ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.07 Дискретная математика и математическая логика

Направление подготовки (специальность) 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Профиль образовательной программы "Автоматизированные системы обработки информации и управления"

Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Множества и бинарные отношения»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Множества и операции над ними. Диаграммы Венна-Эйлера.

2. Элементы алгебры множеств.

3. Бинарные отношения и их свойства.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Множества и операции над ними. Диаграммы Венна-Эйлера.

1.Понятия множества, элемента множества, обозначения множества и его элементов, примеры.

2.Способы задания (описания) множеств перечислением элементов и с помощью предикатов.

3.Стандартные множества, их названия и обозначения

$\varnothing$ - пустое множество,

$N = \{1, 2, 3, ...\}$ - множество натуральных чисел (натуральный ряд);

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ - множество целых чисел;

$Q = \left\{ \dfrac{p}{q}, p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$ - множество рациональных чисел;

R - множество всех вещественных чисел (всех десятичных дробей);

числовые промежутки $\langle a, b \rangle$.

4. Иллюстрация множеств диаграммами Венна-Эйлера.

5.Отношения и операции с множествами, их иллюстрация диаграммами Венна-Эйлера:

-равенство множеств $A = B$,

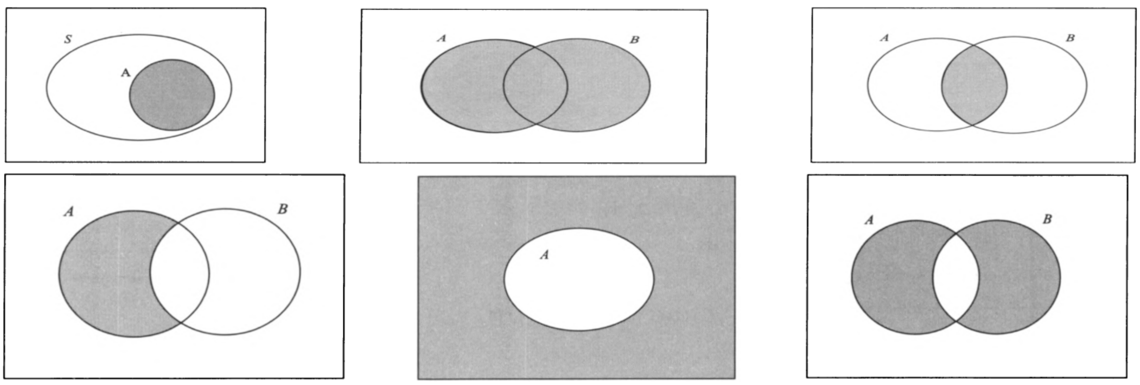
-включение $A \subset B, A \subseteq B$, понятие подмножества,

-объединение множеств $A \cup B$,

-пересечение множеств $A \cap B$,

-разность множеств $A \setminus B$ и дополнение $C_A B$ множества B до множества A, универсальное множество U, дополнение множества A до универсального $\overline{A}$

-симметрическая разность $A \Delta B$.



Дискретная математика представляет собой область математики, в которой изучаются свойства структур конечного характера, а также бесконечных структур, предполагающих скачкообразность происходящих в них процессов или отделимость составляющих их элементов. В отличие от дискретной математики *классическая* математика занимается изучением свойств структур непрерывного характера. Это деление достаточно условно, поскольку средства дискретной математики используются для изучения непрерывных моделей и наоборот.

Бурное развитие дискретной математики обусловлено прогрессом компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки и передачи информации, а также представления различных моделей на компьютерах, которые по своей природе являются структурами конечным

Рассматриваются множества и их спецификация, элементы и множества. Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается символом ∅. Если все рассматриваемые множества (в конкретной задаче) являются подмножествами более широкого множества U, то множество U называется универсальным множеством, или универсумом.

Мощность множества M обозначается как |M| и для конечного множества равняется числу элементов в нем.

Заметим, что $|\varnothing| = 0$, но $|\{\varnothing\}| = 1$.

2. Элементы алгебры множеств.

Теоретико-множественные соотношения (равенства множеств, включения) и методы их вывода и доказательства. Такие соотношения выражают законы алгебры множеств.

Свойства операций над множествами.

Законы ассоциативности

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Законы коммутативности

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

Законы тождества

$A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap U = A$

$A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

Законы идемпотентности

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

Законы дистрибутивности

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Законы дополнения

$A \cup \overline{A} = U$ $\qquad$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

$\overline{U} = \varnothing$ $\qquad$ $\overline{\varnothing} = U$

$\overline{\overline{A}} = A$ $\qquad$ $\overline{\overline{A}} = A$

Законы де Моргана

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Взаимосвязь законов алгебры множеств и алгебры логики, понятие о модели аксиоматической теории и интерпретации, понятие об алгебре Буля.

Булеан множества и его нахождение.

На основании этих свойств можно получить новые свойства и равенства.

Принцип двойственности.

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества U, автоматически может быть получено другое, двойственное, равенство, путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, объединений множеств – пересечениями, пересечений множеств – объединениями.

3. Бинарные отношения и их свойства.

Прямое произведение множеств

Упорядоченная последовательность, содержащая n элементов некоторого множества, называется *n-кой*, или *набором из n элементов*. Обычно n-ка, образованная последовательностью $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначается $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. При малых n говорят о двойках элементов, тройках и т.д.

Для множества чисел А = {1, 2, 3, 4} можно рассмотреть тройки: (1, 2, 2), (3, 4, 1), (2, 1, 2), причем первая и последняя тройки различны, несмотря на их одинаковый состав.

Прямым (или *декартовым*) *произведением* множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ таких, что $x_i \in A_i$ при $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Декартово произведение обозначается $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Если одним из сомножителей является пустое множество, то и произведение является пустым множеством.

Степенью множества А называется его прямое произведение само на себя n раз; обозначается A^n.

N-местным отношением R или *N-местным предикатом* R на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называется любое подмножество прямого произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$: $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n \mid a_i \in A_i$ при $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ *связаны отношением* R тогда и только тогда, когда упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in R$. При $N = 1$ отношение R является подмножеством множества A_1 и называется *унарным отношением* или *свойством*.

Наиболее часто встречается двухместное отношение ($N = 2$), которое называется *бинарным отношением* R из множества A в множество B, или *соответствием*: это подмножество произведения множеств A и B: $R \subseteq A \times B$. Если элементы a и b множеств A и B $(a,b) \in R$, то говорят, что они *находятся в отношении* R, для чего часто используется т.н. инфиксная форма записи: aRb. Если $R \subseteq A \times A$ (т.е. $A=B$), то R называется *бинарным отношением на множестве* A. Соответственно, отношение $R \subseteq A^n$ называется *N-местным предикатом на множестве* A.

Бинарное отношение можно задать *указанием всех пар*, для которых это отношение выполняется, или *графически*. Способы графического представления также могут быть различными.

Свойства отношений

Теорема: *Для любых бинарных отношений P, Q, R выполняются следующие свойства:*

1. $(P^{-1})^{-1} = P$;
2. $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$;
3. $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ *(ассоциативность композиции).*

Бинарное отношение R на множестве A называется *рефлексивным*, если для любого его элемента a выполняется aRa: $\forall a \in A \quad aRa$.

Бинарное отношение R на множестве A называется *антирефлексивным*, если для любых его элементов $a,b \quad aRb \Rightarrow a \neq b$.

Бинарное отношение R на множестве A называется *симметричным*, если из его выполнения для a, b следует выполнение для b, a: $\forall\, a, b \in A \quad aRb \Rightarrow bRa$.

Бинарное отношение R на множестве A называется *антисимметричным*, если из его выполнения для a, b и b, a следует, что a и b совпадают. $\forall\, a, b \in A \quad aRb$ и $bRa \Rightarrow a = b$.

Бинарное отношение R на множестве A называется *транзитивным*, если из его выполнения для a,b и для b,c следует его выполнение для a,c: $\forall\, a, b, c \in A \quad aRb$ и $bRc \Rightarrow aRc$.

Бинарное отношение R на множестве A называется *полным*, или *линейным*, если для любых двух различных элементов множества A оно выполняется или для a, b, или для b, a: $\forall\, a, b \in A \mid a \neq b \Rightarrow aRb$ или bRa

Рассмотрим отношение R на множестве натуральных чисел следующим образом: $R = \{(x,y) \mid x$ – делитель $y\}$. Это отношение является рефлексивным, т.к. $x/x = 1 \quad \forall x \in \mathbf{N}$. Отношение R антисимметрично, т.к. если $x/y \in \mathbf{N}$ и $y/x \in \mathbf{N}$, то $x = y$. Проверим транзитивность R. $y/x \in \mathbf{N}$ и $z/y \in \mathbf{N} \Rightarrow z/x = z/y \cdot y/x \in \mathbf{N}$.

Теорема (о проверке свойств отношения):

Отношение R на множестве A^2:

-R рефлексивно $\Leftrightarrow I \subset R$;

-R симметрично $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;

-R транзитивно $\Leftrightarrow R \circ R \subset R$;

-R антисимметрично $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset I$;

-R полно $\Leftrightarrow R \cup I \cup R^{-1} = U$;

Представление отношений в ЭВМ

Удобным способом представления отношений в ЭВМ является *матричная форма*. Рассмотрим два конечных множества $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ и бинарное отношение $P \subseteq A \times B$. Определим матрицу $[P] = (p_{ij})$ бинарного отношения P по следующему правилу: $p_{ij} = \begin{cases} 1, & если\ (a_i,b_j) \in P, \\ 0, & если\ (a_i,b_j) \notin P. \end{cases}$ Полученная матрица содержит полную информацию о связях между элементами и позволяет представлять эту информацию на компьютере.

Заметим, что любая матрица, состоящая из нулей и единиц, является матрицей некоторого бинарного отношения.

Основные свойства матриц бинарных отношений:

1. Если бинарные отношения $P,Q \subseteq A \times B$, $[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$, то $[P \cup Q] = (p_{ij}+q_{ij})$, $[P \cap Q] = (p_{ij} \cdot q_{ij})$, где умножение осуществляется обычным образом, а сложение – по логическим формулам (т.е. 0+0=0, во всех остальных случаях 1). Итак: $\mathbf{[P \cup Q] = [P]+[Q]}$, $\mathbf{[P \cap Q] = [P]*[Q]}$.

2. Если бинарные отношения $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, то $[P \circ Q] = [P] \cdot [Q]$, где умножение матриц [P] и [Q] осуществляется по обычному правилу, а произведение и сумма элементов из [P] и [Q] – по правилам пункта 1.

3. Матрица обратного отношения P^{-1} равна транспонированной матрице отношения P: $[\boldsymbol{P}^{-1}]=[\boldsymbol{P}]^{\mathrm{T}}$.

4. Если $P \subseteq Q$, $[P]=(p_{ij})$, $[Q]=(q_{ij})$, то $p_{ij} \le q_{ij}$. $\forall i,j$.

5. Матрица тождественного отношения единична: $[I_A] = (I_{ij})$: $I_{ij} = 1 \Leftrightarrow i=j$.

6. Пусть R – бинарное отношение на A^2. Отношение R называется *рефлексивным*, если $\forall x \in A$ $(x,x) \in R$, т.е. $I_A \in R$ (на главной диагонали R стоят единицы). Отношение R называется *симметричным*, если $\forall x,y \in A$ $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, т.е. $R^{-1}=R$, или $[R]=[R]^{\mathrm{T}}$ (матрица симметрична относительно главной диагонали). Отношение R называется *антисимметричным*, если $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, т.е. в матрице $[R \cap R^{-1}]=[R]*[R]^{\mathrm{T}}$ вне главной диагонали все элементы равны 0. Отношение R наз. *транзитивным*, если $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$, т.е. $R \circ R \subseteq R$.

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение R на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Обычно отношение эквивалентности обозначают через $\equiv$ или $\sim$. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Определим *класс эквивалентности* $[x]$ для $x \in A$: $[x] = \{y \mid xRy\}$, т.е. это множество всех элементов A, которые R-эквивалентны x.

Пусть E – эквивалентность на множестве M. Тогда семейство классов эквивалентности множества M называется *фактор-множеством* множества M по отношению E и обозначается $M/E = \{E(x) \mid x \in M\}$. *Утверждение*: всякое отношение эквивалентности на множестве M определяет разбиение множества M, причем среди элементов разбиения нет пустых; и обратно, всякое разбиение множества M, не содержащее пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве M: $\equiv \subset M^2 \Leftrightarrow \exists\, \beta = \{B_i \mid B_i \subset M, B_i \neq \varnothing,$ $M = \cup B_i$ и $\forall\, i,j$ $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing$

Отношение порядка

Бинарное отношение R на множестве A называется *отношением порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно. Отношение порядка может быть рефлексивным, и тогда оно называется отношением *нестрогого порядка* (обычно обозначается $\le$). Если отношение порядка антирефлексивно, то оно называется отношением *строгого порядка* и обозначается обычно $<$. Отношение порядка может быть полным (линейным), и тогда оно называется отношением линейного порядка (если любые два элемента сравнимы между собой), а множество – вполне упорядоченным. Если отношение порядка не обладает свойством полноты, то оно называется отношением *частичного порядка*, а множество с заданным на нем отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным множеством*. Обычно отношение порядка в общем случае обозначают $<$, и вместо ***aRb*** или $(a,b) \in R$ пишут $a<b$. Для отношения $<$ обратным является $>$.

- Отношение $<$ на множестве чисел является отношением строгого полного порядка, отношение $\le$ – нестрогого полного порядка. Следовательно, множество чисел является линейно упорядоченным. Отношение $\subset$ на булеане $P(M)$ является отношением нестрого частичного порядка.

Пусть дано ч.у.м. M с отношением порядка ≤: Ũ= $\{M,\le\}$. М*аксимальный* и *минимальный* элементы, *наибольший* и *наименьший*. Наибольший (наименьший) элемент обычно называют *единицей*, а наименьший – *нулем* множества. Заметим, что всякий наибольший элемент (если он существует) является максимальным, а всякий наименьший – минимальным. Обратное утверждение неверно. Максимальных (минимальных) элементов может быть несколько; *верхняя грань множества*, *точная верхняя грань* **sup A**, нижняя *грань, точная нижняя грань* **inf A.**

Утверждение: Во всяком конечном непустом частично упорядоченном множестве существует минимальный элемент.

Замкнутость множества означает, что многократное повторение допустимых шагов не выводит за пределы этого множества.

Пусть R и R' – отношения на множестве M. Тогда отношение R' называется *замыканием отношения R относительно свойства C*, если:

-R' обладает свойством C: C(R');

-R' является надмножеством R: $R \subset R'$;

-R' является наименьшим: C(R''), $R \subset R'' \Rightarrow R' \subset R''$.

Пусть А – вполне упорядоченное множество с отношением порядка ≤. Введем отношение ≤ на множестве упорядоченных наборов из А следующим образом:
$(a_1,\ldots,a_m) \le (b_1,\ldots,b_n) \Leftrightarrow$ $m \le n$ и $\forall i = 1,..,m$ $a_i = b_i$ или $\exists\ k \le \min(n,m) \mid a_k \le b_k$ и $a_i = b_i$ $\forall i < k$, т.е. первые элементы совпадают, а k-й меньше.

Такое отношение называется *лексикографическим*, или *алфавитным* порядком.

1. 2 Лекция № 2 (2 часа).

Тема: «Основы комбинаторики»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Правила комбинаторики.

2. Комбинаторные формулы

3. Биномиальные коэффициенты и их свойства.

4. Метод включений и исключений.

5. Метод рекуррентных соотношений

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Правила комбинаторики.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого обычного множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой *комбинаторной конфигурацией*. Простейшими примерами комбинаторных конструкций являются перестановки, размещения, сочетания и разбиения, рассматриваемые ниже. Вычисления на дискретных математических структурах – комбинаторные вычисления – требуют комбинаторного анализа для установления свойств и оценки применимости алгоритмов.

Комбинаторные задачи и основные принципы. Во многих практических задачах возникает необходимость подсчитать количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным. условиям. Такие задачи называются комбинаторными. Среди всего многообразия таких задач есть ряд наиболее часто встречающихся, для которых известны способы подсчета. Для формулировки и решения комбинаторных задач используются различные модели комбинаторных конфигураций. Рассмотрим две наиболее популярные.

Дано n предметов. Их нужно разместить по m ящикам так, чтобы выполнялись заданные ограничения. Сколькими способами это можно сделать?

1. Дано множество функций $F : X \to Y$, где $|X| = n$, $|Y| = m$, $X = \{1,2,\ldots,n\}$ (предметы – элементы множества X – перенумерованы, т.е. можно считать номер отличительным признаком предмета). Без ограничения общности можно считать, что элементы множества Y также перенумерованы: $Y = \{1,2,\ldots,m\}$, $F = [F(1),\ldots,F(n)]$, $1 \le F(i) \le m$. Сколько существует функций, удовлетворяющих заданным ограничениям?

Наиболее часто соответствие конфигураций 1-го и второго типа очевидно, поэтому анализ проблем и вывод формул можно проводить на любом языке.

Основные комбинаторные принципы

Утверждение: Если множества A и B не пересекаются и содержат по m и n элементов соответственно, то множество $A\cup B$ содержит $m + n$ элементов: для множеств A и $B \mid A\cap B=\varnothing$: $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Теорема(о мощности произведения конечных множеств): Для любых множеств A и B $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

Правило суммы (комбинаторный принцип сложения): Если объект $\alpha\in A$ можно выбрать m способами, а объект $\beta\in B$, отличный от α, n способами, причем α и β нельзя выбрать одновременно, то осуществить выбор «либо α, либо β» можно $m+n$ способами.

Пусть в киоске имеется 5 различных книг по математике и 7 – по физике. Если студент может купить только одну книгу, то у него есть 5 вариантов выбора первой книги и 7 вариантов – второй, т.е. 12 вариантов.

Правило произведения (комбинаторный принцип умножения) Если объект $\alpha\in A$ можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора можно выбрать n способами объект $\beta\in B$, отличный от α, то выбор обоих объектов α и β в указанном порядке можно осуществить $m\cdot n$ способами.

Пусть в салоне связи имеется 50 различных моделей сотовых телефонов и по три вида чехлов для каждой модели. Сколькими способами можно выбрать телефон и чехол к нему? Очевидно: имеется 50 вариантов выбора телефона. Выбрав телефон, можно 3 способами выбрать чехол, т.е. всего $50\times3=150$ вариантов.

Сравнивая утверждение 2.1 и теорему 2.1 с правилами суммы и произведения, можно заметить, что в них речь идет об одних и тех же закономерностях, хотя и используются различные формулировки. Очевидным образом эти правила распространяются на случай большего количества множеств.

2. Комбинаторные формулы

Комбинаторные конфигурации: перестановки и подстановки

Пусть дано множество $M = \{a_1,a_2,...,a_n\}$. *Перестановкой* элементов множества M называется любой упорядоченный набор из n различных элементов множества M. Перестановки различаются только порядком входящих в них элементов. Перестановка элементов множества M может быть задана посредством *функции подстановки*. Будем определять подстановку как биекцию $\sigma : M \to M$ и задавать ее с помощью матрицы, состоящей из двух строк.

Пусть множество $M = \{1,2,\ldots,n\}$, а $\sigma(k) = s_k$, $1 \le s_k \le n$, $k=1,\ldots,n$, $\{s_1,s_2,\ldots,s_n\} = \{1,2,\ldots,n\}$. Тогда матрица подстановки σ будет иметь вид: $[\sigma] \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$.

Число всех перестановок множества M ($|M| = n$) равно $n!$

Сколькими способами можно расставить на полке 6 томов книг? Это можно осуществить $P_6 = 6! = 720$ способами.

Понятие выборки. Пусть дано множество $M = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, $m \le n$. Набор, состоящий из m элементов множества M, называется выборкой объема m из n элементов.

Выборки классифицируются следующим образом:

По критерию повторяемости элементов: С возвращением объема (с повторениями) и без возвращения объема (без повторений).

По критерию упорядоченности: Упорядоченные (размещения) и неупорядоченные (сочетания).

Иллюстрация: ящик с n нумерованными шариками.

Размещения из n элементов по m, *Сочетания без повторений из n элементов по m*, *Размещения с повторениями* (или *упорядоченными выборками с возвращениями*) *из n элементов по k*.

В отличие от выборок без повторений, количество выбираемых объектов может быть больше, чем количество типов, т.е. может быть $k \ge n$. Если вернуться к примеру 2.12 (а), то можно рассматривать и 10-разрядные числа.

Теорема *(о мощности множества P(M)): Для конечного множества M* $|2^M| = 2^{|M|}$.

Следствие: *можно сгенерировать все подмножества конечного множества M, перечислив некоторым способом все наборы из нулей и единиц длины n.* Можно выполнять такую генерацию различными способами (например, все наборы с одной 1, все с двумя, …). Это можно сделать наиболее эффективно, используя т.н. *бинарный код Грея*. Алгоритм построения бинарного кода Грея позволяет генерировать последовательность всех подмножеств n-элементного множества таким образом, что каждое последующее подмножество получается из предыдущего добавлением или удалением единственного элемента.

Определим отношение эквивалентности на множестве размещений с повторениями из n элементов по k: $(a_1,a_2,\ldots,a_k) \sim (b_1,b_2,\ldots,b_k) \Leftrightarrow \forall c \in M$ число элементов $a_i = c$ совпадает с числом элементов $b_j = c$.

Тогда *сочетанием с повторениями* из n элементов по k или *неупорядоченной выборкой с возвращениями из n элементов по k* является множество, которое состоит из элементов, выбранных k раз из множества M, причем один и тот же элемент допускается выбирать повторно.

В примере с множеством M={1,2,3,4,5} сочетания с повторениями из 5 элементов по 2 будут отличаться от размещений тем, что одинаковые по составу наборы будут независимо от порядка элементов в них считаться эквивалентными: (1,1), (1,2)~(2,1), (2,2), (5,2) и т.п.

При рассмотрении выборок с повторениями число n более наглядно трактуется как количество имеющихся в наличии типов объектов, а k – количество непосредственно выбираемых объектов. Раз объекты выбираются с повторениями, неважно, каково их реальное количество для каждого из типов. Можно считать их неисчерпаемыми.

Число всех сочетаний с повторениями обозначается $\overline{C}_n^{\,k}$ =$\hat{C}(n,k)$ и вычисляется по формуле: $\hat{C}(n,k)=\overline{C}_n^{\,k} = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ **(2.2)**

Пусть в кондитерской продается 10 различных видов пирожных. (n=10 – число типов). Сколькими способами можно купить 12 пирожных? (k=12). $\hat{C}$(10,12)=C(10+12–1,12)=C(21,12)=21!/(12! (10–1)!)= 21!/(12! 9!).

3. Биномиальные коэффициенты и их свойства.

Биномиальные коэффициенты. Число сочетаний $C(n,k)$ – число различных k-элементных подмножеств n-элементного множества – встречается в формулах решения многих комбинаторных задач. Например, для определения числа подмножеств n-элементного множества, удовлетворяющих некоторому условию, задача разбивается на составные части: рассматриваются отдельно 1-элементные подмножества, 2-элементные и т.д., затем результаты складываются. Числа $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ называются *биномиальными коэффициентами*.

Свойства биномиальных коэффициентов

Теорема: Число C_n^k обладает следующими свойствами:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$; 2. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$; 3. $C_n^k \cdot C_k^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$

Доказательство.

1. $C_n^m \equiv \dfrac{n!}{(n-m)!m!} = \dfrac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} = \dfrac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} \equiv C_n^{n-m}$

2. $$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{(n-m)!m!} + \frac{n!}{(n-(m+1))!(m+1)!} = \frac{n!}{(n-(m+1))!(n-m)m!} + \frac{n!}{(n-(m+1))!m!(m+1)} = \frac{n!(m+1)+n!(n-m)}{(n-(m+1))!(n-m)m!(m+1)} = \frac{n!(m+1+n-m)}{(n-m)!(m+1)!} =$$
$$= \frac{n!(n+1)}{(n-m)!(m+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(m+1))!(m+1)!} = C_{n+1}^{m+1}.$$

3. $$C_n^k \cdot C_k^m = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-m)!m!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-m)!m!} = \frac{n!(n-m)!}{(n-k)!(k-m)!m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-k)!(k-m)!}$$
$$= C_n^m \cdot \frac{(n-m)!}{(n-m-(k-m))!(k-m)!} = C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}. \ \blacksquare$$

(Бином Ньютона): *При любых x, y ∈ R* $(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^{n-m}$.

Следствие 1. $2^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m$ **.**

Действительно, $2^n = (1+1)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m 1^m 1^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m$.

Следствие 2. $\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m = 0$.

Действительно, $0 = (-1+1)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (-1)^m 1^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m$.

1. $\sum_{m=0}^{n} m C_n^m = n 2^{n-1}$; 2. $C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$ (Тождество Коши).

Треугольник Паскаля. Обобщенные перестановки и разбиения, Перестановки с повторениями, Разбиения и числа Стирлинга.

$R(n;\, n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Теорема: *Число R(n,k) упорядоченных разбиений на k подмножеств вычисляется по формуле* $R(n,k) = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_k=n \\ n_i>0}} R(n; n_1, \ldots, n_k)$.

Числа $R(n;\, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ называются *полиномиальными коэффициентами*, поскольку для $\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}$ справедливо соотношение **(Полиномиальная теорема)**

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_k=n \\ n_i\ge 0}} \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k} = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_k=n \\ n_i\ge 0}} R(n; n_1, \ldots, n_k) a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$$

Если рассмотренный выше набор $(B_1, \ldots, B_k)$ рассматривать без учета порядка его блоков, то он называется *неупорядоченным разбиением* множества X, или просто *разбиением на k блоков*.

Число разбиений *n*-элементного множества на k блоков называется *числом Стирлинга второго рода* и обозначается *S(n,k)*. Определяются числа Стирлинга 2 рода рекурсивно следующим образом:

$S(n,k)=S(n-1,k-1)+ k\cdot S(n-1,k)$ $(0<k<n)$

При этом $S(n,0)=0$ при $n>0$, $S(n,k)=0$ при $n<k$, $S(n,n)=1$, $S(0,0)=1$.

4. Метод включений и исключений.

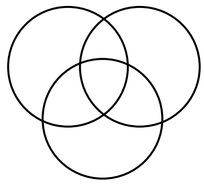
Принцип включения и исключения. Рассмотренные ранее формулы и алгоритмы дают способы вычисления комбинаторных чисел для некоторых распространенных комбинаторных конфигураций. Практические задачи не всегда прямо сводятся к известным комбинаторным конфигурациям. В этом случае используются различные методы сведения одних комбинаторных конфигураций к другим. Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые методы. Часто комбинаторная конфигурация является объединением других, число комбинаций в которых вычислить проще. В таком случае требуется уметь вычислять число комбинаций в объединении. В простых случаях формулы для вычисления очевидны:

Теорема (комбинаторный принцип сложения): Пусть множества A и B могут пересекаться. Тогда количество элементов, которые можно выбрать из A или B, определяется по формуле:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Очевидно, что рассмотренная теорема будет справедлива для произвольных множеств. Если перейти от двух множеств к большему количеству, в частности, к трем, и проиллюстрировать с помощью диаграмм Венна, то очевидным результатом явится следующая формула:

$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| + |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|$, т.е. для вычисления количества элементов объединения трех множеств нужно просуммировать мощности всех этих множеств, вычесть мощности всех попарных пересечений и добавить число элементов, содержащихся в пересечении всех трех множеств.



Более общая формула, известная как принцип включения и исключения, позволяет вычислить мощность объединения произвольного количества множеств, если известны их мощности и мощности всех пересечений.

Теорема (принцип включения и исключения):

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{m-1} |A_i \cap \ldots \cap A_m|$$

Пусть множество A состоит из N элементов и имеется m одноместных отношений (свойств) $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Каждый элемент множества может обладать или не обладать любым из этих свойств. Обозначим через $N_{i_1 \ldots i_k}$ число элементов, обладающих свойствами $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ и, может быть, некоторыми другими. Тогда число $N(0)$ элементов, не обладающих ни одним из свойств $P_1, \ldots, P_m$, вычисляется по следующей формуле:

$$N(0) = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^m S_m, \text{ где } S_0 = N, \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} N_{i_1 \ldots i_k} \; (k = 1, \ldots, m)$$

Обобщая, получаем формулу, позволяющую вычислить число $N(r)$ элементов, обладающих ровно r свойствами $(1 \le r \le m)$.

$$N(r) = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k C_{r+k}^{r} S_{r+k}$$

Определим функцию $[x]$ для вещественных чисел как наибольшее целое число, не превосходящее x (*целая часть* числа x). Для положительных чисел a и b значение функции $\left[\frac{b}{a}\right]$ равно количеству чисел из множества $\{1, 2, \ldots, b\}$, которые делятся на a, т.е. кратны a.

5. Метод рекуррентных соотношений

Рекуррентные функции. Понятие последовательности было введено в разделе «специальные функции». Рекуррентным соотношением, рекуррентным уравнением или рекуррентной формулой называется соотношение вида $a_{n+k} = F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$, которое позволяет вычислить все члены последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, если заданы ее первые k членов.

1.Формула $a_{n+1} = a_n + d$ задает *арифметическую прогрессию*.
2. Формула $a_{n+1} = q \cdot a_n$ задает *геометрическую прогрессию*.
3. Формула $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ задает последовательность *чисел Фибоначчи*.

В случае, когда рекуррентное соотношение линейно и однородно, т.е. для всех n и некоторого k выполняется $a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = 0$, где $p_i = \text{const}$, последовательность $a_0, a_1, \ldots$ называется *возвратной*. Соотношение (2.9) называется *возвратным уравнением порядка k*.

Геометрическая прогрессия – это возвратная последовательность первого порядка, так как $a_{n+1} = q \cdot a_n \Rightarrow a_{n+1} - q \cdot a_n = 0$.

Любая последовательность, удовлетворяющая возвратному уравнению, называется его *решением*.

1. 3 Лекция № 3 (2 часа).

Тема: «Основные понятия теории графов. Числовые характеристики графов»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия теории графов. Виды графов.
2. Операции над графами
3. Способы задания графов. Матричное представление графов

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия теории графов. Виды графов.

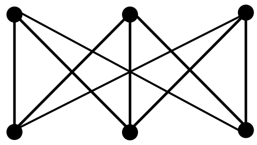
Определение графа. Часто бывает полезно и наглядно изобразить некоторую ситуацию в виде рисунка, состоящего из точек (вершин), представляющих основные элементы ситуации и линий (ребер), отражающих связи между элементами. Такие рисунки называются *графами*.

Между рассмотренным ранее понятием отношения и понятием графа существует тесная связь. Теория графов представляет собой удобный язык для описания программных и других моделей. Граф – это удобный способ изображения различных взаимосвязей (отношений). Граф может изображать сеть улиц в городе (вершины – перекрестки, улицы – ребра), блок-схемы программ, электрические цепи, географические карты и т.д

История теории графов. Теория графов возникла из решения различных прикладных задач. Первые задачи были связаны с решением математических развлекательных задач и головоломок. Рассмотрим эти задачи (пояснить подробнее)

1. *Задача о Кенигсбергских мостах.* Необходимо обойти все 4 части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. Ее развитие привело к циклу задач об обходах графов (Леонард Эйлер, 1736 г.).

2. *Задача о трех домах и трех колодцах*. Есть три дома и три колодца. Жители домов поссорились. Требуется от каждого дома проложить тропинку к каждому колодцу так, чтобы эти тропинки не пересекались. (Куратовский, 1930)



3.Задача о четырех красках. Любую карту на плоскости раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одинаково. Эта задача была сформулирована в середине XIX века, и попытки ее решить привели к появлению некоторых исследований графов, имеющих теоретическое и прикладное значение.

Многие результаты середины XIX века были получены при решении практических проблем. (Например, Кирхгоф: система уравнений токов и напряжений в электротехнической схеме представлялась графом и решалась с помощью методов теории графов; химия; Задача о перевозках, решение которой привело к созданию эффективных методов решения транспортных задач …). В XX веке задачи, связанные с графами, получили распространение не только в физике, электротехнике, химии, биологии, экономике, но и внутри различных разделов математики (алгебра, теория чисел, теория вероятностей и др.).

В проблематике теории графов можно выделить направления комбинаторного и геометрического характера. К первому относятся задачи о построении графов с заданными свойствами, о подсчете и перечислении таких графов. Геометрический характер носят, например, задачи, связанные с обходами графов. Характерным специфическим направлением теории графов является цикл проблем, связанных с раскрасками, в которых изучаются разбиения множества вершин, обладающие определенными свойствами.

Основные понятия. *Граф G* определяется как упорядоченная пара $\langle V, E\rangle$, где V – непустое множество *вершин*, отношение $E \subset V^2$ – множество *ребер* (набор неупорядоченных или упорядоченных пар вершин). Вершины и ребра графа называются его элементами.

Граф, содержащий конечное число элементов, называется *конечным*. Число вершин конечного графа называется его *порядком* и обозначается $|V|$, число ребер обозначается как $|E|$: $G(V,E) = \langle V, E\rangle$, $V \neq \varnothing$, $E \subset V\times V$, $E = E^{-1}$.

Граф порядка n, имеющий m ребер, называется *(n,m)-графом*.

Обычно граф изображают *диаграммой*: вершины – точками или кружками, ребра – линиями (нарисовать). Такой способ задания графа является самым простым и наглядным, хотя и годится только для простейших случаев. Кроме того, затруднительно обрабатывать такой граф с помощью ЭВМ. Поэтому существуют специальные способы представления графа в ЭВМ, которые мы рассмотрим чуть позже.

Пусть v_1 и v_2 – вершины, e – соединяющее их ребро. Тогда ребро e и каждая из этих вершин называются *инцидентными* друг другу, вершины v_1 и v_2 называются *смежными*. Два ребра, имеющие одну общую вершину (инцидентные одной вершине), также называются *смежными*.

Множество вершин, смежных с вершиной v, называется *множеством смежности* (*окружением*) вершины v и обозначается $\Gamma^+(v) = \{u\in V \mid (u,v)\in E\}$, $\Gamma(v)=\Gamma^*(v) = \Gamma^+(v)\cup\{v\}$. Очевидно, что: $u \in \Gamma(v) \Leftrightarrow v \in \Gamma(u)$. Если не оговорено противное, то подразумевается Γ^+

и обозначается просто Г. Если A – множество вершин, то $\Gamma(A)$ – множество вершин, смежных с вершинами из A: $\Gamma(A) = \{u \in V \mid \exists v \in A \ \ u \in \Gamma(v)\} = \cup\Gamma(v) \ \forall v \in A$.

Другие определения графов и бинарные отношения.

Часто рассматриваются следующие разновидности графов.

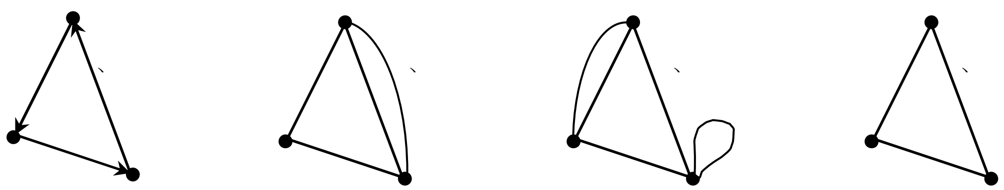
1. В некоторых задачах инцидентные ребру вершины рассматриваются в определенном порядке. Тогда элементами множества $E=\{(u,v) \mid u,v \in V\}$ являются упорядоченные пары, т.е. ребру приписывается направление от одной вершины к другой, и ребра называются *дугами* (говорят, что дуга *выходит* из вершины u и *заходит* в вершину v). Вершины в таком графе называются *узлами*, а сам граф, все ребра которого являются дугами, называется *ориентированным* графом, или *орграфом* (см. рис. а)). Иногда рассматриваются и *смешанные* графы, имеющие как дуги, так и неориентированные ребра.

2. Различные ребра графа могут быть инцидентны одной и той же паре вершин, в этом случае они называются *кратными* ребрами, а сам граф – *мультиграфом* (см. рис. б)).

3. Если элементом множества E является пара одинаковых элементов V, то такое ребро соединяет вершину саму с собой. Тогда это ребро называется *петлей*, а граф – *псевдографом* (рис. в)). В псевдографе возможно также наличие кратных ребер.

4. В отличие от мультиграфа и псевдографа, граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

5. Если задана функция $F : V \to M$ или $F : E \to M$, то множество M называется *множеством пометок*, а сам граф называется *размеченным* (т.е. всем его вершинам или всем ребрам присвоены некоторые метки, в качестве которых обычно используются буквы или целые числа – г).



Далее, говоря «граф G(V,E)», будем иметь в виду неориентированный непомеченный граф без петель и кратных ребер.

Фактически, графы и бинарные отношения – это один и тот же класс объектов, описанный разными средствами. Отношения (в частности, функции) являются базовыми средствами для построения большинства математических моделей, используемых при решении практических задач. С другой стороны, графы допускают наглядное представление в виде диаграмм. Это объясняет широкое использование графов при кодировании и проектировании программ.

Любой граф с петлями, но без кратных ребер, задает бинарное отношение E на множестве V, и обратно. Пара элементов принадлежит отношению: $(a,b) \in E \subset V \times V \Leftrightarrow$ в графе есть G ребро (a,b). Неориентированный граф соответствует симметричному отношению. Изменение направления всех дуг соответствует обратному отношению. Мультиграф, все вершины которого имеют петли, задает рефлексивное отношение.

Изоморфизм графов: При изображении графа точки, обозначающие его вершины, берутся совершенно произвольно, поэтому рисунки одного и того же графа могут быть совершенно непохожими. Как же понять, одинаковы ли графы, изображенные разными чертежами? Решение проблемы стандартное – если можно взаимно однозначно отобразить множество вершин одного графа на множество вершин другого так, чтобы сохранилось отношение смежности, то это две копии графа.

Говорят, что два графа $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ *изоморфны*: $G_1\sim G_2$, если существует биекция (1-1 соответствие) h: $V_1\to V_2$, сохраняющая отношение инцидентности (при которой смежные вершины (ребра) графа G_1 переходят в смежные вершины (ребра) графа G_2):

$e_1=(u,v)\in E_1 \Rightarrow e_2=(h(u),h(v))\in E_2$; $\qquad e_2=(u,v)\in E_2 \Rightarrow e_1=(h^{-1}(u),h^{-1}(v))\in E_1$;

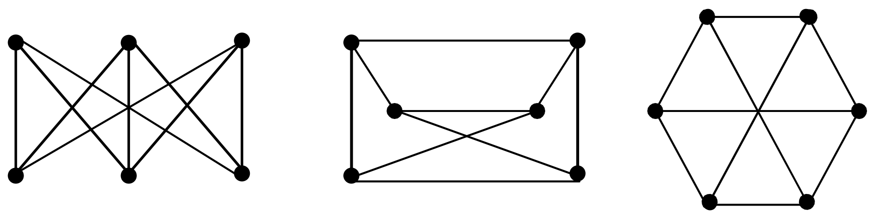
Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, являются *изоморфными*. Изоморфизм графов является отношением эквивалентности. Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами:

1) рефлексивность – G~G, где требуемая биекция есть тождественная функция;

2) симметричность – если $G_1\sim G_2$ с биекцией h, то $G_2\sim G_1$ с биекцией h^{-1};

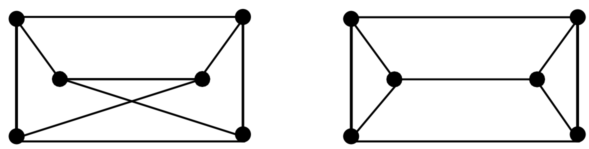
3) транзитивность – если $G_1\sim G_2$ с биекцией h, а $G_2\sim G_3$ с биекцией g; то $G_1\sim G_3$ с биекцией $g\circ h$.

Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, т.е. рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма.



Три внешне различные диаграммы, приведенные на рисунке, являются диаграммами одного и того же графа.

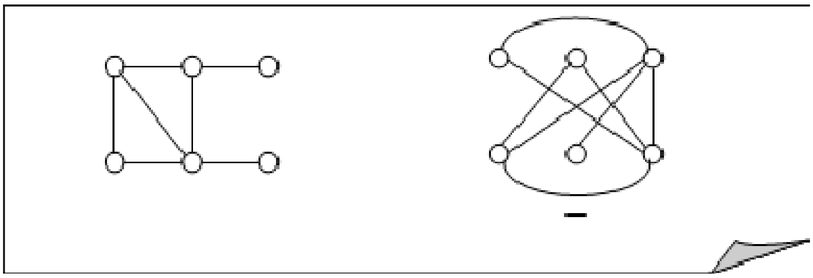
Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется *инвариантом* графа. В частности, количество вершин и количество ребер – инварианты графа G.



Не известно никакого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

2. Операции над графами

Дополнение графа. Граф $\overline{G}$ называется дополнением графа G, если $V(\overline{G}) = V(G)$, причём вершины U и V являются смежными в графе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G. Таким образом, G и $\overline{G}$ не имеют общих рёбер, а $E(G)$ È $E(\overline{G})$ с общим множеством вершин образует полный граф.

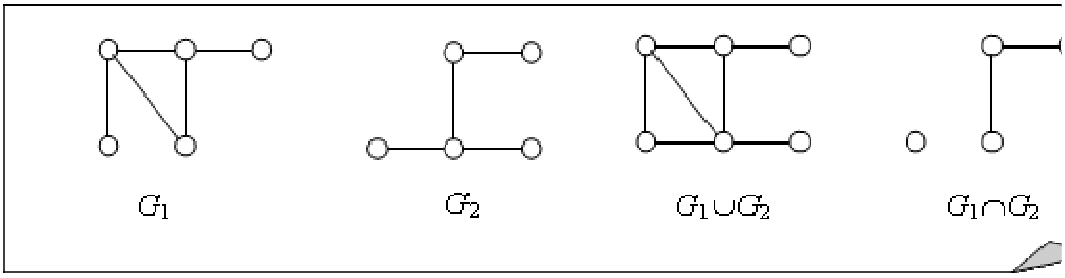


Объединение графов.

Объединением графов *G*1 и *G*2 называется граф *G*1È*G*2, в котором *V*(*G*1È*G*2) = =*V*(*G*1)È*V*(*G*2) и *E*(*G*1È*G*2) = *E*(*G*1)È*E*(*G*2).

Пересечение графов.

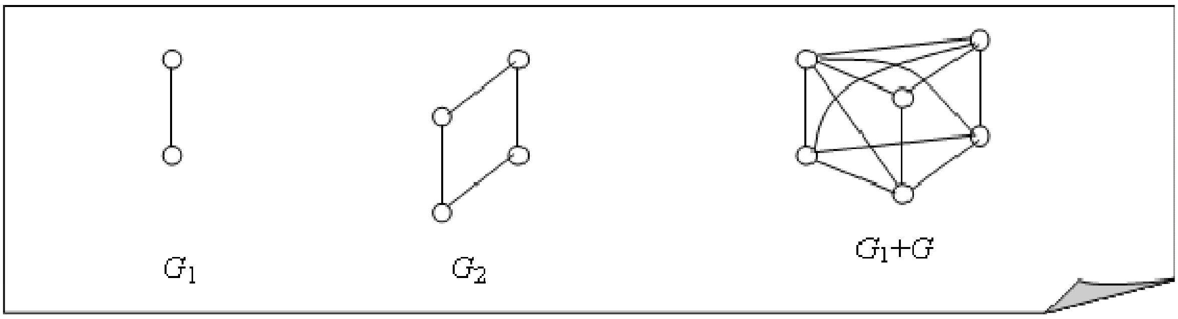
Пересечением графов *G*1 и *G*2 называется граф *G*1Ç*G*2, в котором *V*(*G*1Ç*G*2) = =*V*(*G*1)Ç*V*(*G*2) и *E*(*G*1Ç*G*2) = *E*(*G*1)Ç*E*(*G*2).



Соединение графов.

Соединением графов *G*1 и *G*2 называется объединение *G*1È*G*2, дополненное всеми рёбрами, соединяющими вершины *G*1 с вершинами *G*2. Обозначается соединение: *G*1+*G*2,

В частности, если *Gi* – (*Ni*, *Mi*)-графы, не имеющие общих вершин, то *G*1+*G*2 будет (*N*1+*N*2, *M*1+*M*2+*N*1×*N*2)-графом. Так, например, *Kp,Q = 0P+ 0Q =* $\overline{K}_p + \overline{K}_q$.



3. Способы задания графов. Матричное представление графов

Представление графов в ЭВМ. Требования к представлению графов. Чтобы задать граф, нужно каким-либо способом описать множество его вершин, множество его ребер, а также указать, какие вершины и ребра инцидентны (или смежные), т.е. задать отношение инцидентности (смежности). Рассмотрим несколько способов представления графа в ЭВМ. Они различаются объемом занимаемой памяти и скоростью выполнения операций над графами. Представление выбирается по потребностям конкретной задачи.

Напомним: число вершин графа обозначаем через *n*, а число ребер – через *m*. Характеристика *M(n,m)*, приведенная для каждого представления, означает требуемый для него объем памяти.

Указанные представления пригодны для графов и орграфов, а после некоторой модификации – для псевдографов, мультиграфов и гиперграфов.

Все представления будем иллюстрировать на конкретных примерах графа G и орграфа D (см. рисунок.).

Способы представления графа

1) <u>Матрица смежности.</u>

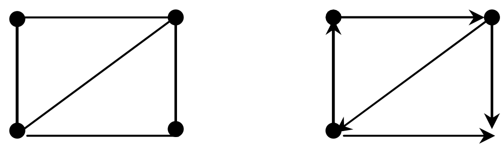
Матрица смежности A(G') графа (орграфа) – это квадратная матрица размера n×n, у которой для любых $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ элемент в i-й строке и j-м столбце равен 1, если i-я и j-я вершины соединены ребром (дугой с началом в вершине i), и равен 0 в противном случае.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j - \text{смежные (для орграфа дуга идет из } v_i \text{ в } v_j) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Память $M(n,m)=O(n^2)$.

Фактически это уже знакомая нам матрица бинарного отношения. Очевидно, что матрица смежности неориентированного графа является симметричной, элементы главной диагонали равны нулю, а количество единиц в каждой строке равно степени вершины, которой соответствует эта строка. По матрице смежности легко построить диаграмму графа.

Матрица смежности орграфа, не являющегося мультиграфом, не может быть симметричной, т.к. при ее составлении вершины орграфа играют различные роли.

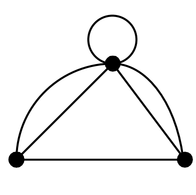


Матрицы смежности для заданных графа G и орграфа D

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В матрице смежности мультиграфа или псевдографа число, находящееся на пересечении i-й строки и j-го столбца, совпадает с числом ребер, соединяющих вершины i и j, при этом каждая петля считается двумя ребрами.

Псевдограф, изображенный на рисунке, имеет матрицу смежности следующего вида: $A(P) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$



2) Матрица инцидентности.

Другой способ задать граф – определить *матрицу инцидентности* (или *инциденций*) $I(G)$, имеющую n строк и m столбцов, элементы которой задаются следующим образом:

$$i_{k\,l} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_k \text{ инцидентна ребру } e_l \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для ориентированного графа:

$$i_{k\,l} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } v_k \text{ инцидентна ребру } e_l \text{ и является его концом} \\ 0, \text{если вершина } v_k \text{ и ребро } e_l \text{ не инцидентны} \\ -1, \text{если вершина } v_k \text{ инцидентна ребру } e_l \text{ и является его началом}. \end{cases}$$

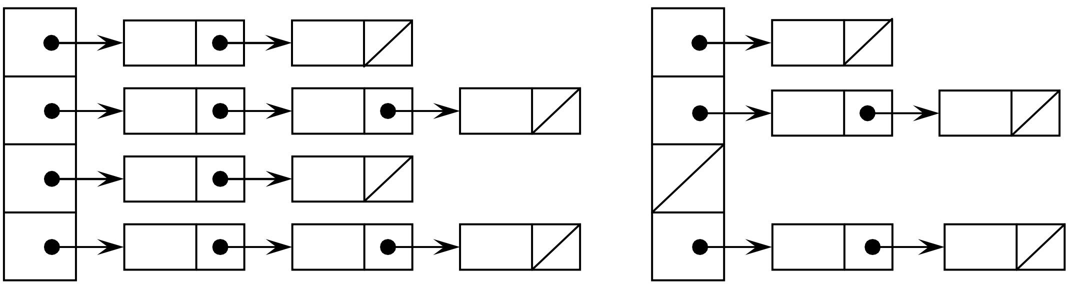
Матрицы инцидентности для заданных графа G и орграфа D

$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I(D) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что в каждом столбце матрицы инцидентности только два элемента отличны от 0 (или один, если ребро является петлей), т.к. ребро может быть инцидентно не более чем двум вершинам (а столбец соответствует ребру). Поэтому матрица содержит много нулей и такой способ описания неэкономен. $M(n,m)=O(n \cdot m)$.

3) Списки смежности.

Граф представляется с помощью списочной структуры (списка смежности), отражающей смежность вершин и состоящей из массива указателей на списки смежных вершин. Элемент списка представлен структурой с двумя полями: номер вершины и указатель. Для неориентированных графов $M(n,m)=O(n+2m)$, для орграфов $M(n,m)=O(n+m)$.



Списки смежности для заданных графа G и орграфа D:

	кон	нач	кон
1	2	1	2
1	4	2	3
2	3	2	4
2	4	4	1
3	4	4	3

4) Массив ребер (дуг).

Отношение инцидентности можно задать также списком ребер графа. Каждая строка этого списка соответствует ребру, в ней записаны номера вершин, инцидентных ему. $M=O(2m)$.

По списку ребер графа легко построить матрицу инцидентности, т.к. каждое ребро этого списка соответствует столбцу матрицы, а номера вершин в каждом элементе списка – это номера строк матрицы инцидентности, элементы в которых равны 1. Для орграфа координата начала – номер строки, где стоит –1, а координата конца – номер строки, где стоит 1.

Кратчайшие пути

Задача поиска кратчайшего пути (наиболее дешевого? короткого?) «от пункта А до пункта В» имеет массу практических приложений и различные алгоритмы решения. Математическая постановка задачи имеет следующий вид.

Рассматривается взвешенный граф (орграф) $G(V,E)$, ребрам (дугам) которого сопоставлены веса, обозначающие длину (или стоимость) пути из одного конца ребра в другой. Если из вершины v_i нет ребра (дуги) в вершину v_j, то вес ребра (v_i,v_j) считается равным ∞. Для ребер, являющихся петлями (диагональ матрицы смежности), их веса считаются равными 0. Все компоненты матрицы – веса ребер, соединяющих соответствующие вершины. Требуется определить кратчайший путь из одной вершины в другую.

Наиболее широко известны два алгоритма поиска кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры находит кратчайшее расстояние от одной фиксированной вершины до другой и указывает сам путь, длина которого равна этому расстоянию. Алгоритм Флойда-Уоршалла позволяет найти кратчайшие расстояния между всеми парами вершин графа.

Алгоритм Дейкстры. Находит кратчайшее расстояние от вершины v_1 до вершины v_n

Рассмотрим еще несколько алгоритмов нахождения кратчайшего пути между двумя заданными вершинами в ориентированной сети. Пусть $G=\{S,U,\Omega\}$ - ориентированный граф со взвешенными дугами. Обозначим s - вершину - начало пути и t - вершину – конец пути.

Общий подход к решению задачи о кратчайшем пути был развит американским математиком Ричардом Беллманом[**], который предложил название динамическое программирование.

[*] Едсгер Дейкстра (1930-2002 г.г.) - нидерландский математик.

[**] Ричард Эрнест Беллман (1920-1984 г.г.) - американский математик.

Задача о кратчайшем пути частный случай следующей задачи: найти в заданном графе пути, соединяющие две заданные вершины и доставляющие минимум или максимум некоторой аддитивной функции, определенной на путях. Чаще всего эта функция трактуется как длина пути и задача называется задачей о кратчайших путях. Алгоритм Дейкстры одна из реализаций этой задачи. Его часто называют алгоритмом расстановки меток. В процессе работы этого алгоритма узлам сети $x_i \in S$ приписываются числа (метки) $d(x_i)$, которые служат оценкой длины (веса) кратчайшего пути от вершины s к вершине x_i. Если вершина x_i получила на некотором шаге метку $d(x_i)$, это означает, что в графе G существует путь из s в x_i, имеющий вес $d(x_i)$. Метки могут находиться в двух состояниях – быть временными или постоянными. Превращение метки в постоянную означает, что кратчайшее расстояние от вершины s до соответствующей вершины найдено.

Алгоритм Дейкстры состоит из двух этапов. На первом этапе находится длина кратчайшего пути, на втором – строится сам путь от вершины s к вершине t.

Этап 1. Нахождения длины кратчайшего пути.

Шаг 1. Присвоение вершинам начальных меток.

Полагаем $d(s)=0^*$ и считаем эту метку постоянной (постоянные метки помечаются сверху звездочкой). Для остальных вершин $x_i \in S,\ x_i \neq s$ полагаем $d(x_i)=\infty$ и считаем эти метки временными. Пусть $\tilde{x}=s,\ \tilde{x}$ - обозначение текущей вершины.

Шаг 2. Изменение меток.

Для каждой вершины x_i с временной меткой, непосредственно следующей за вершиной $\tilde{x}$, меняем ее метку в соответствии со следующим правилом:

$$d_{нов.}(x_i)=\min\{d_{стар.}(x_i), d(\tilde{x})+\omega(\tilde{x},x_i)\}. \qquad (4.7.1)$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Из всех вершин с временными метками выбираем вершину x_j^* с наименьшим значением метки $d(x_j^*)=\min\left\{d(x_j) \big/ x_j \in S,\ d(x_j) - \text{временная}\right\}$ (4.7.2)

Превращаем эту метку в постоянную и полагаем $\tilde{x}=x_j^*$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Если $\tilde{x}=t$, то $d(\tilde{x})$ - длина кратчайшего пути от s до t. В противном случае происходит возвращение ко второму шагу.

Этап 2. Построение самого кратчайшего пути.

Шаг 5. Последовательный поиск дуг кратчайшего пути.

Среди вершин, непосредственно предшествующих вершине $\tilde{x}$ с постоянными метками, находим вершину x_i, удовлетворяющую соотношению

$$d(\tilde{x})=d(x_i)+\omega(x_i,\tilde{x}). \qquad (4.7.3)$$

Включаем дугу $(x_i,\tilde{x})$ в искомый путь и полагаем $\tilde{x}=x_i$.

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.

Если $\tilde{x}=s$, то кратчайший путь найден – его образует последовательность дуг, полученных на пятом шаге и выстроенных в обратном порядке. В противном случае возвращаемся к пятому шагу.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Множества и бинарные отношения»

2.1.1 Задание для работы:

1. Множества и операции над ними. Диаграммы Венна-Эйлера.

2. Элементы алгебры множеств.

3. Бинарные отношения и их свойства.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Множества и операции над ними. Диаграммы Венна-Эйлера.

Задание 1.

1.Перечислите элементы следующих множеств:

Аудиторные *Для самостоятельного выполнения* а) $A=\{x:x\in Z,10\le x\le 18\}$ ………………. $A=\left\{x:x\in Z,\frac{1}{x^2}\ge\frac{1}{16}\right\}$;

б) $B=\{x:x\in Z,6x^2+x-1=0\}$ ………….. $B=\{x:x\in R,6x^2+x-1=0\}$.

2.Описать множества с помощью предикатов:

а) $C=\{2,5,8,11,...\}$ …………………….. $C=\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{15},...\right\}$.

3. $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ -универсальное множество,

$A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,5,7\}, C=\{1,4,5,6\}$. Найти элементы множеств:

а) $B\cap C,(A\cup B)\cap(A\cap C)$ ………………… $A\cup C$, $A\cap B\cap C$,

б) $B\setminus C,\overline{A\cup B}$ ……………………………... $B\Delta C,\overline{C}$.

4. $A=\{3n:n\in Z,n\ge 4\}, B=\{2n:n\in Z\}, C=\{n:n\in Z,n^2\le 100\}$. С помощью операций на множествах выразить через A,B,C следующие множества:

а) $\{\pm1,\pm3,\pm5,...\}$ ……………………………$\{6n:n\in Z,n\ge 2\}$

б) $\{-9,-7,-5,-3,-1,0,1,3,5,7,9\}$ ……………… $\{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$.

2. Элементы алгебры множеств.

5.Проиллюстрируйте диаграммами Венна тождества:

а) закон дистрибутивности $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

б) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

6.Докажите тождества:

а) $\overline{(A\cap\overline{B})}\cup B=\overline{A}\cup B$ ……………………….$(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

7.Найти булеан $P(A)$ множества A:

а) $A=\{a,b,c\}$ …………………………… $A=\{2,5,8,9\}$.

Задание 2.

1. Пусть A,B,C - произвольные конечные множества. Доказать:

а) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$,

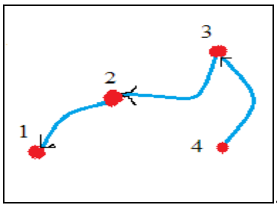
б) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

2. $U=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,3,5\}, B=\{3,4\}$. Найти характеристические векторы подмножеств A,B, по ним найти характеристические векторы множеств а) $A\cup B$, б) $A\cap B$, в) $\overline{B}$ и перечислить элементы этих множеств.

3. Бинарные отношения и их свойства.

Задание 3.

1. На множестве $A=\{1,2,3,4\}$ отношение R , данное перечислением пар $R=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$, изобразить графом и задать матрицей.

Решение. .

Матрица отношения равна $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Отношение на паре $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c,d\}$ множеств задано матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Описать отношение перечислением пар и изобразить орграфом.

3. Отношения на множестве натуральных чисел N заданы предикатами:

а) $R = \{(x, y): 2x + y = 9\}$; б) $S = \{(x, y): x + y < 7\}$; в) $T = \{(x, y): y = x^2\}$.

Задать эти отношения перечислением пар.

4. На множестве $A = \{1,2,3,4\}$ отношение определено предикатом $R = \{(x, y): x + 2y = 2n - 1, n \in A\}$. Представить R каждым из способов:

а) в виде множества упорядоченных пар;

б) графом;

в) матрицей.

5. Указать, какие из следующих отношений на Z являются рефлексивными, симметричными, транзитивными?

а) $x + y$ – нечётное число; б) $x + y$ – чётное число; в) $x \cdot y$ – нечётное число;

г) $x + x \cdot y$ – чётное число.

6. На множестве Z заданы отношения:

а) $xRy \Leftrightarrow x - y$ – чётное; б) $xTy \Leftrightarrow x, y$ – при делении на модуль $m = 5$ имеют одинаковые остатки.

Выяснить, являются ли R и T отношениями эквивалентности и если являются, то найти разбиения на классы эквивалентных элементов, фактор-множества, индексы разбиения.

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия об основных операциях с множествами и алгебре множеств, бинарных отношениях;

- приобрели умения и навыки выполнения операций с множествами, построения бинарных отношений;

2.2 Практическое занятие № 2 (2 часа).

Тема: «Основные алгебраические структуры»

2.2.1 Задание для работы:

1. Бинарные операции.
2. Группоид. Полугруппы и группы. Подстановки на множестве.
3. Кольца и поля.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Бинарные операции.

На множестве А определена **алгебраическая операция,** если каждым двум элементам этого множества, взятым в определенном порядке, однозначным образом поставлен в соответствие некоторый третий элемент из этого же множества.

Примерами алгебраических операций могут служить такие операции как сложение и вычитание целых чисел, сложение и вычитание векторов, матриц, умножение квадратных матриц, векторное умножение векторов и др.

2. Группоид. Полугруппы и группы. Подстановки на множестве.

Множество А с определенной на нем алгебраической операцией (например, умножением) называется **группой**, если выполнены следующие условия:

1) для любых трех элементов $a, b, c \in$ А выполняется свойство ассоциативности:

$$a(bc) = (ab)c$$

2) в множестве А существует такой элемент e, что для любого элемента a из этого множества выполняется равенство:

$$ae = ea = a$$

3) для любого элемента a множества существует элемент a' из этого же множества такой, что

$$aa' = a'a = e$$

Различные множества могут являться группой относительно какой- либо операции и не являться группой относительно другой операции.

Число элементов называется **порядком** группы.

1. Заданы две подстановки σ и τ своими матрицами [σ] и [τ]. Найти их произведение.

Решение. В матрице [τ] столбцы переставляются так, чтобы ее первая строка совпала со второй строкой матрицы [σ]: $\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$. В итоге получится:

$$[\sigma]\cdot[\tau] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

2. Заданы подстановки $[\sigma] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $[\tau] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Наити их произведе-ние.

Решение. $[\sigma\cdot\tau] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Как называется *подстановка* [e] = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. *Тождественная подстановка*: такая подстановка *e*, что $e(x)=x\ \forall x$.

4. Дать понятие *Обратной подстановки.*

Решение. Произведение исходной и обратной подстановок равно тождественной.

5. Назвать правило нахождения *Обратной подстановки* – это обратная функция, которая всегда существует (подстановка является биекцией). Для получения таблицы обратной подстановки нужно поменять местами строки таблицы исходной подстановки.

Для подстановки [σ] = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $[\sigma^{-1}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Дать понятие о цикле.

Решение. Подстановка σ называется *циклом длины r*, если матрицу [σ] перестановкой столбцов можно привести к виду:

$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{r-1} & s_r & s_{r+1} & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_r & s_1 & s_{r+1} & \dots & s_n \end{pmatrix}$, т.е. первые *r* элементов сменяют друг друга, а остальные неподвижны: $\sigma(s_i) = s_{i+1}$, для $1 \le i \le r-1$ и $\sigma(s_r) = s_1$.

7.Привести пример подстановки являющейся циклом и не являющейся цик-лом.

Решение. Подстановка σ с матрицей [σ] = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

является циклом (2 5 3 6), а подстановка с матрицей [τ] = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ циклом не является, т.к. из нее можно выделить два цикла (1 4) и (2 5 6 3).

8. Показать, что множество подстановок элементов множества $\{1, 2, ..., n\}$ образуют мультипликативную группу.

3. Кольца и поля.

1. Найти:

а) число не нулевых классов в кольце Z_m вычетов по модулю m.

б) Найти число не нулевых классов в кольце вычетов Z_5.

в) Число классов вычетов кольце вычетов Z_5 равно?

2. Пусть [0] – класс вычетов из кольца Z_7. Тогда класс вычетов [0] - это множество

+а) {…, -14, - 7, 0, 7, 14, …}

б) {…, -13, - 6, 1, 8, 15, …}

в) {…, -12, - 5, 2, 9, 16, …}

г) {…, -11, - 4, 3, 10, 17, …}

д) {0, 1, …, 6}

3. Если [1] – класс вычетов из кольца Z_7, то класс вычетов [1] - это множество

+а) {…, -13, - 6, 1, 8, 15, …}

б) {…, -14, - 7, 0, 7, 14, …}

в) {…, -12, - 5, 2, 9, 16, …}

г) {…, -11, - 4, 3, 10, 17, …}

д) {0, 1, …, 6}.

4.

	.	[3]	[4]	.
.	.	.	.	.
[2]	.	[5]	[6]	.
[3]	.	[6]	[?]	.
.	.	.	.	.

Рисунок - часть таблицы сложения в кольце Z_7 .Пропущенное число равно-...

ОТВЕТ:0

5.

	.	[3]	[4]	.
.	.	.	.	.
[2]	.	[6]	[1]	.
[3]	.	[2]	[?]	.
.	.	.	.	.

Здесь дана часть таблицы умножения в кольце Z_7 .Пропущенное число равно-...

ОТВЕТ:5

9. В формуле умножения [2]·[3] = [ ] классов вычетов в кольце Z_5 пропущенное число равно-...

ОТВЕТ:1

10. При умножении [3]·[3] = [ ] классов вычетов в кольце Z_5 пропущенное число равно-...

ОТВЕТ:4

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия бинарной операции, полугруппы и группы, кольца и поля;

- приобрели умения и навыки устанавливать бинарные операции, полугруппы и группы, кольца и поля.

2.3 Практическое занятие № 3 (2 часа).

Тема: «Основы комбинаторики»

2.3.1 Задание для работы:

1. Правила комбинаторики.

2. Комбинаторные формулы.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Правила комбинаторики.

1. Оценить применимость алгоритма.

Агенство недвижимости, база данных. Запись – пара (предложение, спрос). Найти варианты обмена (т.е. такие пары, где первая компонента одной совпадает со второй компонентой другой). Оценить простейший вариант поиска – «лобовой».

Решение. Трудоемкость $n\times(n-1)/2$. Если на одну проверку нужна 1 миллисекунда, то при n = 100 потребуется около 5 секунд, при n=100 000 – 5×10^6 сек, т.е. около 1389 часов. Алгоритм непригодный.

2. Пусть в киоске имеется 5 различных книг по математике и 7 по физике. Если студент может купить только одну книгу, то сколько у него есть вариантов?

Решение. 5 вариантов выбора первой книги и 7 вариантов – второй, т.е. 12 вариантов.

3. Пусть в салоне связи имеется 50 различных моделей сотовых телефонов и по три вида чехлов для каждой модели. Сколькими способами можно выбрать телефон и чехол к нему?

Решение. Очевидно: имеется 50 вариантов выбора телефона. Выбрав телефон, можно 3 способами выбрать чехол, т.е. всего 50×3=150 вариантов.

2. Комбинаторные формулы.

4.На тренировках занимаются 8 баскетболистов. Сколько разных пятерок может быть образовано тренером?

Решение. Т.к. при образовании пятерки важен только ее состав, то достаточно определить $C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 56$ пятерок.

5. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? при условии, что ни одна цифра не повторяется?

Решение. Составить разные числа можно: $\overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$ способами (размещения с повторениями). Если ни одна цифра не должна повторяться, то таких способов будет $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5\cdot4\cdot3 = 60$ (размещения без повторений).

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные комбинаторные принципы и формулы;

- приобрели умения и навыки решать простейшие комбинаторные задачи.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).

Тема: «Оптимизационные задачи на графах и сетях, алгоритмы их решения. Прикладные задачи и алгоритмы анализа графов. Потоки в сетях. Сетевое планирование»

2.4.1 Задание для работы:

1. Оптимизационные задачи на графах и сетях, алгоритмы их решения. Прикладные задачи и алгоритмы анализа графов**.**

2. Потоки в сетях. Задача о максимальном потоке. Сетевое планирование. Критический путь и критическое время сетевого графа

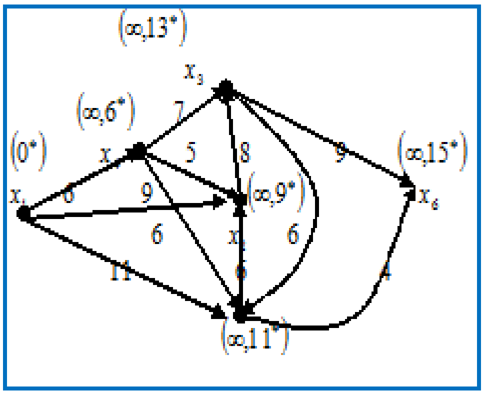
2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Оптимизационные задачи на графах и сетях, алгоритмы их решения. Прикладные задачи и алгоритмы анализа графов.

Задание. Задана весовая матрица сети G. Найти минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_6 по алгоритму Дейкстры.

Решение. Изобразим теперь сам граф по данной матрице весов.

$$P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$



<u>Этап 1.</u> Шаг1.Полагаем $d(x_1)=0^*, \tilde{x}=x_1, x_5$ $d(x_2)=d(x_3)=d(x_4)=d(x_5)=d(x_6)=\infty$.

<u>1-я итерация.</u> Шаг 2. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{x}=x_1$ с временными метками $\tilde{S}=\{x_2,x_4,x_5\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин

$d(x_2)=\min\{\infty,0^*+9\}=9,\ d(x_4)=\min\{\infty,0^*+6\}=6,\ d(x_5)=\min\{\infty,0^*+11\}=11.$

Шаг 3. Одна из временных меток превращается в постоянную $\min\{9,\infty,6,11,\infty\}=6^*=d(x_4),\ \tilde{x}=x_4$.

Шаг 4. $\tilde{x}=x_4\neq t=x_6$, происходит возвращение на второй шаг.

<u>2-я итерация.</u> Шаг 2. $\tilde{S}=\{x_2,x_3,x_5\},\ d(x_2)=\min\{9,6^*+5\}=9$, $d(x_3)=\min\{\infty,6^*+7\}=13$, $d(x_5)=\min\{11,6^*+6\}=11$.

Шаг 3. $\min\{d(x_2),d(x_3),d(x_5),d(x_6)\}=\min\{9,13,11,\infty\}=9^*=d(x_2),\ \tilde{x}=x_2$.

Шаг 4. $x_2\neq x_6$, возвращение на второй шаг.

<u>3-я итерация.</u> Шаг 2. $\tilde{S}=\{x_3\},\ d(x_3)=\min\{13,9^*+8\}=13$.

Шаг 3. $\min\{d(x_3),d(x_5),d(x_6)\}=\min\{13,11,\infty\}=11^*=d(x_5),\ \tilde{x}=x_5$.

Шаг 4. $x_5\neq x_6$, возвращение на второй шаг.

<u>4-я итерация.</u> Шаг 2. $\tilde{S}=\{x_6\},\ d(x_6)=\min\{\infty,11^*+4\}=15$.

Шаг 3. $\min\{d(x_3),d(x_6)\}=\min\{13,15\}=13^*=d(x_3),\ \tilde{x}=x_3$.

Шаг 4. $x_3\neq x_6$, возвращение на второй шаг.

5-я итерация. Шаг 2. $\widetilde{S} = \{x_6\}$, $d(x_6) = \min\{15, 13^* + 9\} = 15$.

Шаг 3. $\min\{d(x_6)\} = \min\{15\} = 15^*$, $\widetilde{x} = x_6$.

Шаг 4. $x_6 = t = x_6$, конец первого этапа.

Этап 2. Шаг5. Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\widetilde{x} = x_6$ с постоянными метками $\widetilde{S} = \{x_3, x_5\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (4.7.3).

$d(\widetilde{x}) = 15 = 11^* + 4 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6)$, $d(\widetilde{x}) = 15 \neq 13^* + 9 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6)$. Включаем дугу (x_5, x_6) в кратчайший путь. $\widetilde{x} = x_5$.

Шаг 6. $\widetilde{x} \neq s = x_1$, возвращение на пятый шаг.

2-я итерация. Шаг 5. $\widetilde{S} = \{x_1, x_4\}$.

$d(\widetilde{x}) = 11 = 0^* + 11 = d(x_1) + \omega(x_1, x_5)$, $d(\widetilde{x}) = 11 \neq 6^* + 6 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5)$. Включаем дугу (x_1, x_5) в кратчайший путь. $\widetilde{x} = x_1$.

Шаг 6. $\widetilde{x} = s = x_1$, завершение второго этапа.

Итак, кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 построен. Его длина (вес) равна 15, сам путь образует следующая последовательность дуг $\mu = (x_1, x_5) - (x_5, x_6)$.

2. Потоки в сетях. Задача о максимальном потоке. Сетевое планирование. Критический путь и критическое время сетевого графа

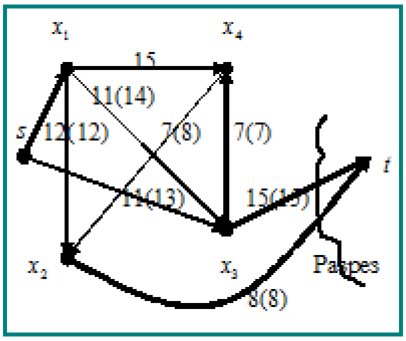
Задание. Пропускные способности дуг заданы следующей матрицей. Построить сеть, найти максимальный поток от s к t и указать минимальный разрез, отделяющий s от t.

Решение.

$$W = \begin{array}{c} \\ s \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 12 & - & 13 & - & - \\ - & - & 11 & 14 & 15 & - \\ - & - & - & - & - & 8 \\ - & - & - & - & 7 & 15 \\ - & - & 8 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Этап 1. Путь $s \xrightarrow{12} x_1 \xrightarrow{14} x_3 \xrightarrow{15} t.$

$\delta = \min(12, 14, 15) = 12$. Увеличим по этому пути поток до 12 единиц, ребро (s, x_1) становится насыщенным. Поставим величину потока на дугах (x_1, x_3) и (x_3, t).



$\delta = \min(13, 15-12) = 3.$ Поток можно увеличить на три единицы. Дуга (x_3, t) станет насыщенной.Путь $s \xrightarrow{3(13)} x_3 \xrightarrow{7} x_4 \xrightarrow{8} x_2 \xrightarrow{8} t.$ Можно увеличить поток на семь единиц;

Дуга (x_3, x_4) станет насыщенной, потоки примут вид

$$s \xrightarrow{10(13)} x_3 \xrightarrow{7(7)} x_4 \xrightarrow{7(8)} x_2 \xrightarrow{7(8)} t.$$

Больше путей нет. Конец первого этапа.

Этап 2. Рассмотрим теперь маршруты, содержащие противоположные дуги.

Маршрут $s \xrightarrow{10(13)} x_3 \xleftarrow{12(14)} x_1 \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{7(8)} t.$ Поток можно увеличить на единицу на дуге (x_2, t). Тогда потоки по дугам этого маршрута станут такими $s \xrightarrow{11(13)} x_3 \xleftarrow{11(14)} x_1 \xrightarrow{1(11)} x_2 \xrightarrow{8(8)} t.$ Дуга (x_2, t) стала насыщенной.

Больше маршрутов нет. Поток максимален. Делаем разрез вокруг t по насыщенным дугам и получаем его величину 15+8=23 единицы.

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия об оптимизационных задачах на графах и сетях, алгоритмах их решения, прикладных задачах и алгоритмах анализа графов; освоили понятия потока в сетях, понятие задачи о максимальном потоке; освоили элементы сетевого планирования;

- приобрели умения и навыки решать оптимизационные задачи на графах и сетях.

2.5 Практическое занятие № 5 (2 часа).

Тема: «Основы теории булевых функций»

2.5.1 Задание для работы:

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Булевы функции. Элементарные булевы функции.

1.Составим таблицу истинности для формулы $\overline{B} \to \overline{A}$:

B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \to \overline{A}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0

1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

2. Проверим эквивалентность формул $A \vee B$ и $\overline{A \wedge \overline{B}}$, составив для них таблицы истинности.

A	B	$A \vee B$	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge \overline{B}}$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Формулы не эквивалентны, так как 3-й и 6-й столбцы таблицы не совпадают.

2. Представление булевых функций формулами.

1. Задание. Записать ДНФ и КНФ формулы.

Решение. Элементарные дизъюнкции: $x \vee \overline{y}$, z. Элемент. конъюнкции: $x \cdot \overline{y} \cdot z$, x.

$f(x,y,z) = xyz \vee \overline{x}y$ – ДНФ ; $f(x,y,z) = (x \vee \overline{y}) \cdot z$ – КНФ.

2. Для упрощения формулы используем правило исключения импликации: $A_1 \to A_2 = \overline{A}_1 \vee A_2$.

$$\neg(A_1 \to A_2) \vee (A_2 \to \overline{A}_1) = \overline{(\overline{A}_1 \vee A_2)} \vee \overline{A}_2 \vee \overline{A}_1 = (\overline{\overline{A}}_1 \wedge \overline{A}_2) \vee \overline{A}_2 \vee \overline{A}_1 =$$

$$= (A_1 \wedge \overline{A}_2) \vee \overline{A}_2 \vee \overline{A}_1 = \overline{A}_2 \wedge (A_1 \vee 1) \vee \overline{A}_1 = \overline{A}_2 \vee \overline{A}_1.$$

3. Используя законы логики приведем формулу $\overline{(A \wedge B) \vee C}$ к виду, содержащему только дизъюнкции элементарных конъюнкций. Полученная формула и будет искомой ДНФ: $\overline{(A \wedge B) \vee C} = \overline{(A \wedge B)} \wedge \overline{C} = (\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{C} = (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{B} \wedge \overline{C})$

Для построения СДНФ составим таблицу истинности для данной формулы:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$\overline{(A \wedge B) \vee C}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0

1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Помечаем те строки таблицы, в которых формула (последний столбец) принимает значение “1”. Для каждой такой строки выпишем формулу, истинную на наборе переменных *A,B,C* данной строки: строка 1 – $\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$; строка 3 – $\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$;строка 5 – $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$. Дизъюнкция этих трех формул будет принимать значение “1” только на наборах переменных в строках 1, 3, 5, а следовательно и будет искомой совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ): $(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$

4. Задание. Найти СДНФ и СКНФ двумя способами.

Решение.

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1) Получим СДНФ и СКНФ по ТИ:

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz - \text{СДНФ},$$

$$f(x,y,z) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) - \text{СКНФ}$$

2) Получим СДНФ и СКНФ из ДНФ и КНФ:

$$g(x,y,z) = xy \vee \bar{x}z = xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}z(y \vee \bar{y}) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z$$

$$g(x,y,z) = (\bar{x} \vee y)(x \vee z)(y \vee z) = (\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(x \vee y\bar{y} \vee z)(x\bar{x} \vee y \vee z) =$$

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z) =$$

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)$$

3. Минимизация булевых функций в классе ДНФ

1) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$. $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ – импликанта,

<u>причем</u> простая; $x_1x_2x_3$ – импликанта, но не простая, т.к. удаление x_3 снова дает импликанту x_1x_2 (которая является простой).

2) Найдем импликанты и простые импликанты для функции $f(x_1,x_2) = x_1 \to x_2$. Всего имеется 8 элементарных конъюнкций с переменными x_1, x_2. Приведем их таблицы истинности.

		x_1	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}$		x			x	x

1	*2*	*→x2*				*1x2*			*1*	*2*
		1	1	0		0			0	0
		1	0	1		0			0	1
		0	0	0		0			1	0
		1	0	0		1			1	1

Из таблицы истинности заключаем, что $\bar{x}_1\bar{x}_2$, $\bar{x}_1 x_2$, x_1x_2, $\bar{x}_1$, x_2 являются импликантами функции *f*. Из них простыми являются $\bar{x}_1$ и x_2.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия о булевых функциях, представлении булевых функций формулами, минимизации булевых функций;

- приобрели умения и навыки решать задачи, связанные с булевыми функциями, представлением булевых функций формулами, минимизацией булевых функций.