов математического программирования следующие:

1. Задача должна быть хорошо формализована, т. е. имеется адекватная математическая модель реального объекта.

2. Существует некоторая единственная целевая функция (критерий оптимизации), позволяющая судить о качестве рассматриваемых альтернативных вариантов.

3. Имеется возможность количественной оценки значений целевой функции.

4. Задача имеет определенные степени свободы (ресурсы оптимизации), т. е. некоторые параметры функционирования системы, которые можно произвольно изменять в некоторых пределах в целях улучшения значений целевой функции.

Задачи в условиях риска. В тех случаях, когда возможные исходы можно описать с помощью некоторого вероятностного распределения, получаем задачи принятия решений в условиях риска. Для построения распределения вероятностей необходимо либо иметь в распоряжении статистические данные, либо привлекать знания экспертов. Обычно для решения задач этого типа применяются методы теории одномерной или многомерной полезности. Эти задачи занимают место на границе между задачами принятия решений в условиях определенности и неопределенности. Для решения этих задач привлекается вся доступная информация (количественная и качественная).

Задачи в условиях неопределенности. Эти задачи имеют место тогда, когда информация, необходимая для принятия решений, является неточной, неполной, неколичественной, а формальные модели исследуемой системы либо слишком сложны, либо отсутствуют. В таких случаях для решения задачи обычно привлекаются знания экспертов. В отличие от подхода, принятого в экспертных системах, для решения ЗПР знания экспертов обычно выражены в виде некоторых количественных данных, называемых предпочтениями.

Выбор и нетривиальность задач принятия решений. Следует отметить, что одним из условий существования задачи принятия решений является наличие нескольких допустимых альтернатив, из которых следует выбрать в некотором смысле лучшую. При наличии одной альтернативы, удовлетворяющей фиксированным условиям или ограничениям, задача принятия решений не имеет места.

Задача принятия решений называется тривиальной, если она характеризуется исключительно одним критерием К и всем альтернативам Ai приписаны конкретные числовые оценки в соответствии со значениями указанного критерия (рис. 1.1 а).

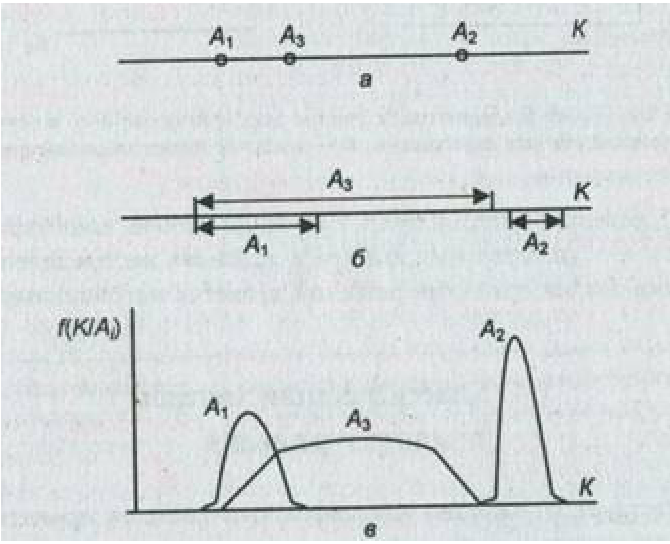


Рис. 1.1. Выбор альтернативы при одном критерии:

а — в условиях определенности; б — в условиях неопределенности;

в — в условиях риска

Задача принятия решений перестает быть тривиальной даже при одном критерии К, если каждой альтернативе Ai соответствует не точная оценка, а интервал возможных оценок (рис. 1.1 б) или распределение f(К/Ai) на значениях указанного критерия (рис. 1.1 в).

Нетривиальной считается задача при наличии нескольких критериев принятия решений (рис. 1.2) независимо от вида отображения множества альтернатив в множество критериальных оценок их последствий.

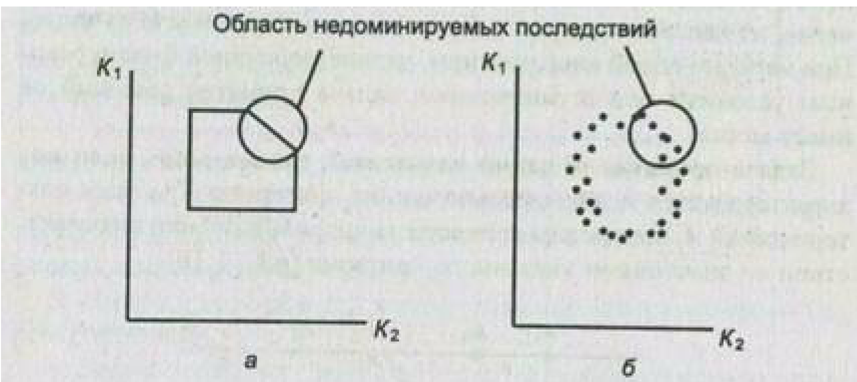


Рис. 1.2. Выбор альтернативы с учетом двух критериев: а — в случае непрерывной области альтернатив; б — в случае дискретных альтернатив

Следовательно, при наличии ситуации выбора, многокритериальности и осуществлении выбора в условиях неопределенности или риска задача принятия решений является нетривиальной.

2. Формы задачи линейного программирования

В общем виде задача линейного программирования* (в дальнейшем ЗЛП) может быть сформулирована как задача нахождения наибольшего значения линейной функции

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j = cx \qquad (1.1)$$

на некотором множестве *D Ì R*^{n}, где *x D* удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}\ x_1 + a_{1,2}\ x_2 + \ldots + a_{1,n}\ x_n \le b_1,\\
&a_{2,1}\ x_1 + a_{2,2}\ x_2 + \ldots + a_{2,n}\ x_n \le b_2,\\
&\ldots\\
&a_{m,1}\ x_1 + a_{m,2}\ x_2 + \ldots + a_{m,n}\ x_n \le b_m, \qquad (1.2)\\
&a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \ldots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1},\\
&\ldots\\
&a_{m+l,1}x_1 + a_{m+l,2}x_2 + \ldots + a_{m+l,n}x_n = b_{m+l},
\end{aligned}$$

и, возможно, ограничениям

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,..., $x_j \geq 0$,..., $x_n \geq 0$. (1.3)

* Напомним, что частные примеры, сводящиеся к задаче линейного программирования, были описаны во введении.

Не умаляя общности, можно считать, что в системе (1.2) первые *m* ограничений являются неравенствами, а последующие — *l*-уравнениями. Очевидно, этого всегда можно добиться за счет простого переупорядочения ограничений. Относительно направления знака неравенства будем предполагать, что левая часть меньше или равна правой. Добиться этого можно, умножив на (-1) обе части тех неравенств, которые имеют противоположный знак. Ограничения (1.3), вообще говоря, могут быть рассмотрены как частный случай ограничений в форме неравенств, но в силу особой структуры их обычно выделяют отдельно и называют *условиями неотрицательности* (или*тривиальными ограничениями).*

Дополнительно следует заметить, что выбор типа искомого экстремума (максимума или минимума) также носит относительный характер. Так, задача поиска максимума функции

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \qquad (1.4)$$

эквивалентна задаче поиска минимума функции

$$-f(x)=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j\ . \qquad (1.5)$$

Часто условия задачи (1.1)-(1.3), содержащей ограничения только типа неравенств, бывает удобно записывать в сокращенной матричной форме

$f(x) = cx \to \max,\ A_x \le b,\ x \ge 0$, (1.6)

где c и x — векторы из пространства R^n, b — вектор из пространства R^m, а A — матрица размерности m x n.

Задачу линейного программирования, записанную в форме (1.1)-(1.3), называют **общей задачей линейного программирования** (ОЗЛП).

Если все ограничения в задаче линейного программирования являются уравнениями и на все переменные x_j наложены условия неотрицательности, то она называется задачей линейного программирования в канонической форме, или **канонической задачей линейного программирования** (КЗЛП). В матричной форме КЗЛП можно записать в следующем виде:

$$f(x) = cx \to \max,\ D = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \ge 0\}. \qquad (1.7)$$

Поскольку любая оптимизационная задача однозначно определяется целевой функцией f и областью D, на которой отыскивается оптимум (максимум), будем обозначать эту задачу парой (D,f).

Условимся относительно терминологии, которая используется в дальнейшем и является общепринятой в теории линейного программирования.

3. Геометрический метод решения задачи линейного программирования

Ответ на вопрос, в какой точке многоугольника можно найти оптимальное решение задачи линейного программирования, дается в следующей теореме.

Теорема 1.Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Теорема указывает принципиальный путь решения задач линейного программирования. Действительно, согласно этой теореме вместо исследования бесконечного множества допустимых решений для нахождения среди них искомого оптимального решения необходимо исследовать лишь конечное число угловых точек многогранника решений.

Следующая теорема посвящена аналитическому методу нахождения угловых точек.

Теорема 2.Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений, и наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.

Из теорем 1и 2непосредственно вытекает важное следствие:если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений.

Итак, оптимум линейной функции задачи линейного программирования следует искать среди конечного числа ее допустимых базисных решений.

Итак, множество допустимых решений (многогранник решений) задачи линейного программирования представляет собой выпуклый многогранник (или выпуклую многогранную область), а оптимальное решение задачи находится, по крайней мере, в одной из угловых точек многогранника решений.

Рассмотрим задачу в стандартной форме с двумя переменными$(n = 2)$.

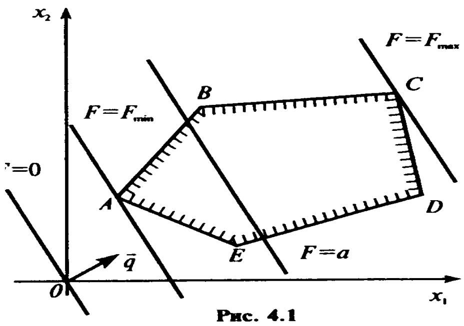


Рис. 4.1

Пусть геометрическим изображением системы ограничений является многоугольник$ABCDE$(рис. 4.1).Необходимо среди точек этого многоугольника найти такую точку, в которой линейная функция $F = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает максимальное (или минимальное) значение.

Рассмотрим так называемую ***линию уровня*** линейной функцииF,т.е. линию, вдоль которой эта функция принимает одно и то же фиксированное значениеa, т.е. $F = a$,или $c_1x_1 + c_2x_2 = a$.

На многоугольнике решений следует найти точку, через которую проходит линия уровня функции F с наибольшим (если линейная функция максимизируется) или наименьшим (если она минимизируется) уровнем.

Уравнение линии уровня функции $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ есть уравнение прямой линии. При различных уровнях a линии уровня параллельны, так как их угловые коэффициенты определяются только соотношением между коэффициентами c_1 и c_2 и, следовательно, равны. Таким образом, линии уровня функцииF –это своеобразные "параллели", расположенные обычно под углом к осям координат.

Важное свойство линии уровня линейной функции состоит в том, что при параллельном смещении линии в одну сторону уровень только возрастает, а при смещении в другую сторону – только убывает. Вектор $c = (c_1, c_2)$, выходящий из начала координат, указывает направление наискорейшего возрастания функции F. Линия уровня линейной функции перпендикулярна вектору .

Порядок графического решения задачи ЛП:

1. Построить многоугольник решений.

2. Построить вектор и перпендикулярно ему провести линию уровня линейной функции *F*, например, $F = 0$.

3. Параллельным перемещением прямой в направлении вектора $c\ (-c)$ найти точку $A_{\max}(B_{\min})$, в которой достигает максимума (минимума).

4. Решая совместно уравнения прямых, пересекающихся в точке оптимума, найти ее координаты.

5. Вычислить $F_{\max}\ (F_{\min})$.

Замечание. Точка минимума – это точка «входа» в многоугольник решений, а точка максимума – это точка «выхода» из многоугольника.

1. 2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Двойственная задача»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Отыскание минимума линейной функции

2. Определение первоначального допустимого базисного решения

3. Двойственная задача

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Отыскание минимум линейной функции

Линейное программирование – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих ***систему ограничений***, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции ***F***), которые удовлетворяют системе ограничений, называется ***допустимым планом*** задачи линейного программирования. Функция ***F***, максимум или минимум которой определяется, называется ***целевой функцией*** задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции ***F***, называется ***оптимальным планом*** задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (***ЗЛП***) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

В общей постановке задача линейного программирования выглядит следующим образом:

Имеются какие-то переменные $\boldsymbol{x = (x_1 , x_2 , \ldots x_n)}$ и функция этих переменных $\boldsymbol{f(x) = f\ (x_1 , x_2 , \ldots x_n)}$, которая носит название ***целевой*** функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $\boldsymbol{f(x)}$ при условии, что переменные $\boldsymbol{x}$принадлежат некоторой области ***G***:

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow extr \\ x \in G \end{cases}$$

В зависимости от вида функции $\boldsymbol{f(x)}$ и области ***G*** и различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, целочисленное программирование и т.д. Линейное программирование характеризуется тем, что
а) функция $\boldsymbol{f(x)}$ является линейной функцией переменных $\boldsymbol{x_1 , \quad x_2 , \quad \ldots \quad x_n}$
б) область ***G*** определяется системой ***линейных*** равенств или неравенств.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Пример 2.1.1

В других ситуациях могут возникать задачи с большим количеством переменных, в систему ограничений которых, кроме неравенств, могут входить и равенства. Поэтому в наиболее общей форме задачу линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} \end{cases} \quad 2.4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \qquad 2.5)$$

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \text{max} \qquad 2.6)$$

Коэффициенты $a_{i,j}$, b_i, c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (2.4) условий задачи и требованиям неотрицательности (2.5), называются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (2.6) целевой функции, -**оптимальными**.

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются**каноническая** и **стандартная**.

В **канонической форме** задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad 2.7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \qquad 2.8)$$

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \text{max} \qquad 2.9)$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, при чем в неравенства «≤» вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случаи неравенства «≥» - со знаком «-»

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} \qquad (2.10)$$

Вводим переменную

$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$.

Тогда неравенство (2.10) запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_n \quad 2.11)$$

В каждое из неравенств вводится своя "**уравнивающая**" переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных

$x_k = x_k -$, l - свободный

$x_k \geq 0,\ x_l$ индекс

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1)

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, то введением новой целевой функции $F_1 = -F$ мы преобразуем нашу задачу на минимум функции F в задачу на максимум функции F_1.

Таким образом, всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.

В стандартной форме задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа « <= » или « >= ». Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad 2.12)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \text{ma}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме**. Преобразование задачи на минимум в задачу на максимум, а также обеспечение не отрицательности переменных производится так же, как и раньше. Всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимопротивоположных неравенств:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in} \le b_i, \end{cases}$$

Существует и другие способы преобразования системы равенств в систему неравенств, т.е. всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.

2. Определение первоначального допустимого базисного решения

Говорят, что решение X = (x1,…,xn) СЛУ базисное, если оно зависит от такого множества индексов S, что векторы - образуют столбцовый базис матрицы A.

Базисное решение — одно из допустимых решений, находящихся в вершинах области допустимых решений. Оно является решением системы линейных ограничений, которое нельзя представить в виде линейной комбинации никаких других решений.

При решении задачи линейного программирования можно поступить следующим образом: найти любое из таких “вершинных” решений — не обязательно оптимальное — и принять его за исходный пункт расчетов. Такое решение и будет базисным. Если оно окажется оптимальным, расчет на этом закончен, если нет — последовательно проверяют, не будут ли оптимальными соседние вершинные точки: ту из них, в которой план эффективнее, принимают снова за исходную точку; и так, последовательно проверяя на оптимальность аналогичные вершины, приходят к искомому оптимуму. На этом принципе строятся т. н. симплексный метод решения задач линейного программирования, а также ряд других способов, объединенных общим названием “методы последовательного улучшения допустимого решения (МПУ)”: метод обратной матрицы, или модифицированный симплекс-метод, метод потенциалов для транспортной задачи и др. Они отличаются друг от друга вычислительными особенностями перехода от одного базисного решения к другому, улучшенному.

Понятие допустимого базисного решения

Говорят, что решение X = (x1,…,xn) СЛУ является базисным допустимым, если оно базисное для СЛУ и X ≥0, т.е. оно базисное и допустимое для задачи ЛП в канонической форме.

Симплексная таблица

- БН - базисные переменные
- НП - небазисные переменные
- Св.ч - свободные члены
- F - искомая функция

Коэффициенты функции цели при ее максимизации заносятся в нижнюю строку симплекс-таблицы с противоположными знаками. Свободные члены в симплекс-таблице определяют решение задачи.

Симплексная таблица - матрица, служащая средством перебора допустимых базисных решений задачи линейного программирования при ее решении симплексным методом. Образуется из матрицы коэффициентов системы уравнений линейного программирования; последовательное ее преобразование по т. н. симплексному алгоритму позволяет за ограниченное количество шагов (итераций) получать искомый результат — план, обеспечивающий экстремальное значение целевой функции.

3. Двойственная задача

Важную роль в линейном программировании имеет понятие ***двойственности***. Рассмотрим две задачи линейного программирования:

$\max\{F(x) = C^T x \mid Ax \leq B, x_i \geq 0, i = 1,n\}$ (1)

и

$\min\{F(y) = B^T y \mid A^T y \geq C, y_j \geq 0, j = 1,m\}$. (2)

Задачу (1) называют прямой, а связанную с ней задачу (2) – двойственной. Вместе они образуют симметрическую пару двойственных задач. Число переменных двойственной задачи равно количеству ограничений прямой. Кроме того, при переходе от прямой задачи к двойственной вектора B и C меняют местами, матрица A коэффициентов системы ограничений прямой задачи транспонируется, а знак неравенств в ограничениях меняют на противоположный. Смысл экстремума F(x) противоположен смыслу экстремума F(y) . Связь между задачами (1) и (2) взаимна, т.е. если прямой считать задачу (2), то в качестве двойственной ей будет соответствовать задача (1). Возможность перехода от прямой задачи к двойственной (и наоборот) устанавливается ***теоремой двойственности:*** *если одна из задач (1) или (2) имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, причем оптимальные значения функции цели прямой и двойственной задач совпадают*, т.е. $\max F(x) = \min F(y)$.

Если среди ограничений прямой задачи имеются равенства или на некоторые переменные не наложено условие неотрицательности, то построив двойственную ей задачу, получим пару несимметричных двойственных задач:

$$
\begin{array}{c|l}
F(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,(\max) & F(y)=\sum_{i=1}^{m} b_j y_j \,(\min); \\
\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j,\ j=\overline{1,m_1} & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_i,\ i=\overline{1,n_1}; \\
\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j,\ j=\overline{m_1+1,m} & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = c_i,\ i=\overline{n_1+1,n}; \\
x_i \ge 0,\ i=\overline{1.n_1},\ n_1 \le n & y_j \ge 0,\ j=\overline{1,m_1},\ m_1 \le m.
\end{array}
$$

При этом выполняются следующие правила:

1. Если на переменную x_i прямой задачи наложено условие неотрицательности, то i-е условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством и наоборот.

2. Если на переменную xi прямой задачи не наложено условие неотрицательности, то i-е ограничение двойственной задачи записывается в виде строгого равенства.

3. Если в прямой задаче имеются ограничения равенства, то на соответствующие переменные двойственной задачи не накладывается условие неотрицательности.

Линейное программирование находит широкое применение при решении многих практических задач организационно-экономического управления. Цель, как правило, заключается в том, чтобы максимизировать прибыль либо минимизировать расходы.

Рассмотрим задачу ***рационального использования ресурсов.***

Пусть предприятие располагает ресурсами $b_1,b_2,...,b_m$, которые могут использоваться для выпуска n видов продукции. Известны нормы потребления j-го ресурса на производство единицы i-й продукции – a_{ij} , а также прибыль от реализации единицы i-го вида продукции c_i (i = 1, n; j = 1,m) . Найти объем производства продукции каждого вида x^*_i, максимизирующий суммарную прибыль предприятия $F(x) = \sum c_i x_i$, при этом расход ресурсов не должен превышать их наличия. Математическая модель задачи имеет вид

$\max\{F(x)=\sum c_i x_i | \sum a_{ji} x_i \le b_j,\ j=1,m;\ x_i \ge 0,\ i=1,n\}$ (3)

Метод искусственного базиса используется для нахождения допустимого базисного решения задачи линейного программирования, когда в условии присутствуют ограничения типа равенств. Рассмотрим задачу:

$\max\{F(x)=\sum c_i x_i | \sum a_{ji} x_i = b_j,\ j=1,m;\ x_i \ge 0\}$.

Под ***чувствительностью*** модели понимается зависимость оптимального решения от изменения параметров исходной задачи. Выполняя анализ модели на чувствительность, можно выяснить:

а) насколько можно увеличить запас некоторого ресурса, чтобы улучшить оптимальное значение F;

б) насколько можно сократить запас некоторого ресурса, чтобы сохранить при этом оптимальное значение F;

в) увеличение объёма какого из ресурсов наиболее выгодно;

г) какому из ресурсов отдать предпочтение при вложении дополнительных средств;

д) в каких пределах допустимо изменять коэффициенты целевой функции, чтобы не произошло изменение оптимального решения.

Ограничения, проходящие через точку оптимума, называются ***активными***, или***связывающими***. Ресурсы, с которыми ассоциируются эти ограничения, относятся к разряду дефицитных. Остальные ресурсы недефицитны, а соответствующие им ограничения – неактивные или несвязывающие. Сокращение объема дефицитного ресурса никогда не улучшает значения целевой функции. Анализ на чувствительность придает модели динамичность, свойственную реальным процессам.

1.3 Лекция №3 (2 часа).

Тема: «Теория игр»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия и задачи теории игр
2. Антагонистические матричные игры
3. Решение игры в смешанных стратегиях
4. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия и задачи теории игр

Первую попытку создать математическую теорию игр предпринял в 1921 г. Э. Борель. Как самостоятельная область науки впервые теория игр была систематизировано изложена в монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна “Теория игр и экономическое поведение” в 1944 г. С тех пор многие разделы экономической теории (например, теория несовершенной конкуренции, теория экономического стимулирования и др.) развивались в тесном контакте с теорией игр [2]. Теория игр с успехом применяется и в социальных науках (например, анализ процедур голосования, поиск равновесных концепций, определяющих кооперативные и некооперативные поведения лиц). Как правило, избиратели отводят кандидатов, представляющих крайние точки зрения, но при избрании одного из двух кандидатов, предлагающих различные компромиссные решения, возникает борьба. Даже идея Руссо об эволюции от «естественной свободы» к «гражданской свободе» формально соответствует с позиций теории игр точке зрения на кооперацию.

Игра - это идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц (игроков), интересы которых различны, что и порождает конфликт. Конфликт не обязательно предполагает наличие антагонистических противоречий сторон, но всегда связан с определенного рода разногласиями. Конфликтная ситуация будет антагонистической, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приводит к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину и наоборот. Антагонизм интересов порождает конфликт, а совпадение интересов сводит игру к координации действий (кооперации).

Примерами конфликтной ситуации являются ситуации, складывающиеся во взаимоотношениях покупателя и продавца; в условиях конкуренции различных фирм; в ходе боевых действий и др. Примерами игр являются и обычные игры: шахматы, шашки, карточные, салонные и др. (отсюда и название “теория игр” и ее терминология).

В большинстве игр, возникающих из анализа финансово-экономических, управленческих ситуаций, интересы игроков (сторон) не являются строго антагонистическими ни абсолютно совпадающими. Покупатель и продавец согласны, что в их общих интересах договориться о купле-продаже, однако они энергично торгуются при выборе конкретной цены в пределах взаимной выгодности.

Теория игр - это математическая теория конфликтных ситуаций.

Цель теории игр - выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам. Эти правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат игры в зависимости от сложившейся ситуации. Правилами устанавливаются также конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

Теория игр, как и всякая математическая модель, имеет свои ограничения. Одним из них является предположение о полной (“идеальной”) разумности противников. В реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем противник “глуп” и воспользоваться этой глупостью в свою пользу .

2. Антагонистические матричные игры

Антагонистические игры являются разновидностью матричных игр, в которых выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Их ещё называют играми с нулевой суммой.

Наиболее часто приводимым примером игр с ненулевой суммой является игра «Дилемма заключенного». Суть игры состоит в том, что два преступника ожидают приговора суда за содеянное. Адвокат конфиденциально предлагает каждому из преступников облегчить его участь, если он сознается и даст показания против сообщника, которому грозит угодить в тюрьму за совершенное преступление на 10 лет. Если никто не сознается, то обоим угрожает заключение на определенный срок (например, 1 год) по обвинению в незначительном преступлении. Если сознаются оба то преступника, то, с учетом чистосердечного признания, им обоим грозит попасть в тюрьму на 5 лет. Каждый заключенный имеет на выбор 2 стратегии: не сознаться или сознаться, выдав при этом сообщника.

Обобщим выше сказанное: 1 игрок – сознаться или не сознаться и 2 игрок – сознаться или не сознаться. В итоге можно получить следующую матрицу «выигрышей» для обоих игроков:

$$\begin{pmatrix} (5, & 5) & (0, & 10) \\ (10, & 0) & (1, & 1) \end{pmatrix}.$$

3. Решение игры в смешанных стратегиях

Если матричная игра содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса. Если же платежная матрица не имеет седловых точек, то применение минимаксных стратегий каждым из игроков показывает, что игрок I обеспечит себе выигрыш не меньше a, а игрок II обеспечит себе проигрыш не больше b. Так как a < b, то игрок I стремится увеличить выигрыш, а игрок II уменьшить проигрыш. Если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, то игроки будут многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью. Такая стратегия в теории игр называется смешанной стратегией. Смешанная стратегия игрока — это полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями. Для применения смешанных стратегий должны быть следующие условия:

1) в игре отсутствует седловая точка;

2) игроками используется случайная смесь чистых стратегий с соответствующими вероятностями;

3) игра многократно повторяется в одних и тех же условиях;

4) при каждом из ходов один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком;

5) допускается осреднение результатов игр.

<u>*Основная теорема теории игр Дж. фон Неймана:*</u> *Любая парная конечная игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, возможно среди смешанных стратегий.*

Отсюда следует, что каждая конечная игра имеет цену, которую обозначим через g, средний выигрыш, приходящийся на одну партию, удовлетворяющий условию a £ g £ b. Каждый игрок при многократном повторении игры, придерживаясь смешанных стратегий, получает более выгодный для себя результат. Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает следующим свойством: каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Чистые стратегии игроков в их оптимальных смешанных стратегиях называются Активными.

Теорема об активных стратегиях. Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры G, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.

Смешанные стратегии игроков S1 и S2 обозначим соответственно A1 , A2 , … Am и B1 , B2 , B3 … Bn, а вероятности их использования через pA = (p1, p2, ..., pm) и qB = (q1, q2, ..., qn), где pi ³ 0, qj ³ 0, при этом $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_i = 1$.

Тогда смешанная стратегия игрока I — SI, состоящая из стратегий A1, A2, ..., Am, имеет вид:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1, A_2, \dots, A_m \\ p_1, p_2, \dots, p_m \end{pmatrix}.$$

Соответственно для игрока II:

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1, B_2, \dots, B_m \\ q_1, q_2, \dots, q_m \end{pmatrix}.$$

4. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Игра $m \times n$ в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших *m* и *n,* однако принципиальных трудностей не имеет, поскольку может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Покажем это.

Пусть игра задана платежной матрицей $P = (a_{ij})\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$. Игрок *A* обладает стратегиями $A_1, A_2, \dots A_i, \dots, A_m$, игрок *B* –стратегиями $B_1, B_2, \dots, B_n$. Необходимо определить оптимальные стратегии $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$, где p_i^*, q_j^* – вероятности применения соответствующих чистых стратегий A_i, B_j,

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1,\quad q_1^* + q_2^* + \ldots + q_n^* = 1.$$

Оптимальная стратегия S_A^* удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку *A* средний выигрыш, не меньший, чем цена игры *v*, при любой стратегии игрока *B* и выигрыш, равный цене игры *v*, при оптимальной стратегии игрока *B*. Без ограничения общности полагаем *v* > 0; этого можно добиться, сделав все элементы $a_{ij} \geq 0$. Если игрок *A* применяет смешанную стратегию против любой чистой стратегии B_j игрока *B*, то он получает <u>***средний выигрыш***</u>, или <u>***математическое ожидание выигрыша***</u> $a_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + ... + a_{mj} p_m,\ j = 1, 2, ..., n$ (т.е. элементы *j-го* столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий и результаты складываются).

Для оптимальной стратегии все средние выигрыши не меньше цены игры *v*, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq v, \end{cases}$$

Каждое из неравенств можно разделить на число $v > 0$. Введем новые переменные: $x_1 = \frac{p_1}{v}, x_2 = \frac{p_2}{v}, ..., \ x_m = \frac{p_m}{v}$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1, \end{cases} \quad (1^*)$$

Цель игрока *A* –максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры *v*.

Разделив на $v \neq 0$ равенство , получаем, что переменные $x_i (i = 1, 2, ..., m)$ удовлетворяют условию: $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/v$. Максимизация цены игры$v$эквивалентна минимизации величины $1/v$,поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: *определить значения переменных* $x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m$ *,так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям*(*) и *при этом линейная функция* $Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ (2*)*обращалась в минимум.*

Это задача линейного программирования. Решая задачу (1*)–(2*), получаем оптимальное решение $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*$ и оптимальную стратегию.

Для определения оптимальной стратегии $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$следует учесть, что игрок*B*стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найтиmax . Переменные$q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*$удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \leq v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_n \leq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_n \leq v, \end{cases} \quad (3^*)$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока *B*не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок*A*.

Если обозначить $y_j = q_j / v,\ j = 1, 2, ..., n$ (4*) , то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \leq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \leq 1, \end{cases} \quad (5^*)$$

Переменные $y_j,\ j = 1, 2, ..., n$ удовлетворяют условию $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/v$.

Игра свелась к следующей задаче.

Определить значения переменных $y_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n$***, которые удовлетворяют системе неравенств*** (5*) **и *максимизируют линейную функцию***

$$Z' = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \quad (6^*)$$

Решение задачи линейного программирования (5*), (6*) определяет оптимальную стратегию . При этом цена игры $v = 1/\max Z' = 1/\min Z$. (7*)

Составив расширенные матрицы для задач (1*), (2*) и (5*), (6*), убеждаемся, что одна матрица получилась из другой транспонированием:

Таким образом, задачи линейного программирования (1*), (2*) и (5*), (6*), являются взаимно-двойственными. Очевидно, при определении оптимальных стратегий в конкретных задачах следует выбрать ту из взаимно-двойственных задач, решение которой менее трудоемко, а решение другой задачи найти с помощью теорем двойственности.

При решении произвольной конечной игры размера рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1.Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока *А* (игрока *В)*являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2.Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3.Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера mxn рекомендуется симплексный метод, для игр размера 2x2,2xn,mx2 возможно геометрическое решение.

1.4 Лекция №4 (2 часа).

Тема: «Статические игры»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Понятие о статических играх

2. Принятие решений в условиях риска

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Понятие о статических играх

При решении ряда задач оптимизации приходится сталкиваться с проблемой принятия решений в условиях неопределённости. Очень часто неопределённость, сопровождающая ту или иную операцию, связана с недостаточной осведомлённостью об условиях, в которых она будет проводиться. Так, например, могут быть заранее неизвестны: погода в некотором районе, покупательский спрос на продукцию определённого вида и т.п. Во всех подобных случаях условия выполнения операции зависят от объективной действительности, которую в теории игр принято называть **«природой»**. Соответствующие ситуации называют **«играми с природой»** (**статистическими играми**).

«Природа» в теории игр рассматривается как некая незаинтересованная инстанция, поведение которой хотя и неизвестно, но, во всяком случае, не содержит элемента сознательного противодействия нашим планам. Рассмотрим подобную ситуацию.

Пусть сторона *А* имеет m возможных стратегий

$A_1, \ A_2, \ldots, A_m.$

О состоянии «природы» Π можно сделать n предположений

$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n.$

Для каждой пары стратегий $A_i, \Pi_j (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ существует функция $f(A_i, \Pi_j)$, которая является случайной величиной и называется **функцией потерь**.

Пусть удаётся определить величину a_{ij} – эффективность решения A_i в условиях Π_j – для всех комбинаций пар стратегий A_i, Π_j. В этом случае платёжная матрица игры имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В теории статистических игр, помимо платёжной матрицы, используется и, так называемая, **матрица рисков** или **матрица сожалений**.

Риском стороны *А* при использовании стратегии A_i в условиях Π_j называется величина

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$ – максимальный выигрыш стороны *А* в состоянии «природы» Π_j.

Рассмотрим критерии выбора оптимальной стратегии в статистической игре.

1. Наиболее просто решается задача о принятии решения в условиях неопределённости, когда, хотя и неизвестны условия выполнения операции $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, но известны их вероятности $q_1, q_2, \ldots, q_n$ соответственно. В этом случае в качестве показателя эффективности естественно взять математическое ожидание выигрыша

$$\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j.$$

1.1. **По критерию Байеса**, за оптимальную чистую стратегию принимается чистая стратегия A_i, при которой величина $\bar{a}_i$ достигает наибольшего значения. С помощью этого критерия задача принятия решения в условиях неопределённости сводится к задаче принятия решения в условиях определённости, только принятое решение является оптимальным не в каждом отдельном случае, а в среднем.

Следует отметить, что, по критерию Байеса, оптимальной будет та стратегия A_i, при которой минимизируется величина среднего риска

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, q_j .$$

Это связано с тем, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш, совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск.

1.2. Вероятности $q_1, q_2, \ldots, q_n$ состояний «природы» $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ могут быть определены из статистических данных, связанных с многократным выполнением подобных операций или просто с проведением наблюдений над состояниями «природы». Однако часто об этих состояниях нет никаких представлений. В подобных случаях состояния могут быть оценены субъективно: некоторые из них представляются нам более, а другие – менее правдоподобными. Для того чтобы наши субъективные представления формализовать численно, могут применяться различные технические приёмы. Так, если мы не можем предпочесть ни одной гипотезы, то естественно положить состояния «природы» равновероятными:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}.$$

Этот подход получил название **принципа недостаточного основания Лапласа**. В этом случае, как и по критерию Байеса, оптимальной считается та стратегия, при которой максимизируется средняя величина выигрыша.

2. Пусть теперь вероятности состояний «природы» неизвестны. Рассмотрим критерии, которые можно использовать для определения оптимальной стратегии в этом случае.

2.1. Максиминный критерий Вальда.

Согласно этому критерию, в качестве оптимальной выбирается та стратегия A_i, при которой минимальный выигрыш максимален, т.е. стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыш, не меньший, чем максимин

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\}.$$

Если руководствоваться этим критерием, нужно всегда ориентироваться на худшие условия и выбирать ту стратегию, для которой в худших условиях выигрыш максимален.

2.2. Критерий минимаксного риска Сэвиджа.

Этот критерий рекомендует в условиях неопределённости выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (т.е. тогда, когда риск максимален):

$$\rho = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \max_{1 \le j \le n} r_{ij} \right\}.$$

Сущность этого критерия состоит в том, чтобы любыми путями избежать большого риска при принятии решения.

Критерии Вальда и Сэвиджа относятся к группе критериев **крайнего пессимизма**.

2.3. Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица.

По критерию Гурвица, оптимальной является та стратегия A_i, для которой принимает наибольшее значение величина

$$\lambda \cdot \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \max_{1 \le j \le n} a_{ij},$$

где $\lambda \in [0,1]$

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\lambda = 0$ – в критерий **крайнего оптимизма**, рекомендующий ту стратегию, для которой в наилучших условиях выигрыш максимален.

2. Принятие решений в условиях риска

Под риском следует понимать возможную опасность потерь, вытекающую из специфики тех или иных явлений природы и видов деятельности человеческого общества.

Степень риска определяется величиной потерь при наступлении непредусмотренного события (математическим ожиданием величины потерь) в сравнении с вложенными средствами (затраченными усилиями). Степень риска можно квалифицировать как цену решения, принятого в ситуации опасности, т. е. как ожидаемую величину потерь в результате действия. На практике эта цена обычно соотносится с вероятностью неблагоприятного исхода. Степень риска, кроме всего прочего, зависит от характера и психологии человека.

Риск - это историческая и экономическая категория. Как историческая категория, риск связан со всем ходом общественного развития и представляет собой осознанную человеком возможную опасность. Он возник на низшей ступени развития цивилизации и связан с появлением у человека чувства страха перед смертью, опасностью. Как экономическая категория, риск представляет собой событие, которое может произойти или не произойти. В случае, если оно произойдет, то возможны три экономических результата этого события: отрицательный (проигрыш, ущерб, убыток), нулевой, положительный (выигрыш, выгода, прибыль).

Следует учитывать, что риск присущ всем аспектам деятельности общества и человека, и здесь проявляется такое свойство риска, как альтернативность, предполагающая необходимость выбора из двух или нескольких возможных вариантов решений, направлений, действий. Отсутствие возможности выбора свидетельствует об отсутствии риска: там, где нет выбора, не существует и риска.

В этой связи уместно говорить о многообразии рисков, возникающих в процессе деятельности и отдельного субъекта, и организаций, и общества в целом. Следовательно, и классификация этих рисков представляет собой достаточно сложную проблему. Вместе с тем необходимо отметить, что именно классификация рисков наиболее полно освещена в работах как зарубежных, так и отечественных ученых-управленцев 5 . Поэтому лишь перечислим основные признаки классификации рисков.

1. В зависимости от рискового события все риски можно поделить на две большие группы: чистые и спекулятивные.

1). Чистые риски включают:

- некоторые из коммерческих рисков (имущественные, производственные, торговые);

- политические;

- природно-естественные;

- экологические;

- транспортные.

2). К спекулятивным рискам относятся финансовые риски, являющиеся частью коммерческих рисков.

2. В зависимости от основной причины возникновения (базисный или природный риск) риски делятся на: коммерческие, политические, природно-естественные риски, транспортные, экологические риски.

Коммерческие риски делятся на:

- имущественные;

- производственные;

- торговые;

- финансовые, которые подразделяются на два вида: риски, связанные с покупательной способностью денег (валютные, инфляционные и дефляционные риски, риски ликвидности), и риски, связанные с вложением капитала или инвестиционные риски (биржевой риск, риск банкротства, селективный риск, а также кредитный риск).

Анализ рисков свидетельствует, что их уровень увеличивается, если:

1. Проблемы возникают внезапно и вопреки ожиданиям.

2. Поставлены новые задачи, не соответствующие прошлому опыту организации.

3. Руководство организации не в состоянии принять необходимые и срочные меры, что может привести к финансовому ущербу.

4. Существующий порядок деятельности организации или несовершенство законодательства мешают принятию некоторых оптимальных для конкретной ситуации мер.

В последнее время широкое распространение получила теория риск - менеджмента. Ее суть сводится к тому, что риском можно управлять, то есть использовать различные меры, позволяющие в определенной степени прогнозировать наступление рискового события, и принимать меры к снижению степени риска и на этой основе принимать оптимальное решение.

Анализ деятельности многих российских организаций показывает, что руководители большинства из них неэффективно управляют рисками. Основная причина этого - отсутствие знания ими основных принципов управления рисками.

Каковы основные принципы управления рисками?

1. Решение, связанное с риском, должно быть экономически грамотным и не должно оказывать негативного воздействия на результаты деятельности организации.

2. Управление рисками должно осуществляться в рамках корпоративной стратегии организации.

3. Принимаемые решения должны базироваться на максимально возможном объеме достоверной информации.

4. Принимаемые решения должны учитывать объективные характеристики внешней среды, в которой организация осуществляет свою деятельность.

5. Управление рисками должно носить системный характер.

6. Управление рисками предполагает постоянный анализ эффективности принятых решений и оперативную корректуру используемых принципов и методов управления рисками.

Методы управления рисками довольно разнообразны и зависят от конкретного этапа управления рисками, на котором они применяются.

Так, например, на 1-м этапе (постановка целей управления рисками)используются методы анализа и прогнозирования сложившейся конъюнктуры, выявления возможностей и потребностей организации в рамках стратегии и текущих планов его развития. На 2-м (анализ риска) используются методы качественного и количественного анализа (методы сбора имеющейся и новой информации, моделирования деятельности предприятия, статистические и вероятностные методы и т. п.). В ходе 3-го этапа (выбор методов воздействия на риск) производится сопоставление эффективности различных методов воздействия на риск: избежания риска, снижения риска, принятия риска на себя, передачи части или всего риска третьим лицам, которое завершается выработкой решения о выборе их оптимального набора. И наконец, 4-й этап (анализ эффективности принятых решений и корректура целей управления рисками) характеризуется применением методов, позволяющих дать новое знание о риске, позволяющее, и при необходимости, откорректировать ранее поставленные цели управления риском.

Таким образом, на каждом из этапов используются свои методы управления рисками. Результаты каждого этапа становятся исходными данными для последующих этапов, образуя систему принятия решений с обратной связью.

1.5 Лекция №5 (2 часа).

Тема: «Элементы теории массового обслуживания»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия. Классификация СМО
2. Понятие Марковского случайного процесса
3. Потоки событий

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия. Классификация СМО

СМО по наличию того или иного признака можно разделить следующим образом:

1. По *характеру поступления требований* – на системы с регулярным и случайным потоком поступления требований в систему.

Если количество поступающих требований в систему в единицу времени (интенсивность потока) постоянно или является заданной функцией времени, то имеем систему с регулярным потоком поступления требований в систему, в противном случае – со случайным.

Для исследования СМО со случайным потоком необходимо, чтобы была задана или известна функция распределения вероятностей поступления требований в систему. Примером такой системы может служить хорошо налаженный монтаж какого-либо сооружения по чётко разработанному плану.

Случайный поток требований в систему подразделяется на стационарный и нестационарный.

Если параметры потока требований не зависят от расположения рассматриваемого интервала времени на оси времени, то имеем стационарный поток требований, в противном случае – нестационарный. Например, если число автомашин, приходящих на склад, не зависит от времени суток, то поток требований – стационарный.

1. По *количеству поступающих требований в один момент времени* – на системы с ординарным и неординарным потоками требований. Если вероятность поступления двух или более требований в один момент равна нулю или имеет столь малую величину, что ею можно пренебречь, то имеем систему с ординарным потоком требований.

Например, поток требований – автосамосвалы, обслуживающие экскаватор, – можно считать ординарным, т.к. вероятность поступления двух и более автосамосвалов под погрузку к экскаватору – каналу обслуживания – очень мала, и ею можно пренебречь.

3. По *связи между требованиями* – на системы без последействия от поступивших требований и с последействием. Если вероятность поступления в систему в некоторый момент не зависит от того, сколько уже требований поступило в систему, т.е. не зависит от предыстории изучаемого процесса, то имеем задачу без последействия, в противном случае – с последействием. Примером задачи без последействия может служить оптовая база по продаже некоторых продуктов (канал обслуживания), на которую приходят покупатели (требования), причём число обслуживаемых покупателей предполагается неограниченным.

4. По *характеру поведения требований в системе* – с отказом, с ограниченным ожиданием и с ожиданием без ограничения.

Если вновь поступившее требование на обслуживание застаёт все каналы обслуживания уже занятыми, и оно покидает систему, то имеем систему с отказом. Требование может покинуть систему и в том случае, когда очередь достигла определённых размеров. Если, например, на станции техобслуживания скопилось много автомашин, то целесообразнее покинуть систему; если при посадке самолета полоса приземления занята, он покидает аэродром.

Если поступившее требование застает все каналы обслуживания занятыми и становится в очередь, но находится в ней ограниченное время, после чего, не дождавшись обслуживания, покидает систему, то имеем систему с ограниченным ожиданием. Примером такого "нетерпеливого требования" может быть автосамосвал с раствором. Если время ожидания велико, то во избежание затвердения раствора он может быть разгружен на другой стройке.

Если поступившее требование, застав все каналы обслуживания занятыми, вынуждено ожидать своей очереди до тех пор, пока оно не будет обслужено, то имеем систему с ожиданием без ограничения. Пример: самолет, который находится на аэродроме до тех пор, пока не освободится взлётная полоса.

5. По *способу обслуживания требования* – на системы с приоритетом, по мере поступления, случайно, последний обслуживается первым.

Иногда в этом случае говорят о дисциплине обслуживания.

Если СМО охватывает несколько категорий требований и по каким-либо соображениям необходимо соблюдать различный подход к их отбору, то имеем систему с приоритетом. Так, при поступлении изделий на стройплощадку в первую очередь монтируются те, которые необходимы в данный момент.

Если освободившийся канал обслуживает требование, ранее других поступившее в систему, то имеем СМО с обслуживанием требований по мере их поступления. Это наиболее распространенный класс систем. Например, покупатель, подошедший первым к продавцу, обслуживается первым. Этот способ выбора требований на обслуживание применяется там, где в силу технических, технологических и организационных условий требования не могут опережать друг друга.

Если требования из очереди в канал обслуживания поступают в случайном порядке, то имеем систему со случайным выбором требований на обслуживание. Пример: выбор слесарем-сантехником одной из нескольких заявок, поступивших от жильцов на устранение некоторых неисправностей (при условии, что заявки на одну и ту же неисправность). Выбор здесь, как правило, определяется местоположением самого рабочего: он выбирает заявку, наиболее близко расположенную к нему, если никакие другие факторы не предопределяют другой выбор.

Последний обслуживается первым. Этот способ выбора требований на обслуживание используют в тех случаях, когда удобнее или экономнее брать на обслуживание требование, позже всех поступившее в систему. Так, при укладке строительных изделий в штабель удобнее брать из штабеля (очереди) изделие, поступившее последним.

6. По *характеру обслуживания требований* – на системы с детерминированным и случайным временем обслуживания. Если интервал времени между моментом поступления требования в канал обслуживания и моментом выхода требования из этого канала постоянно, то имеем систему с детерминированным временем обслуживания, в противном случае – со случайным.

7. По *числу каналов обслуживания* – на одноканальные и многоканальные системы. Так, при монтаже дома может быть использован один подъёмный кран (один канал обслуживания) или несколько (много каналов) для обслуживания прибывающих на стройку изделий.

8. По *количеству этапов обслуживания* – на однофазные и многофазные системы. Если каналы обслуживания расположены последовательно и они неоднородны, т.е. выполняют различные операции обслуживания, то имеем многофазную СМО. Примером двухфазной СМО может быть, например, обслуживание автомобилей на станции техобслуживания (мойка, диагностирование).

9. По *однородности требований, поступающих на обслуживание,* – на системы с однородными и неоднородными потоками требований. Так, если под погрузку прибывают автомобили одной грузоподъёмности, то такие требования называются однородными, если разной грузоподъёмности – то неоднородными.

10. По *ограниченности потока требований* – на замкнутые и разомкнутые системы. Если поток требований ограничен, и требования, покинувшие систему, могут в неё возвращаться, то имеем замкнутую систему, в противном случае – разомкнутую. Примером замкнутой системы может служить система ЭВМ – пользователь, в которой пользователь, как правило, прикрепляется к ЭВМ и обслуживается ею в течение определённого времени.

Если изучены или заданы входящие потоки требований, механизм (число каналов обслуживания, продолжительность обслуживания и т.д.) и дисциплина обслуживания, то это дает основание для построения математической модели системы.

В задачах анализа СМО в качестве основных показателей функционирования системы могут быть использованы:

- вероятность простоя канала обслуживания ;
- вероятность того, что в системе находится *n* требований – ;
- среднее число требований, находящихся в системе (сфере обслуживания) ;

- среднее число требований, находящихся в очереди, , где – число каналов обслуживания;

- среднее время ожидания требований в очереди :

для разомкнутой системы где – интенсивность поступления потока требований в систему;

для замкнутой системы где m – число требований, нуждающихся в обслуживании;

- среднее время ожидания требований в системе ;

- среднее число свободных каналов обслуживания

- среднее число занятых каналов обслуживания

- среднее число заявок, находящихся на обслуживании в период формула Литтла, где – средняя интенсивность поступления требований, – средняя продолжительность обслуживания одной заявки).

2.Понятие Марковского случайного процесса

Процесс работы СМО представляет собой ***случайный процесс***.

Под ***случайным*** (***вероятностным*** или ***стохастическим***) процессом понимается процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями. Процесс называется ***процессом с дискретными состояниями***, если его возможные состояния$\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$, … можно заранее перечислить, а переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно (скачком). Процесс называется ***процессом с непрерывным временем***, если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным во времени. Это означает, что состояние СМО меняется скачком в случайные моменты появления каких-то событий (например, прихода новой заявки, окончания обслуживания и т.п.).

Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если процесс этой работы — марковский. Случайный процесс называется ***марковским*** или ***случайным процессом без последствия***, если для любого момента времени $\boldsymbol{t}_0$ вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент $\boldsymbol{t}_0$ и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Пример марковского процесса: система $\boldsymbol{S}$ — счетчик в такси. Состояние системы в момент $\boldsymbol{t}$ характеризуется числом километров (десятых долей километров), пройденных автомобилем до данного момента. Пусть в момент$\boldsymbol{t}_0$ счетчик показывает $\boldsymbol{S}_0$.

Вероятность того, что в момент $t > t_0$ счетчик покажет то или иное километров (точнее, соответствующее число рублей)S_1,зависит от S_0, но не зависит от того, в какие моменты времени изменялись показания счетчика до момента t_0.

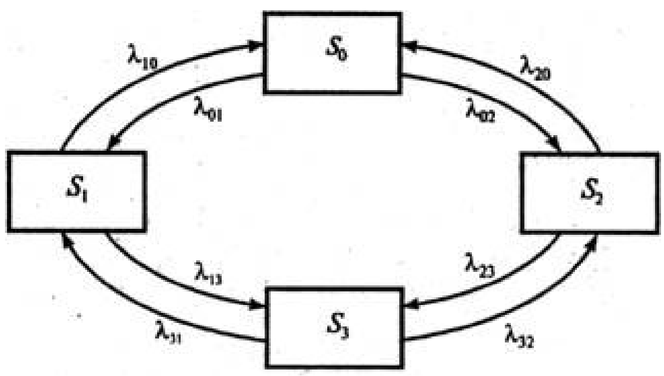
Многие процессы можно приближенно считать марковскими. Например, процесс игры в шахматы; система S — группа шахмат-фигур. Состояние системы характеризуется числом фигур противника, сохранившихся на доске в момент t_0. Вероятность что в момент $t > t_0$ материальный перевес будет на стороне из противников, зависит в первую очередь от того, в каком состоянии находится система в данный момент t_0, а не того, когда и в какой последовательности исчезли фигуры с доски до момента t_0.

В ряде случаев предысторией рассматриваемых процессов можно просто пренебречь и применять для их изучения марковские модели.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой — так называемым ***графом состояний***. Обычно состояния системы изображают прямоугольниками (кружками), а возможные переходы из состояния в состояние.— стрелками (ориентированными дугами), соединяющими состояния.

Пример 1. Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время.

Возможные состояния системы: S_0 — оба узла исправны; S_1 — первый узел ремонтируется, второй исправен, S_2 — второй узел ремонтируется, первый исправен; S_0 — оба узла ремонтируются. Граф системы приведен на следующем рисунке.



Стрелка, направленная, например, из S_0 в S_1 означает переход системы в момент отказа первого узла, из S_1 в S_0 - в момент окончания ремонта этого узла.

На графе отсутствуют стрелки из S_0 в S_3 и из S_1 в S_2. Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностью одновременного выхода из строя двух узлов (переход из S_0 в S_3) или одновременного окончания ремонтов двух узлов (переход из S_3 в S_0) можно пренебречь.

Для математического описания марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем, протекающего в СМО, познакомимся с одним из важных понятий теории вероятностей — понятием потока событий.

3. Потоки событий

Поток событий– последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.

В предыдущем примере – это поток отказов и поток восстановлений. Другие примеры: поток вызовов на телефонной станции, поток покупателей в магазине и т.д.

Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени *Ot*– рис. 2.

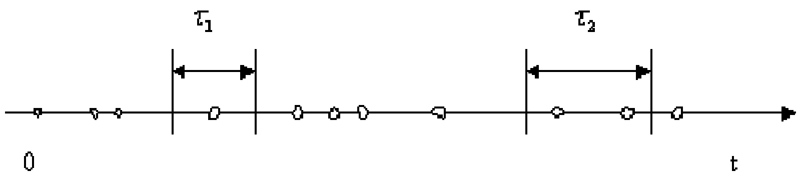


Рис.2. Изображение потока событий на оси времени

Положение каждой точки случайно, и здесь изображена лишь какая-то одна реализация потока.

Интенсивность потока событий (λ **)**– это среднее число событий, приходящееся на единицу времени.

Рассмотрим некоторые свойства (виды) потоков событий.

Поток событий называется **стационарным**, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

В частности, интенсивность стационарного потока постоянна. Поток событий неизбежно имеет сгущения или разрежения, но они не носят закономерного характера, и среднее число событий, приходящееся на единицу времени, постоянно и от времени не зависит.

Поток событий называется **потоком без последствий**, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 (см. рис.2) число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. Другими словами, это означает, что события, образующие поток, появляются в те или иные моменты времени**независимо друг от друга** и вызваны каждое своими собственными причинами.

Поток событий называется **ординарным**, если события в нем появляются поодиночке, а не группами по нескольку сразу.

Поток событий называется **простейшим (или стационарным пуассоновским),** если он обладает сразу тремя свойствами: 1) стационарен, 2) ординарен, 3) не имеет последствий.

Простейший поток имеет наиболее простое математическое описание. Он играет среди потоков такую же особую роль, как и закон нормального распределения среди других законов распределения. А именно, при наложении достаточно большого числа независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивности) получается поток, близкий к простейшему.

Для простейшего потока с интенсивностью интервал *T* между соседними событиями имеет так называемое **показательное (экспоненциальное) распределение** с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где - параметр показательного закона.

Для случайной величины *T*, имеющей показательное распределение, математическое ожидание m_T есть величина, обратная параметру, а среднее квадратичное отклонение σ_T равно математическому ожиданию

$$m_T = \sigma_T = 1/\lambda.$$

1. 6 Лекция №6 (2 часа).

Тема: «Системы массового обслуживания с отказами»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Процесс гибели и размножения
2. Одноканальные СМО с отказами

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Процесс гибели и размножения

В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов – так называемый процесс гибели и размножения.

Название этого процесса связано с рядом биологических задач, где он является математической моделью изменения численности биологических популяций.

Граф состояний процесса гибели и размножения имеет вид, показанный на рис.1:

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы :

S0, S1, S2, …, Sk.

Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния Sk возможны переходы только в состояние Sk-1, либо в состояние Sk+1.* (При анализе численности популяций считают, что состояние Sk соответствует численности популяции равной k, и переход системы из состояния Sk в состояние Sk+1 происходит при рождении одного члена популяции, а переход в состояние Sk-1 – при гибели одного члена популяции.)

Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, простейшие с соответствующими интенсивностями λk,k+1 или λk+1,k.

По графу, представленному на рис. 1, составим и решим алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний (их существование вытекает из возможности перехода из каждого состояния в каждое другое и конечности числа состояний).

В соответствии с правилом составления таких уравнений получим:

для состояния S0

λ01 p0 = λ10 p1 (1)

для состояния S1 – (λ12 + λ10) p1 = λ01 p0 + λ21 p2, которое с учетом (1) приводится к виду

λ12 p1 = λ21 p2 (2)

Аналогично, записывая уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему уравнений:

λ01 p1 = λ10 p2

λ12 p1 = λ21 p2

λk-1,k pk-1 = λk,k-1 pk

λn-1,n pn-1 = λn,n-1 pn

к которой добавляется нормировочное условие

p0 + p1 + p2 + …+pn = 1. (4)

Решая систему (3), (4), можно получить:

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \ \ldots, \ p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \cdots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n-1,n} \cdots \lambda_{21}\lambda_{10}} p_0$$

Подставляя p1, p2,.., pn в нормировочное условие, получим:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n} \cdots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n-1,n} \cdots \lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}$$

Легко заметить, что в формулах (5) для p1, p2,…, pn коэффициенты при p0 есть слагаемые, стоящие после единицы в формуле (6). Числители этих коэффициентов представляют произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо до данного состояния Sk (k=1, 2, …, n), а знаменатели – произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево до состояния Sk.

2.Одноканальные СМО с отказами

Простейшей одноканальной моделью с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид $f_1(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$,

где λ — интенсивность поступления заявок в систему (среднее число заявок, поступающих в систему за единицу времени). Плотность распределения длительностей обслуживания: $f_2(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$,

где $\mu = 1/t_{об}$ – интенсивность обслуживания, $t_{об}$ – среднее время обслуживания одного клиента.

Пусть система работает с отказами. Можно определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.

Относительная пропускная способность равна доли обслуженных заявок относительно всех поступающих и вычисляется по формуле: $q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$. Эта величина равна вероятности P_0 того, что канал обслуживания свободен.

Абсолютная пропускная способность (А) — среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени: $A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}$.

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал обслуживания занят»:

$$P_{отк} = 1 - \frac{\mu}{\lambda - \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Данная величина $P_{отк}$ *может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.*

Пример. Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка — автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, — получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания — $t_{об}$=1,8 часа.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения: относительной пропускной способности *q*; абсолютной пропускной способности *A*; вероятности отказа $P_{отк}$;

Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение

Определим интенсивность потока обслуживания: $\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1,8} = 0,555$.

Вычислим относительную пропускную способность: $q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,555}{1 + 0,555} = 0,356$.

Величина *q* означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост автомобилей.

Абсолютную пропускную способность определим по формуле: $A=\lambda\times q=1\times0,356=0,356$.

Это означает, что система способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

Вероятность отказа: $P_{отк}=1-q=1-0,356=0,644$.

Это означает, что около 65% прибывших автомобилей на пост ЕО получат отказ в обслуживании.

Определим номинальную пропускную способность системы: $A_{ном}=\frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1,8} = 0,555$ (автомобилей в час).

Оказывается, что $A_{ном}$ в $\frac{0,555}{0,356} \approx 1,5$ раза больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

1.7 Лекция №7(2 часа).

Тема: «Аксиоматические теории рационального поведения»

1.7.1 Вопросы лекции:

1.Аксиомы рационального поведения

2.Деревья решений

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Аксиомы рационального поведения

Введем обозначения и определения. Простым бинарным случайным исходом (далее БСИ) назовем вероятностное событие *И*(x_1, p, x_2), имеющее два возможных исхода:

x_1, с вероятностью p;

x_2 *с* вероятностью $(1\text{-}p)$.

Символами >, =, ≥ будем соответственно обозначать понятия *"предпочтительнее", "равноценно", "равноценно или предпочтительнее"*.

Аксиома 1. **Существование относительных предпочтений**

Для любой пары исходов x_1 и x_2 справедливы утверждения $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$ или $x_2 > x_1$.

Аксиома 2. **Транзитивность**

Для любых БСИ И1, И2 и ИЗ справедливо следующее:

(а) если И1 = И2 и И2 = ИЗ, то И1 = ИЗ;

(б) если И1 > И2 и И2 = ИЗ, то И1 > ИЗ и т.д.

Поскольку исход можно интерпретировать как *вырожденный* случай БСИ (т.е. $p = 1$), то аксиомы 1 и 2 вместе означают, что ЛПР может провести ранжировку относительно предпочтения различных возможных исходов. Эти аксиомы не утверждают, что ЛПР может объяснить свои предпочтения.

Обозначим через x_0 исход, который не является более предпочтительным, чем любой другой исход, а через x^* исход не менее предпочтительный, чем любой другой.

Таким образом, единственная возможность состоит в том, что x_0 и x^* означают соответственно наименее и наиболее предпочтительные исходы, хотя они могут представлять собой гипотетические исходы, такие, что $x^* > x$ и $x > x_0$ для всех допустимых x.

Аксиома 3. **Сравнение БСИ**

Если для ЛПР $x_1 > x_2$, *то*

(а) И1 (x_1, p, x_2) > И2(x_1, p, x_2) при $p_1 > p_2$;

(б) И1 (x_1, p, x_2)= И2(x_1, p, x_2)при $p_1 = p_г$

Аксиома 4. **Численная оценка предпочтений**

Каждому возможному исходу x ЛПР может поставить в соответствие число $\pi(x)$ (где $0 \leq \pi(x) \leq 1$), такое, что

X= И $(x^*, \pi(x), x_0)$.

Аксиомы 3 и 4 определяют для ЛПР меру относительного предпочтения различных исходов $\pi(x)$, называемую*вероятностью равноценности.*

Аксиома 5. **Численная оценка неопределенности суждений**

Каждому возможному событию *B,* которое может влиять на исход решения, можно поставить в соответствие число*P(B)* из интервала [0, 1] такое, что становятся равноценными БСИ И(x*,*P(B),* x_o) и ситуация, при которой ЛПР получает x*, если происходит событие*B и* x_0, если событие*B* не происходит. Значение*P(B)* определяется ЛПР. Поскольку мера*P(B)* удовлетворяет аксиомам вероятностей, все результаты этой теории можно применить для анализа проблем.

Аксиома 6. **Равноценность задач**

Если модифицировать задачу принятия решения путем замены одного исхода другим, которые равноценны для ЛПР, то обе задачи принятия решения (старая и модифицированная) будут равноценны для этого ЛПР.

Аксиома 7. **Эквивалентность условного и безусловного предпочтений**

Пусть $И_1$ и$И_2$ два БСИ, возможные только при наступлении события*B.* Если известно, что наступит событие*B* или нет, то ЛПР должно иметь те же предпочтения между$И_1$ и$И_2$, как и при отсутствии этой информации.

Если ЛПР опирается на данные аксиомы, то ему надлежит всегда выбирать альтернативы так, чтобы максимизировать ожидаемую полезность. Согласно сформулированным аксиомам не существует других процедур принятия решений.

2.Деревья решений

Когда нужно принять несколько решений в условиях неопределенности, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего решения или исходов испытаний, то применяют схему, называемую деревом решений. Дерево решений – это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, альтернативные состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды. Другое определение: деревья решений - это способ представления правил в иерархической, последовательной структуре, где каждому объекту соответствует единственный узел, дающий решение. Деревья решений разбивают данные на группы на основе значений переменных, в результате чего возникает иерархия операторов "ЕСЛИ - ТО", которые классифицируют данные. Под правилом понимается логическая конструкция вида «если - то». Объект – некоторый пример, действие, шаблон, наблюдение. Атрибут – признак, свойство. Узел – внутренний узел дерева, узел проверки. Лист – конечный узел дерева, узел решения. 2 Построение деревьев Способ 1. Рисуют деревья слева направо. Места, где принимаются решения, обозначают квадратами, места появления исходов – кругами, возможные решения – пунктирными линиями, возможные исходы – сплошными линиями. Для каждой альтернативы мы считаем ожидаемую стоимостную оценку (EMV) – максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятность реализации выигрышей, для всех возможных вариантов (см. пример 1). Пример 1. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий: а). Построить большой завод стоимостью Ст1 = 500 тысяч у.е. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере Д1 = 200 тысяч у.е. в течение следующих 5 лет) с вероятностью p1 = 0,7 и низкий спрос (ежегодные убытки Д2 = 90 тысяч у.е.) с вероятностью p2 = 0,3. б). Построить маленький завод стоимостью Ст2 = 300 тысяч у.е. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере Д3 = 100 тысяч у.е. в течение следующих 5 лет) с вероятностью p3 = 0,7 и низкий спрос (ежегодные убытки Д4 = 40 тысяч у.е.) с вероятностью p4 = 0,3. в). Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью p5 = 0,4 и p6 = 0,6 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на p7 = 0,8 и p8 = 0,2 соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет. Нарисовав дерево решений, определим наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № ЛР-1,2 (4 часа)

Тема: «Задачи линейного программирования»

2.1.1 Цель работы:

Научиться решать задачи линейного программирования

2.1.2 Задачи работы:

1. Решение задачи линейного программирования

2.1.3 Перечень приборов, материалов используемых в лабораторной работе:

Microsoft Office

2.1.4 Описание (ход) работы:

1.Решение задачи линейного программирования

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности.

Несколько слов о самом термине *линейное программирование*. Он требует правильного понимания. В данном случае программирование - это, конечно, не составление программ для ЭВМ. Программирование здесь должно интерпретироваться как планирование, формирование планов, разработка программы действий.

К математическим задачам линейного программирования относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. Это, например:

- задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании;
- задача о смесях (планирование состава продукции);
- задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах (управление товарно-материальными запасами или "задача о рюкзаке");
- транспортные задачи (анализ размещения предприятия, перемещение грузов).

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования (кроме того, сюда относят: целочисленное, динамическое, нелинейное, параметрическое программирование). Это объясняется следующим:

- математические модели большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- данный тип задач в настоящее время наиболее изучен. Для него разработаны специальные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие программы для ЭВМ;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли широкое применение;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать

линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Экономико-математическая модель любой задачи линейного программирования включает: **целевую функцию**, оптимальное значение которой (максимум или минимум) требуется отыскать;**систему ограничений**в виде системы линейных уравнений или неравенств; **условие неотрицательности** переменных.

В общем виде модель записывается следующим образом:

1.Целевая функция:

$$F(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max(\min); \qquad (1)$$

2. Система ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\leq = \geq\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\leq = \geq\} b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\leq = \geq\} b_m; \end{cases} \qquad (2)$$

3. Условие неотрицательности:

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

При этом a_{ij}, b_i, c_j($i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$) - заданные постоянные величины.

Задача состоит в нахождении оптимального значения функции (1) при соблюдении ограничений (2) и (3).

Систему ограничений (2) называют функциональными ограничениями задачи, а ограничения (3) - прямыми.

Вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2) и (3), называется **допустимым решением (планом)**задачи линейного программирования. План $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при котором функция (1) достигает своего максимального (минимального) значения, называется **оптимальным**.

2.2 Лабораторная работа № ЛР-3,4 (4 часа)

Тема: «Двойственная задача»

2.2.1 Цель работы: научиться решать двойственной задачи линейного программирования.

2.2.2 Задачи работы:

1. Транспортная задача

2. Задача о назначениях

2.2.3 Перечень приборов, материалов используемых в лабораторной работе:

Microsoft office

2.2.4 Описание (ход) работы:

1. Транспортная задача

Под названием транспортная задача объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены известным симплексным методом. Однако, обычная транспортная задача имеет большое число переменных и решение ее симплексным методом громозко. С другой стороны матрица системы ограничений транспортной задачи весьма своеобразна, поэтому для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить последовательность опорных решений, которая завершается оптимальным решением.

Условие:

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, ... a_m. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2 ... b_n. Известны $\mathbf{C_{ij}}$, i=1,2,...m; j=1,2,...n — стоимости перевозки единиц груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю.

Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью, и суммарные затраты на перевозку всех грузов являются минимальными.

Исходные данные транспортной задачи записываются в виде таблицы:

Таблица 34.1

Потребители

поставщики

a_j \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Исходные данные задачи могут быть представлены в виде:

- вектора $A=(a_1,a_2,...,a_m)$ запасов поставщиков
- вектора $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ запросов потребителей
- матрицы стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots c_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Задача о назначениях

Задачу о назначениях можно сформулировать следующим образом: имеется n исполнителей и n работ, задана $c_{ij}\ (i,j=\overline{1,n})$ - эффективность выполнения каждой работы каждым исполнителем (таблица, в которой содержатся n^2 чисел, характеризующих эффективность, называется nхn- или n^2-матрицей). Задача заключается в том, чтобы назначить каждому исполнителю одну и только одну работу таким образом, чтобы оптимизировать заданную функцию эффективности. Математическая модель выглядит следующим образом:

$$C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & i = \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = \overline{1,n}, \\ x_{ij} \in \{0,1\}, & i,j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи о назначениях

В венгерском методе используется следующий принцип: оптимальность решения задачи о назначениях не нарушается при уменьшении (увеличении) элементов строки (столбца) на одну и ту же величину.

Решение считается оптимальным, если все измененные таким образом затраты $c^*_{ij} \geq 0$, ($i=1,m;\ \ j=1,n$) и можно отыскать такой набор x_{ij} , что $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c^*_{ij}x_{ij} = 0$.

Шаг 1. Получение нулей в каждой строке

Выберем в каждой строке минимальный элемент и запишем его значение в правом столбце. Вычтем минимальные элементы из соответствующих строк. Переход к шагу 2.

Шаг 2.Получение нулей в каждом столбце.

В преобразованной таблице найдем минимальные значения в каждом столбце (графе) и запишем их в нижней строке. Вычтем минимальные элементы из соответствующих столбцов. Переход к шагу 3.

Шаг 3. Поиск оптимального решения

Сделаем назначения. Для этого просматривают строку, содержащую наименьшее число нулей. Отмечают один из нулей этой строки и зачеркивают все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится отмеченный нуль. Аналогичные операции последовательно проводят для всех строк. Если назначение, которое получено при всех отмеченных нулях, является полным (число отмеченных нулей равно n), то решение является оптимальным. В противном случае переходят к шагу 4.

Шаг 4.Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих все нули.

Для этого необходимо отметить:

1. Все строки, в которых не имеется ни одного отмеченного нуля;
2. Все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль хотя бы в одной из отмеченных строк;
3. Все строки, содержащие отмеченные нули хотя бы в одном из отмеченных столбцов.

Действия 2) и 3) повторяются поочередно до тех пор, пока есть что отмечать. После этого необходимо зачеркнуть каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец.

Цель этого шага – провести минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающих по крайней мере один раз все нули.

Шаг 5. Перестановка некоторых нулей.

Взять наименьшее число из тех клеток, через которые не проведены прямые. Вычесть его из каждого числа, стоящего в невычеркнутых столбцах и прибавить к каждому числу, стоящему в вычеркнутых строках. Эта операция не изменяет оптимального решения, после чего весь цикл расчета повторить, начиная с шага 3.

2.3 Лабораторная работа № ЛР -5,6 (4 часа)

Тема: «Теория игр»

2.3.1 Цель работы: научиться решать теории игр

2.3.2 Задачи работы:

1. Решение задачи теории игр в чистых стратегиях

2.3.3 Перечень приборов, материалов используемых в лабораторной работе:

Microsoft office

2.3.4 Описание (ход) работы:

1.Решение задачи теории игр в чистых стратегиях

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цена игры различны. Анализируя матрицы таких игр, мы пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь своей максиминной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если применять не одну единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий? Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются смешанными стратегиями.

Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами, а данная — с частотой 1. Оказывается, что, применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, можно для каждой конечной игры получить решение, т.е. пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применении их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может измениться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.

Высказанное утверждение составляет содержание так называемой основной теоремы теории игр. Эта теорема была впервые доказана фон Нейманом в 1928 г. Известные доказательства теоремы сравнительно сложны; поэтому приведем только ее формулировку.

Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение (возможно, в области смешанных стратегий).

Выигрыш, получаемый в результате решения, называется ценой игры. Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену. Очевидно, что цена игры ν всегда лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β:

(3.1) $\alpha \le \nu \le \beta$

Действительно, α есть максимальный гарантированный выигрыш, который мы можем себе обеспечить, применяя только свои чистые стратегии. Так как смешанные стратегии включают в себя в качестве частного случая и все чистые, то, допуская, кроме чистых, еще и смешанные стратегии, мы, во всяком случае, не ухудшаем своих возможностей; следовательно, $\nu \ge \alpha$. Аналогично, рассматривая возможности противника, покажем, что $\nu \le \beta$, откуда следует доказываемое неравенство (3.1).

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Если, например, наша смешанная стратегия состоит в применении стратегий A_1, A_2, A_3 с частотами p_1, p_2, p_3, причем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, будем обозначать эту стратегию

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

Аналогично смешанную стратегию противника будем обозначать:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

где q_1, q_2, q_3— частоты, в которых смешиваются стратегии B_1, B_2, B_3; $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Предположим, что нами найдено решение игры, состоящее из двух оптимальных смешанных стратегий S_A*, S_B*. В общем случае не все чистые стратегии, доступные данному игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию, а только некоторые. Будем называть стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока, его «полезными» стратегиями. Оказывается, что решение игры обладает еще одним замечательным свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии S_A* (S_B*), то выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν, независимо от того, что делает другой игрок, если он только не выходит за пределы своих «полезных» стратегий. Он, например, может пользоваться любой из своих «полезных» стратегий в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

2.4 Лабораторная работа № ЛР -7,8 (4 часа)

Тема: «Статические игры»

2.4.1 Цель работы: научиться решать задачи статистических игр

2.4.2 Задачи работы:

1. Принятие решений в условиях риска

2.4.3 Перечень приборов, материалов используемых в лабораторной работе:

Microsoft office

2.4.4 Описание (ход) работы:

1.Принятие решений в условиях риска

Методы принятия решений в условиях риска разрабатываются и обосновываются в рамках теории статистических решений. В этом случае имеем доброкачественную, или стохастическую, неопределенность, когда состояниям природы поставлены в соответствие вероятности, заданные экспертно либо вычисленные.

Критерии принятия решений в условиях риска могут использоваться те же, что и в условиях неопределенности, а также некоторые специальные критерии, например:

критерий ожидаемого значения;

критерий ожидаемое значение – дисперсия;

критерий предельного уровня;

критерий наиболее вероятного исхода.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения случайной величины X, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ и дисперсию $\frac{DX}{n}$. Таким образом, при $n \to \infty$, имеем $\frac{DX}{n} \to 0$ и $\bar{x} \to MX$.

Другими словами, при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ожидаемого значения справедливо только в случае, когда одно и тоже решение приходится применять достаточно большое число раз.

Справедливо и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Критерий ожидаемое значение – дисперсия является модификацией критерия ожидаемого значения. В нем максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Критерий предельного уровня не дает оптимального решения, например, максимизирующего прибыль, или минимизирующего затраты. ЛПР на основании субъективных соображений определяет наиболее приемлемый способ действий.

Критерий наиболее вероятного исхода предполагает замену случайной ситуации детерминированной путем замены случайной величины прибыли (затрат) единственным, наиболее вероятным ее значением. Использование данного критерия в значительной степени опирается на опыт и интуицию. При этом необходимо учитывать два обстоятельства, затрудняющие применение этого критерия:

его нельзя использовать, если наибольшая вероятность события недопустимо мала;

применение критерия невозможно, если несколько значений вероятностей возможного исхода равны между собой.

Пример 6.3. Требуется принять решение о том, когда необходимо проводить профилактический ремонт ПЭВМ, чтобы минимизировать потери из-за неисправности. В случае, если ремонт будет производиться слишком часто, затраты на обслуживание станут большими при малых потерях из-за случайных поломок.

Так как невозможно предсказать заранее, когда возникнет неисправность, необходимо найти вероятность того, что ПЭВМ выйдет из строя в период времени t . В этом и состоит элемент риска.

Математически это выглядит так: ПЭВМ ремонтируется индивидуально, если она остановилась из-за поломки. Через T интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех n ПЭВМ. Необходимо определить оптимальное значение T , при котором минимизируются общие затраты на ремонт неисправных ПЭВМ и проведение профилактического ремонта в расчёте на один интервал времени.

p_t – вероятность выхода из строя одной ПЭВМ в момент t , а nt – случайная величина, равная числу всех вышедших из строя ПЭВМ в тот же момент. Пусть далее C 1 – затраты на ремонт неисправной ПЭВМ и C2 – затраты на профилактический ремонт одной машины.

$$ОЗ = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

на один интервал составят:

$M(n_t)$ – математическое ожидание числа вышедших из строя ПЭВМ в момент

(n, p_t),то M(nt) =

npt . Таким образом,

:

$$ОЗ = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T}.$$

Необходимые условия оптимальности T^* имеют вид:

$$ОЗ\ (T^*-1) \geq ОЗ\ (T^*),$$
$$ОЗ\ (T^*+1) \geq ОЗ\ (T^*).$$

, начиная с малого значения T, вычисляют ОЗ (T), пока не будут удовлетворены необходимые условия оптимальности.

Таблица 6.10

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$ОЗ(T)$
1	0,05	0	$\frac{50\,(100\cdot 0+10)}{1}=500$
2	0,07	0,05	375
3	0,10	0,12	366,7
4	0,13	0,22	400
5	0,18	0,35	450

$$T^{*} \to 3,\ ОЗ(T^{*}) \to 366{,}7$$

$C_1 = 100;\ C_2 = 10;\ n = 50.$ Значения pt имеют вид (табл. 6.10):

$T^{*} = 3$ интервала времени.

2.5 Лабораторная работа № ЛР-9,10 (4 часа)

Тема: «Элементы теории массового обслуживания»

2.5.1 Цель работы: научиться проводить расчет предельных вероятностей состояний СМО

2.5.2 Задачи работы:

1. Расчёт предельных вероятностей состояний СМО заданной графом

2.5.3 Перечень приборов, материалов используемых в лабораторной работе:

Microsoft office

2.5.4 Описание (ход) работы:

1.Расчет предельных вероятностей состояний СМО заданной графом

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно пользоваться вариантом схематичного изображения возможных состояний СМО (рис. 6.2.1) в виде графа с разметкой его возможных фиксированных состояний. Состояния СМО изображаются обычно либо прямоугольниками, либо кружками, а возможные направления переходов из одного состояния в другое ориентированы стрелками, соединяющими эти состояния. Например, размеченный граф состояний одноканальной системы случайного процесса обслуживания в газетном киоске приведен на рис. 1.3.

λ

λ_{10} λ_{21}

Рис. 1.3. Размеченный граф состояний СМО

Система может находиться в одном из трех состояний: S_0 -канал свободен, простаивает, S_1 — канал занят обслуживанием, S_2- канал занят обслуживанием и одна заявка в очереди. Переход системы из состояния S_0 в S_l происходит под воздействием простейшего потока заявок интенсивностью λ_{01} а из состояния S_l в состояние S_0 систему переводит поток обслуживания с интенсивностью λ_{01}. Граф состояний системы обслуживания с проставленными интенсивностями потоков у стрелок называется размеченным. Поскольку пребывание системы в том или ином состоянии носит вероятностный характер, то вероятность:$p_i(t)$ того, что система будет находиться в состоянии S_i в момент времени t, называется вероятностью i-го состояния СМО и определяется числом поступивших заявок k на обслуживание.

Случайный процесс, происходящий в системе, заключается в том, что в случайные моменты времени t_0, t_1, t_2,..., t_k,..., t_nсистема оказывается в том или другом заранее известном дискретном состоянии последовательно. Такая. случайная последовательность событий называется Марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из одного состояния S_t в любое другое Sj не зависит от того, когда и как система перешла в состояние S_t. Описывается марковская цепь с помощью вероятности состояний, причем они образуют полную группу событий, поэтому их сумма равна единице. Если вероятность перехода не зависит от номера к, то марковская цепь называется однородной. Зная начальное состояние системы обслуживания, можно найти вероятности состояний для любого значения к-числа заявок поступивших на обслуживание.

2.6 Лабораторная работа № ЛР -11,12 (4 часа)

Тема: «Системы массового обслуживания с отказами»

2.6.1 Цель работы: научиться проводить расчет показателей эффективности одноканальной СМО с отказами

2.6.2 Задачи работы:

1. Расчет предельных вероятностей состояний

2.6.3 Перечень приборов, материалов используемых в лабораторной работе:

Microsoft office

2.6.4 Описание (ход) работы:

1.Расчёт предельных вероятностей состояний

Пусть имеется физическая система $S=\{S_1,S_2,\ldots S_n\}$, в которой протекает марковский случайный процесс с непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова). Предположим, что $l_{ij}=const$, т.е. все потоки событий простейшие (стационарные пуассоновские). Записав систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний и проинтегрировав эти уравнения при заданных начальных условиях, мы получим $p_1(t),\ p_2(t),\ldots\ p_n(t),\ \sum_{i=1}^{n} p_i(t)=1$ при любом t. Поставим следующий вопрос, что будет происходить с системой S при t®¥. Будут ли функции $p_i(t)$ стремиться к каким-то пределам? Эти пределы, если они существуют, называются предельными вероятностями состояний. Можно доказать теорему: если число состояний S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в каждое другое, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы. Предположим, что поставленное условие выполнено и предельные вероятности существуют $\lim_{t\to\infty} p_i(t)=p_i\ (i=1,2,\ldots n),\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

Таким образом, при t®¥ в системе S устанавливается некоторый предельный стационарный режим. Смысл этой вероятности: она представляет собой не что иное, как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии. Для вычисления p_i в системе уравнений Колмогорова, описывающих вероятности состояний, нужно положить все левые части (производные) равными 0. Систему получающихся линейных алгебраических уравнений надо решать совместно с уравнением $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

2.7 Лабораторная работа № ЛР -13,14,15 (6 часов)

Тема: «Аксиоматические теории рационального поведения»

2.7.1 Цель работы: научиться строить дерево решений.

2.7.2 Задачи работы:

1. Построение деревьев решений

2.7.3 Перечень приборов, материалов используемых в лабораторной работе:

Microsoft office

2.7.4 Описание (ход) работы:

1.Построение деревьев решений

Как любое дерево, дерево принятия решений состоит из «веток» и «листьев». Конечно, навыки рисования тут не пригодятся, так как дерево решений – это графическое систематизирование процесса принятия тех или иных решений, где отражены альтернативные решения и состояния среды, а также возможные риски и выигрыши для любых комбинаций данных альтернатив. Другими словами, это эффективный метод автоматического анализа данных (текущих и альтернативных), примечательный своей наглядностью.

Применение дерева решений

Дерево решений – это популярный метод, применяющийся в самых разнообразных сферах нашей жизни:

- дерево управленческих решений эффективно в управлении проектами, менеджменте, а также при анализе всевозможных рисков;
- метод дерева решений с успехом используется при контроле качества продукции в промышленности;
- в медицине дерево решений используется для диагностики заболеваний;
- метод дерева решений применим даже для анализа строения аминокислот (молекулярная биология).

Как же построить дерево решений?

1. Как правило, дерево решений располагается справа налево и не содержит циклических элементов (новый лист или ветвь могут только расщепляться).

2. Необходимо начать с отображения структуры проблемы в «стволе» будущего дерева решений (справа).

3. Ветви – это альтернативные решения, которые теоретически могут быть приняты в данной ситуации, а также возможные следствия принятия этих альтернативных решений. Ветви берут свое начало из одной точки (исходных данных), а «разрастаются» до получения конечного результата. Количество ветвей вовсе не свидетельствует о качестве вашего дерева. В некоторых случаях (если дерево получается чересчур «ветвистым») рекомендуется даже воспользоваться отсечением второстепенных ветвей.

Ветви бывают двух видов:

- пунктирные линии, которые соединяют квадраты - возможные решения;
- сплошные линии, соединяющие кружки возможных конечных результатов.

4. Узлы - это ключевые события, а линии, соединяющие узлы – это работы по реализации проекта. Квадратные узлы – это места, где решение принимается. Круглые узлы – появление результатов. Поскольку, принимая решения, мы не можем влиять на появление исхода, нам нужно вычислить вероятность их появления.

5. Помимо этого, на дереве решений необходимо отобразить всю информацию о времени работ, их стоимости, а также вероятности принятия каждого решения;

6. после того, как все решения и предполагаемые результаты будут указаны на дереве, проводится анализ и выбор наиболее выгодного пути.

Одной из наиболее распространенной моделей дерева является трехслойная модель, когда за исходным вопросом идет первый слой возможных решений, после выбора одного из них вводится второй слой – события, которые могут последовать за принятием решения. Третий слой – последствия для каждого случая.

Составляя дерево решений, необходимо осознавать, что число вариантов развития ситуации должно быть обозримым и иметь какое-то ограничение по времени. Кроме того, эффективность метода зависит от качества информации, положенной в схему.

Важным плюсом является то, что дерево решений можно совмещать с экспертными методами на этапах, требующих оценки результата специалистами. Это увеличивает качество анализа дерева решений и способствует правильному выбору стратегии.