ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.06 Математический анализ

Направление подготовки (специальность) 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Профиль образовательной программы “Автоматизированные системы обработки информации и управления”

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Действительные числа. Понятие функции. Теория пределов числовых последовательностей	-	-	-	-	4
2	Теория пределов функций одной действительной переменной. Непрерывность функций одной действительной переменной.	-	-	-	-	6
3	Производная функции в точке. Свойства производных.	-			-	4
4	Дифференциал, его свойства и приложения	-	-	-	-	2
5	Приложения дифференциального исчисления функций одной действительной переменной.	-	-	-	-	6
6	Теория пределов, непрерывность, дифференцируемость функции многих переменных.	-	-	-	-	5
7	Приложения дифференциального исчисления функций многих действительных переменных	-	-	-	3	6
8	Неопределенны интеграл, его свойства, методы нахождения.	-	-	-	-	8
9	Определенны интеграл, его свойства, методы вычисления.	-	-	-	-	8
10	Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы	-	-	-	4	8
11	Кратные интегралы, их свойства, вычисление, приложения. Криволинейные интегралы, их свойства, вычисление	-	-	-	4	12
12	Числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды в действительной области.	-	-	-	-	6
13	Ряды Фурье, их свойства.	-	-	-	2	6
Итого в соответствии с РПД		-	-	-	13	81

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Касательная плоскость. Нормаль к поверхности

В теории существует довольно остроумное определение касательной плоскости. Представьте произвольную поверхность $F(x; y; z) = 0$ и принадлежащую ей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Очевидно, что через точку M_0 проходит много *пространственных линий*, которые принадлежат данной поверхности. Предположим, что у каждой такой линии существует пространственная касательная в точке M_0.

Определение 1: **касательная плоскость** к поверхности в точке M_0 – это **плоскость**, содержащая касательные ко всем кривым, которые принадлежат данной поверхности и проходят через точку M_0.

Определение 2: **нормаль** к поверхности в точке M_0 – это **прямая**, проходящая через данную точку перпендикулярно касательной плоскости.

Пример 1

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3 = 0$ в точке $M_0(1; 2; 3)$.

Решение: если поверхность задана уравнением $F(x; y; z) = 0$ *(т.е. неявно)*, то уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ можно найти по следующей формуле:

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

Особое внимание обращаю на необычные частные производные F'_x, F'_y, F'_z – их не следует путать с частными производными неявно заданной функции *(хотя поверхность задана неявно)*. При нахождении этих производных нужно руководствоваться правилами дифференцирования функции трёх переменных, то есть, при дифференцировании по какой-либо переменной, две другие буквы считаются константами:

$$F'_x = (6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3)'_x = 6y - 2 \cdot 2x - y^2 - 0 + 0 = 6y - 4x - y^2$$

Найдём частную производную в точке:

$$F'_x(M_0) = F'_x(1; 2; 3) = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2^2 = 12 - 4 - 4 = 4$$

Аналогично:

$F'_y=(6xy-2x^2-xy^2-z^2+3)'_y=6x-0-x\cdot 2y-0+0=6x-2xy$

$F'_y(M_0)=F'_y(1;\,2;\,3)=6-4=2$

$F'_z=(6xy-2x^2-xy^2-z^2+3)'_z=0-0-0-2z+0=-2z$

$F'_z(M_0)=F'_z(1;\,2;\,3)=-6$

$F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0$

$4\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)-6\cdot(z-3)=0$

$4x-4+2y-4-6z+18=0$

$4x+2y-6z+10=0$

$2x+y-3z+5=0$ – общее уравнение искомой касательной плоскости.

Настоятельно рекомендую проконтролировать и этот этап решения. Сначала нужно убедиться, что координаты точки касания $M_0(1;\,2;\,3)$ действительно удовлетворяют найденному уравнению:

$2\cdot 1+2-3\cdot 3+5=0$

$2+2-9+5=0$

$0=0$ – верное равенство.

Теперь «снимаем» коэффициенты $A=2,\ B=1,\ C=-3$ общего уравнения плоскости и проверяем их на предмет совпадения либо пропорциональности с соответствующими значениями $F'_x(M_0)=4,\ F'_y(M_0)=2,\ F'_z(M_0)=-6$. В данном случае пропорциональны. Как вы помните из курса аналитической геометрии, $\bar{n}(F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0))$ – это вектор нормали касательной плоскости, и он же – направляющий вектор нормальной прямой. Составим канонические уравнения нормали по точке M_0 и направляющему вектору $\bar{n}$:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-6}$$

Ответ: $2x+y-3z+5=0,\quad \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-6}$

В любой ли точке поверхности существует касательная плоскость? В общем случае, конечно же, нет. Классический пример – это коническая поверхность $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0\quad(a>0,b>0,c>0)$ и точка $M_0(0;\,0;\,0)$ – касательные в этой точке непосредственно образуют коническую поверхность, и, разумеется, не лежат в одной плоскости. В неладах легко убедиться и аналитически: $F'_x(M_0)=0,\ F'_y(M_0)=0,\ F'_z(M_0)=0$.

Другим источником проблем является факт *несуществования* какой-либо частной производной в точке. Однако это ещё не значит, что в данной точке нет единой касательной плоскости.

Как составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке, если поверхность задана явной функцией $z=f(x;y)$?

Перепишем её в неявном виде $F(x;y;z)=0$:

$f(x;y)-z=0$ и по тем же принципам найдём частные производные:
$F'_x=(f(x;y)-z)'_x=f'_x(x;y)-0=f'_x(x;y)$
$F'_y=(f(x;y)-z)'_y=f'_y(x;y)-0=f'_y(x;y)$
$F'_z=(f(x;y)-z)'_z=0-1=-1$

Таким образом, формула касательной плоскости

$F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0$ трансформируется в следующее уравнение:

$f'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)-1\cdot(z-z_0)=0$, и соответственно, канонические уравнения нормали:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

$f'_x(x_0;y_0),\ f'_y(x_0;y_0)$ – это уже «настоящие» частные производные функции двух переменных в точке $(x_0;y_0)$.

Пример 2

Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=y^3-x^2y+2xy$ в точке $M_0(2;-1)$.

Небольшая тут накладка получилась с обозначениями – теперь буква M_0 обозначает точку плоскости XOY, но что поделать – такая уж популярная буква….

Решение: уравнение искомой касательной плоскости составим по формуле: $z'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+z'_y(M_0)\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0$

Вычислим значение функции в точке M_0: $z_0=z(M_0)=z(2;-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)+2\cdot2\cdot(-1)=-1+4-4=-1$

Вычислим частные производные 1-го порядка в данной точке:

$$z'_x = (y^3 - x^2y + 2xy)'_x = 0 - 2xy + 2y = -2xy + 2y$$
$$z'_x(M_0) = z'_x(2; -1) = 4 - 2 = 2$$
$$z'_y = (y^3 - x^2y + 2xy)'_y = 3y^2 - x^2 + 2x$$
$$z'_y(M_0) = z'_y(2; -1) = 3 - 4 + 4 = 3$$

Таким образом: $2 \cdot (x-2) + 3 \cdot (y - (-1)) - (z - (-1)) = 0$ аккуратно, не спешим:

$$2(x-2) + 3(y+1) - (z+1) = 0$$
$$2x - 4 + 3y + 3 - z - 1 = 0$$
$$2x + 3y - z - 2 = 0$$

Запишем канонические уравнения нормали в точке M_0:

$$\frac{x - x_0}{z'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{3} = \frac{z-(-1)}{-1}$$

Ответ: $2x + 3y - z - 2 = 0, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{-1}$

2.2 Моменты плоских дуг и фигур, координаты центра тяжести

Если у плоской фигуры есть *центр симметрии*, то он является центром тяжести данной фигуры. Например, центр круглой однородной пластины. Логично и по-житейски понятно – масса такой фигуры «справедливо распределена во все стороны» относительно центра. Верти – не хочу.

Координаты $x_0; y_0$ центра тяжести M плоской однородной ограниченной фигуры D рассчитываются по следующим формулам:

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}, \quad y_0 = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}$$, или:

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{S}, \quad y_0 = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{S}$$, где S – площадь области D (фигуры); или совсем коротко:

$$x_0 = \frac{I_x}{S}, \quad y_0 = \frac{I_y}{S}$$, где $S = \iint\limits_D dxdy, \quad I_x = \iint\limits_D x\,dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D y\,dxdy$

Интеграл I_x будем условно называть «иксовым» интегралом, а интеграл I_y – «игрековым» интегралом.

Примечание-справка: для плоской ограниченной *неоднородной* фигуры, плотность которой задана функцией $\rho(x,y)$, формулы более сложные: $x_0 = \dfrac{\iint\limits_D x\rho(x;y)dxdy}{m}$, $y_0 = \dfrac{\iint\limits_D y\rho(x;y)dxdy}{m}$, где m – масса фигуры;

в случае однородной плотности $\rho = const$ они упрощаются до вышеприведённых формул.

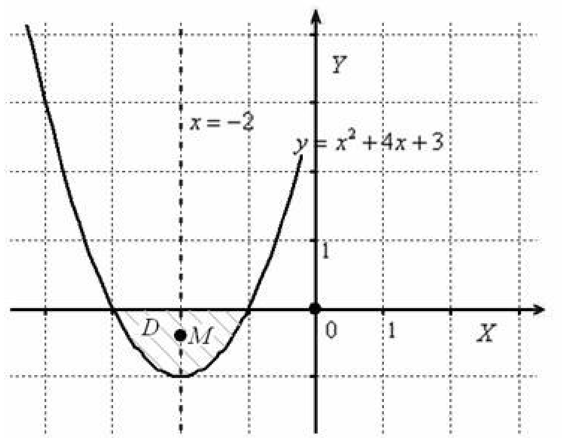
Пример 1

Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x + 3, \quad y = 0$.

Решение: $y = 0$ задаёт ось абсцисс, а уравнение $y = x^2 + 4x + 3$ – параболу, которая легко и быстро строится с помощью геометрических преобразований графиков:

$y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1$ – парабола $y = x^2$, сдвинутая на 2 единицы влево и на 1 единицу вниз.

Чертёж с готовой точкой $M(x_0; y_0)$ центра тяжести фигуры:



Правило второе: если у фигуры существует *ось симметрии*, то центр тяжести данной фигуры обязательно лежит на этой оси.

В нашем случае фигура симметрична относительно прямой $x = -2$, то есть фактически мы уже знаем «иксовую» координату $x_0 = -2$ точки «эм».

Также обратите внимание, что по вертикали центр тяжести смещён ближе к оси абсцисс, поскольку там фигура более массивна.

Координаты центра тяжести фигуры найдём по формулам $x_0 = \dfrac{I_x}{S}, \quad y_0 = \dfrac{I_y}{S}$,

где $S = \iint\limits_D dxdy, \quad I_x = \iint\limits_D xdxdy, \quad I_y = \iint\limits_D ydxdy$.

Порядок обхода области D (фигуры) здесь очевиден:

$$x^2 + 4x + 3 \le y \le 0$$
$$-3 \le x \le -1$$

Внимание! Определяемся с наиболее выгодным порядком обхода один раз – и используем его для всех интегралов!

1) Сначала вычислим площадь фигуры. Ввиду относительной простоты интеграла решение можно оформить компактно, главное, не запутаться в вычислениях:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-3}^{-1}dx\int\limits_{x^2+4x+3}^{0}dy=\int\limits_{-3}^{-1}(y)\Big|_{x^2+4x+3}^{0}dx=\int\limits_{-3}^{-1}(0-(x^2+4x+3))dx=-\int\limits_{-3}^{-1}(x^2+4x+3)dx=$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)\Big|_{-3}^{-1}=-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)+(-9+18-9)=-\left(-\frac{4}{3}\right)+0=\frac{4}{3}$$

2)

Вычислим «иксовый» интеграл:

$$I_x=\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_{-3}^{-1}xdx\int\limits_{x^2+4x+3}^{0}dy=\int\limits_{-3}^{-1}x\cdot(y)\Big|_{x^2+4x+3}^{0}dx=\int\limits_{-3}^{-1}x\cdot(0-(x^2+4x+3))dx=-\int\limits_{-3}^{-1}(x^3+4x^2+3x)dx=$$

$$=-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{-1}=-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{81}{4}-36+\frac{27}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+\frac{81}{4}-36+\frac{27}{2}=20+12-36+\frac{4}{3}=-4+\frac{4}{3}=-\frac{8}{3}$$

Таким образом:

$$x_0=\frac{I_x}{S}=\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}=-2$$

, что и требовалось получить.

3) Найдём ординату y_0 центра тяжести. Вычислим «игрековый» интеграл:

$$I_y=\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_{-3}^{-1}dx\int\limits_{x^2+4x+3}^{0}ydy=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{-1}(y^2)\Big|_{x^2+4x+3}^{0}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{-1}(0^2-(x^2+4x+3)^2)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{-1}(x^4+8x^3+22x^2+24x+9)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}+2x^4+\frac{22x^3}{3}+12x^2+9x\right)\Big|_{-3}^{-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}+2-\frac{22}{3}+12-9\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{243}{5}+162-198+108-27\right)=\frac{19}{15}-\frac{9}{5}=-\frac{8}{15}$$

В результате умножения многочленов $(x^2+4x+3)^2=(x^2+4x+3)(x^2+4x+3)$ получается 9 членов, причём некоторые из них подобны. Подобные слагаемые приведены устно *(как это обычно принято делать в похожих случаях)* и итоговая сумма $x^4+8x^3+22x^2+24x+9$.

В результате:

$$y_0=\frac{I_y}{S}=\frac{-\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}}=-\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{2}{5}=-0{,}4$$

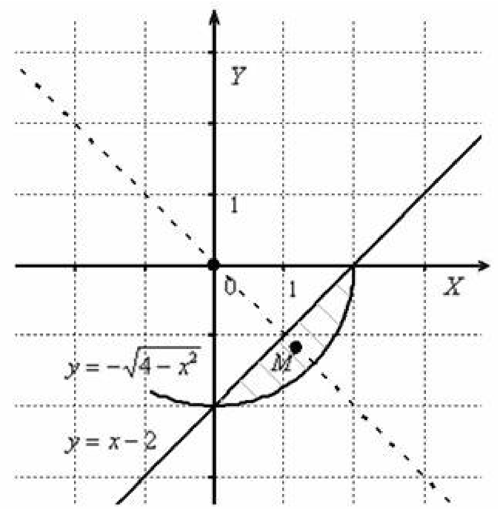
,

На заключительном этапе отмечаем на чертеже точку $M\left(-2;-\frac{2}{5}\right)$. По условию не требовалось ничего чертить, но в большинстве задач мы волей-неволей вынуждены изобразить фигуру. Зато есть безусловный плюс – визуальная и довольно эффективная проверка результата.

Ответ: $x_0 = -2, y_0 = -\frac{2}{5}$

Пример 2

Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4, \quad x - y - 2 = 0\ (x - y - 2 \geq 0)$. Фигуру и её центр тяжести изобразить на чертеже.



Решение:

Прямая $x - y - 2 = 0$ рассекает круг на 2 части, и дополнительная оговорка $x - y - 2 \geq 0$ указывает на то, что речь идёт именно о маленьком заштрихованном кусочке.

Фигура симметрична относительно прямой $y = -x$ (изображена пунктиром), поэтому центр тяжести должен лежать на данной линии. И, очевидно, что его координаты равны по модулю.

. Уравнение прямой $x - y - 2 = 0$ преобразуется к виду $r = \frac{2}{\cos\varphi - \sin\varphi}$ и интегралы получатся не сахарные . В этой связи осмотрительнее остановиться на декартовых координатах.

Порядок обхода фигуры:

$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq x - 2$

$0 \leq x \leq 2$

1) Вычислим площадь фигуры:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x-2} dy = \int_0^2 (y)\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{x-2} dx = \int_0^2 (x - 2 - (-\sqrt{4 - x^2}))dx =$$

$$= \int_0^2 (x - 2 + \sqrt{4 - x^2})dx = \int_0^2 (x - 2)dx + \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx = (*)$$

Первый интеграл рациональнее взять подведением под знак дифференциала: $\int_0^2 (x-2)dx = \int_0^2 (x-2)d(x-2)$

А во втором интеграле проведём стандартную замену:

$x = 2\sin t$

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = \sqrt{4(1-\sin^2 t)} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t$

$dx = (2\sin t)' dt = 2\cos t dt$

$$x = 2\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{2}$$

Вычислим новые пределы интегрирования:

$t_1 = \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) = \arcsin 0 = 0$

$t_2 = \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$$(*) = \frac{1}{2}(x-2)^2\Big|_0^2 + \int_0^{\pi/2} 2\cos t \cdot 2\cos t dt = \frac{1}{2}(0^2 - (-2)^2) + 4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}(0-4) + 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= -2 + 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = -2 + 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 - (0+0)\right) = \pi - 2 \approx 1{,}14 \text{ ед.}^2$$

2) Найдём x_0.

$$I_x = \iint_D x dx dy = \int_0^2 x dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x-2} dy = \int_0^2 x \cdot (y)\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{x-2} dx = \int_0^2 x(x-2+\sqrt{4-x^2})dx =$$

$$= \int_0^2 (x^2-2x)dx + \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{1}{2}} d(4-x^2) =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 - (0-0)\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}\Big|_0^2 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}(0-8) = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Здесь во 2-м интеграле опять был использован метод подведения функции под знак дифференциала.

$$x_0 = \frac{I_x}{S} = \frac{\frac{4}{3}}{\pi - 2} = \frac{4}{3(\pi-2)} \approx 1{,}17$$

3) Исходя из проведённого ранее анализа, осталось убедиться, что $y_0 \approx -1{,}17$.

$$I_y=\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{x-2} ydy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 (y^2)\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{x-2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2((x-2)^2-(-\sqrt{4-x^2})^2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2(x-2)^2d(x-2)-\frac{1}{2}\int\limits_0^2(4-x^2)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(x-2)^3\Big|_0^2-\frac{1}{2}\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{6}(0^3-(-2)^3)-\frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{3}-(0-0)\right)=\frac{1}{6}(0+8)-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{4}{3}$$

Отлично:

$$y_0=\frac{I_y}{S}=\frac{-\frac{4}{3}}{\pi-2}=-\frac{4}{3(\pi-2)}\approx-1{,}17$$

Изобразим точку $M\left(\frac{4}{3(\pi-2)};-\frac{4}{3(\pi-2)}\right)$ на чертеже. В соответствии с формулировкой условия запишем её как окончательный ответ: $M\left(\frac{4}{3(\pi-2)};-\frac{4}{3(\pi-2)}\right)$

Пусть на плоскости xOy задана система материальных точек $A_i(x_i;y_i)$ $(i=\overline{1,n})$ с массами m_i.

Определение. Статическим моментом Mx относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты: $M_x=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k y_k$.

Определение. Статическим моментом My относительно оси Oy называется сумма произведений масс этих точек на их абсциссы: $M_y=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k x_k$.

Определение. Моментами инерции Ix и Iy системы относительно осей Ox и Oy называются суммы произведений масс точек на квадраты их расстояний от соответствующих осей: $I_x=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k y_k^2;\quad I_y=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k x_k^2$.

Статические моменты и моменты инерции дуги плоской кривой $y=f(x)$ ($a\le x\le b$) вычисляются по формулам $M_x=\int\limits_a^b ydl$, $M_y=\int\limits_a^b xdl$, $I_x=\int\limits_a^b y^2dl$, $I_y=\int\limits_a^b x^2dl$, где $dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+(x')^2}dy$ – дифференциал дуги кривой.

Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ох и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b yds = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xds = \int_a^b xydx,$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3 dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 ds = \int_a^b x^2 ydx,$$

где $ds = ydx$ – дифференциал площади криволинейной трапеции.

Пример 3. Найти статический момент и момент инерции полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $-R \le x \le R$ относительно оси Ох.

$$M_x = \int_a^b ydl, \quad dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}dx,$$

тогда $$M_x = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = R\int_{-R}^{R} dx = 2R^2;$$

$$I_x = \int_a^b y^2 dl = \int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}dx = 2R\int_0^R\sqrt{R^2 - x^2}dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} x = R\sin t \\ dx = R\cos t dt \end{matrix}\right| = 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2 t dt = R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)dt = R^3\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^3}{2}.$$

Пример 4. Найти статические моменты и момент инерции дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в I четверти.

В силу симметрии астроиды относительно координатных осей $M_x = M_y$, $I_x = I_y$.

Для I четверти $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$$M_x = \int_a^b ydl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\, 3a\sin t\cos t dt = \frac{3a^2}{5}\sin^5 t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5};$$

$$I_x = \int_a^b y^2 dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t 3a \sin t \cos t dt = \frac{3a^3}{8} \sin^8 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^3}{8}.$$

Тогда: $M_x = M_y = \frac{3a^2}{5}$, $I_x = I_y = \frac{3a^3}{8}$.

2.3 Формула Грина. Восстановление функции по её дифференциалу

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_\lambda P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

P,Q – непрерывны и непрерывны их частные производные.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \right), F(x,y) - ?$$

$$F(x,y) = \int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} Pdx + Qdy.$$

Пример: 1) $\bigcup\limits_{P(x,y)}^{3x^2y} dx + \underset{(x,0)}{\exists} dF \Rightarrow F(x,y) = \int_{A(0,0)}^{B(x,y)} 3x^2ydx + x^3dy = \int_0^{(x,0)} 3x^2ydx + x^3dy +$

$$+ \int_{(x,0)}^{(x,y)} x^3dy + 3x^2ydx = \int_0^x 0 + x^3 + 0 + \int_0^y 3x^2y \cdot 0 + x^3dy = x^3y$$

2) $\left. \begin{matrix} \bigcup\limits_{P(x,y)}^{\sin 3y} dx + \bigcup\limits_{Q(x,y)}^{3x\cos 3y} dy = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 3Cos3y \frac{\partial Q}{\partial x} = 3Cos3xy \end{matrix} \right| \Rightarrow F(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \sin 3ydx + 3xCos3ydy =$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} Sin3ydx + 3xCos3ydy + \int_{(x,0)}^{(x,y)} 3xCos3ydy = 3x\int_0^y Cos3ydy = 3x\frac{Sin3y}{3} = xSin3y$$

Как и в случае функции 1-й переменной $\exists$ - т б. мн. Функций F(x,y), имеющих заданный dF и отличаются на аддитивную постоянную.

2.4 Степенные ряды в комплексной области. Ряд Фурье, как способ периодического продолжения функции. Интеграл Фурье.

Степенным рядом называется ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ...$

$c_n = a_n + ib_n$, $a = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$, Если $a = 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ справедлива теорема Абеля.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \; z = z_0$, то данный ряд будет сходиться и в круге $|z-a| < |z_0 - a|$ и равномерно внутри этого круга.

Число $R \geq 0$ - называется радиусом сходимости степенного круга $|z-a| < R$ - сходится, а при $|z-a| > R$ - расходится.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Поскольку по теореме Абеля ряд сходится равномерно $|z-a| \leq q < |z_0 - a|$, то его можно интегрировать и дифференцировать почленно. Дифференцировать можно бесконечное число раз.

1. Разложить $f(x) = \frac{x}{d}$ в ряд Фурье в промежутке $[-L, L]$. Отметим, что $f(x)$ имеет один разрыв на периоде в точке $\pm L$. Имеем $a_k(f) = 0$

$$b_k(f) = \left|\omega = \frac{\pi}{L}\right| = 2\int_0^L \frac{x}{a} \sin k\omega x \frac{dx}{L} = \begin{bmatrix} u = \frac{x}{a} & v = -\frac{\cos k\omega x}{k\omega L} \\ du = \frac{dx}{a} & dv = \sin k\omega x \frac{dx}{L} \end{bmatrix} | =$$

$$= 2\left\{\left[-\frac{x}{a}\frac{\cos k\omega x}{k\omega L}\right]_0^L + \int_0^L \frac{\cos k\omega x}{k\omega L}\frac{dx}{a}\right\} = 2\left[-\frac{L}{a}\frac{\cos k\omega L}{k\omega L}\right] = \frac{2}{a\omega}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

,

В частности, при $a = 2 \quad L = \pi \quad \omega = 1$ и мы получаем разложение

$$\frac{x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

,

Из которого заменой $x = \pi - t$ следует известная формула $\frac{\pi - t}{2} \sim$

$$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \; (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Можно доказать, что $\frac{\pi - t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \; (0 < t < 2\pi)$.

2. Разложить непрерывную в промежутке $[0, L]$ функцию

$$f(x)=\begin{bmatrix}\frac{2h}{L}x & \left(0\le x\le\frac{L}{2}\right), \\ \frac{2h}{L}(L-x) & \left(\frac{L}{2}\le x\le L\right)\end{bmatrix}$$

В ряд Фурье по синусам. Имеем $\omega=\frac{\pi}{L},\quad a_k(f)=0,$.

$$b_k(f)=\left|\omega=\frac{\pi}{L}\right|=2\left\{\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2h}{L}x\sin k\omega x\frac{dx}{L}+\int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{2h}{L}(L-x)\sin k\omega x\frac{dx}{L}\right\}=$$

$$\begin{bmatrix}u=\frac{2hx}{L} & v=-\frac{\cos k\omega x}{k\omega L} \\ du=\frac{2hdx}{L} & dv=\sin k\omega x\frac{dx}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u=\frac{2h(L-x)}{L} & v=-\frac{\cos k\omega x}{k\omega L} \\ du=-\frac{2hdx}{L} & dv=\sin k\omega x\frac{dx}{L}\end{bmatrix}=$$

$$=2\left\{\begin{matrix}\left[-\frac{2hx}{L}\frac{\cos k\omega x}{k\omega L}\right]_0^{\frac{L}{2}}+\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{\cos k\omega x}{k\omega L}\frac{2hdx}{L}+ \\ \left[-\frac{2h(L-x)}{L}\frac{\cos k\omega x}{k\omega L}\right]_{\frac{L}{2}}^{L}-\int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{\cos k\omega x}{k\omega L}\frac{2hdx}{L}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{4h}{L^2}\left[-\frac{L}{2h}\cosh\frac{L}{2}+\sin\frac{k\frac{\pi}{2}}{k^2}+-\frac{L}{2h}\cosh\frac{L}{2}+\sin\frac{k\frac{\pi}{2}}{k^2}\right]=\frac{4h}{L^2}2\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k^2}=$$

$$=\begin{cases}0 & (k=2m) \\ \frac{8h}{\pi^2}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)^2} & (k=2m+1).\end{cases}$$

Отсюда

$$f(x)\sim\frac{8h}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)^2}\sin(2m+1)\frac{\pi}{L}x.$$

Так как числовой ряд обратных квадратов сходится, ряд Фурье сходится абсолютно и мы имеем

$$f(x)=\begin{bmatrix}\frac{2h}{L}x & \left(0\le x\le\frac{L}{2}\right), \\ \frac{2h}{L}(L-x) & \left(\frac{L}{2}\le x\le L\right)\end{bmatrix}=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)^2}\sin(2m+1)\frac{\pi}{L}x\ (0\le x\le L).$$

3. Разложить ту же функцию в ряд Фурье по косинусам в промежутке $[0,L]$. Имеем

$$\omega=\frac{\pi}{L},\quad b_k(f)=0,\quad a_0(f)=2\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2h}{L}x\frac{dx}{L}=\frac{2hL^2}{L^2 4}=\frac{h}{2}$$

$$a_k(f)=\left[\omega=\frac{2\pi}{L}\right]=4\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2h}{L}x\cos k\omega x\frac{dx}{L}=\begin{bmatrix}u=\frac{2hx}{L} & v=\frac{\sin k\omega x}{k\omega L}\\ du=\frac{2hdx}{L} & dv=\cos k\omega x\frac{dx}{L}\end{bmatrix}=$$

$$=4\left\{\left[\frac{2hx}{L}\frac{\sin k\omega x}{k\omega L}\right]_0^{\frac{L}{2}}-\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{\sin k\omega x}{k\omega L}\frac{2hdx}{L}\right\}=\frac{8h}{L^2k^2\omega^2}\left(\cos k\omega x\right)\Big|_0^{\frac{L}{2}}=\frac{8h}{L^2k^2\omega^2}\left(\cos k\pi-1\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{4h}{\pi^2k^2} & k=2m-1\\ 0 & k=2m\end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$f(x)=\begin{bmatrix}\frac{2h}{L}x & 0\le x\le\frac{L}{2}\\ \frac{2h}{L}(L-x) & \frac{L}{2}\le x\le L\end{bmatrix}=\frac{h}{2}-\frac{4h}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}\quad(0\le x\le L).$$

При $L=2\pi,\quad h=\pi$ Получаем, в частности

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}\quad(0\le x\le\pi)$$

.

4. Разложить $f(x)=x^2$ в ряд Фурье по косинусам в промежутке $[-\pi,\pi]$. Имеем $b_k(f)=0$, $a_0(f)=2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$,

$$a_k(f)=2\int_0^{\pi}x^2\cos kx\frac{dx}{\pi}=\begin{bmatrix}u=x^2 & v=\frac{\sin kx}{k\pi}\\ du=2xdx & dv=\cos kx\frac{dx}{\pi}\end{bmatrix}=2\left\{\left[x^2\frac{\sin kx}{k\pi}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k\pi}2xdx\right\}=$$

$$=-\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,xdx=\frac{4}{k\pi}\left[\left[x\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right]=(-1)^k\frac{4}{k^2},$$

Так что $$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos mx}{m^2}\quad(-\pi\le x\le\pi)$$.

При $x=\pi$ Получаем, в частности,

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos m\pi}{m^2}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2},\qquad \frac{\pi^2}{6}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2},$$

А при $x=0$

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{1}{m^2}.$$

5. Разложить $f(x)=\ln 2\cos\frac{x}{2}$ в ряд Фурье в промежутке $[-\pi,\pi]$.. Здесь $f(x)$ Обращается в бесконечность На концах промежутка, оставаясь при этом несобственно интегрируемой, $L=\pi,\ \omega=1$. Ввиду четности функции $b_n(f)=0$. Имеем для $a_0(f)$, используя известный интеграл Эйлера

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,dt = \ =\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2\ :$$

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}dx=\ln 2+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,dt=0.$$

Аналогично для $a_n(f)$, используя выражение для ядра Дирихле (см. 1.3.)

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Имеем

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right]=\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Таким образом, окончательно получаем $\ln 2\cos\frac{x}{2}\sim\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$. Это разложение сходится при $(-\pi<x<\pi)$, что дает равенство

$$\ln 2\cos\frac{x}{2} = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}, \quad (-\pi < x < \pi).$$

Заменяя x на $\pi - x$, получаем

$$-\ln 2\sin\frac{x}{2} = \sum_{1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad (-\pi < x < \pi, x \neq 0).$$

Формально дифференцируя последний ряд, получаем разложение Фурье (неинтегрируемой!) функции $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \sim \sum_{1}^{\infty}\sin nx.$$

Это разложение справедливо в смысле теории обобщенных функций (распределений) (см. 2.7.)

В заключение приведем примеры выполнения расчетно-графических заданий.

1. Разложить периодическую с периодом $T=3$ функцию в ряд Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \le 0, \\ -2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Имеем $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$.

$$a_0 = \frac{2}{3}\left[\int_{-1}^{0} 2dx + \int_{0}^{2}(-2)dx\right] = \frac{2}{3}\left[2x\Big|_{-1}^{0} - 2x\Big|_{0}^{2}\right] = \frac{2}{3}(0+2-4+0) = -\frac{4}{3};$$

$$a_k = \frac{2}{3}\left[\int_{-1}^{0} 2\cos\frac{2\pi k}{3}xdx - \int_{0}^{2} 2\cos\frac{2\pi k}{3}xdx\right] = \frac{2}{3}\left[2\frac{3}{2\pi k}\sin\frac{2\pi k}{3}x\Big|_{-1}^{0} - 2\frac{3}{2\pi k}\sin\frac{2\pi k}{3}x\Big|_{0}^{2}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{\pi k}\left(0 + \sin\frac{2\pi k}{3}\right) - \frac{3}{\pi k}\left(\sin\frac{4\pi k}{3} - 0\right)\right] = \frac{2}{\pi k}\left(\sin\frac{2\pi k}{3} - \sin\frac{4\pi k}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\cdot 2\cdot\sin\left(-\frac{2\pi k}{3}\right)\cdot\cos\pi k = \frac{4}{\pi k}\cdot(-1)^{k+1}\cdot\sin\frac{\pi k}{3},$$

$$b_k = \frac{2}{3}\left[\int_{-1}^{0} 2\sin\frac{2\pi k}{3}xdx - \int_{0}^{2} 2\sin\frac{2\pi k}{3}xdx\right] = \frac{2}{3}\left[-2\frac{3}{2\pi k}\cos\frac{2\pi k}{3}x\Big|_{-1}^{0} + 2\frac{3}{2\pi k}\cos\frac{2\pi k}{3}x\Big|_{0}^{2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left[-\cos 0 + \cos\frac{2\pi k}{3} + \cos\frac{4\pi k}{3} - \cos 0\right] = \frac{2}{\pi k}\left(-2 + \cos\pi k\cdot\cos\frac{\pi k}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\cdot\left[(-1)^k\cdot\cos\frac{\pi k}{3} - 2\right].$$

Окончательно,

$$f(x) \sim -\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi k}(-1)^{k+1}\cdot\sin\frac{\pi k}{3}\cdot\cos\frac{2\pi k}{3}x+\frac{2}{\pi k}\left((-1)^{k}\cdot\cos\frac{\pi k}{3}-2\right)\cdot\sin\frac{2\pi k}{3}x=$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(2(-1)^{k+1}\cdot\sin\frac{\pi k}{3}\cdot\cos\frac{2\pi k}{3}x+\left((-1)^{k}\cdot\cos\frac{\pi k}{3}-2\right)\cdot\sin\frac{2\pi k}{3}x\right).$$

2. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 2, \\ 4-x, & 2<x\le 4 \end{cases}$

В ряд Фурье по синусам. Имеем

$l=4+4=8,\ \omega=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}.$

$a_0=a_k=0;$

$$b_k=\frac{2}{8}2\left[\int_0^2 x\sin\frac{\pi k}{4}x\,dx+\int_2^4(4-x)\sin\frac{\pi k}{4}x\,dx\right]=\left|\begin{array}{l} u=x, \\ du=dx, \\ dv=\sin\frac{\pi k}{4}x\,dx \\ v=-\frac{4}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{4}x \end{array}\right|\left|\begin{array}{l} u=4-x, \\ du=-dx, \\ dv=\sin\frac{\pi k}{4}x\,dx \\ v=-\frac{4}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{4}x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{4}{\pi k}x\cdot\cos\frac{\pi k}{4}x\Big|_0^2+\frac{4}{\pi k}\int_0^2\cos\frac{\pi k}{4}x\,dx+\frac{4}{\pi k}(4-x)\cdot\cos\frac{\pi k}{4}x\Big|_2^4-\frac{4}{\pi k}\int_2^4\cos\frac{\pi k}{4}x\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(-\frac{4}{\pi k}2\cos\frac{2\pi k}{2}+0+\frac{4}{\pi k}\frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{4}x\Big|_0^2+0-\frac{4}{\pi k}2\cos\frac{2\pi k}{4}-\frac{4}{\pi k}\frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{4}x\Big|_0^2-$$

$$-\frac{4}{\pi k}\frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{4}x\Big|_0^4)=\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{\pi k}(-1)^{k}+\frac{16}{\pi^2k^2}\sin\frac{\pi k}{2}-\frac{8}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}+\frac{16}{\pi^2k^2}\sin\frac{\pi k}{2}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi k}\left((-1)^{k+1}+\frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}-\cos\frac{\pi k}{2}\right).$$

Окончательно,

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi k}\left((-1)^{k+1}+\frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}-\cos\frac{\pi k}{2}\right)\sin\frac{\pi k}{4}x,\quad x\in(0;4)$$

.

Интегралы фкрье. Преобразование Фурье

Пусть $f(t),\ \ t\in R$ - комплекснозначная функция. Ее преобразованием Фурье называется комплекснозначная функция $\tilde{f}(x)$ вещественного переменного x

$$\tilde{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ixt}dt, \quad \tilde{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt, \quad \tilde{f}=\Im(f). \tag{1}$$

Вместе с $\tilde{f}(x)$ определяется обратное преобразование $\tilde{f}_1(x)$

$$\tilde{f}_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi ixt}dt, \quad \tilde{f}_1(x)=\Im_1(f).$$

Если функция $f(t)$ вещественна, то отделяя в (1) вещественную и мнимую часть и полагая $y=2\pi x$, получаем вещественную форму преобразования Фурье

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ytdt \quad b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ytdt \quad (\textit{прямое}),$$

$$f(t)=\int_{0}^{\infty}\big(a(y)\cos ty+b(y)\sin ty\big)dy \quad (\textit{обратное}). \tag{2}$$

Для четных функций вещественное преобразование Фурье и его обратное может быть записано в симметричной форме с использованием косинус-преобразования Фурье

$$\tilde{f}_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos xtdt, \quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\tilde{f}_c(t)\cos xtdt.$$

Аналогично, для нечетных функций пара вещественных преобразований Фурье сводится к синус-преобразованию Фурье

$$\tilde{f}_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin xtdt, \quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\tilde{f}_s(t)\sin xtdt.$$

Преобразование $\tilde{f}(x)$ определено

1. Для суммируемой $f(t)$; при этом

$$|\tilde{f}(x)|\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt, \quad \tilde{f}(x)\to 0, \quad x\to\infty.$$

(Лебег)

2. Для $f(t)$, монотонно убывающей к нулю на бесконечности (Дирихле).

При этом $$|\tilde{f}(x)|\le\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|df(t)|}{2\pi|x|}, \quad \tilde{f}(x)\to 0, \quad x\to\infty.$$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие № ПЗ-1. Действительные числа. Понятие функции. Теория пределов числовых последовательностей.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- способы задания функций;

- классификация функций;

- числовая последовательность и ее предел;

- техника вычисления предела функции в точке.

3.2 Практическое занятие № ПЗ-2, 3. Теория пределов функций одной действительной переменной. Непрерывность функций одной действительной переменной.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- техника вычисления предела функции на бесконечности;

- бесконечно малые эквивалентные данным, замечательные пределы;

- классификация точек разрыва, исследование функции на непрерывность.

3.3 Практическое занятие № ПЗ-4. Производная функции в точке. Свойства производных.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- производная функции в точке, ее геометрический и физический смысл. правила дифференцирования;

- дифференцирование сложной, обратной функции;

- логарифмическая производная.

3.4 Практическое занятие № ПЗ-5. Дифференциал, его свойства и приложения.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- дифференцирование неявной функции;

- дифференциал функции в точке, его геометрический смысл;

- правила вычисления дифференциалов;

- приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

3.5 Практическое занятие № ПЗ-6, 7. Приложения дифференциального исчисления функций одной действительной переменной.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- исследование функции на экстремумы. исследование формы кривой;

- асимптоты функции. полное исследование функции и построение схемы ее графика;

- правила Лопиталя;

- изопараметрические задачи.

3.6 Практическое занятие № ПЗ-8. Теория пределов, непрерывность, дифференцируемость функции многих переменных.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- ОДЗ функции двух переменных, частные и полное приращение функции двух переменных;

- частные производные функции двух переменных, ее дифференциал первого порядка. дифференцируемость сложно заданных функций.

- экстремум функции дух переменных, критерий Сильвестра, наибольшее и наименьшее значении функции двух переменных на области.

- производная функции по направлению, градиент скалярного поля, его свойства.

3.7 Практическое занятие № ПЗ-9. Неопределенный интеграл, его свойства, методы нахождения.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- первообразная функции, неопределенный интеграл;

- свойства неопределенного интеграла, метод непосредственного интегрирования, метод подстановки;

- метод интегрирования «по частям»;

- интегрирование рациональных дробей.

3.8 Практическое занятие № ПЗ-10. Определенный интеграл, его свойства, методы вычисления.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- условия применения формулы Ньютона-Лейбница;

- основные методы вычисления определенного интеграла;

- геометрический смысл определенного интеграла, интеграл с переменным верхним пределом.

3.9 Практическое занятие № ПЗ-11. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- вычисление площади плоской фигуры;

- вычисление длины дуги плоской кривой;

- вычисление объема тела вращения;

- исследование на сходимость несобственного интеграла первого рода;

- исследование на сходимость несобственного интеграла второго рода.

3.10 Практическое занятие № ПЗ-12, 13. Кратные интегралы, их свойства, вычисление, приложения. Криволинейные интегралы, их свойства, вычисление.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- переход от двойного интеграла к повторному, смена порядка интегрирования;
- вычисление площади плоской фигуры;
- вычисление объема тела;
- криволинейны интеграл второго рода;
- криволинейный интеграл первого рода;
- формула Грина;
- интегрирование полного дифференциала.

3.11 Практическое занятие № ПЗ-14, 15. Числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды в действительной области.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- числовые ряды, общий член ряда;
- положительные числовые ряды, достаточные признаки сходимости положительных рядов;
- абсолютно сходящиеся ряды.

3.12 Практическое занятие № ПЗ-16. Ряды Фурье, их свойства.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- ортонормированные системы;
- коэффициенты, ряд Фурье;
- разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье;
- разложение функции в ряд Фурье по «неправильному промежутку.