ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.В.ДВ.11.01 Основы научных исследований

Направление подготовки: **09.03.01** Информатика и вычислительная техника

Профиль подготовки: Автоматизированные системы обработки информации и управления

Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Организация самостоятельной работы …………………………………………….
2. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов ………
3. Методические рекомендации по подготовке к занятиям ……………………........

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
	2	3	4	5	6	7
1	Наука в современном обществе					2
2	Организация научно-исследовательской работы					2
3	Стохастический метод исследования				8	12
4	Оптимизационные задачи				4	12
5	Марковские процессы. Системы массового обслуживания				4	6
6	Учебно-научные работы студента вуза					2
7	Культура и мастерство исследователя					2

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

1. Нормальный закон распределения двумерной случайной величины

На практике часто встречаются двумерные случайные величины, распределение которых нормально.

Определение. *Нормальным законом распределения на плоскости* называется распределение вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$, функция плотности которой имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{X,Y}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}.$$

Итак, нормальный закон на плоскости определяется пятью параметрами: $m_X; m_Y; \sigma_X; \sigma_Y; \rho_{X,Y}$. Смысл этих параметров: математические ожидания и средние квадратические отклонения компонент, а также коэффициент корреляции.

Пример. Доказать, что *для нормально распределенных компонент двумерной случайной величины* $(X;Y)$ *понятия независимости и некоррелированности равносильны*.

Решение. Действительно, пусть компоненты X и Y некоррелированны ($\rho_{X,Y}=0$), тогда плотность $f_{X,Y}(x,y)$ принимает вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\,e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}.$$

Отсюда очевидно, что

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

Значит, компоненты X и Y независимы.

Обратное утверждение также выполняется (из независимости компонент X и Y всегда следует их некоррелированность).

Условные законы распределения случайных величин X и Y:

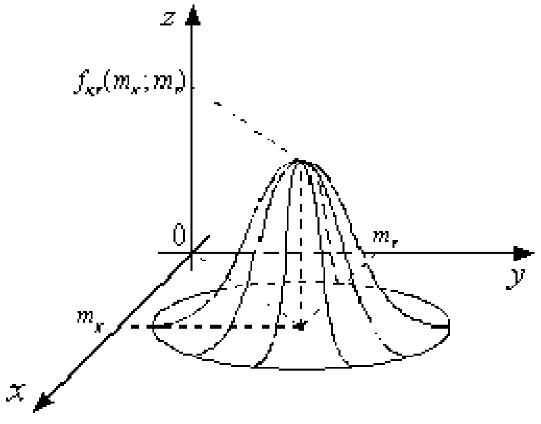
$$f_X(x|Y=y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}-\rho_{X,Y}\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2},$$

$$f_Y(y|X=x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}-\rho_{X,Y}\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2}.$$

Нетрудно видеть, что каждый из условных законов распределения также является нормальным с условным математическим ожиданием и условной дисперсией, вычисляемыми по формулам:

$$\mathrm{M}[X|Y=y]=m_X+\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y),\qquad \mathrm{D}[X|Y=y]=\sigma_X^2(1-\rho_{X,Y}^2);$$

$$M\left[Y \middle| X = x\right] = m_Y + \rho_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X), \qquad D\left[Y \middle| X = x\right] = \sigma_Y^2 (1 - \rho_{X,Y}^2).$$



Замечание. Из формул для условных математических ожиданий видно, что *для системы нормально распределенных случайных величин X и Y линии регрессии Y на x и X на y представляют собой прямые линии*, т.е. в данном случае регрессия *всегда линейна*.

В геометрической интерпретации график $f_{X,Y}(x,y)$ двумерного нормального распределения представляет собой холмообразную поверхность, вершина которой находится в точке $(m_X; m_Y)$. Аппликата этой вершины равна $f_{X,Y}(m_X, m_Y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}$. Сечения поверхности $f_{X,Y}(x,y)$ плоскостями, параллельными плоскости xOy, представляют собой эллипсы.

Определение. Нормальное распределение называется *круговым* с центром в точке $(m_X; m_Y)$, если случайные величины X и Y некоррелированны ($\rho_{X,Y} = 0$) и $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$.

Пример . Случайная точка $(X; Y)$ на плоскости xOy распределена по двумерному нормальному закону с центром рассеивания $(m_X; m_Y) = (1; 0)$, средними квадратическими отклонениями $\sigma_X = 2$, $\sigma_Y = 1$ и коэффициентом корреляции $\rho_{X,Y} = 0$. Вычислить вероятность попадания случайной точки $(X; Y)$ в прямоугольник с вершинами $A(1; -1)$, $B(1; 2)$, $C(3; 2)$, $D(3; -1)$.

Решение. Поскольку коэффициент корреляции $\rho_{X,Y} = 0$, то плотность $f_{X,Y}(x,y)$ представляется в виде

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}.$$

С учетом того, что $m_X = 1$, $m_Y = 0$, $\sigma_X = 2$, $\sigma_Y = 1$, получим:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Поэтому $P\{(X; Y) \in ABCD\} = \iint\limits_{ABCD} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 f_X(x)\,dx \cdot \int\limits_{-1}^2 f_Y(y)\,dy$, или

$$P\{(X; Y) \in ABCD\} = \left(\Phi\left(\frac{3-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) \cdot \left(\Phi\left(\frac{2-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-1-0}{1}\right)\right) =$$

$$= (\Phi(1) - \Phi(0)) \cdot (\Phi(2) - \Phi(-1)) = (\Phi(1) - 0{,}5) \cdot (\Phi(2) - 1 + \Phi(1)) \approx 0{,}2794.$$

Ответ: $\approx 0{,}2794$.

Пример . Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону. Известно, что $m_X = a$, $m_Y = b$, $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$. Найти радиус R круга с центром в точке $(a;b)$, вероятность попадания в который случайной точки $(X;\,Y)$ равна 0,997.

Решение. Поскольку случайные величины X и Y независимы, то

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma^2}}.$$

Вероятность $\mathbf{P}(D)$ попадания случайной точки $(X;\,Y)$ в круг D с центром в точке $(a;b)$ и радиусом R вычисляется следующим образом:

$$\mathrm{P}(D) = \iint\limits_D f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint\limits_{(u-a)^2+(v-b)^2\le R^2} f_X(u)\cdot f_Y(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{(u-a)^2+(v-b)^2\le R^2}\mathrm{e}^{-\frac{(u-a)^2+(v-b)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left\| \begin{aligned} t &= \frac{u-a}{\sigma}, \\ \tau &= \frac{v-b}{\sigma} \end{aligned} \right\| = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{t^2+\tau^2\le\left(\frac{R}{\sigma}\right)^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2+\tau^2}{2}}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \left\| \begin{aligned} t &= r\cos\varphi, \\ \tau &= r\sin\varphi \end{aligned} \right\| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{R}{\sigma}}\left(\int\limits_0^{2\pi} r\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \int\limits_0^{\frac{R}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{r^2}{2}\right) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.$$

Теперь, решая уравнение $1-\mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} = 0{,}997$, получим $R^2 = -2\sigma^2\ln 0{,}003 \approx 11{,}6\sigma^2$. Отсюда $R \approx 3{,}41\sigma$.

Ответ: $R \approx 3{,}41\sigma$.

Пример. Заданы следующие характеристики двумерного нормального вектора $(X;\,Y)$: $m_X = 3$, $m_Y = -2$, $\sigma_X = 5$, $\sigma_Y = 4$, $\rho_{X,Y} = 0{,}6$. 1) Записать выражения для плотности распределения вероятностей $f_{X,Y}(x,y)$ и условных плотностей компонент $f_X(x\,|\,Y=y)$, $f_Y(y\,|\,X=x)$. 2) Составить уравнения регрессий Y на x и X на y. 3) Найти условные дисперсии компонент X и Y.

Решение. 1) По определению двумерного нормального вектора:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{X,Y}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}.$$

С учетом того, что $m_X = 3$, $m_Y = -2$, $\sigma_X = 5$, $\sigma_Y = 4$, $\rho_{X,Y} = 0{,}6$, выражение для $f_{X,Y}(x,y)$ примет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{32\pi}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{25}{32}\cdot\left[\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{3(x-3)(y+2)}{50}+\frac{(y+2)^2}{16}\right]}.$$

Условные законы распределения случайных величин X и Y:

$$f_X(x|Y=y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{25}{32}\cdot\left(\frac{x-3}{5}-0{,}6\cdot\frac{y+2}{4}\right)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{32}\cdot(x-0{,}75y-4{,}5)^2},$$

$$f_Y(y|X=x)=\frac{5}{16\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{25}{32}\cdot\left(\frac{y+2}{4}-0,6\cdot\frac{x-3}{5}\right)^2}=\frac{5}{16\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{25}{32}\cdot(0,25y-0,12x+0,74)^2}.$$

2) Условные математические ожидания равны:

$$\mathrm{M}[X|Y=y]=m_X+\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y)=3+0,6\cdot\frac{5}{4}\cdot(y+2)=4,5+0,75y,$$

$$\mathrm{M}[Y|X=x]=m_Y+\rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)=-2+0,6\cdot\frac{4}{5}\cdot(x-3)=-3,44+0,48x.$$

Таким образом, уравнение регрессии X на y имеет вид $x=4,5+0,75y$, а уравнение регрессии Y на x имеет вид $y=-3,44+0,48x$.

3) Условные дисперсии равны:

$$\mathrm{D}[X|Y=y]=\sigma_X^2(1-\rho_{X,Y}^2)=25\cdot 0,64=16,$$

$$\mathrm{D}[Y|X=x]=\sigma_Y^2(1-\rho_{X,Y}^2)=16\cdot 0,64=10,24.$$

Ответ: 1) $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{32\pi}\cdot e^{-\frac{25}{32}\left[\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{3(x-3)(y+2)}{50}+\frac{(y+2)^2}{16}\right]}$,

$f_X(x|Y=y)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{32}\cdot(x-0,75y-4,5)^2}$, $f_Y(y|X=x)=\frac{5}{16\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{25}{32}\cdot(0,25y-0,12x+0,74)^2}$.

2) Уравнение регрессии X на y: $x=4,5+0,75y$, уравнение регрессии Y на x: $y=-3,44+0,48x$. 3) $\mathbf{D}[X|Y=y]=\mathbf{16}$, $\mathbf{D}[Y|X=x]=\mathbf{10,24}$.

2. Теорема Куна-Таккера. Динамическое программирование.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\to\max \qquad (6)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_i, i=\overline{1,m}, \qquad (7)$$

$$x_j\ge 0, j=\overline{1,n}. \qquad (8)$$

Для решения сформулированной задачи в такой общей постановке не существует универсальных методов. Однако для отдельных классов задач, в которых сделаны дополнительные ограничения относительно свойств функций *f(x)* и $g_i(x)$, разработаны эффективные методы их решения.

Говорят, что множество допустимых решений задачи (6) - (8) удовлетворяет условию **регулярности**, или условию **Слейтера**, если существует, по крайней мере, одна точка $X^{(0)}$, принадлежащая области допустимых решений такая, что $g_i(X^{(0)})<b_i, i=\overline{1,m}$. Задача (6) - (8) называется **задачей выпуклого программирования**, если функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ является вогнутой (выпуклой), а функции $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(i=\overline{1,m})$ - выпуклыми. **Функцией Лагранжа** задачи выпуклого программирования (6) - (8) называется функция

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)],$$

где $y_1, y_2, \cdots, y_m$ - множители Лагранжа.

Точка $(X^{(0)}, Y^{(0)}) = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0)$ называется **седловой точкой функции Лагранжа,** если

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1, y_2, \ldots y_m)$$ для всех $x_j \ge 0 \ (j = 1, \overline{n})$ и $y_i \ge 0 \ (i = 1, \overline{m})$.

Теорема 1 (Куна - Таккера): Для задачи выпуклого программирования (6) - (8), множество допустимых решений которой обладает свойством регулярности, $X^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ является оптимальным решением тогда и только тогда, когда существует такой вектор $Y^{(0)} = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ $(y_i^0 \ge 0, i = 1, \overline{m})$, что $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ - седловая точка функции Лагранжа.

Если предположить, что функции f и g_i непрерывно дифференцируемы, то теорема Куна - Таккера может быть дополнена аналитическими выражениями, определяющими необходимые и достаточные условия того, чтобы точка $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ была седловой точкой функции Лагранжа, т. е. являлась решением задачи выпуклого программирования:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} \le 0, j = 1, \overline{n}; \\ x_j^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, j = 1, \overline{n}; \\ x_j^0 \ge 0, j = 1, \overline{n}; \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} \ge 0, i = 1, \overline{m}; \\ y_i^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0, i = 1, \overline{m}; \\ y_i^0 \ge 0, i = 1, \overline{m}, \end{cases}$$

где $\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}$ и $\dfrac{\partial L_0}{\partial y_i}$ значения соответствующих частных производных функции Лагранжа, вычисленных в седловой точке.

Метод динамического программирования

Динамическое программирование - раздел математического программирования, области математики, изучающей методы нахождения оптимальных решений в различных областей человеческой деятельности, в том числе в области планирования и управления производством.

При решении задач математического программирования определяется экстремальное (максимальное и минимальное) значение показателя, характеризующего эффективность принимаемого хозяйственного решения, - критерия оптимальности. Это может быть, например, максимум прибыли, минимум затрат ресурсов, кратчайшее время достижения цели т.д.

Для процессов, подчиненных определенным требованиям, математическим аппаратом отыскания оптимального решения программирование наиболее адекватным является динамическое.

Типичными задачами динамического программирования в строительстве являются календарное планирование, определение стратегии развития производственной базы строительства, оптимальное управление перевозками строительных материалов и конструкций, последовательность включения объектов в строительный поток и др.

Общим для всех задач динамического программирования является многошаговый процесс принятий решений. Математически оптимизационная задача динамического программирования строится с помощью таких соотношений, которые последовательно связаны между собой.

Полученный на каждом этапе расчетов результат служит исходными данными на следующем этапе расчетов.

Благодаря этому решение сложной задачи с п. переменными сводится к решению задач с одной переменной.

Применение метода динамического программирования основано на использовании принципа оптимальности Р. Беллмана: если на одной итерации применен алгоритм, ведущий к оптимальному решению, то и на следующий итерациях, пользуясь этим алгоритмом, будет иметь оптимизацию решения.

Ниже, на примере некоторых задач планирования, демонстрируются общие основы метода динамического программирования. Общая схема решения задач выглядит следующим образом.

Исходные данные заносят в таблицу. Затем путем перебора возможных вариантов находят оптимальные по принятому критерию варианты решений сначала для одной пары показателей.

На следующей итерации, перебирая варианты по паре, образованной оптимизированным из первых двух вариантом и 3-им вариантом, находят новый оптимальный вариант и Т.д., пока не будет пересмотрена вся исходная таблица. Обратным порядком определяют, каким образом получен оптимальный вариант.

Задача: Не обходимо распределить 4 бригады по 10 человек на строительство новых четырех объектов, чтобы выполнить максимальный объем строительно-монтажных работ, если известно, что объем СМР на объектах с 1 по 17 в зависимости от количества рабочих, направляемых на эти объекты, различен и записан в виде следующей матрицы:

Таблица 1

Количество рабочих	Номера объектов			
	I	II	III	IV
	Объем СМР, тыс.руб.			
0	0	0	0	0
10	10	8	12	11
20	23	18	20	19
30	27	25	31	28
40	29	32	35	36

Решение: В качестве этапов вычисления будем рассматривать направление рабочих сначала на один объект, затем на два, на три и, наконец, на четыре объекта.

Таблица 2

Количество рабочих	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$q_2(x)$	$F_3(x)$	$q_3(x)$	$F_4(x)$	$q_4(x)$
0	0	***0***	0	0	0	0	0
10	10	8	10	***12***	12	***11***	12
20	***23***	18	***23***	20	23	19	23
30	27	25	31	31	***35***	28	35
40	29	32	41	35	43	36	***46***

Функции объемов СМР в зависимости от количества рабочих на каждом объекте: F1(x) - по
первому объекту; $F_2(x)$ - по второму; Fз(x) - по третьему; $F_4(x)$ - по четвертому; где x - количество рабочих.

Функции оптимального распределения объемов СМР:

$q_1(x)$- по первому объекту;

$q_2(x)$ - по двум;

$q_3(x)$ - по трем;

$q_4(x)$ - по четырем объектам.

Нахождение оптимума на каждом этапе производится методом простого перебора всех возможных вариантов.

1. В первом столбце F1(x) записаны объемы СМР, получаемые при направлении рабочих на 1 объект.
   $F_1(x)$ = Ql(X), так как при направлении всех рабочих на первый объект размер СМР F1(x)для него и будет оптимальным.
2. Во втором столбце $F_2(x)$ записаны объемы СМР, получаемые при направлении всех рабочих на второй объект.
3. Третий столбец формируется как результат выполнения объемов СМР по двум объектам (первому и второму).
   3.1. При составлении бригады 10 человек их можно направить только в один из двух рассматриваемых объектов. Так как объем смр при распределении 10 человек на I объект (10 тыс. руб.) больше, чем на 11 (8 тыс. руб.), то этих рабочих выгоднее направить на I-й объект.

В столбце q2 (10) записываем 10 тыс. руб.

$q_2(10)$=max10 + 0 = 10 = 10

0 + 8 = 8

3.2. Если количество рабочих равно 20 чел., то могут быть три варианта их распределения:

3.2.1. Всех рабочих (20 чел.) направить на 1 объект, что даст объем СМР 23 тыс. руб.;

3.2.2. Всех рабочих направить на 11 объект, при этом объем СМР составит 18 тыс. руб.

3.2.3. 10 человек направить на 1 объект,

10 ~ловек - на 11 объект, что даст суммарный объем СМР 18 тыс. руб.

Максимальный объем СМР при распределении 20 человек по трем вариантам составит 23 тыс. руб.

$23 + 0 = 23$
$q_2(20)=\max 0 + 18 = 18 = 23$
$10 + 8 = 18$

3.3. Если количество рабочих равно 30 человек, то могут быть четыре варианта распределения:
3.3.1. Всех рабочих (30 чел.) направить на 1 объект, что даст объем СМР 27 тыс. руб.;
3.3.2. Всех рабочих направить на 11 объект, при этом объем СМР составит 25 тыс. руб.;
3.3.3. 20 человек направить на 1 объект, 10 человек - на 11 объект, что даст суммарный объем СМР 31 тыс. руб.;
3.3.4. 10 человек направить на 1 объект, 20 человек - на 11 объект, что даст суммарный объем СМР- 28 тыс. руб.
Максимальный объем СМР при распределении ЗО человек на IиIIобъектах составит

$27 + 0 = 27$
$q_2(30)=\max 0 + 25 = 25 = 31$
$23 + 8 = 31$
$10 + 18 = 28$

3.4. Если количество рабочих равно 40 человек, то могут быть пять вариантов их распределения:
3.4.1. Всех рабочих (40 чел.) направить на 1 объект, что даст объем СМР - 29 тыс. руб.;
3.4.2. Всех рабочих (40 чел.) направить на 11 объект, при этом объем СМР составит 32 тыс. руб.;
3.4.3. 20 человек направить на 1 объект и 20 человек направить на 11 объект, что даст суммарный объем СМР - 41 тыс. руб.;
3.4.4. ЗА человек направить на 1 объект, 10 человек - на 11 объект, что даст суммарный объем СМР - 35 тыс. руб.;
3.4.5. 10 человек - на 1 объект,
ЗА человек - на 11 объект, что даст суммарный объем СМР - 35 тыс. руб. Максимальный объем СМР при распределении 40 человек на 1 и 11 объектах составит 41 тыс, руб.

$29 + 0 = 29$
$q_2(40)=\max 0 + 32 = 32 = 41$
$23 + 18 = 41$
$10 + 25 = 25$

4. Далее находим, пользуясь вышеизложенной методикой, оптимальное распределение рабочих по трем объектам, рассматривая оптимальные распределения q2(X) , найденные на предыдущей итерации, в качестве исходных данных

$q_3(10)= \max 10 + 0 = 10 = 12$
$0 + 12 = 12$

$23 + 0 = 23$
$q_3(20)= \max 0 + 20 = 20 = 23$
$10 + 12 = 22$

$31 + 0 = 31$
$q_3(30)= \max 0 + 31 = 31 = 35$
$23 + 12 = 35$
$10 + 20 = 30$

$41 + 0 = 41$
$0 + 35 = 35$

$q_3(40)$= max 23 + 20 = 43 = 43
31 + 12 = 43
10 + 31 = 41

5. Найдем оптимальное распределение рабочих по четырем объзетам. Составляем оптимальный вариант Q4(X) на следующей итерации, перебирая варианты по паре, образованной оптимизированным вариантом Q3(x) = и четвертым (исходным) вариантом F_4(x).

$q_3(10)$= max 12 + 0 = 12 = 12
0 + 11 = 11

23 + 0 = 23
$q_3(20)$= max 0 + 19 = 19 = 23
12 + 11 = 23

35 + 0 = 35
$q_3(30)$= max 0 + 25 = 25 = 35
23 + 11 = 34
12+ 19 = 31

43 + 0 = 43
0 + 36 = 36
$q_3(40)$=max23 + 19 = 42 = 46
35+ 11 = 46
12 + 25 = 37

Полученные числа 12, 23, 35,46 заносят в столбец Q4(X) новой матрицы (таблица 2).

Обратным порядком определяем оптимальный вариант.

На основании полученной матрицы (табл. 2) сделаем следующий вывод: максимальный объем будет выполнен, если на I объект направить 20 человек, на 111 объект направит 10человек, на IV объект - 10 человек. Объем строительно-монтажных работ при этом составит 46 тыс. рублей.

Из примера видно, что благодаря применению метода динамического программирования задача с четырьмя пара метрами превратилась в три задачи с одним параметром, что позволило легко и просто решить задачу.

3. Классификация Марковских процессов. Характеристики Эффективности СМО

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название ***процессов обслуживания***, а системы — ***систем массового обслуживания (СМО)***. Примерами таких систем являются телефонные системы, ремонтные мастерские, вычислительные комплексы, билетные кассы, магазины, парикмахерские и т.п.

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц (приборов, устройств, пунктов, станций), которые будем называть ***каналами обслуживания***. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и др. По числу каналов СМО подразделяют на ***одноканальные*** и ***многоканальные***.

Заявки поступают в СМО обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый ***случайный поток заявок (требований)***. Обслуживание заявок, вообще говоря, также продолжается какое-то случайное время. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно: в какие-то периоды времени скапливается очень большое количество заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными), в другие же периоды СМО работает с недогрузкой или простаивает.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок и т.п.) с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок.

В качестве ***показателей эффективности СМО*** используются: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т.п.

СМО делят на два основных типа (класса): ***СМО с отказами*** и ***СМО с ожиданием (очередью)***. В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует (например, заявка на телефонный разговор в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной). В СМО с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

СМО с ожиданием подразделяются на разные виды в зависимости от того, как организована очередь: с ограниченной или неограниченной длиной очереди, с ограниченным временем ожидания и т.п.

Для классификации СМО важное значение имеет ***дисциплина обслуживания***, определяющая порядок выбора заявок из числа поступивших и порядок распределения их между свободными каналами. По этому признаку обслуживание заявки может быть организовано по принципу "первая пришла — первая обслужена", "последняя пришла — первая обслужена" (такой порядок может применяться, например, при извлечении для обслуживания изделий со склада, ибо последние из них оказываются часто более доступными) или обслуживание с приоритетом (когда в первую очередь обслуживаются наиболее важные заявки). Приоритет может быть как *абсолютным*, когда более важная заявка"вытесняет" из-под обслуживания обычную заявку (например, в случае аварийной ситуации плановые работы ремонтных бригад прерываются до ликвидации аварии), так и *относительным*, когда более важная заявка получает лишь "лучшее" место в очереди.

Понятие марковского случайного процесса

Процесс работы СМО представляет собой ***случайный процесс***.

Под ***случайным (вероятностным или стохастическим) процессом*** понимается процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями.

Процесс называется ***процессом с дискретными состояниями***, если его возможные состояния $S_1, S_2, \ldots, S_n$ можно заранее перечислить, а переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно (скачком). Процесс называется ***процессом с непрерывным временем***, если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Это означает, что состояние СМО меняется скачком в случайные моменты появления каких-то событий (например, прихода новой заявки, окончания обслуживания и т.п.).

Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если процесс этой работы — марковский. Случайный процесс называется ***марковским*** или ***случайным процессом без последствия***, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Пример марковского процесса: система S — счетчик в такси. Состояние системы в момент t характеризуется числом километров (десятых долей километров), пройденных автомобилем до данного момента. Пусть в момент счетчик показывает S_0. Вероятность того, что в момент $t > t_0$ счетчик покажет то или иное число километров (точнее, соответствующее число рублей) S_1, зависит от , но не зависит от того, в какие моменты времени изменялись показания счетчика до момента .

Многие процессы можно приближенно считать марковскими. Например, процесс игры в шахматы; система — группа шахматных фигур. Состояние системы характеризуется числом фигур противника, сохранившихся на доске в момент . Вероятность того, что в момент материальный перевес будет на стороне одного из противников, зависит в первую очередь от того, в каком состоянии находится система в данный момент , а не от того, когда и в какой последовательности исчезли фигуры с доски до момента .

В ряде случаев предысторией рассматриваемых процессов можно просто пренебречь и применять для их изучения марковские модели.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой — так называемым ***графом состояний***. Обычно состояния системы изображаются прямоугольниками (кружками), а возможные переходы из состояния в состояние — стрелками (ориентированными дугами), соединяющими состояния.

Пример 1. Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинаете» ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время.

Решение. Возможные состояния системы: — оба узла исправны; — первый узел ремонтируется, второй исправен; S_2 — второй узел ремонтируется, первый исправен; S_3 — оба узла ремонтируются. Граф системы приведен на рис. 1.

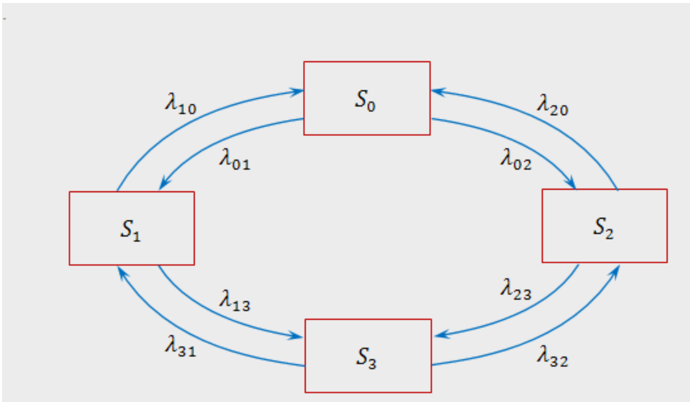


Рис. 1. Граф системы состояний случайного процесса

Стрелка, направленная, например, из в , означает переход системы в момент отказа первого узла, из в — переход в момент окончания ремонта этого узла.

На графе отсутствуют стрелки из в и из в . Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностью одновременного выхода из строя двух узлов (переход из в) или одновременного окончания ремонтов двух узлов (переход из в) можно пренебречь.

Для математического описания марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем, протекающего в СМО, познакомимся с одним из важных понятий теории вероятностей — понятием потока событий.

Потоки событий

Под ***потоком событий*** понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов ЭВМ, поток покупателей и т.п.).

Поток характеризуется ***интенсивностью*** λ — частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется ***регулярным***, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным.

Поток событий называется ***стационарным***, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda(t) = \lambda$. Например, поток автомобилей на городском проспекте не является стационарным в течение суток, но этот поток можно считать стационарным в течение суток, скажем, в часы пик. Обращаем внимание на то, что в последнем случае фактическое число проходящих автомобилей в единицу времени (например, в каждую минуту) может заметно отличаться друг от друга, но среднее их число будет постоянно и не будет зависеть от времени.

Поток событий называется ***потоком без последействия***, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 — число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А, скажем, поток покупателей, отходящих с покупками от прилавка, уже имеет последействие (хотя бы потому, что интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время обслуживания каждого из них).

Поток событий называется ***ординарным***, если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Другими словами, поток событий ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами. Например, поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов не ординарен.

Поток событий называется ***простейшим*** *(или* ***стационарным пуассоновским****), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия.* Название "простейший" объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание. Заметим, что регулярный поток не является "простейшим", так как он обладает последействием: моменты появления событий в таком потоке жестко зафиксированы.

Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятностей нормальное распределение получается в качестве предельного для суммы случайных величин: *при наложении (суперпозиции) достаточно большого числа n независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью , равной сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.* $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$*. Рассмотрим на оси времени Ot (рис. 1) простейший поток событий как неограниченную последовательность случайных точек.*

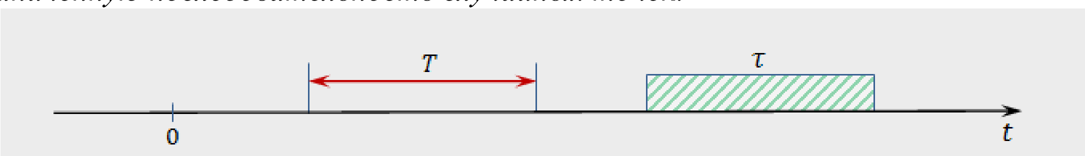


Рис. 2. Простейший поток

Можно показать, что для простейшего потока число т событий (точек), попадающих на произвольный участок времени τ, распределено по ***закону Пуассона***

$$\boxed{P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \quad (1)}$$

для которого математическое ожидание случайной величины равно ее дисперсии: $a = \sigma^2 = \lambda\tau$.

В частности, вероятность того, что за время не произойдет ни одного события $(m = 0)$, равна $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

Найдем распределение интервала времени T между произвольными двумя соседними событиями простейшего потока.

В соответствии с (2) вероятность того, что на участке времени длиной не появится ни одного из последующих событий, равна

$$P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}, \quad (3)$$

а вероятность противоположного события, т.е. функция распределения случайной величины, есть

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

Плотность вероятности случайной величины есть производная ее функции распределения (рис. 3), т.е.

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (5)$$

Распределение, задаваемое плотностью вероятности (5) или функцией распределения (4), называется ***показательным*** (или ***экспоненциальным***). Таким образом, интервал времени между двумя соседними произвольными событиями имеет показательное распределение, для которого математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению случайной величины

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (6)$$

и обратно по величине интенсивности потока .

Важнейшее свойство показательного распределения (присущее только показательному распределению) состоит в следующем: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время , то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка $(T - \tau)$: он будет таким же, как и закон распределения всего промежутка .

Рис. 3

Другими словами, для интервала времени между двумя последовательными соседними событиями потока, имеющего показательное распределение, любые сведения о том, сколько времени протекал этот интервал, не влияют на закон распределения оставшейся части. Это свойство показательного закона представляет собой, в сущности, другую формулировку для «отсутствия последействия» — основного свойства простейшего потока.

Для простейшего потока с интенсивностью вероятность попадания на ***элементарный (малый)*** отрезок времени хотя бы одного события потока равна согласно (4)

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t. \quad (7)$$

(Заметим, что эта приближенная формула, получаемая заменой функции $e^{-\lambda\Delta t}$ лишь двумя первыми членами ее разложения в ряд по степеням, тем точнее, чем меньше).

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие №1 (ПЗ-1) Организация научно-исследовательской работы

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- основные тенденции в развитии науки и технологии;
- различные подходы к вопросам экологичности техники и технологии;
- динамику изменения научной парадигмы.

3.2 Практическое занятие №2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (ПЗ-2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) Стохастический метод исследования

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- первичную обработку и анализ статистических данных;
- непрерывные и дискретные статистические распределения, их свойства, параметры;
- алгоритм алгоритмы нахождения точечных и интервальных оценок параметров статистического распределения.

3.3 Практическое занятие №9, 10, 11, 12, 13 (ПЗ-9, 10, 11, 12, 13) Оптимизационные задачи

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- классификацию статистических критериев, определение ошибок первого и второго рода, понятие критической области статистического критерия;
- применение критерия Пирсона для проверки согласованности теоретического распределения с распределением выборки, для установления однородности выборки, для подтверждения независимости факторов;
- применение критерия Колмогорова.

3.4 Практическое занятие №14, 15, 16 (ПЗ-14, 15, 16) Марковские процессы. Системы массового обслуживания

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- определение, свойства, классификацию случайных потоков;
- свойства марковских цепей, их классификацию;
- алгоритмы применения элементов теории марковских цепей к решению инженерных задач.

3.5 Практическое занятие №17 (ПЗ-17) Культура и мастерство исследователя

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- методологию НИР;
- этапы НИР, формирование результатов;
- формы представления результатов НИР;
- классификация НИРС;
- работа с информационными источниками, правила оформления ссылок;
- этические основы творчества исследователя.