ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.Б.12 Математический анализ

Направление подготовки (специальность): 10.03.01 Информационная безопасность

Профиль образовательной программы Безопасность автоматизированных систем

Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

2.13 Практическое занятие №ПЗ-29-31 Двойной интеграл, его вычисление. Геометрические приложения двойного интеграла

2.14 **Практическое занятие №**ПЗ-32-33 Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Криволинейные интегралы первого рода

2.15 **Практическое занятие №**ПЗ-34-35 Положительные числовые ряды, признаки их сходимости. Произвольные ряды. Абсолютно сходящиеся ряды. Знакочередующиеся ряды, их свойства и приложения

2.16 **Практическое занятие №**ПЗ-36 Степенные ряды, область их сходимости.

2.17 **Практическое занятие №**ПЗ-37 Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1. Лекция 1 (2 ч.)

Тема: Действительные числа. Понятие функции. Теория пределов числовых последовательностей

1.1.1 Вопросы лекции:

1.Понятие о числовых множествах. Элементы топологии.

2. Интервалы, их классификация.

3. Понятие функции. Способы задания функции, график, область определения.

4.Классификация функций, обратная функция.

5. Числовые последовательности, их сходимость.

1.1.2. Краткое содержание вопросов:

1.Понятие о числовых множествах. Элементы топологии.

Множество – совокупность, набор каких-либо предметов (объектов) произвольной природы, объединенных по какому – либо общему для них признаку (множество студентов данной группы, множество цветных телевизоров в гостинице, множество чисел первого десятка, множество точек на прямой и т. д.). Немецкий математик Г.Кантор считал, что «множество есть многое, мыслимое нами как единое».Понятие множества, точки, числа приходится принимать без определения.

Объекты, из которых состоит множество, называют его ***элементами***. Если элементами множества являются числа, то оно называется ***числовым множеством***. Множества обозначаются большими буквами латинского алфавита A, B, C,…, а их элементы- малыми буквами этого алфавита. Если элемент x принадлежит множеству A, то пишут x A, если же x не принадлежит множеству A, то пишут x A.

Множества можно задать двумя способами:

1) перечислить его элементы;

2) описать его элементы с помощью характеристического свойства.

Множество, не имеющее элементов, называют пустым и обозначают Ø.

Примеры пустых множеств:

1) Множество действительных чисел, являющихся корнями уравнения

$x^2 + 1 = 0$.

2) Множество треугольников, сумма углов которых $\neq 180$.

3) Множество решений системы уравнений

$3x + 4y = 7$

$6x + 8y = 10$

Множества бывают конечными и бесконечными.

Например, множество A= { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 } всех цифр - конечное, а множество всех целых чисел, составленных из этих цифр - бесконечное.

Одно и то же множество может быть задано разными характеристическими свойствами: множество A ={ 2,4 } можно определить как множество четных чисел, удовлетворяющих неравенству $A = \{ x: 1 < x < 5$, x- четное$\}$ и как множество корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$: $A = \{ x: x^2 - 6x + 8 = 0 \}$

Примеры множеств в геометрии, описываемых характеристическими свойствами:

биссектриса угла – геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри угла и равноудаленных от его сторон;

окружность- геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки – центра окружности.

Множество, содержащее все те элементы, которые встречаются в контексте проводимых рассуждений, называется универсальным и обозначается E.

Два множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов: A = B ↔ для любого x (x A ↔ x B).

Прямая, на которой выбраны направление, начало отсчета точка O и масштаб, называется числовой осью. Между действительными числами и точками числовой оси существует взаимно-однозначное соответствие: числу $m\in R$ соответствует на оси точка M с абсциссой m. И обратно, каждой точке M числовой оси соответствует число $m\in R$ абсцисса этой точки. Точка M лежит справа от точки O, если $m>0$ слева от точки O, если $m<0$ совпадает с точкой O, если $m=0$. Поэтому действительные числа часто называют точками, что позволяет геометрически изображать числовые промежутки на числовой оси.

Любой интервал числовой оси, содержащий данную точку a, называют окрестностью этой точки и обозначают O(a). Если этот интервал симметричен относительно точки a и имеет длину 2ε, то его называют ε− окрестностью точки a и обозначают Oε(a). Очевидно, что любая точка $x\in O\varepsilon(a)$ удовлетворяет неравенствам $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.

Правой (левой) δ− полуокрестностью точки a называют интервал $a<x< a+\delta$ $(a-\delta<x< a)$ и обозначают $O+\delta(a)$ $(O+\delta(a))$

Окрестность точки a без самой точки a называют проколотой окрестностью этой точки и обозначают $O(a)\backslash a$.

Множество значений x, для которых $x>M$, где $M>0$ некоторое число, называют M− окрестностью символа ∞ и обозначают OM(∞). Множество значений $x>M$ (или $x<M$) , где $M\in R$, называют M− окрестностью символа +∞ (или −∞) и обозначают OM(+∞) (или OM(−∞)).

Точка a называется внутренней точкой множества A, если существует окрестность этой точки, содержащая точки только этого множества и не содержащая точек, не принадлежащих множеству A. Точка a называется граничной точкой множества A, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие множеству A, так и точки, не принадлежащие множеству A.

Например, $x=1$ для полуинтервала [0,2) есть внутренняя точка, $x=0$, $x=2$ граничные точки, причем точка $x=0$ принадлежит данному полуинтервалу, а точка $x=2$ не принадлежит.

Множество $A\subset R$ называется ограниченным сверху, если $\exists M\in R: x\le M\ \forall x\in A$.

Множество $A\subset R$ называется ограниченным снизу, если $\exists m\in R: x\ge m\ \forall x\in A$.

Множество $A\subset R$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу, т.е. $\exists m,M\in R: m\le x\le M\quad \forall x\in A$. Из этого определения следует, что множество $A\subset R$ ограничено, если $\exists c>0, c\in R: |x|\le c\quad \forall x\in A$.

Множество, не являющееся ограниченным, называется неограниченным.

Например, множество $A=\{x:x<2\}$ ограничено сверху, так как $x<2\ \forall x\in A\quad (M=2)$. Множество $A=\{n:n\in N\}$ ограничено снизу, так как $n\ge 1\ \forall n\in N\quad (m=1)$. Ограниченными являются множества точек отрезка, конечного интервала или конечного полуинтервала. Множество $A=\{xn:xn=1n,n\in N\}$ ограничено, так как 0□1$n\le 1$, или $||1n||\le 1\ \forall n\in N\quad (c=1)$.

Множество $A=\{x:|x-2|\ge 1\}$, состоящее из элементов x, для которых $x\ge 3$ или $x\le 1$, является неограниченным.

Точные верхняя и нижняя грани множества

Рассмотрим произвольное множество E действительных чисел x. Может случиться, что в нем имеется наибольшее (максимальное) число, которое мы обозначим через M. В этом случае пишут

$$M = \max E = \max_{x\in E} x.$$

Может случиться, что среди чисел $x \in E$ имеется наименьшее (минимальное), равное числу m. Тогда пишут

$$m = \min E = \min_{x \in E} x.$$

Если множество E конечно, т. е. состоит из конечного числа чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_p,$$

то среди них всегда есть наибольшее и наименьшее.

Однако это не всегда так, если E - бесконечное множество.

Приведем примеры:

1) $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, 2) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

3) $\mathbf{N}_- = \{\ldots, -2, -1\}$, 4) $[a, b]$, 5) $[a, b)$, 6) (a, b).

Множество $\mathbf{Z}$ не имеет наибольшего и наименьшего чисел. Интервал (a, b) тоже не имеет наибольшего и наименьшего чисел. При этом здесь не имеет значения, будут ли числа a, b конечными или бесконечными. Каково бы ни было число $c \in (a, b)$, т. е. число, удовлетворяющее неравенствам $a < c < b$, всегда найдутся числа c_1, c_2; такие, что $a < c_1 < c < c_2 < b$.

Множество $\mathbf{N}$ не имеет наибольшего элемента, но имеет наименьший $x = 1$. Множество $\mathbf{N}_-$ имеет наибольший элемент $x = -1$, но не имеет наименьшего.

Очевидно также $\min[a, b] = a$, $\max[a, b] = b$, $\min[a, b) = a$, однако максимального числа в $[a, b)$ нет.

Возникает вопрос о введении для произвольного множества E чисел, которые по возможности заменяли бы $\max E$ и $\min E$. Такими числами (конечными или бесконечными) являются точная верхняя грань

$$\sup E = \sup_{x \in E} x = M$$

и точная нижняя грань

$$\inf E = \inf_{x \in E} x = m$$

множества.

Пусть множество E ограничено сверху.

Число M (конечное) называется точной верхней гранью множества E, если для него выполняются два условия:

1) $x \le M \quad \forall x \in E$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_1 \in E$ такая, что выполняются неравенства

$$M - \varepsilon < x_1 \le M.$$

Говоря другими словами, $\sup E = M$ есть наименьшая из верхних границ (мажорант).

Пусть множество E ограничено снизу.

Число m (конечное) называется точной нижней гранью множества E, если для него выполняются два условия:

1) $m \le x \quad \forall x \in E$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_1 \in E$ такая, что

$$m \le x_1 < m + \varepsilon,$$

т. е. $\inf E = m$ есть наибольшая из нижних границ.

Очевидно, если в множестве E действительных чисел имеется наибольшее (наименьшее) число, т. е. существует $\max E \left(\min E\right)$, то

$$\sup E = \max E \qquad \left(\inf E = \min E\right).$$

$\sup$, $\inf$ - сокращения латинских слов supremum – наивысший, infimum – наинизший.

Эта терминология не совсем не совсем удачна, потому что, например, $\sup E$ не всегда есть наивысший элемент в множестве E.

П р и м е р. Множество

$$E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

имеет наименьшее число, равное $1/2 \ \left(\min E = 1/2\right)$. Однако оно не имеет наибольшего, потому что $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \dots$. Все же оно ограничено сверху числом 1 или любым числом, большим 1. Но число 1 играет исключительную роль – оно есть точная верхняя грань E $\left(\sup E = 1\right)$.

В самом деле:

1) $\dfrac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in N$,

2) для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in N: \ 1 - \varepsilon < \dfrac{n_1}{n_1 + 1} < 1$.

Мы дали определение точной верхней (нижней) грани для множества, ограниченного сверху (снизу).

Если множество E не ограничено сверху (снизу), то его точной верхней (нижней) гранью естественно назвать символ $+\infty \left(-\infty\right)$: $\sup E = +\infty$ (соответственно $\inf E = -\infty$).

Иногда, когда нет опасности путаницы, вместо $+\infty$ пишут ∞.

П р и м е р ы. Для множеств 1) – 6), приведенных выше, имеет место

$$\sup \mathbf{Z} = +\infty, \qquad \inf \mathbf{Z} = -\infty,$$
$$\sup \mathbf{N} = \infty, \qquad \inf \mathbf{N} = \min \mathbf{N} = 1,$$
$$\sup \mathbf{N}\_ = \max \mathbf{N}\_ = -1, \qquad \inf \mathbf{N}\_ = -\infty,$$
$$\sup\left(a, b\right) = b, \qquad \inf\left(a, b\right) = a,$$

где a и b могут быть конечными и бесконечными числами.

Можно дать общее определение точной верхней (нижней) грани множества, которое годится для любого множества (ограниченного и неограниченного).

Число M (соответственно m), конечное или бесконечное, называется точной верхней (нижней) гранью множества E (рис. 9 и 10), если выполняются условия:

1) $x \le M \ \ \left(m \le x\right) \quad \forall x \in E$;

2) для любого (конечного!) $M_1 \le M \ \ \left(m_1 \ge m\right)$ существует $x_1 \in E$ такое, что $M_1 < x_1 \le M \ \ \left(m \le x_1 < m_1\right)$.

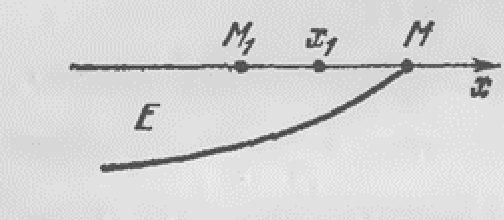


Рис. 9

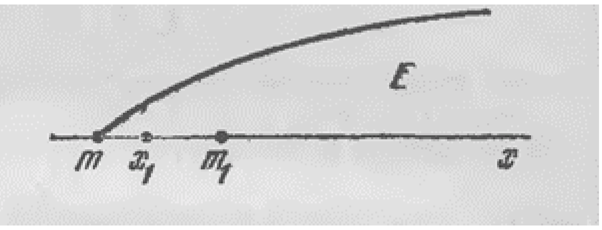


Рис. 10

В этой формулировке не приходится употреблять разность $M-\varepsilon$ (сумму $m+\varepsilon$), это не имеет смысла при $M=+\infty$ $(m=-\infty)$.

Справедлива теорема принципиального значения.

Т е о р е м а. Если не пустое множество E действительных чисел ограничено сверху (снизу) конечным числом K (соответственно k), то существует число М≤*К* (*м*≥к), являющееся точной верхней (нижней) гранью E.

2. Интервалы, их классификация.

Важнейший принцип аналитической геометрии: между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Свойство плотности: между двумя любыми числами на числовой прямой всегда существует бесконечное множество как рациональных, так и иррациональных чисел. Например, между 0,9 и 1 имеется число 0,99 (но 0,(9)=1).

[a,b] – сегмент, отрезок, замкнутый промежуток: [a,b]={x: a≤x≤b}.

(a,b) – интервал или открытый промежуток: (a,b)={x: a<x<b}.

Определение: **ε**-окрестностью точки **a** (ε>0) называется интервал вида (a-ε; a+ε) (рис. 1). Для нее используется обозначение U(a ;ε). Здесь **a** – центр, а ε – радиус окрестности.

Окрестности точки бывают как угодно малые, но самой малой окрестности не существует.

Отношения «Точка x принадлежит **ε**-окрестности точки **a**» можно записать любыми из следующих эквивалентных способов:

1) $x\in U(a;\varepsilon)$; 2) $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$; 3) $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$; 4) $\rho(x,a)<\varepsilon$;

5) $|x-a|<\varepsilon$; 6) $x=a\pm\varepsilon$.

Пусть дано числовое множество А.

Определение: Множество А называется ограниченным сверху, если существует такое число М, что для всех элементов x данного множества выполняется неравенство $x\le M$.

А ограничено сверху $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists M\forall x\ (x\in A)\Rightarrow(x\le M)$

М- называется верхней границей множества А.

Определение: А – ограничено снизу $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists m\forall x(x\in A)\Rightarrow(x\ge m)$

Если множество ограничено и сверху и снизу, то оно называется ограниченным.

Примеры

1. Рассмотрим N- множество натуральных чисел. Сверху оно не ограничено, а снизу ограничено, и его нижними границами являются, например, числа 1 или 0, или -2,5 и т.д.

2. А – множество правильных дробей.

А- ограничено, т.к. его нижней границей является, например, 0, а верхней, например, 1.

Замечание: не следует путать понятие конечного множества и ограниченного. Всякое конечное множество является ограниченным. Но не всякое ограниченное множество является конечным. Например, множество правильных дробей является ограниченным, хотя и бесконечным.

Множество считается неограниченным, если оно не ограничено хотя бы с одной стороны.

Определение: Точной верхней границей множества называется наименьшая из всех верхних границ. Обозначается $\sup A$ $(\sup re'mumA)$. Аналогично определяется точная нижняя граница: $\inf A$ $(\inf imumA)$.

Аксиома непрерывности множества R: Если множество ограниченно сверху, то оно обязательно имеет точную верхнюю границу.

Аналогичное утверждение верно и для нижней границы.

Данная аксиома характеризует свойство непрерывности (сплошности, полноты) множества действительных чисел.

3. Понятие функции. Способы задания функции, график, область определения.

Пусть даны два множества Х и У.

Определение: Функцией, отображающей *X* в *У*, называется соответствие, при котором каждому элементу *x* є *X* соответствует единственный элемент *y* є *У*. Обозначается это так: $f : X \to Y$. Множество *X* называется областью определения функции, множество *У* – областью значений функций. Значение функции в точке *x* обозначается *f(x)*.

Замечание: *f* и *f(x)* – означают не одно и то же, так как *f* –функция, т.е. некоторое соответствие, а *f(x)*– элемент из *У*, т.е. значение функции в данной точке *x*. Однако в дальнейшем, где это не может внести путаницу, мы будем функцию *f* также обозначать *f(x)*.

Определение: Множеством значений функции называется те значения *y* из *У*, которые отвечают хотя бы одному значению *xєX*. Обозначается множество значений $f(X) = \{y : (y = f(x)) \wedge (x \in X)\}$.

Например, если $f(x) = x^2$, то $f([-1;2]) = [0;4]$, $\sin R = [-1;1]$ и т.д. Всегда $f(X) \subset Y$. Если *f(x)* совпадает с *У*, то мы говорим, что функция *f* отображает *X* на *У*. Обычно для задания функции достаточно знать область определения функции и закон соответствия.

Способы задания функции бывают следующие:

1) аналитический способ; 2) графическое задание; 3) табличный способ;

4) перечисление множества пар вида $(x; f(x))$ и так далее.

Если функция задана множеством пар, то обязательно требование, чтобы среди пар не было разных с одинаковым первым элементом. Например, множество {(Оренбург, 2); (дом, стол); (Δ, стол)} является функцией, но если к этому множеству добавить пару (Δ, 0), то такое множество уже не будет функцией.

Функция определяет однозначное соответствие в одну сторону, но не требуется, чтобы обратное соответствие в одну сторону, но не требуется, чтобы обратное соответствие тоже было однозначным. Однако, если соответствие $f : X \to Y$, определяемое данной функцией, является взаимно однозначным, то функция **называется обратимой**, а соответствие $Y \to X$ называется **обратной функцией и обозначается** f^{-1}**.**

Приняты обозначения: область определения - D_f; множество значений - E_f. При этом всегда $f(D_f) = E_f \subset Y$, где *У* – область значений.

Замечание: Не следует путать понятие функции и формулы, ибо:

1. Формула является лишь одним из возможных способов задания функции.

2. Некоторые функции задаются несколькими формулами.

3. Для некоторых числовых функций вообще нет формул. Например, функция Дирихле определяется так:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рационально} \\ 0, \text{ если } x - \text{иррационально} \end{cases}$$

Например: $D(0) = D\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1; \quad D(\sqrt{2}) = 0.$

Область определения – вся числовая прямая. Множество значений $\{0;1\}$. График этой функции построить невозможно. При задании функций принято одновременно задавать ее область определения. Может оказаться так, что разные функции задаются одинаковыми формулами, но имеют разные области определения.

Если функция усмотрена из конкретной практической задачи, то ее область определения может быть заранее не дана. И тогда ее установить из данной задачи.

Замечание: Если функция задана формулой и практическое происхождение формулы неясно, а также область определения функции не указана, то условились под **естественной областью определения** этой функции понимать область определения соответствующего аналитического выражения. Например:

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$. Здесь $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2$ т.е. $D_y = [-2;2]$.

2) Функции $y = \lg x^2, \quad y = 2\lg x$ разные, так как у них разные области определения, но если у первой функции дополнительно положить $D_y = (0;+\infty)$, то они одинаковые.

4.Классификация функций, обратная функция.

Определение: Функция f называется неубывающей (невозрастающей) на множестве X, если для любых x_1 и x_2 $(x_1 \in X, x_2 \in X)$. Из того, что $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$.

$f(x)$ - неубывающая (невозрастающая) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, \forall x_2$ $(x_1 \in X) \wedge (x_2 \in X) \wedge (x_2 > x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$.

Невозрастающие и неубывающие функции называются монотонными.

Если в предыдущем определении между значениями функции будет стоять знак строгого неравенства, то функция будет называться **возрастающей и убывающей** (функция тогда называется строго монотонной).

Определение: Функция f называется ограниченной на множестве X, если множество ее значений f(x), принимаемых на данном множестве X, является ограниченным (рис. 1).

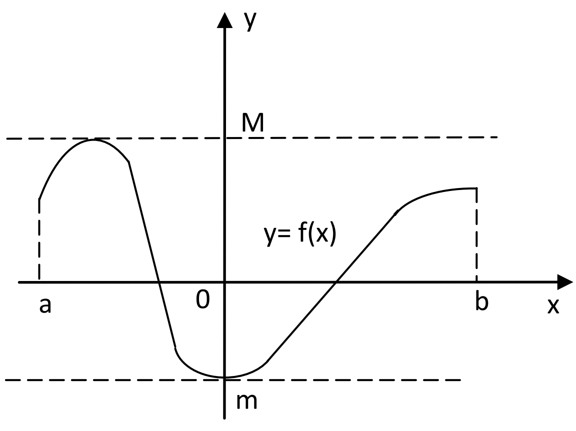


Рис. 2

Например, $\sin x$, $\cos x$ ограничены на множестве R, функция tgx в своей естественной области определения не ограничена, но она является ограниченной, например, на $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, так как $0 \leq tgx \leq 1$, если $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ (рис. 2).

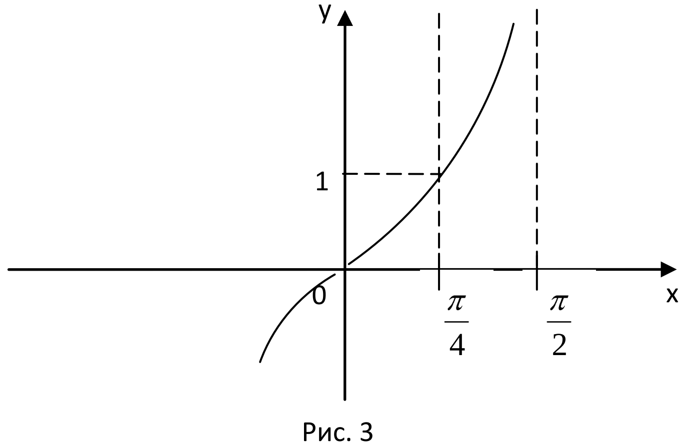


Рис. 3

Определение: Функция f называется четной (нечетной), если выполняется:

1) Область определения симметрична относительно точки x=0, т.е. $\forall x$:

$x \in D_f \Rightarrow \quad -x \in D_f$.

2) $\forall x \in D_f: \quad f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$

Примеры

1) $y=x^2$ - четная. 2) $y=x^3$ - нечетная. 3) $y=\dfrac{\sin x}{x}$ - четная. 4) $y=x+1$ - функция ни четная, ни нечетная, так как $y(-x)=-x+1$. 5) $f(x)=\dfrac{x^2(x-1)}{x-1}$ при $x\neq 1$ .f(x) – ни четная, ни нечетная, так как ее область определения не симметрична относительно x=0.

6) $f(x)\equiv 0$ - функция четная и нечетная одновременно. четной функции симметричен относительно оси ОУ (осевая симметрия). График нечетной функции симметричен относительно начала координат (центральная симметрия).

Определение: Функция f называется периодической с периодом T>0, если:

1) $\forall x: x\in D_f \Rightarrow x\pm T\in D_f$

2) $\forall x: x\in D_f \Rightarrow f(x+T)=f(x)$.

1. Например, $\sin x$ и $\cos x$ имеют период 2π (*или* $4\pi, 6\pi, \ldots$).

2. tgx и $ctgx$ имеют период π (*или* $2\pi, 3\pi, \ldots$)

3. $f(x)=\sin 2x, T=\pi$.

Действительно,

$f(x+\pi)=\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x=f(x)$

$D_f=[0;+\infty)$.

4. $Y(x)=\sin(\sqrt{x})^2$ (рис. 4).

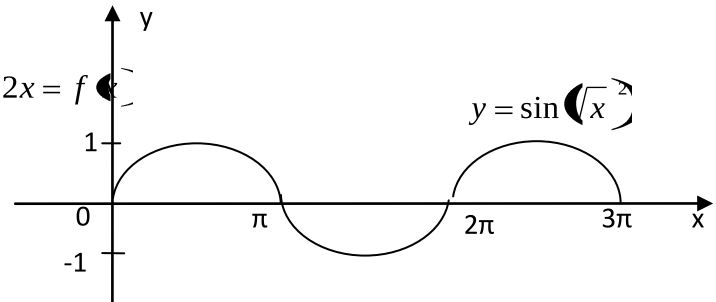


Рис. 4

Здесь нарушается первое требование определения, т.е. функция не является периодической.

5. Периодические функции бывают не только среди тригонометрических. Например, функция Дирихле является периодической. Периодом ее является любое положительное рациональное число. Наименьшего периода нет.

5. Числовые последовательности, их сходимость.

Определение. Числовой последовательностью называется функция, заданная на множестве всех натуральных числе:

$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), f(n+1), \ldots$

или

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots = \{x_n\}$

x_n - общий член последовательности.

Способы задания последовательности могут быть такие же, как и у других функций:

1. Аналитический. Например, $x_n=\dfrac{n}{n+1}$, *т.е.* $\{x_n\}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$

2. «Кусочный». Например,

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, \text{ если } n - \text{нечетное}\\ 0 \text{ если } n-\text{четное}, \quad \text{т.е.} \quad \{x_n\}=1, 0, \dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{5}, 0, \ldots\end{cases}$$

В отличие от других функций для последовательности есть своеобразный способ задания – рекуррентный. Например, $x_1=\sqrt{2};\ x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\ \ \forall n\in N$ т.е.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если $\forall n\in N: x_{n+1}\geq x_n \quad (x_{n+1}\leq x_n)$.

Замечание: Не следует путать понятие последовательности и множества членов последовательности. Сама последовательность (x_n) есть функция, а члены последовательности x_n – это значения функции.

Обозначается: (x_n) - последовательность,

$\{x_n\}$ - множество членов последовательности.

Пусть $x_n = (-1)^n$. Выпишем подробно эту последовательность:

$(x_n) = -1;1;-1;1;-1;\ldots;\quad$ *но* $\{x_n\} = \{-1;1\}$.

Рассмотрим примеры.

1) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ (рис. 5)

$(x_n) = -1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{6};\ldots$

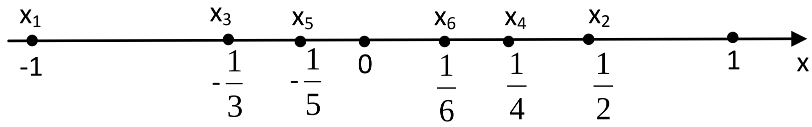


Рис. 5

Какую бы малую окрестность точки x=0 [illegible] сти окажется лишь конечное число членов. Другой такой точки нет. Точка x=0 является пределом этой последовательности. Запишем это так: $\lim (-1)^n \dfrac{1}{n} = 0$.

2) $x_n = n,\quad$ *т.е.* $(x_n) = 1;2;3;4\ldots$ Эта последовательность предела не имеет.

3) $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ (рис. 6).

$(x_n) = -\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3};-\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};-\dfrac{5}{6};\dfrac{6}{7};\ldots$. Члены последовательности как угодно близко подходят к точкам 1 и -1.

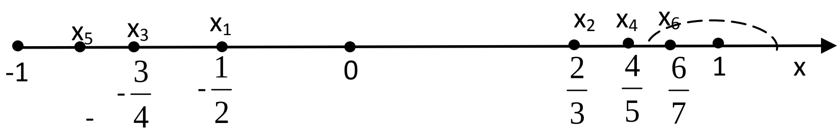


Рис. 6

Однако вне н[illegible]окр[illegible]ки x=[illegible]есконечное число членов данной последовательности. Поэтому 1 не является пределом этой последовательности, аналогично -1 тоже не является пределом.

Определение: Число **a** называется пределом последовательности (x_n), если какую бы малую окрестность точки a мы ни взяли, вне этой окрестности будет находиться лишь конечное число членов последовательности. Запишем это так: $\lim x_n = a$ или $x_n \to a$.

Если последовательность имеет предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае – **расходящейся.**

Определение: Точка **a** называется пределом последовательности (x_n), если какую бы малую окрестность этой точки мы ни взяли, все члены последовательности, начиная с некоторого номера, попадут в эту окрестность, т.е.

$$\lim x_n = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall U(a,\varepsilon)\ \exists N\ \forall n\ (n > N) \Rightarrow x_n \in U(a,\varepsilon)$$

или

$$\lim x_n = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ (n > N) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Свойства сходящихся последовательностей

1. Единственность предела: всякая сходящаяся последовательность может иметь только один предел.

2. Если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность также сходится к тому же пределу.

3. Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

4. Переход к пределу в неравенстве: пусть даны (x_n) *и* (y_n). Причем $\forall n: x_n \le y_n$, и пусть $x_n \to a,\ y_n \to b$. Тогда справедливо $a \le b$.

5. Свойство промежуточной последовательности: пусть $x_n \le y_n \le z_n$. Если крайние последовательности x_n, z_n имеют одинаковый предел, то и промежуточная последовательность y_n также сходится и имеет тот же предел.

1.2 Лекция 2-4 (6 ч.)

Тема: Теория пределов функций одной действительной переменной. Непрерывность функций одной действительной переменной.

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Предел функции в точке. Свойства функций, имеющих предел в точке.

2. Основная лемма о пределах, арифметические операции над пределами функций в точке.

3. Предел функции на бесконечности, бесконечно малые и бесконечно большие функции в точке, их свойства.

4. Сравнение бесконечно малых функций в точке. Замечательные пределы. Таблица бесконечно малых эквивалентных.

5.Односторонние пределы, признак существования предела функции в точке.

6. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва и их классификация.

1.2.2. Краткое содержание вопросов:

1. Предел функции в точке. Свойства функций, имеющих предел в точке. Основная лемма о пределах, арифметические операции над пределами функций в точке.

Определение Гейне: (Определение на языке последовательностей) А называется пределом функции в точке а, если какую бы последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящуюся к а мы ни взяли, соответствующая последовательность $f\{x_n\}$ значений функции будет стремиться при этом к одному и тому же А. Записывается это определение так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \{x_n\}, x_n \in D_f \ (x_n \to a) \Rightarrow (f(x_n) \to A)$$

При этом а и А могут означать либо числа, либо символы ∞, +∞, -∞.

Теорема об арифметических действиях над пределами: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x\to a} y(x) = B$. Тогда существует в точке а пределы суммы, произведения и частного этих функций (последнее, если $B \ne 0$), и при этом

$$\lim_{x\to a}(f(x)+y(x)) = A+B;\ \lim_{x\to a} f(x)\cdot y(x) = A\cdot B;\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{y(x)} = \frac{A}{B}.$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot y(x)) = A\cdot B$$

Понятие сложной функции. Теорема о пределе сложной функции

Пусть даны множества X, Y, Z и функции $f : X \xrightarrow{на} Y$, (т.е. $Y = f(X)$) и $Y : Y \xrightarrow{в} Z$. Тогда композиция этих функций дает новую функцию: $Y \cdot f : X \to Z,\ Z \cdot Y(f(x))$ - сложная функция.

Например,

1) $Z = \ln y,$ где $y = \sin x$, т.е. $Z = \ln(\sin x)$

2) $Z = \sin y,$ где $y = x^2$, т.е. $Z = \sin x^2$

3) $Z = y^2,$ где $y = \sin x$, т.е. $Z = \sin^2 x$

В последнем случает, например, $f(x) = \sin x$, а $Y(y) = y^2$, т.е. сложная функция имеет вид: $(Y \cdot f)(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Теорема о пределе сложной функции: Если существует

1) $\lim\limits_{x \to a} U(x) = b$ 2) $\lim\limits_{n \to b} y(U) = A$

Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} y(U(x))$, и $\lim\limits_{x \to a} y(U(x)) = A$.

Примеры 1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x - 1) = \lim\limits_{x \to 1} x - \lim\limits_{x \to 1} 1 = 0$

В этом решении возникает вопрос о возможности сокращения дроби при переходе к пределу. Эта возможность объясняется так. Функция $\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$ не определена в точке 1. Поэтому ее предел зависит только от ее поведения в проколотой окрестности 1, а в проколотой окрестности эта функция полностью совпадает с функцией x-1. Поэтому пределы этих функций равны.

2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \lim\limits_{x \to 0} 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

В предпоследнем равенстве использована теорема о пределе сложной функции и свойство, что $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 5$

В последнем равенстве использована теорема о пределе сложной функции. Здесь $U = 5x,\ Z = \dfrac{\sin u}{u}$.

Второе определение предела функции (По Коши)

Пусть $a \in \overline{D}_f$, $\lim\limits_{x \to a} x\, f(x) = A$. Рассмотрим соответствующий график (рис. 1):

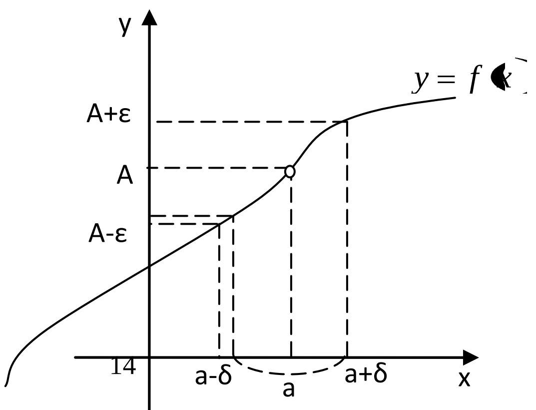


Рис. 1

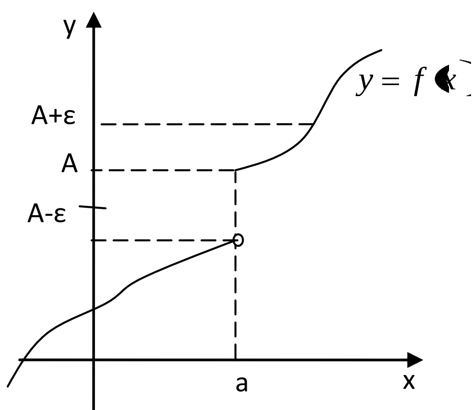


Рис. 2

По графику видно, что какую бы ε-окрестность точки **А** мы ни взяли, найдется такая δ-окрестность точки а, что все значения аргумента из нее отобразятся в выбранную ε-окрестность. Второй же рисунок (рис. 2) показывает, что, если точка **А** не является пределом функции в точке а, то существует такая ε-окрестность точки **А**, для которой соответствующая δ-окрестность не найдется. Таким образом, можно высказать предположение, что понятие предела функции на языке окрестностей характеризуется следующим определением, принадлежащим французскому математику О. Коши (1821 г.). (Здесь буквами а и А будем обозначать как числа, так и символы: ∞, +∞ -∞. Всего имеем 16 различных комбинаций).

Определение Коши: А- называется пределом $f(x)$ в точке **а** (или при х, стремящемся к а), если какую бы окрестность точки **А** мы ни взяли, найдется такая окрестность точка **а**, что все значения аргумента из нее будут с помощью данной функции отображаться в выбранную окрестность точки **А**, т.е.

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall U(A)\ \exists U(a)\ \ \textit{что}\ \ f\left(D_f\cap U(a)\right)\subset U(A)$$

Другая запись определения:

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall U(A)\ \exists U(a)\ \ \forall x\in D_f\ \left(x\in U(a)\Rightarrow f(x)\in U(A)\right)$$

3. Предел функции на бесконечности, бесконечно малые и бесконечно большие функции в точке, их свойства. Сравнение бесконечно малых функций в точке. Замечательные пределы. Таблица бесконечно малых эквивалентных.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(\mathrm{x})=0$, то функция *f(x)* называется **бесконечно малой** в окрестности точки x_0.

Например: функция $y=x-4$ при $x\to 4$ является бесконечно малой.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(\mathrm{x})=-\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(\mathrm{x})=+\infty$, то функция называется **бесконечно большой** в окрестности точки x_0.

Например: $y=x^3$ при $x\to\infty$ является бесконечно большой

Замечание: данные выше определения справедливы и при $x\to\pm\infty$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция бесконечно малая в окрестности той же точки;

2) произведение любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки;

3) произведение бесконечно малой функции в окрестности некоторой точки на функцию ограниченную, есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки.

Бесконечно малые функции в окрестности некоторой точки x_0 $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости,** если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0.$$

Если $c=0$ то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией более высокого порядка малости** по сравнению с $\beta(x)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Примеры. 1) Бесконечно малые $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *и* $\beta(x)=\dfrac{3}{5x^2}$ - являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to \infty$, т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1 \cdot 5x^2}{x^2 \cdot 3} = \frac{5}{3} c \neq 0$.

2) При $x \to \infty$ $a(x) = \frac{1}{x^5}$ является бесконечной малой более высокого порядка чем $\beta(x) = \frac{1}{x}$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 \cdot x}{x^5 \cdot 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^4} = 0$.

3) При $x \to \infty$ $\alpha(x) = \frac{1}{x+5}$ *и* $\beta(x) = \frac{1}{x+18}$ являются эквивалентными бесконечно малыми, т.к. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1 \cdot (x+18)}{(x+5) \cdot 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+18}{x+5} = 1$.

Предел бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией т.е.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \textit{если } f(x) \sim f_1(x),\ \varphi(x) \sim \varphi_1(x).$$

5. Односторонние пределы, признак существования предела функции в точке. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва и их классификация.

Свойства функций, непрерывных в точке.

Понятие непрерывности функции

Рассмотрим $f(x) = x^2$ и найдем значение функции в точке π: $f(\pi) \approx f(3{,}1) = 3{,}1^2 = 9{,}61$. Точнее $f(\pi) \approx f(3{,}14) = 3{,}14^2 = 9{,}86$.

2) Аналогично для $Y(x) = \frac{10}{x - 3{,}12}$:

$$y(\pi) \approx Y(3{,}1) = \frac{10}{3{,}1 - 3{,}12} = -500$$

$$y(\pi) \approx Y(3{,}14) = \frac{10}{3{,}14 - 3{,}12} = +500 \quad (!)$$

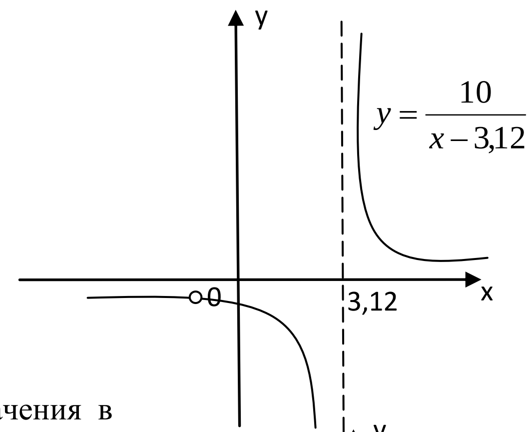


Рис. 3

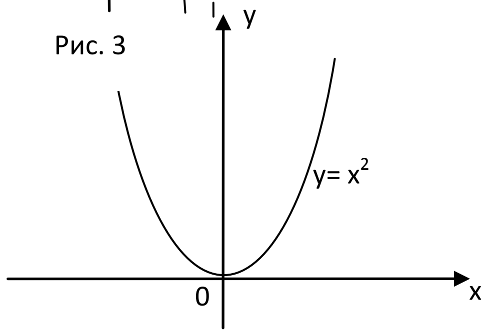


Рис. 4

Мы видим, что для функции f ее значения в точках x=3,1 и x=3,14 мало отличаются между собой, а для другой функции У сильно отличаются. Эффект объясняется тем, что в первом случае имеем дело с непрерывной функцией, а во втором – с разрывной (см. рис. 3, 4).

Следовательно, вычисления с разрывными функциями надо проводить осторожно. А для этого их надо уметь отличать до построения графика.

Перед нами стоит задача сформулировать определение непрерывности функции в точке x=a. Хотя интуитивно понятие непрерывной функции ассоцируется с «непрерывностью» ее графика, но мы не можем это условие принять за определение непрерывности функции. Определение должно носить аналитический характер. Действительно, во-первых, анализ не может опираться на геометрию. Наоборот, в самой геометрии непрерывность линии определяется с помощью понятия непрерывной функции. Во-вторых, в самом анализе аналитическое исследование должно предшествовать построению графика. В-третьих, непрерывность функций обычно устанавливается не по самому определению, а на основании рассматриваемых нами позже теорем, которые доказываются с использованием именно аналитического определения непрерывности. Геометрически их доказать невозможно. Обозначим $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где $a \in \overline{D}_f$.

Возможны следующие 4 случая:

1) А - существует, $f(a)$ - не существует (рис. 5).

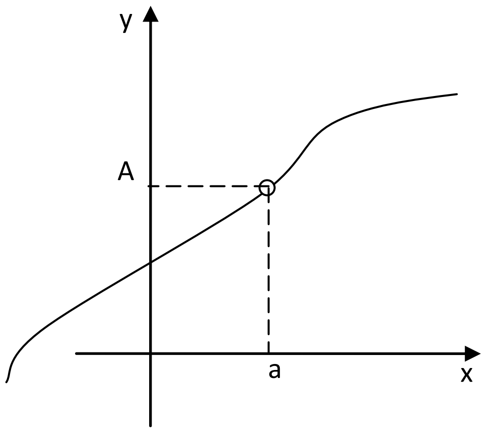


Рис. 5а

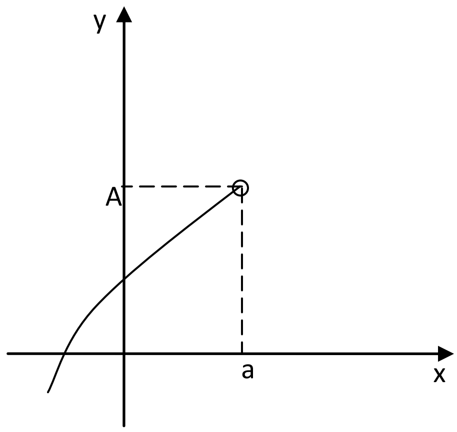


Рис. 5б

2) А - не существует

3) А – не существует

$f(a)$ - существует (рис. 6) $f(a)$ -не существует (рис. 7)

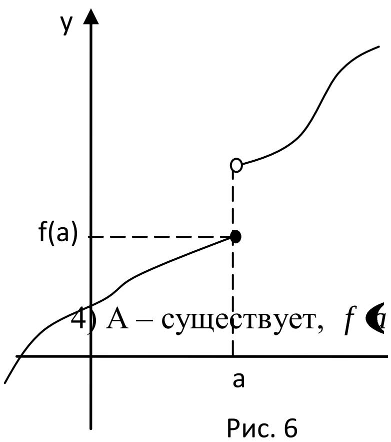


Рис. 6

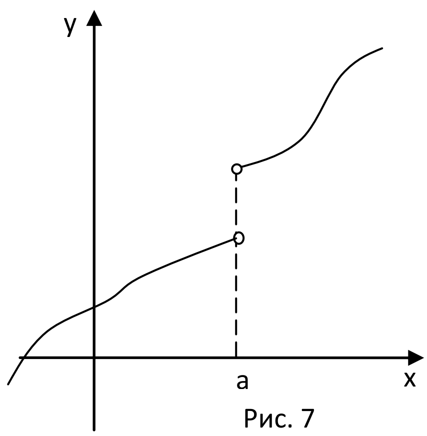


Рис. 7

4) А – существует, $f(a)$ - существует (рис. 8).

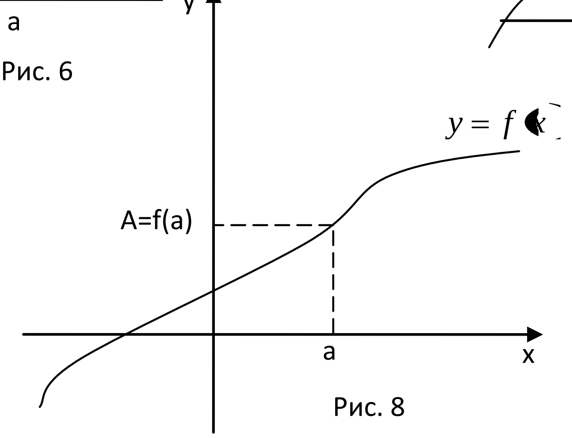


Рис. 8

В 4-ом случае верна теорема:

Теорема: Если в данной точке функция имеет как значение, так и предел, то они равны между собой, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Проведенная классификация показывает, что непрерывность графика получается только в последнем случае. Его и примем за определение:

Определение: Функция f называется непрерывной в точке a, если в этой точке существуют как ее значения, так и предел. При этом мы доказали, что предел и значение равны между собой, если они оба существуют.

Это определение можно перефразировать по Гейне и по Коши:

Определение Гейне: Функция f называется непрерывной в точке a, если $\forall (x_n)(x_n \in D_f) \wedge (x_n \to a) \Rightarrow (f(x_n) \to f(a))$.

Определение Коши: Функция f называется непрерывной в точке a, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (x \in D_f) \wedge (|x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)$.

Непрерывность сложной функции. Элементарные функции и их непрерывность

Теорема 1. Пусть f, Y - непрерывны в точке **а**. Тогда в этой точке непрерывны их сумма $f+Y$ и произведение $f \cdot Y$ и, если $Y(a) \neq 0$, то $\dfrac{f}{Y}$ тоже непрерывна в точке **а**.

Примеры.

1) $y = x^n$ (n – натуральное число) непрерывна на R как произведение непрерывных функций y=x.

2) Целая рациональная функция (или алгебраический многочлен)

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \quad (a_n \neq 0)$, непрерывна на всей числовой прямой на основании теоремы о непрерывности суммы и произведения.

3) Дробная рациональная функция, т.е. функция вида:

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m}$$

непрерывна на всей числовой прямой, за исключением тех точек, которые являются корнями знаменателя.

4) Вычислим

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x^2 \cdot (x-2)}$$

Так как функция в точке x=1 непрерывна, то ее предел равен значению, т.е. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x^2 \cdot (x-2)} = \dfrac{1+1}{1 \cdot (1-2)} = -2$.

5) $f(x) = tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Эта функция является непрерывной на всей числовой прямой за исключением точек $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, в которых косинус равен нулю, как частное непрерывных функций.

6) Аналогично функция $y = ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна на R, за исключением тех точек, где $\sin x = 0$, т.е. точек вида $x_k = k\pi$.

Теорема 2. Пусть функция $U=U(x)$ непрерывна в точке x_0, а $y=y(u)$ непрерывна в точке $U_0=U(x_0)$. Тогда $y=y(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

Определение: Основными элементарными функциями называются следующие: $y=const,\ x^{\alpha}\ (\alpha\in R),\ a^x\ (a>0),\ \log_a x\ (a>0, a\neq 1),\ \sin x,\ \cos x,\ tgx,\ ctgx,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx$.

Определение: Функции, которые могут быть составлены из основных элементарных путем конечного числа арифметических операций и конечного числа суперпозиций, называются элементарными.

Теорема 3. Все основные элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Теорема 4. Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Поскольку все основные элементарные функции по теореме 3 непрерывны в своей области определения, а другие элементарные функции образованы из основных путем арифметических операций и суперпозиций, а эти последние сохраняют непрерывность в силу теорем 1 и 2, то отсюда получаем заключение нашей теоремы.

Пределы элементарных функций

Вспомните, какие функции относятся к основным элементарным функциям, каковы свойства и графики этих функций.

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, называются **элементарными**.

При вычислении пределов функций обычно пользуются следующими основными **теоремами о пределах**:

если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)$ существуют и конечны, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, где $c=const$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)\neq 0$

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к **неопределенностям**. Например, зная лишь, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=\infty$ нельзя сказать заранее, чему равен $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x\to\infty$);

3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;

4) применение первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Кроме того, при вычислении пределов полезно запомнить следующее:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, т.е. $\left(\frac{c}{\infty}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, т.е. $\left(\frac{c}{0}\right)=\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$, т.е. $\left(\frac{0}{c}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$, т.е. $\left(\frac{\infty}{c}\right)=\infty$

Может также понадобится таблица бесконечно малых в окрестности x_0 функций, эквивалентных данным.

$$\left.\begin{array}{l} tgmx \sim mx \\ sainmx \sim mx \\ \sqrt[3]{x+1-1} \sim \frac{1}{3}x \\ arctg\,mx \sim mx \\ \sqrt{x+1}-1 \sim \frac{x}{2} \\ 1-\cos^2 x \sim \frac{3}{2}\sin^2 x \\ arcsinmx \sim mx \\ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} при\;\; x\to 0$$

Рассмотрим конкретные примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x+7)=3\lim\limits_{x\to 1}x^2+2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}7=3\cdot 1^2+2\cdot 1+7=12$

Воспользовались основными теоремами о пределах

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{ctg(x-3)}{\ln(5-x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}ctg(x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}\ln(5-x)}=\frac{\infty}{\ln 2}=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-5x^2}{4x^2+x-12}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{7}{x^2}-5\right)}{\left(4+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}=\frac{0-5}{4+0-0}=-\frac{5}{4}$

Воспользовались основными теоремами о пределах.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left[\sin 5x \underset{при\;\; x\to 0}{\sim} 5x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=\frac{5}{1}=5$

Основные свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 1. Непрерывный образ промежутка есть снова промежуток. Иначе говоря, если функция непрерывна на промежутке, то множество ее значений является промежутком.

Замечание: Непрерывным образом интервала не всегда является интервал, может быть, и отрезок.

Теорема 2. Непрерывный образ отрезка всегда есть отрезок.

Из теоремы 2 вытекают следующие теоремы.

1-ая. Теорема Больцано-Коши. Если функция f непрерывна на $[a;b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то в интервале $(a;b)$ $\exists$ хотя бы одна точка c, что $f(c)=0$.

2-ая теорема Больцано-Коши. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах его принимает различные значения $f(a)=A\neq f(b)=B$. (например, $A<B$). Тогда для любого y_0 такого, что $A<y_0<B$, существует такое $x_0\in(a,b)$, что $f(x_0)=y_0$.

Теорема Вейерштрасса: Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда на нем она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

Определение: Функция называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

1) $f(x)=x$. Эта функция непрерывна в любой точке на R (см. 17, пример 4).

2) $f(x)=\sin x$ непрерывна на R. Для доказательства достаточно показать, что для $\forall a\in R$ будет $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$. Воспользуемся определением Коши. Возьмем $\forall\varepsilon>0$. Тогда

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\le 2\frac{|x-a|}{2}=|x-a|$$

Достаточно взять $\delta\le\varepsilon$. Тогда

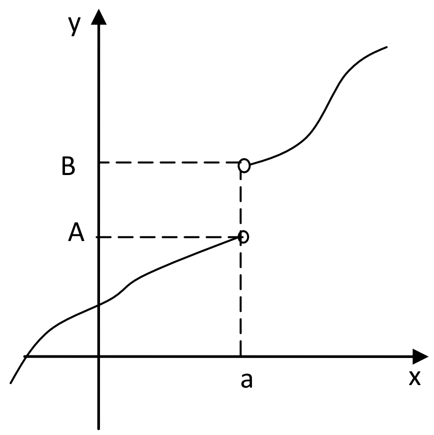
$|x-a|<\delta\quad(\varepsilon)\Rightarrow|\sin x-\sin a|<\varepsilon$

Аналогично можно доказать непрерывность косинуса.

Введем термины и обозначения.

Левый предел функции: $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)$.

Правый предел: $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)$.



ис. 9

Теорема: Если в (.) x_0 существуют односторонние пределы, они равны между собой и равны A, то в точке x_0 существует предел функции, и он равен A.

Классификация точек разрыва функции

Определение: Пусть дана функция f с областью определения D_f. Тогда точка **a** называется **точкой разрыва** данной функции, если

1. $a\in\overline{D}_f$

2. Функция не является непрерывной в этой точке.

Проведем классификацию точек разрыва.

Определение: Если функция в точке разрыва имеет конечные односторонние пределы, то в этом

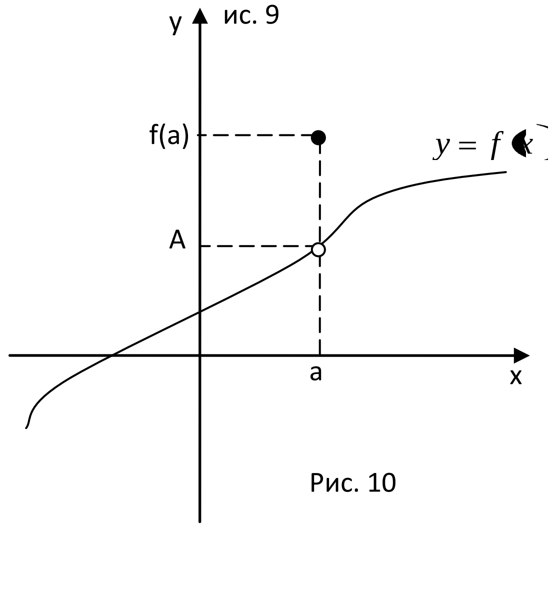


Рис. 10

случае разрыв функции называется разрывом **1-ого рода** или **скачком** (рис.9, 10).

В частности, скачком называется **устранимым** разрывом, если односторонние пределы равны между собой (рис.10). Разрыв этот называется устранимым потому, что функция в данной точке является почти непрерывной. Действительно, достаточно изменить или приписать функции в данной точке значение, равное односторонним пределам, как новая функция станет непрерывной.

Определение. Точка **a** называется точкой разрыва **2-ого рода**, если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или вообще не существует.

1.3 Лекция 5 (2 ч.)

Тема: Производная функции в точке. Свойства производных

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Производная функции в точке. Ее геометрический и физический смысл.

2. Необходимое условие дифференцируемости функции. Таблица основных производных. Правила дифференцирования.

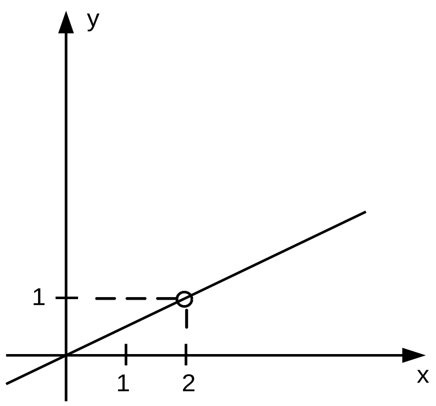
3. Производная сложной, обратной функции.

1.3.2. Краткое содержание вопросов:

1. Производная функции в точке. Ее геометрический и физический смысл.

В дальнейшем нам часто придется рассматривать изменение (обычно небольшое) переменной величины вблизи некоторого фиксированного ее значения, принимаемого за исходное.

Разность между новым, полученным в результате изменения, значением переменной величины и исходным, начальным («старым») ее значением называют **приращением** переменной и обозначают греческой буквой Δ (дельта).



Если задана некоторая функция $y=f(x)$, то, очевидно, всякому приращению аргумента Δx соответствует определенное приращение функции Δy. Тогда «старые» значения переменных будут x; $y=f(x)$, а «новые» (наращенные) значения: $x+\Delta x$; $f(x+\Delta x)$.

Пусть, например, задана функция $y=f(x)=6x - x^2$. Исходные значения переменных: $x=2$, $y=f(2)=6\cdot2-2^2=8$. Придадим x приращение $\Delta x=0{,}1$. Тогда новое значение аргумента: $x+\Delta x=2{,}1$, а новое значение функции:

$f(x+\Delta x)=f(2{,}1)=6\cdot2{,}1-2{,}1^2=8{,}19$, откуда $\Delta y= f(x+\Delta x) - f(x) =8{,}19-8=0{,}19$.

Возьмем для той же функции исходные значения $x=3$ и $\Delta x=1$, тогда $x+\Delta x= 4$, $y=f(3)=6\cdot3-3^2=9$, $f(4)=6\cdot4 -4^2 =8$, откуда $\Delta y=8-9=-1$.Заметим, что отрицательное приращение функции при положительном приращении аргумента Δx означает, что функция убывает при данном значении x .

Выше мы вычислили численные значения приращений функции при заданных численных значениях аргумента. В теоретических вопросах

часто нужно находить общее выражение для приращения функции Δy.

Для этого следует:

1) зафиксировать $x \in D(y)$;

2) придать аргументу приращение $\Delta x \neq 0$ такое, чтобы $(x+\Delta x) \in D(y)$;

3) записать $y(x)=f(x)$ и $y(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)$;

4) найти $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Для рассмотренной выше функции получим:

$$\Delta y = 6(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2 - (6x - x^2) = 6x + 6\Delta x - x^2 - 2x\Delta x - x^2 - 6x + x^2 = 6\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2$$

$\Delta y = (6-2x)\Delta x - \Delta x^2$.

Из этого общего выражения для Δy мы можем, в частности, получить оба найденные нами выше численные его значения. В самом деле, положив в формуле $x=2$ и $\Delta x=0{,}1$, получим $\Delta y=0{,}19$, а положив $x=3$ и $\Delta x=1$, получим $\Delta y=-1$.

Геометрическое изображение приращения функции показано на рис.2

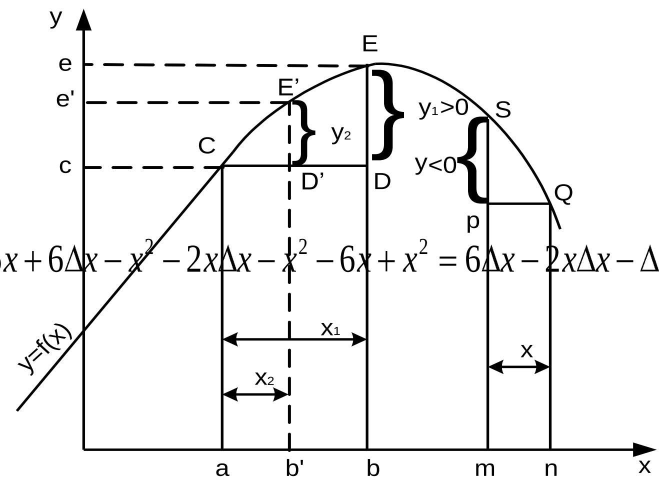


Рис.2

Задачи, приводящие к понятию производной

1. Задача о касательной

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат график непрерывной функции $y=f(x)$ и любую точку $M_0(x_0;f(x_0))$, принадлежащую графику.

Придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение $\Delta x \neq 0$. На графике получим точку $M(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$. Через точки M_0 и M проведем секущую, в точке M_0 проведем касательную к графику функции.

Из школьного курса нам известно определение касате[illegible]ужности, как прямой линии имеющей с окружностью единственную общую точку. Но в общем случае это определение неверно.

Дадим точное определение касательной к кривой. Устремим Δx к нулю. Тогда точка M, двигаясь по кривой, будет приближаться к точке M_0, остающейся неподвижной. Положение секущей будет изменяться: секущая будет стремиться занять положение касательной. Если бы точка M совместилась с точкой M_0, то секущая «превратилась» бы в касательную.

Угловой коэффициент секущей ($k_{сек}$) будет стремиться к угловому коэффициенту касательной ($k_{кас}$), т.е. $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0NM:

$tg\alpha = \dfrac{NM}{M_0N} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Известно, что угловой коэффициент секущей равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси OX.

Тогда $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует и конечен.

Таким образом, можно сформулировать определение: касательной к кривой, проведенной в точке x_0, называется прямая линия, имеющая с кривой единственную общую точку, угловой коэффициент которой равен конечному пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю, т.е.

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Задача о мгновенной скорости

Пусть материальная точка движется по закону $S=S(t)$, где S – пройденный путь, t – время. Найдем скорость движения в момент времени t_0 (мгновенная скорость).

Зафиксируем момент времени t_0, придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t\neq 0$. Функция $S=S(t)$ получит приращение $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. За промежуток времени Δt средняя скорость точки будет $V_{ср}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Устремим Δt к нулю. Чем меньше Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в момент времени t_0. Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 (мгновенная скорость) понимается предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$, т.е. $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{ср}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

В первой и во второй задачах, а также во многих других, мы приходим к необходимости вычислять пределы определенного вида, а именно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Регулярное использование этого предела повлекло за собой необходимость введения нового понятия – понятие производной.

Понятие производной. Геометрический и механический смысл производной

Производной функции в точке x_0 называется число, равное пределу отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при условии, что $\Delta x\to 0$, т.е. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$. Процесс нахождения производной функции называется **дифференцированием** этой функции.

Из задачи о касательной вытекает геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой y=f(x) в точке x_0 ,$k_{кас}=f'(x)$.

Из задачи о мгновенной скорости следует механический смысл производной: производная пути по времени - $S'(t_0)$ - есть скорость точки в момент времени t_0.

Функция, имеющая производную в точке x_0 называется дифференцируемой в этой точке. Функция называется дифференцируемой на интервале $(a;\ b)$, если она дифференцируема в каждой точке интервала.

Пример 1. Найдем производную для функции $y=x^2$ по определению.

Зафиксируем $x\in D(y)$. Придадим аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$,

$(x+\Delta x)\in D(y)$. Составим приращение функции

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

Найдем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x=y'$.

2. Необходимое условие дифференцируемости функции. Таблица основных производных. Правила дифференцирования.

Обычно таким способом производную функции не находят, т.к. формулы дифференцирования выведены и сведены в таблицу производных.

Таблица производных элементарных функций

1) $(x^k)'=k\cdot x^{k-1}$ 2) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 4) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5) $(e^x)' = e^x$ 6) $(\sin x)' = \cos x$

7) $(\cos x)' = -\sin x$ 8) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ 10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 12) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ 14) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Кроме таблицы производных основных элементарных функций при нахождении производных пользуются следующими правилами:

(c=const, u=u(x), v=v(x)) 1) c′=0 2) (u±v)′=u′±v′ 3) (cu)′=c·u′

4) (uv)′=u′v+uv′ 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}, v \neq 0$

Установим связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции следующей **теоремой**: если функция *y=f(x)* дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна. Обратная теорема неверна.

Например, функция *y*=|*x*|, непрерывна в точке *x*=0, но не дифференцируема в этой точке. Почему мы должны заключить, что производная в точке *x*=0 не существует?

Производной второго порядка или просто второй производной функции *y=f(x)* называется производная от ее производной *y′=f′(x)*, т.е. *y″=(y′)′* или *f′(x)=(f′(x))′*.

Аналогично, производной третьего порядка или третьей производной данной функции называется производная от ее второй производной.

Вообще, производной *n*-го порядка или *n*-ой производной от функции *y=f(x)* называется производная от ее (*n-1*)-ой производной.

Для производной *n*-го порядка принято обозначение: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$.

Пример. Дана функция *y=tgx*. Найти *y″*.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}\ ; \qquad y'' = (y')' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\frac{2(-\sin x)}{\cos^3 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

3. Производная сложной, обратной функции

Пусть переменная *y* есть функция от переменной *u(y=f(u))*, а переменная *u* в свою очередь есть функция от независимой переменной *x: u=z(x)*. Тогда *y* называется функцией от функции или сложной функцией *y=f(z(x))*.

Производная сложной функции *y=f(z(x))* находится по правилу:

$$y' = f_z' \cdot z_x'.$$

Например: 1) $y = 3x^4 \quad y' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$

2) $y = 3\sqrt[5]{x^3} + x - 1 \Rightarrow y = 5x^{\frac{3}{5}} + x - 1 \quad y' = 5 \cdot \dfrac{3}{5} x^{\frac{2}{5}} + 1 = 3x^{\frac{2}{5}} + 1 = \dfrac{3}{\sqrt[5]{x^2}} + 1$

3) $y=(x^2-5x+8)^6$ $z=x^2-5x+8 \Rightarrow y=z^6$

$y'=6z^5z'=6(x^2-5x+8)^5(x^2-5x+8)'=6(x^2-5x+8)^5(2x-5)$

Пусть задана функция $y=f(x)$, что означает, что каждому числу x из некоторого множества поставлено в соответствие число y. Получаемые таким образом значения y также образуют некоторое множество. Можно поставить задачу в обратную сторону — по заданным значениям y найти соответствующие им значения x. И если каждому значению y ставится в соответствие только одно значение x, то говорят, что определена обратная функция, обозначаемая как $x=f^{-1}(y)$. Подчеркнем, что -1, находящаяся в степени, — это всего лишь обозначение для обратной функции, которое вовсе не сводится к дроби $\frac{1}{f(y)}$. Разумеется, можно использовать и любые другие символы для обозначения обратной функции, например $x=\varphi(y)$. Очевидно, что функция, обратная к обратной, дает исходную функцию, поэтому $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ называют взаимно обратными функциями.Если функция $y=f(x)$ только возрастает или только убывает на некотором множестве значений x, то на соответствующем множестве значений y каждому значению y будет соответствовать только одно значение x, то есть будет определена обратная функция $x=f^{-1}(y)$.*Пример 1.*Задана функция $y=10x$. Область определения и область значений функции — вся числовая прямая. Обратная к ней функция будет $x=\frac{y}{10}$.*Пример 2.*Задана функция $y=x^2$. Область определения — вся числовая прямая, а область значений — только неотрицательные значения y. Очевидно, что одному и тому же положительному значению y будут соответствовать два различных (отличающихся знаком) значения x. Таким образом, мы можем определить две обратных функции, каждая из которых будет соответствовать той или иной ветви параболы $y=x^2$, то есть обратными будут функции $x=\pm\sqrt{y}$.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)\neq 0$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ также имеет в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$ производную, причем $\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ Пример: Задана функция $y=x^2$. Используя теорему о производной обратной функции, вычислить $x'(y)=\left(\sqrt{y}\right)'$. Известно, что $y'(x)=\left(x^2\right)'=2x$. Используя только что доказанную теорему и подставляя обратную функцию $x(y)=\sqrt{y}$, получим $x'(y)=\left(\sqrt{y}\right)'=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

1.4 Лекция 6 (2 ч.)

Тема: Дифференциал, его свойства и приложения. Французские теоремы.

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Дифференциал функции в точке. Его геометрический смысл.

2. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Дифференциал суммы, произведения, частного.

3. Производные и дифференциалы высших порядков. Приближенные вычисления с помощью дифференциала функции в точке.

4.Теоремы Ролля, Ферма, Лагранжа, Коши, признак постоянства функции на промежутке.

1.4.2. Краткое содержание вопросов:

1. Дифференциал функции в точке. Его геометрический смысл.

Производная функции $y=f(x)$ есть, как мы уже знаем, предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

Согласно определению предела, разность между переменной величиной $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и ее пределом y' стремится к нулю, т. е. является величиной бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Обозначим ее через α: $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha \to 0$ (2)

Отсюда ь $\Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x$ (3)

Мы выразили приращение функции Δy в виде суммы двух слагаемых, имеющих различную природу.

Рассмотрим равенство (3). Во-первых, заметим, что Δy и α, входящие в (3), стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$, иначе говоря, являются бесконечно малыми вместе с Δx. Величина же производной y' не зависит от Δx (она зависит от x) и при данном значении x рассматривается как конечная постоянная величина.

Во-вторых, мы видим, что хотя оба слагаемых правой части (3) $y'\Delta x$ и $\alpha\Delta x$ являются бесконечно малыми, порядок их различен. В самом деле, первое слагаемое состоит из конечного множителя y' и бесконечно малого Δx, второе же слагаемое является произведением двух бесконечно малых α и Δx, и $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{y' \cdot \Delta x} = 0$, т.е. это слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $y'\Delta x$ при $\Delta x \to 0$.

На этом основании мы можем считать, что из двух слагаемых, на которые мы разбили Δy, согласно (3), первое $y'\Delta x$ является «главным», т. е. содержит «большую» часть Δy, а второе — «меньшую», даже незначительную его часть.

Первое слагаемое и называется дифференциалом функции и обозначается dy: $dy = y'\Delta x$ или $dy=f'(x)\,\Delta x$. (4)

Таким образом, дифференциал функции dy есть главная часть ее приращения Δy; он равен производной, умноженной на приращение аргумента.

Далее мы видим, что дифференциал функции пропорционален приращению Δx, являясь, таким образом, линейной функцией Δx (коэффициент y' постоянен), между тем как слагаемое $\alpha\Delta x$, где α — переменная величина, изменяется непропорционально Δx.

Поэтому можно дать и другое определение дифференциала: **дифференциал функции** dy есть главная часть ее приращения Δy, линейная относительно Δx с коэффициентом пропорциональности равным производной $f'(x)$.

Таким образом, чем меньше Δx, тем dy ближе к Δy, так что для достаточно малых Δx можно приближенно заменять полное приращение функции Δy ее дифференциалом:

$$\Delta y \approx dy \qquad (5)$$

На этом основано практическое применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Мы видим, что для функции вообще $\Delta y \neq dy$. Но приращение и дифференциал аргумента x—это одно и то же, т. е. $\Delta x = dx$. В самом деле, возьмем функцию, равную аргументу: $y=x$. Тогда равны и их дифференциалы: $dy= dx$, но по формуле (4), принимая во внимание, что $y'=1$, получим

$$dy=l\cdot\Delta x \qquad (6)$$

Следовательно, $\Delta x = dx$.

Формулу (4) можем записать так: $\dfrac{dy}{dx} = y' = f'(x)$, т. е. производная есть отношение (или частное) дифференциалов функции и аргумента.

Это отношение так же применяется как обозначение производной.

При такой символике производная второго порядка обозначается $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, третьего порядка — $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, и т.д.

Геометрическое представление дифференциала

Возьмем на графике функции $y=f(x)$ точку с фиксированной абсциссой x=OA, тогда y=AC (на рис.1 показаны два случая; буквенные обозначения для них одни и те же). Дадим аргументу приращение Δx=AB=CD. Тогда приращение функции будет Δy=DM. Проведем теперь касательную к кривой в точке C ($x; y$). Тангенс ее угла наклона α равен производной в той же точке:

$$y' = \mathrm{tg} \qquad (7)$$

Из прямоугольного треугольника CDE мы видим, что DE=CD · $tga= \Delta x\cdot y'$

В правой части мы получили выражение дифференциала функции dy, следовательно, dy=DE.

Таким образом, если при некотором Δx приращение функции Δy в некоторой точке x есть приращение ординаты ее графика (DM), то дифференциал функции dy равен приращению ординаты касательной к графику в точке ($x; y$) при том же значении Δx.

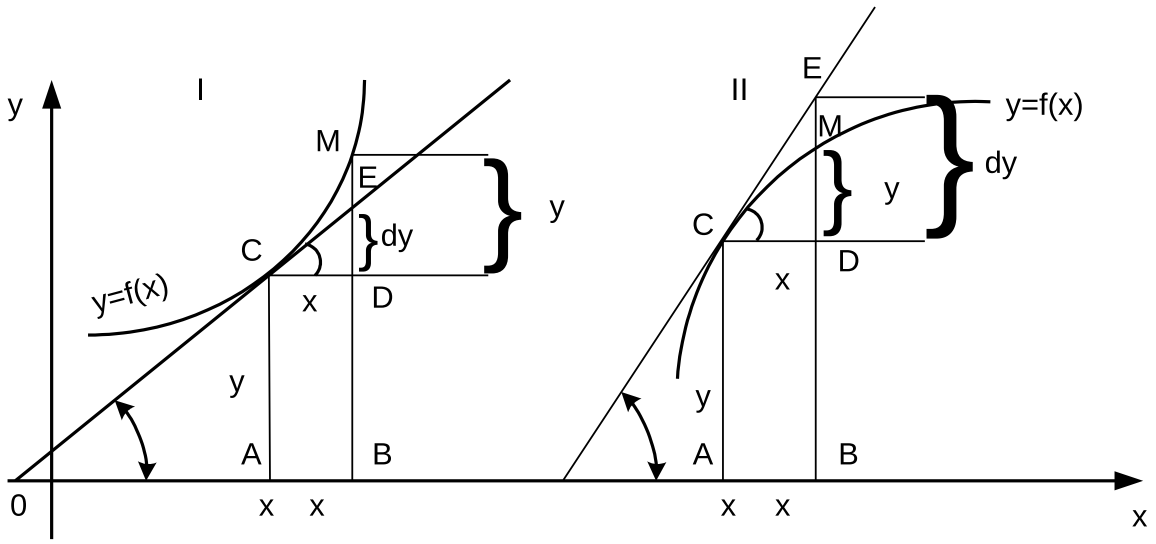


Рис. 1

Из рисунка мы видим, что *dy* может быть и меньше, чем Δy (1) и больше (II). Разность между Δy и *dy* равна отрезку ЕМ.

Вычисление дифференциалов функций

Для обозначения дифференциала функции *y=f(x)* можно к знаку *d* приписывать прямо пропорциональное выражение *f(x),* минуя букву *y*: *df(x)*. Например, вместо того, чтобы писать: $y = x^3 + x^2$; $dy = (3x^2 + 2x)dx$ можно писать $d(x^3+x^2)=(3x^2+2x)dx$.

Так как для нахождения дифференциала функции нужно только ее производную умножить на *dx*, то из таблицы производных можно легко получить таблицу дифференциалов, например: *dC=0* (дифференциал постоянной величины равен нулю).

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx = \frac{dx}{x}$$

$$d(u+v-w) = du+dv-dw$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

и т. д.

Но в специальных формулах для дифференциалов нет нужды. Практически для определения дифференциала функции нужно найти ее производную и умножить на *dx*.

2. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Дифференциал суммы, произведения, частного.

Покажем, что формула $dy = y'_x dx$, в отличие от формулы $dy = y'_x \Delta x$ обладает тем важным свойством, что она остается справедливой и в том случае, когда переменное x не является независимым, а выполняет роль промежуточного аргумента.

Допустим, что из функций $y = f(x)$, $x = \varphi(z)$ образована сложная функция переменного $z: y = f[\varphi(z)]$. Если существуют производные x'_z, y'_x, то, как известно, существует также и производная y'_z, причем

$$y'_z = y'_x \cdot x'_z. \qquad (8)$$

Так как z есть независимая переменная, то по определению дифференциала функции имеет

$$dy = y'_z \cdot dz.$$

Пользуясь формулой (8), получаем

$$dy = x'_z \cdot y'_x dz.$$

Но $x'_z dz = dx$. Следовательно,

$$dy = y'_x dx.$$

Таким образом, формула осталась справедливой, несмотря на то что переменное x уже не является независимым.

Правила вычисления дифференциалов идентичны правилам вычислении производных

3. Производные и дифференциалы высших порядков. Приближенные вычисления с помощью дифференциала функции в точке.

О применении дифференциала в теории и практике приближенных вычислений

Допустим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$. Тогда ее приращение в точке $x = a$ может быть представлено в следующем виде

$$\underbrace{f(x) - f(a)}_{\Delta y} = \underbrace{f'(a)(x-a)}_{dy} + \alpha\underbrace{(x-a)}_{\Delta x},$$

где

$$\alpha \to 0 \text{ при } x \to a.$$

Это приводит к приближенной формуле

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a)$$

или

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a). \qquad (9)$$

В частности, при $a = 0$ получаем

$$f(x) = f(0) + f'(0)x. \qquad (10)$$

Например:

$\sqrt[3]{131} = \sqrt[3]{5^3 + 6} = 5 + \dfrac{6}{3 \cdot 5^2} = 5{,}08$ (по таблице 5,078),

$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4 - 1} = 3 - \dfrac{1}{4 \cdot 3^3} = 3 - \dfrac{1}{108} = 3 - 0{,}0093 = 2{,}9907$ (по таблице 2,9905),

$\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 - 28} = 2 - \dfrac{28}{7 \cdot 2^6} = 2 - \dfrac{1}{16} = 2 - 0{,}0625 = 1{,}9375$ (по таблице 1,9311),

$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} = 2 - \dfrac{24}{10 \cdot 2^9} = 2 - \dfrac{1}{640} = 2 - 0{,}0047 = 1{,}9953$по таблице 1,9954).

Можно заметить, что чем меньше отношение $\dfrac{B}{A^n}$, тем меньше расхождение результата с табличным значением корня.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ независимого переменного x дифференцируема в точке x. По определению дифференциала

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x) = dx.$$

Если приращение аргумента Δx фиксировать, то dy есть функция переменного x и, следовательно, можно ставить вопрос о нахождении ее дифференциала.

Дифференциал от дифференциала dy (рассматриваемого как функция от x) при постоянном значении Δx называется дифференциалом второго порядка и обозначается символом d^2y:

$$d^2y = d(dy).$$

Точно так же дифференциал от дифференциала второго порядка d^2y называется дифференциалом третьего порядка и обозначается символом d^3y

$$d^3y = d(d^2y).$$

Вообще дифференциалом порядка $n\,(d^ny)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка $(d^{n-1}y)$

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Легко показать, что если функция $f(x)$ имеет в точке x n-ю производную $f^{(n)}(x)$, то она имеет в этой точке и дифференциал n-го порядка d^ny, причем между ними существует следующее соотношение

$$d^ny = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n \qquad (11)$$

При $n=1$ получаем известную формулу.

Проверим справедливость утверждения для $n=2$. Считая Δx постоянным, находим по определению дифференциала

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\Delta x) = \Delta x d(f'(x)) = \Delta x\,[f'(x)]'\Delta x = f''(x)(\Delta x)^2.$$

Таким образом, при $n=2$ формула (11) справедлива.

Применяя метод математической индукции, убеждаемся, что формула имеет место для любого натурального n. Следовательно, дифференциал любого порядка n равен производной порядка n, умноженной на n-ю степень приращения независимого переменного.

Пример. $y = x^4$. Вычислить d^3y в точке $x=5$, если $\Delta x = 0{,}1$.

Вычисляем последовательно первую, вторую, третью производные

$$f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2,\ f'''(x) = 24x,\ f'''(5) = 120.$$

По формуле (26) получаем, что

$$d^3y = 120\cdot(0{,}1)^3 = 0{,}12.$$

Полагая по-прежнему $\Delta x = dx$, формулу (11) можно переписать в следующем виде

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда получаем, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \qquad (12)$$

Соотношение (12) показывает, что производная n-ого порядка есть отношение дифференциала n-ого порядка к n-ой степени дифференциала независимого переменного. Символ $\frac{d^ny}{dx^n}$ нередко пользуются для обозначения производной n-ого порядка.

Известно, что формула $dy = f'(x)dx$ остается справедливой при замене переменного x любой дифференцируемой функцией (инвариантность формы дифференциала). Нетрудно доказать, что это свойство на дифференциалы высших порядков не распространяется.

Положим $x = \varphi(z)$. Тогда $dx = \varphi'(z)dz$. Если величину dz рассматривать как постоянную, то дифференциал dx будет являться функцией переменной z (то же самое можно сказать и относительно dy). Пользуясь правилом дифференцирования произведения, получаем

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = df'(x)dx + f'(x)d(dx).$$

Так как

$$df'(x) = f''(x)dx, \quad d(dx) = d^2x,$$

то

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Если переменное x независимо, то по формуле (11)

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Сравнение формул показывает, что изменение роли переменного x влечет за собой изменение формы второго дифференциала функции $y = f(x)$.

Таким образом, второй дифференциал, а следовательно, и дифференциалы более высоких порядков инвариантной формы не обладают.

4.Теоремы Ролля, Ферма, Лагранжа, Коши, признак постоянства функции на промежутке.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Основу многочисленных приложений понятия производной составляют несколько теорем, называемых основными теоремами дифференциального исчисления. К ним относятся теоремы Роля, Лагранжа, Коши.

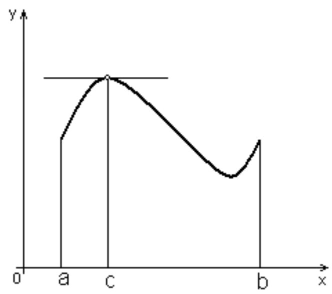
Теорема Ферма и Ролля

При исследовании дифференцируемой функции важно прежде всего найти точки, в которых ее производная равна нулю (или геометрически – точки кривой *y=f(x)*, в которых касательная параллельна оси *Ox*). Такие точки принято называть стационарными.

Теоремы Ферма и Роля указывают условия, при которых функция имеет стационарные точки.

Пусть функция f(x) задана на отрезке [a,b] и в некоторой внутренней его точке x=c(a<c<b) имеет наибольшее или наименьшее значение. Если в этой точке существует производная f ’(x) , то она равна нулю

f’(c) =0.



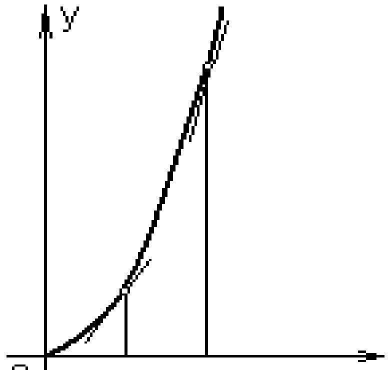
Доказательство: Допустим для определенности, что в точке $x=c(a<c<b)$ функция *f(x)* имеет наибольшее значение *(черт. 1)*. Тогда для всех $x\in[a, b]$ имеем $f(x)-f(c)\le 0$ bи поэтому справедливы неравенства:

Рис.1

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0, \text{ если } x>c, \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0, \text{ если } x<c. \quad (1)$$

Так как в точке $x = c$ существует производная $f'(c)$, то, переходя к пределу в неравенствах (1), получаем, что

$$f'(c) = \lim_{\substack{x\to c \\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0, \quad f'(c) = \lim_{\substack{x\to c \\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0.$$



Отсюда заключаем, что *f’(c) =0*. (Ясно, что это заключение сохраняется и в том случае, когда в точке $x = c$ функция *f(x)* имеет наименьшее значение. Теорема Ферма доказана.

С геометрической точки зрения теорема Ферма утверждает, что если в самой высокой (или самой низкой) точках графика (не являющихся концевыми) существует касательная, то она параллельна оси *Ox*.

Рис. 2

Обращаем внимание читателя на существенность требования теоремы о том, что точка $x = c$ должна быть внутренней: если наибольшее или наименьшее значения функции достигаются в концах отрезка, то эти точки могут и не быть стационарными. Например, функция $f(x) = x^2$ имеет на отрезке $[1, 2]$ наименьшее значение в точке $x = 1$, а наибольшее – в точке $x = 2$, и хотя в этих точках она дифференцируема, но производная $f'(x)$ в нуль не обращается (Рис.2).

Теорема Ролля

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и внутри его дифференцируема. Если f(a) = f(b), то между a и b найдётся хотя бы одна точка x = c, в которой производная данной функции равна нулю f '(c) = 0.

С геометрической точки зрения теорема Ролля утверждает, что на дуге *AB* кривой $y=f(x)$ найдётся хотя бы одна точка *c* (и притом не концевая), в которой касательная параллельна оси *Ox (черт. 3).*

Доказательство: Рассмотрим сначала частный случай, когда $f(x)$ сохраняет на отрезке $[a, b]$ постоянное значение. В этом случае $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$и за точку *c* можно принять любую внутреннюю точку отрезка $[a, b]$. Предположим теперь, что $f(x)$ не является постоянной на отрезке $[a, b]$. Тогда, будучи непрерывной на нём, она имеет по теореме Вейерштрасса наименьшее и наибольшее значения, причём по крайней мере одно из них непременно достигается в некоторой внутренней точке $x = c$ $(a<c<b)$. (Если бы наименьшее значение достигалось на одном конце, а наибольшее – на другом конце отрезка $[a, b]$, то в силу условия $f(a) = f(b)$ наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ оказались бы совпадающими, а это означало бы, что $f(x)$ имеет постоянное значение на отрезке [a, b].) Следовательно, по теореме Ферма $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что каждое из трёх условий теоремы Ролля (непрерывность на отрезке [a, b], дифференцируемость внутри его, равенство значений функций на концах отрезка) существенно для её справедливости.

Теорема Роля допускает простое истолкование с точки зрения механики. Она выражает физически очевидный факт, что если тело при своем прямолинейном движении возвращается в исходную точку. То в некоторый момент времени его скорость была равна нулю.

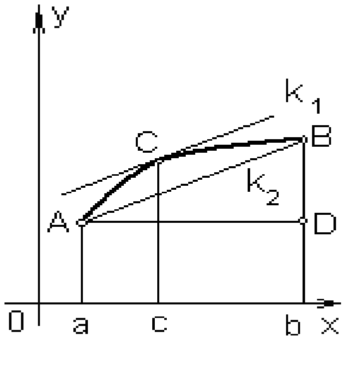
Это имеет место, например, при движении тела, брошенного вертикально вверх.

Частным случаем теоремы Ролля является следующее утверждение:

Если числа x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ есть корни функции f(x), т. е. $f(x_1) = =f(x_2) = 0$, и функция f(x) дифференцируема на отрезке $[x_1\ x_2]$, то на этом отрезке ее производная f '(x) имеет по крайней мере один корень.

(Кратко: Между двумя корнями дифференцируемой функции заключен хотя бы один корень ее производной.)

С помощью этого утверждения можно делать некоторые заключения относительно количества действительных корней различных уравнений.



Теорема Лагранжа

Допустим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b] и внутри его дифференцируема. Рассмотрим соответствующую дугу *AB* кривой $f(x)$ и через концы ее проведем секущую *AB (черт. 3).*

Геометрически очевидно, что на дуге *AB* найдется такая точка *C* (и притом не концевая), что касательная к дуге

Рис.3

AB в этой точке параллельна секущей *AB*. Выразим этот геометрический факт аналитически.

Если обозначить угловые коэффициенты касательной и секущей соответственно через k_1, k_2, то имеем $k_1 = k_2$ (2)

Пусть $AD \parallel Ox$. Тогда $k_2 = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Если абсцисса точки *C* равна *c,* то по геометрическому толкованию производной $k_1 = f'(c)$. Следовательно, равенство *(2)* принимает такой вид

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Таким образом, геометрические соображения делают вероятной справедливость следующей теоремы.

Теорема Лагранжа. ***Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, Ь\ и внутри его дифференцируема, то существует хотя бы одна точка x = c (a < c < b) такая, что в ней выполняется соотношение***

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (3)$$

Для доказательства теоремы Лагранжа рассмотрим функцию,

$$F(x)=f(x)-\varphi(x) \qquad (4),$$

где
$$\varphi(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

(Легко проверить, что уравнение *y = y(x)* выражает секущую *AB.)* Очевидно, что функция *F(x)* непрерывна на отрезке *[a, b]* и внутри его дифференцируема, поскольку этими свойствами обладают функции *f (x),* $\varphi(x)$.

Кроме того, имеем *F(a)= 0, F(b) = 0,* так как $\varphi(a)=f(a)$, $\varphi(b)=f(b)$.

Таким образом, функция *F (x)* удовлетворяет на отрезке *[a, b]* всем условиям теоремы Ролля. Следовательно, найдется хотя бы одна точка *x = c* внутри отрезка *[a, b]* такая, что $F'(c)=0$.

Заметим, что $\varphi'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Поэтому из равенства *(4)* следует

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Отсюда получаем, что

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Теорема Лагранжа доказана.

Если в формуле *(3)* положить f(b) = f(a), то получим *f'(c) = 0.*

Таким образом, теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа.

Формула *(3)* носит название формулы Лагранжа. Часто ее записывают в следующем виде $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (4')

В таком виде формула Лагранжа показывает, что **приращение функции на данном отрезке равно величине этого отрезка, умноженной на значение производной функции в некоторой его внутренней точке.**

1.5 Лекция 7 -8 (4 ч.)

Тема: Приложения дифференциального исчисления функций одной действительной переменной к исследованию функции**.**

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Правила Лопиталя

2. Экстремумы функции. Необходимый, достаточные признаки экстремума функции.

3. Признак монотонности функции на интервале. Выпуклость - вогнутость графика функции, точки перегиба. Необходимое, достаточное условия тоски перегиба.

4. Асимптоты кривой.

5. Исследование функций и построение схемы их графиков.

6. Изопараметрические задачи

1.6.2. Краткое содержание вопросов:

1. Правила Лопиталя.

Использование понятия производной при нахождении пределов

Мы уже знакомы с приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т.е. раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Рассмотрим новые правила для раскрытия этих неопределенностей – **правила Лопиталя**.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$) равен пределу отношения их производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\Psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\Psi'(x)}$, если предел правой части этого равенства существует.

Поясним на примерах.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(sin5x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{5cos5x}{1}=5\lim_{x\to 0}cos5x=5$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то можно снова применить правило Лопиталя, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos4x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4sin4x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{16sin4x}{2}=8\lim_{x\to 0}cos4x=8$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие функции при $x\to\infty$. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Кроме рассмотренных случаев неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, правила Лопиталя позволяют раскрывать неопределенности других видов.

Неопределенность вида (∞-∞). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела (здесь и в дальнейшем под *c* следует понимать как число, так и бесконечность) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-\Psi(x)]$, когда *f(x)* и *Ψ(x)* являются бесконечно большими функциями одного знака, т.е. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай преобразованием выражения *(f(x)- Ψ(x))* сводится к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$

Если $x\to 1$, то $\frac{1}{\ln x}\to\infty$ и $\frac{x}{\ln x}\to\infty$; следовательно имеем неопределенность вида (∞-∞). Приведем дроби к общему знаменателю, тогда при $x\to 1$ числитель и знаменатель в последнем выражении одновременно стремятся к нулю. Таким образом, получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-1.$$

Неопределенность вида ($0\cdot\infty$). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\Psi(x)]$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай также преобразованием выражения *(f(x) Ψ(x))* сводится к раскрытию неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx$.

Так как $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0$ и $tgx\to\infty$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, то имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем данное выражение так:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1$$

Неопределенность вида 1^{∞}. Под раскрытием такой неопределенности понимаем нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$.

Неопределенность вида 0^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=0$.

Неопределенность вида ∞^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=0$.

Неопределенности вида 1^∞, 0^0, и ∞^0 приводятся к случаям неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ обычно с помощью логарифмирования $[f(x)]^{\Psi(x)}$ при условии, что *f(x)>0.*

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

В этом случае $(1+x^2)\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$, и мы имеем неопределенность вида ∞^0. Обозначим $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, т.к. $(1+x^2)>0$, то логарифмируя, находим

$$\ln y=\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln(1+x^2)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

Так как при $x\to+\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, то получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=0$$

Так как $z=\ln y$ – функция непрерывная на D_z, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}y\right)$; следовательно, $\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}y\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}y=e^0=1$. Итак $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=1$.

2. Экстремумы функции. Необходимый, достаточные признаки экстремума функции.

Исследование функции с целью построения графика

Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на интервале $(a;b)$, если для любых значений x_1 и x_2 аргумента x, таких что $a<x_1<x_2<b$ выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$.

Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции нужно пользоваться **достаточными признаками монотонности**:

Если **производная дифференцируемой функции положительна** (**отрицательна**) на некотором интервале и стационарные точки (те в которых $f'(x)=0$) не заполняют сплошь никакого отрезка, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума: Если функции $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и дифференцируема в этой точке, то первая производная $f\,'(x_0)$ равна нулю. Таким образом, экстремум может наблюдаться в точках, в которых $f'\,(x_0)=0$ или не существует.

Достаточное условие экстремума: Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус — при максимуме, с минуса на плюс - при минимуме.

3. Признак монотонности функции на интервале. Выпуклость - вогнутость графика функции, точки перегиба. Необходимое, достаточное условия тоски перегиба.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f\,''(x)>0$. Тогда кривая $y= f(x)$ выпукла вниз в точке с абсциссой x_0. Если же $f\,''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ в этой точке выпукла вверх.

Точка с абсциссой x_0 называется **точкой перегиба** кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 - точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если в достаточно малой окрестности точки x_0 при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

4. Асимптоты кривой. Исследование функций и построение схемы их графиков.

Прямая $y_{ac}=кx+b$ называется наклонной асимптотой кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x;f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

При k=0 имеем горизонтальную асимптоту: $y=b$.

Заметим, что если не существует хотя бы один из пределов, определяющих $к$ и b, то асимптоты нет.

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции.

5. Исследование функций и построение схемы их графиков.

Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. Элементарное исследование:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность (нечетность);
3) исследовать функцию на периодичность;
4) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика с координатными осями.

II. Исследование графика функции по первой производной:

1) найти $y'(x)$;
2) используя необходимый признак существования экстремума найти точки, «подозрительные» на экстремум, т.е. точки в которых $y'(x)=0$ или $y'(x)$ не существует;
3) нанести критические точки на область определения и найти знак производной во всех получившихся интервалах;
4) используя признаки монотонности определить характер монотонности функции на каждом интервале;

5) используя достаточный признак существования экстремума установить наличие экстремума и их характер;

6) вычислить значение функции в точках экстремума, если они есть.

III. Исследование графика функции по второй производной:

1) найти *y'' (x);*

2) используя необходимый признак существования точек перегиба, найти точки «подозрительные» на перегиб, т.е. точки в которых $y''(x)=0$ или $y''(x)$ не существует;

3) нанести полученные точки на область определения и найти знак второй производной в каждом из получившихся интервалов;

4) используя теорему о форме кривой установить характер выпуклости (вогнутости) графика функции на каждом промежутке;

5) используя достаточный признак существования точек перегиба установить их наличие;

6) вычислить значения функции в абсциссах точек перегиба.

IV. Исследовать поведение функции на границах области определения.

V. Исследовать кривую $y=f(x)$ на наличие асимптот и указать область значений функции.

VI.Построить график функции.

Если исследование произведено без ошибок, то результаты всех этапов должны согласовываться друг с другом. Если же согласование отсутствует, необходимо проверить правильность результатов отдельных этапов и исправить ошибки.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

Точка $x=-1$ является точкой разрыва функции. Так как $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{-x^3}{(x+1)^2}=\infty$, прямая $x=-1$ служит вертикальной асимптотой графика функции.

Ищем наклонные асимптоты $y_{ac}=\kappa x+b$,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2\cdot x}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^3}{(x+1)^2}-x\right)=2$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y_{ac}=-x+2$.

График функции имеет одну вертикальную и одну наклонную асимптоту.

Пример 2. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$ и построить ее график.

1. Элементарное исследование.

1) Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел: $D(y)=R$.

2),3) Данная функция является элементарной, поэтому непрерывна на всей области определения, асимптот не имеет, не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

4) Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью OX следует решить уравнение $\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+5=0$. Из-за отсутствия целочисленных корней этого уравнения его решение громоздко (хотя и может быть найдено по формулам Кардано). Для нахождения точки пересечения графика с осью OY подставим в уравнение функции $x=0$, получим точку A(0;5).

2. Исследование по первой производной

Для нахождения интервалов возрастания (убывания) функции определим интервалы знакопостоянства ее первой производной $y' = x^2 - 2x - 3$ (рис.2).

Корнями производной являются точки x_1=-1 и x_2=3 (критические точки).

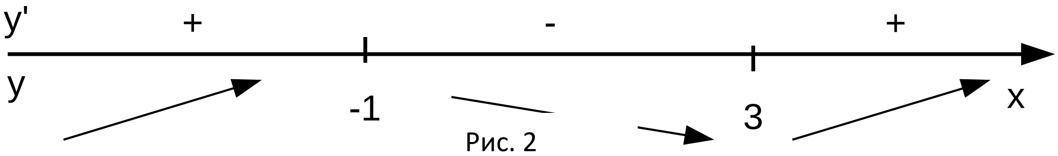


Рис. 2

Промежутки знакопостоянства производной определяются методом интервалов. Данная функция возрастает на (-∞;-1) и (3;+∞) и убывает на

(-1;3). При переходе через точку $x_1=-1$ y' меняет знак с «+» на «-», поэтому в этой точке функция имеет максимум $y_{\max} = y(-1) = 6\frac{2}{3}$. Значит, B(-1; $6\frac{2}{3}$) – точка максимума. Так как при переходе через точку x_2=3 y' меняет знак с «-» на «+», то C(3;-4) – точка минимума.

3. Исследование по второй производной: $y''=2x-2$ $y''=0$ при x=1 (точка «подозрительная» на перегиб)

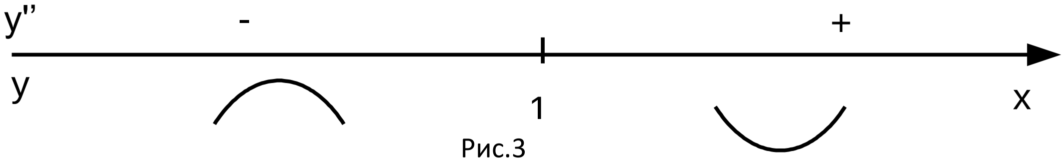


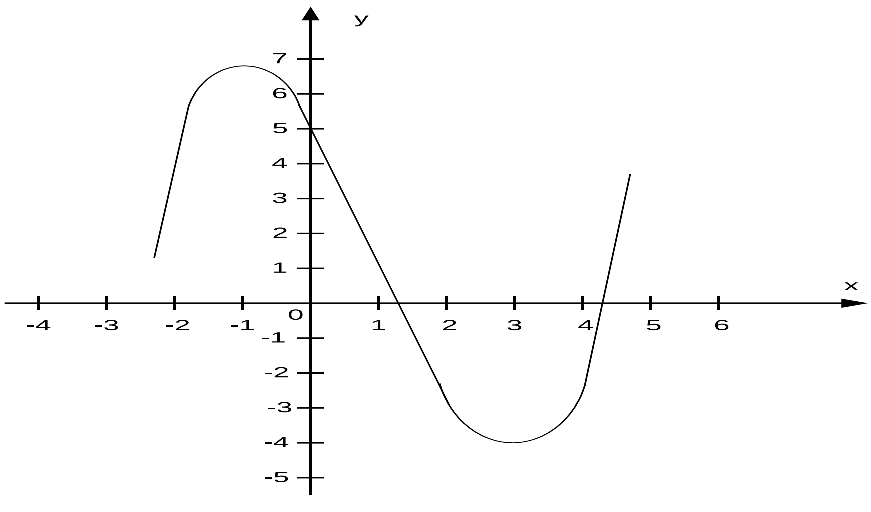
Рис.3

Так как при переходе через точку x=1 y'' меняет знак, то x=1 есть абсцисса точки перегиба графика. D (1; $1\frac{1}{3}$) – точка перегиба.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	(1;3)	3	$(3;+\infty)$
y	возрастает выпукла	max	убывает выпукла	перегиб	убывает вогнута	min	возрастает вогнута
y'	+	0	–	–	–	0	+
y''	–	–	–	0	+	+	+

Строим график исследуемой функции:



6. Изопараметрические задачи.

Экстремумы функции одного переменного

Пусть X - область определения функции $y = f(x)$ и точка $x_0 \in X$.

Определение 1. Число М называется локальным максимумом функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из нее выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$. При этом М=$f(x_0)$, а сама точка x_0 называется точкой локального максимума.

Определение 2. Число m называется локальным минимумом функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из нее выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$. При этом m=$f(x_0)$, а сама точка x_0 называется точкой локального минимума.

Определение 3. Локальный максимум и локальный минимум называются локальными экстремумами. Соответствующая точка x_0 называется точкой локального экстремума.

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 и достигает в этой точке локального экстремума, то $f'(x_0) = 0$

Определение 4. Точки, в которых производная функции равна нулю, называются стационарными точками.

Замечание. Функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Например, $x = 0$ - точка минимума функции $f(x) = |x|$, а $f'(0)$ не существует.

Определение 5. Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или не является дифференцируемой, называют критическими точками.

Для того, чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $y = f(x)$, необходимо, чтобы x_0 являлась критической точкой данной функции.

Теорема 1. *(достаточные условия того, что стационарная точка является точкой экстремума)* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X, $x_0 \in X$ - стационарная точка функции $y = f(x)$ и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1) если при переходе через точку x_0 производная функции $y = f(x)$ меняет знак с “плюса” на “минус”, т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x)$<0 справа от точки x_0, то x_0 - точка локального максимума функции $y = f(x)$;

2) если при переходе через точку x_0 производная функции $y = f(x)$ меняет знак с “минуса” на “плюс”, то x_0 - точка локального минимума функции $y = f(x)$.

Теорема 2. *(достаточные условия того, что стационарная точка является точкой экстремума)* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X, $x_0 \in X$ - стационарная точка функции $y = f(x)$ и эта функция имеет вторую непрерывную производную в окрестности точки x_0. Тогда:

1) если $f''(x_0)$<0, то x_0 - точка локального максимума функции $y = f(x)$;

2) если $f''(x_0)$>0, то x_0 - точка локального минимума функции $y = f(x)$.

Схема для решения задач на определение экстремума функций.

1. Установить область определения функции $y = f(x)$.
2. Найти её первую производную.

3. Найти стационарные точки функции $y = f(x)$, т. е. решить уравнение $f'(x)$=0, и точки, в которых $f'(x)$ не определена.

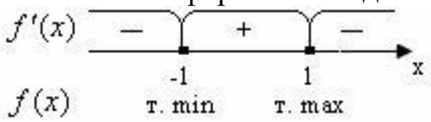
4. Определить знак производной на числовых интервалах, на которые стационарные и критические точки разбили область определения. Оформить следует в виде таблицы или числовой прямой (см. пример1).

Пример 1. Найти экстремумы функции $f(x) = 3x - x^3$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных чисел, ее производная имеет вид $f'(x) = 3 - 3x^2$ и также определена при всех *x*. Из уравнения $f'(x) = 3 - 3x^2 = 0$ находим стационарные точки: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Найденные стационарные точки разбивают область определения функции на интервалы: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Составляем таблицу для числовых интервалов и определяем знак производной. Для этого, наряду с другими способами, можно ограничиться вычислением значения производной в промежуточных точках полученных интервалов. Например, $f'(0) = 3 > 0$, $f'(2) = 3 - 3(2)^2 = 3 - 12 < 0$, $f'(-2) = 3 - 3(-2)^2 = 3 - 12 < 0$. Данные собираем в таблицу:

X	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
Знак $f'(x)$	—	0	+	0	—
Вывод		абс. т. мин.		абс. т. макс.	

Или можно оформить в виде числовой прямой:



Ответ. $f_{\min} = f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -2$, $f_{\max} = f(1) = 3 - 1 = 2$.

Наибольшее и наименьшее значения функции одного переменного на числовом отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на числовом отрезке [a;b] и имеет несколько критических точек на этом отрезке. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на числовом отрезке [a;b] удобно придерживаться следующей **схемы** рассуждений.

1. Найти первую производную функции $y = f(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки и выбрать те из них, которые попадают в отрезок [a;b].

3. Найти значения функции $y = f(x)$ в этих точках.

4. Найти значения функции $y = f(x)$ в точках x=a и x=b.

5. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание. Нет необходимости выяснять характер стационарных точек, если стоит задача найти только наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке [a;b].

Ответ записывается в виде найденных числовых значений: $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2$ на отрезке *[1;4].*

Решение. $f'(x) = 4x^2 - 6x = 2x(2x - 3)$, причем производная определена всюду, критических точек нет. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $2x(2x - 3) = 0$. Итак, $x = 3/2$ и $x = 0$ - стационарные точки. При этом $3/2 \in [1;4]$, а $x = 0 \notin [1;4]$, поэтому последняя точка нас не интересует. Сравниваем значения исходной функции в выбранной точке и на концах отрезка:

$f(1)=\frac{4}{3}-3=-\frac{5}{3}$; $f(\frac{3}{2})=\frac{4\cdot 27}{3\cdot 8}-\frac{3\cdot 9}{4}=\frac{9}{2}-\frac{27}{4}=-\frac{9}{4}$; $f(4)=\frac{4\cdot 64}{3}-3\cdot 16=\frac{112}{3}$.

Ответ. $\min\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f(\frac{3}{2})=-\frac{9}{4}$, $\max\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f(4)=\frac{112}{3}$.

Наибольшее и наименьшее значения функции одного переменного на интервале

При решении задач, связанных с определением наибольшего (наименьшего) значений функции на открытом числовом интервале (в частности, при решении прикладных задач) используется следующее утверждение.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на открытом числовом интервале (a;b) и имеет на нём единственную стационарную точку x_0.

Если x_0 - точка локального максимума, то $\max\limits_{x\in(a;b)} f(x)=f(x_0)$; если x_0 - точка локального минимума, то $\min\limits_{x\in(a;b)} f(x)=f(x_0)$.

Пример 3. Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

Решение. Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x+\frac{36}{x}$. По условию задачи x – положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x)=x+\frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x>0$. Найдём производную:

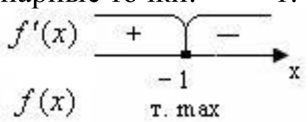
$$f'(x)=1-\frac{36}{x^2}=\frac{(x+6)(x-6)}{x^2}.$$

Стационарные точки $x_1=6$ и $x_2=-6$. На интервале $x>0$ есть только одна стационарная точка $x=6$. При переходе через точку $x=6$ производная меняет знак с "–" на "+", и поэтому $x=6$ – точка локального минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $x>0$ функция $f(x)=x+\frac{36}{x}$ принимает в точке $x=6$: $\min\limits_{x\in(0,+\infty)} f(x)=f(6)=12$.

Ответ. 36= 6·6.

Пример 4. Найти наибольшее (или наименьшее) значение функции $f(x)=\frac{2}{x}-x^2$ на интервале (−2; 0).

Решение. Производная $f'(x)=-\frac{2}{x^2}-2x$; причем она определена на интервале (−2; 0) и не имеет здесь критических точек. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $\frac{2}{x^2}+2x=0$, т. е. $\frac{2+2x^3}{x^2}=0$. Решая уравнение $2+2x^3=0$, находим стационарные точки: $x=-1$. Определяем знак производной:



Так как $x=-1$ – это точка локального максимума, то $\max\limits_{x\in(-2;0)} f(x)=f(-1)=-3$.

Ответ. $\max\limits_{x\in(-2;0)} f(x) = f(-1) = -3$.

1.6 Лекция 9 (Л-9)

Тема: Теория пределов, непрерывность, дифференцируемость функции многих переменных.

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Функция многих переменных: определение, область задания, график.
2. Предел и непрерывность функции многих переменных.
3. Полное приращение функции двух пере5менных. Частные приращения и производные функции двух переменных, их геометрический смысл.
4. Дифференциал функции многих переменных, приближенные вычисления с его помощью.
5. Дифференцирование композиции функций и неявных функций.

1.6.2. Краткое содержание вопросов:

1. Функция многих переменных: определение, область задания, график.

Функция многих переменных: основные понятия

При изучении различных процессов, протекающих в природе, мы сталкиваемся с одновременным изменением нескольких переменных величин, причем число переменных, участвующих в данном процессе, чаще бывает больше двух. Например, при изучении процесса распространения тепла в каком-либо неоднородном теле мы должны исследовать величину температуры в разных точках тела в разные моменты времени.

Так как положение точки в трехмерном пространстве в декартовой системе координат определяется тремя числами $x, y, z,$ то фактически в указанном процессе надо изучать совместное изменение пяти переменных величин: трех координат точки, времени и температуры. Изучая смещение точек натянутой струны при ее поперечных колебаниях, мы исследуем совместное изменение трех величин: одной координаты, определяющей положение точки на струне, времени и величины смещения в каждой точке струны.

Во всяком конкретном процессе можно всегда выяснить, какие из участвующих в этом процессе величин можно считать независимыми переменными. В приведенных выше примерах видно, что время и координаты точек исследуемого объекта можно считать независимыми переменными, так как от нас зависит, в какой момент и в какой точке мы будем измерять, например, температуру или смещение.

В этих примерах совокупности значений независимых переменных соответствует по определенному физическому закону значение изучаемой величины — температуры или смещения. Это понятие соответствия, которое было положено в основу определения функции одной переменной, также лежит в основе понятия функции нескольких переменных. Например, для случая совместного изменения трех переменных величин можно дать следующее определение.

Определение: Даны три переменные величины x, y и z. Если каждой паре значений независимых переменных x и y соответствует по некоторому закону определенное значение переменной z, то переменная z называется **функцией двух независимых переменных x и y.**

Обозначение функции двух переменных следующее: $z=f(x,y)$, где буква перед скобками, как и для функции одной переменной, обозначает закон соответствия между парами чисел $(x; y)$ и числами z.

Положение точки на плоскости в декартовой системе координат определяется парой чисел, а именно абсциссой и ординатой этой точки: $M(x;y)$. Поэтому функцию двух переменных $Z=f(x;y)$ можно рассматривать как функцию точки плоскости и записывать $z=f(M)$, где M и есть точка плоскости с координатами x и y.

Может быть, что формула, задающая функцию, имеет смысл не для всех возможных пар чисел $(x; y)$, т. е. не во всех точках плоскости. Например, для функции, заданной формулой $z=\sqrt{(x-1)(3-y)}$, не всегда в области вещественных чисел выполнимо извлечение корня. Действительно, если, например, $x=0$, а $y=1$, то $(x-1)(3-y)=-2$ и вещественного значения для z по этой формуле не получается.

Определение: Множество тех пар чисел $(x;y)$, для которых в области вещественных чисел определено соответствующее значение функции z, называется **областью существования** функции z.

Областью существования функции двух переменных может быть вся плоскость или часть плоскости XOY. Для функции из рассмотренного выше примера областью существования будет множество тех пар чисел $(x;y)$, для которых подкоренное выражение неотрицательно. Неравенство $(x-1)(3-y)\geq 0$ будет верно, или если $\left.\begin{matrix} x-1\geq 0 \\ 3-y\geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 1 \\ y\leq 3 \end{matrix}\right\}$, или если $\left.\begin{matrix} x-1\leq 0 \\ 3-y\leq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\leq 1 \\ y\geq 3 \end{matrix}\right\}$.

Отмечая на плоскости местоположение точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам, получаем в качестве области существования функции часть плоскости.

Для функции, заданной формулой $z=\sqrt{x^2+y^2}$, областью существования будет вся плоскость, так как действия, указанные в правой части формулы, выполнимы в области вещественных чисел для любых пар чисел $(x; y)$.

Для функции, заданной формулой $z=\dfrac{x^2+y^3}{3x-y}$, областью существования будет вся плоскость, за исключением тех точек $(x; y)$, для которых $3x-y=0$, так как для таких пар чисел $(x; y)$ действие деления теряет смысл. Точки $(x; y)$, для которых $3x-y=0$, заполняют на плоскости прямую линию. Таким образом, областью существования в данном случае является вся плоскость XOY, за исключением точек прямой линии $3x—y = 0$.

В дальнейшем функции, заданные аналитически, т. е. конкретной формулой, будут

Если дана функция $z=f(x,y)$, то для каждой пары чисел (x_0,y_0) из области существования функции можно определить соответствующее значение $z_0=f(x_0,y_0)$. Взяв координатную систему в пространстве, мы можем для каждой точки (x_0,y_0) из области существования функции отложить соответствующую аппликату z_0 и получить точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в пространстве.

Множество всех таких точек в пространстве называется **графиком функции двух переменных**. Чаще всего графиком функции двух переменных является какая-нибудь поверхность. Сама формула, задающая функцию $z=f(x,y)$, и есть уравнение этой поверхности.

Так, например, известно, что уравнение $z-2x+3y+8=0$ есть уравнение плоскости. Следовательно, указанная плоскость есть график функции $z=2x-3y-8$. Эта функция z линейна относительно x и y.

2. Предел и непрерывность функции многих переменных.

Будем обозначать расстояние между любыми двумя точками A и B через

ρ (A, B). Рассмотрим последовательность точек на плоскости M_n $(x_n; y_n)$ $(n = 1, 2,...)$.

Определение: Последовательность точек M_n стремится к точке M_0 (сходится к точке M_0), если расстояние $p(M_0, M_n)$ стремится к нулю при $n\to\infty$.Точка M_0 называется в этом случае **предельной точкой** последовательности точек M_n.

Теорема. Для того чтобы последовательность точек M_n $(x_n;y_n)$ стремилась к точке M_0 $(x_0 ;y_0)$ необходимо и достаточно, чтобы $x_n \to x_0, y_n \to y_0$.

Определение: Множество точек $M(x;y)$ на плоскости называется ограниченным, если все точки $M(x;y)$ содержатся в некотором прямоугольнике $[a, b;c,d]$ ($a \le x \le b, c \le y \le d$).

Это определение применимо, в частности, и к последовательности точек на плоскости. А именно: последовательность точек на плоскости

M_n $(x_n;y_n)$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничены обе последовательности чисел x_n и y_n, т. е. когда выполняются неравенства $a \le x_n \le b, c \le y_n \le d$ для $n= 1,2,3, ...$

Нетрудно доказать, что если последовательность точек сходится к некоторой предельной точке, то эта последовательность ограничена.

Понятие предела функции двух переменных дается, как и для функции одной переменной.

Определение: Если для любой последовательности точек M_n $(x_n; y_n)$, стремящейся к точке $M_0(x_0;y_0)$, последовательности соответствующих значений функции $f(M_n) = f(x_n; y_n)$ всегда стремятся к одному и тому же числу A, то это число называется пределом функции $f(x, y)= f(M)$ при

M $(x; y)\to M_0(x_0;y_0)$.

Обозначается это следующим образом: $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$, или $A = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$.

Как видим, эта форма определения предела функции использует понятие предела последовательности.

Все положения теории пределов легко переносятся без существенных изменений на функции нескольких переменных, и пределы функций можно вычислять по обычным правилам.

Определение: Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в точке $M_0(x_0;y_0)$ и в некоторой ее окрестности, тогда если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;y) = F(x_0;y_0),$$

то функция называется **непрерывной в точке** M_0 $(x_0; y_0)$.

Очевидно, что из непрерывности функции двух переменных $z=f(x;y)$ в точке M_0 $(x_0;y_0)$ вытекает непрерывность этой функции по каждой из переменных в отдельности. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Арифметические действия над непрерывными функциями, построение сложных функций из непрерывных функций приводят к непрерывным же функциям (при условии, что деление производится на функцию, не обращающуюся в ноль). Эти утверждения доказываются так же, как для функций одной переменной, применением соответствующих теорем о пределах функции.

Справедливы также свойства непрерывных функций в некоторой области, аналогичные свойствам непрерывных функций одной переменной.

Определение: Функция называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Если в какой-либо точке плоскости для функции $z=f(x, y)$ нарушается определение непрерывности, то говорят, что функция $z=f(x, y)$ имеет разрыв в этой точке. Геометрически график функции, т. е. поверхность, «разорван» в этой точке. Разрывы могут быть не только в отдельных точках, но и сплошь на какой-либо кривой. Разрывы поверхностей гораздо труднее представить себе и тем более изобразить на чертеже, чем разрывы кривых на плоскости.

3. Полное приращение функции двух переменных. Частные приращения и производные функции двух переменных, их геометрический смысл.

Определение: Будем называть точку M($x;y$), принадлежащую области (D), внутренней точкой этой области, если области (D) также принадлежит и некоторая окрестность точки M.

Так, например, если область (D) есть круг с присоединенной к нему окружностью, его ограничивающей, то точки этой окружности не являются внутренними точками области (D), так как всякая окрестность любой точки окружности захватывает часть плоскости, не принадлежащую кругу. Все же остальные точки круга являются его внутренними точками.

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$ в области (D) и внутреннюю точку M($x;y$) этой области. Придадим переменной x приращение Δx, а значение переменной y менять не будем, т. е. перейдем на плоскости от точки M($x; y$) к точке $M'(x+\Delta x; y)$. При этом значение функции $f(x,y)$ также изменится. Назовем это изменение частным приращением функции по переменной x. Оно будет равно

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y).$$

Аналогично можно составить частное приращение по переменной y

$$\Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} \qquad \left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y} \right),$$

то он называется **частной производной по переменной *x*** (по переменной y) от функции $z=f(x,y)$ в точке M($x; y$).

Обозначаются частные производные каким-нибудь из следующих символов: z'_x, z'_y или f'_x, f'_y или $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Последние четыре обозначения являются только названиями, символами, их нельзя рассматривать как дроби, тогда как обозначение $\dfrac{dy}{dx}$ для производной функции одной переменной можно рассматривать как частное от деления двух дифференциалов.

Из определения следует, что частная производная функции двух переменных равна обычной производной функции одной переменной, полученной при условии, что вторая независимая переменная сохраняет постоянное значение. Следовательно, правила нахождения частных производных те же, что и правила нахождения обычных производных функции одной переменной.

Пример. Найдем частные производные функции

$$z= x^3y^2 + 2x\ln y + x^y.$$

При нахождении частной производной по x считаем y постоянной

$z'_x = 3x^2y^2 + 2\ln y + yx^{y-1};$

при нахождении частной производной по y считаем x постоянной

$$z'_y = 2x^3y + 2x \cdot \frac{1}{y} + x^y \cdot \ln x.$$

Частные производные функции двух переменных имеют вполне определенный геометрический смысл. Рассмотрим поверхность, являющуюся графиком функции $z=f(x,y)$ и возьмем на этой поверхности некоторую точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (рис1). Проведем через эту точку сечение поверхности плоскостью Q, параллельной координатной плоскости yOz. Уравнение плоскости Q: $x=x_0$. Эта плоскость пересечет поверхность по некоторой кривой AB. Кривая AB плоская (так как она лежит в плоскости Q) и лежит на поверхности. Во всех точках этой кривой координата x постоянна: $x = x_0$. Поэтому уравнение кривой AB имеет вид $z = f(x_0, y)$. Частная производная по y функции $z=f(x,y)$, вычисленная в точке $(x_0;y_0)$, равняется угловому коэффициенту касательной в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ к плоской кривой AB. Проводя сечение поверхности плоскостью P, параллельной координатной плоскости xOz, и повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся, что частная производная по x функции $z=f(x,y)$, вычисленная в точке $(x_0;y_0)$, равняется угловому коэффициенту касательной в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ к плоской кривой, получающейся в пересечении поверхности с плоскостью P.

Понятие частных производных определяется так же и для функций любого числа переменных. Так, для функции трех переменных $u=f(x,y,z)$ можно определить три частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Пример. Дана функция $u = 6xyz^2 + 5x^2z - yx,$ найти частные производные первого порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6yz^2 - 10xz - y, \frac{\partial u}{\partial y} = 6xz^2 - x, \frac{\partial u}{\partial z} = 12xyz + 5x^2.$$

Можно ввести понятие частных производных порядка выше первого. Так, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ какой-либо функции двух переменных $z(x,y)$ сами являются, вообще говоря, функциями двух переменных и, следовательно, от них можно опять брать частные производные по x и по y. Результат дифференцирования называется **частной производной второго порядка** (или просто **второй частной производной**). Если от $\frac{\partial z}{\partial x}$ взять частную производную по x, то результат обозначается

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \text{ или } z''_{xx}, \text{ или } z''x^2.$$

Это обозначение опять-таки является чисто символическим. От той же частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ можно взять частную производную по y; результат дифференцирования называется смешанной частной производной второго порядка и обозначается

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \text{ или } z''_{xy}.$$

Таким же образом можно вычислить частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, полученные от дифференцирования по x или по y частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$.

В следующей теореме сформулируем условия, при которых величина смешанных частных производных какого-либо порядка не зависит от того, в каком порядке производится дифференцирование.

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

Полное приращение функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$ и некоторую внутреннюю точку $M_0(x_0;y_0)$ из области существования этой функции. Придадим значениям обеих независимых переменных x_0 и y_0 какие-нибудь приращения Δx и Δy, отличные от нуля.

Определение: Полным приращением функции $z=f(x,y)$ в точке M_0 называется приращение функции, отвечающее произвольным приращениям обеих переменных

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Если функция удовлетворяет некоторым требованиям, то ее полное приращение можно выразить через ее частные производные в точке M_0 и через приращения независимых переменных аналогично тому, как это было сделано для функции одной переменной. Для функции одной переменной $y=f(x)$ из существования конечной производной в точке x_0 вытекала следующая формула для приращения функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где α- величина, зависящая от Δx и стремящаяся к нулю вместе с Δx.

В формулируемой ниже теореме устанавливается аналогичная формула для полного приращения функции двух переменных, но приходится требовать больше, чем просто существования частных производных в точке M_0 $(x_0;,y_0)$.

Теорема. Если у функции z=f(x,y) существуют частные производные в точке $M_0(x_0,y_0)$ и в ее окрестности, а они непрерывны, как функции двух переменных в точке $M_0(x_0,y_0)$, то полное приращение функции может быть записано в следующем виде:

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(x_0, y_0)\Delta x + \beta(x_0, y_0)\Delta y,$$

где α и β – величины, зависящие от Δx и Δy и стремящиеся к нулю вместе с Δx и Δy.

Следствие: Из существования и непрерывности в данной точке (x_0,y_0) частных производных f'_x и f'_y функции $f(x,y)$ вытекает непрерывность самой функции $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$.

Действительно, при сделанных предположениях имеет место формула из теоремы, а из нее следует, что при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ все четыре слагаемых в правой части формулы стремятся к нулю, т.е. $f(x_0 + \Delta y, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \to 0$. А это и означает, что

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0),$$

т.е. функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(x_0; y_0)$.

Вычисление производных сложных функций нескольких переменных

При построении сложных функций нескольких переменных можно брать в качестве составляющих функции с различным числом независимых переменных. Поэтому трудно записать в одной формуле все возможные случаи, которые могут встретиться при построении сложной функции. Вследствие этого ниже будет изложено только несколько самых простых случаев.

1. Пусть функция $z=f(x,y)$ задана в некоторой области (D) и x и y являются сами функциями от переменной t, изменяющейся в таком промежутке $[\alpha,\beta]$, что значения функций $x(t)$ и $y(t)$ при изменении t в $[\alpha,\beta]$ не выходят за пределы области (D). В таком случае z является сложной функцией от одной переменной:

$$z = f[x(t), y(t)] = F(t)$$

Если существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции z и существуют производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, то существует производная по t от сложной функции, которая и вычисляется по следующей формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2. Пусть задана функция одной переменной $z=f(x)$ в промежутке $[a,b]$, а переменная t зависит от двух переменных x и y: $t=t(x,y)$, причем x и y изменяются в такой области, что значения функции t не выходят за пределы $[a,b]$. Тогда через посредство t величина z зависит от

двух переменных $z=f[t(x,y)]$; следовательно, можно ставить вопрос о существовании и вычислении частных производных функции z по x и по y.

Закрепим значение переменной y и будем менять только x. Тогда z будет сложной функцией одной переменной x и можно вычислять частную производную по x, пользуясь формулой дифференцирования сложной функции одной переменной: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{dz}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial x}$ (обратите внимание на обозначения производных).

Аналогично $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{dz}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial y}$.

3. Пусть функция $z=f(x,y)$ задана в некоторой области (D) и x и y являются функциями от переменных s и t: $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, причем s и t изменяются в такой области, что соответствующие значения функций x и y не выходят за пределы области (D). Тогда z через посредство x и y является сложной функцией от s и t $z=f[x(s,t),y(s,t)]$.

Если существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и существуют частные производные $\dfrac{\partial x}{\partial s},\dfrac{\partial y}{\partial s},\dfrac{\partial x}{\partial t},\dfrac{\partial y}{\partial t}$, то существуют и частные производные сложной функции по s и t, которые вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s};\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Пример. Пусть $z=f(x,y)$, $x=t^2+2s,\ y=\dfrac{t^2}{s}$.

Имеем: $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial x}2+\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(-\dfrac{t^2}{s^2}\right),\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}2t+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{2t}{s}$.

Пусть функция $z=f(x,y)$ задана конкретной формулой, например $z=\sin(x^2+y^3)$, а x и y выражаются через s и t так же, как выше.

Тогда можно непосредственно сделать подстановку выражений для x и y в функцию z: $z=\sin\left[(t^2+2s)^2+\left(\dfrac{t^2}{s}\right)^3\right]$. Отсюда можно найти $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции одной переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\cos\left[(t^2+2s)^2+\left(\frac{t^2}{s}\right)^3\right]\cdot\left[2(t^2+2s)^2+3\left(\frac{t^2}{s}\right)^2\left(-\frac{t^2}{s^2}\right)\right].$$

Раскроем скобки в правой части и введем опять обозначения x и y.

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\cos(x^2+y^3)2x\cdot 2+\cos(x^2+y^3)3y^2\cdot\left(-\frac{t^2}{s^2}\right).$$

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\cos(x^2+y^3)2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos(x^2+y^3)3y^2$,

то мы действительно получили формулы данного примера.

4. Дифференциал функции многих переменных, приближенные вычисления с его помощью.

Пусть дана дифференцируемая функция одной переменной $y=f(x)$, ее приращение можно написать в виде $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x,$ где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Дифференциалом функции $y=f(x)$ мы называем первое слагаемое этой формулы, линейно зависящее от Δx. Из формулы видно, что дифференциал равен $y'\Delta x$. Таким образом, понятие дифференциала определено для всякой функции, имеющей производную, поэтому выражение «функция $y=f(x)$ дифференцируема» означает то, что она имеет производную, и то, что она имеет дифференциал.

Для функций нескольких переменных свойство функции иметь частные производные еще не обеспечивает справедливость формулы полного приращения функции.

Определение: Если полное приращение функции $z=f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ может быть записано по формуле:

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(x_0,y_0)\Delta x + \beta(x_0,y_0)\Delta y,$$

где $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$, то функция $z=f(x,y)$ называется **дифференцируемой** в точке $(x_0;y_0)$.

Примером дифференцируемой в точке $(x_0;y_0)$ функции может служить всякая функция, имеющая в этой точке непрерывные частные производные.

Определение: Полным дифференциалом дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ называется та часть полного приращения этой функции, которая линейно зависит от Δx и Δy: $dz = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$.

Пользуясь другой записью частных производных, можно написать формулу для полного дифференциала в следующем виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Таким образом, понятие полного дифференциала в случае функций нескольких переменных определено не для всякой функции, имеющей частные производные, а только для дифференцируемой функции.

Условимся понимать под дифференциалами независимых переменных произвольные приращения этих независимых переменных $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

Тогда полный дифференциал функции можно написать по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Полный дифференциал функции нескольких переменных обладает целым рядом свойств, аналогичных свойствам дифференциала функции одной переменной.

Пример. Полное приращение функции $z= x^2 + 3xy - 2y^2$ имеет вид:

$$\Delta z = (2x+3y)\Delta x + (3x-4y)\Delta y + (\Delta x+3\Delta y)\Delta x - 2(\Delta y)^2.$$

Пользуясь, обозначение dz, можно написать:

$$\Delta z = dz + (\Delta x+3\Delta y)\Delta x - 2(\Delta y)^2,$$

откуда, отбрасывая последние слагаемые, получаем приближенную формулу: $\Delta z \approx (2x+3y)\Delta x + (3x-4y)\Delta y$.

Возьмем численные значения: $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}001$, $\Delta y=-0{,}002$.

Тогда $dz=7\cdot 0{,}001-2\cdot 0{,}002=0{,}003$.

Это число можно принять за приближенное значение Δz: $\Delta z\approx 0{,}003$. Подсчитывая точно значение Δz по формуле, получаем:

$\Delta z =0{,}003+(-0{,}005)\cdot 0{,}001-2\cdot(0{,}002)^2 =0{,}003-0{,}000013=0{,}002987$.

Абсолютная погрешность замены Δz на dz меньше, чем 0,00002, а относительная погрешность меньше, чем 0,007.

Отметим еще следующее очень важное свойство полного дифференциала.

Полный дифференциал функции нескольких переменных обладает свойством неизменности (инвариантности) формы.

Свойство неизменности формы дифференциала функции одной переменной $y=f(x)$, т.е. свойство дифференциала сохранять неизменным внешний вид записи, как в том случае, когда x является функцией от новой независимой переменной, было доказано в курсе дифференциального исчисления функций одной переменной.

Аналогичное свойство справедливо и для полного дифференциала функции нескольких переменных.

Пусть $z=f(x,y)$, где x и y — независимые переменные. Тогда полный дифференциал функции z по имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где dx и dy означают произвольные приращения независимых переменных.

5. Дифференцирование композиции функций и неявных функций.

Пусть теперь $z=f(x,y)$, x и y в свою очередь зависят от переменных s и t: $x=x(s,t)$ и $y=y(s,t)$. Кроме того, существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Функция z является сложной функцией от s и t. Тогда можно написать: $dz = \frac{\partial z}{\partial s}ds + \frac{\partial z}{\partial t}dt,$ где ds и dt - произвольные приращения $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$. По формулам производных сложной функции:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt\right);$$

множители в скобках в последней части равенства являются по определению полными дифференциалами функций $x=x(s,t)$ и $y=y(s,t)$ и, следовательно, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$

Таким образом, внешняя форма записи полного дифференциала и в этом случае оказалась такой же, как и тогда, когда x и y являлись независимыми переменными, но смысл символов dx и dy иной:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt, dy = \frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt.$$

Поэтому $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$.

Свойство неизменности формы полного дифференциала может быть использовано для сокращения выкладок при нахождении дифференциалов и частных производных.

Так же как и в случае функций одной переменной, можно для функций нескольких переменных вычислять дифференциалы порядка выше первого. Пусть x и y являются независимыми переменными. Дифференциалом второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от полного дифференциала: $d^2z = d(dz)$.

Для него можно получить легко запоминающееся выражение (в последующих выкладках учитываем, что dx и dy — величины постоянные):

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=dxd\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+dyd\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=dx\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right]+$$

$$+dy\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right]=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Полученное выражение напоминает формулу для квадрата суммы двух слагаемых. Можно так же подсчитать $d^3z=d(d^2z)$ и убедиться в том, что полученное выражение напоминает формулу для куба суммы двух слагаемых (проделайте выкладки самостоятельно):

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Неявные функции и их дифференцирование

Пусть дано уравнение вида $F(x,y)=0$, в левой части которого имеем функцию двух переменных, заданную в какой-нибудь области на плоскости, например, в некотором прямоугольнике $[a,b;c,d]$. Если для каждого значения x из промежутка $[a,b]$ существует одно значение (или несколько значений) y, которое вместе с x удовлетворяет записанному уравнению, то это уравнение определяет функцию $y=f(x)$ (однозначную или многозначную в $[a,b]$). Если эту функцию подставить в уравнение, то получим тождество относительно x в $[a,b]$: $F(x,f(x))\equiv 0$. Если выражение для y, $y=f(x)$ фактически не найдено (не из всякого уравнения указанного вида можно найти y), то говорят, что не разрешенное относительно y уравнение определяет неявную функцию $y=f(x)$ в прямоугольнике $[a,b;c,d]$. (Термин «неявная» функция относится только к способу ее задания.)

Например, $y\ln x-x^2e^y=0$ $(x>0)$. Из этого уравнения нельзя фактически найти y как функцию от x, но можно поставить вопрос: существует ли неявная функция $y=f(x)$, определяемая уравнением?

Если ограничить как-то характер функции $F(x,y)$, то можно по виду левой части уравнения сказать заранее, существует ли однозначная неявная функция, определяемая этим уравнением в некотором прямоугольнике, или нет. Можно даже ответить на вопрос, существует ли производная этой неявной функции, хотя на самом деле явного выражения этой функции через x мы не имеем. В случае существования производной можно указать и способ ее вычисления.

Пример. Будем в уравнении $y\ln x-x^2e^y=0$ понимать под y ту самую неявную функцию, которую оно определяет. Тогда запишем тождество: $y\,ln\,x-x^2e^y\equiv 0.$ Производная по x от левой части также будет равна нулю при всех x. Найдем производную от левой части по x, помня, что y - функция от x и зная уже, что производная этой функции существует:

$$y'\ln x+y\frac{1}{x}-2xe^y-x^2e^yy'=0$$

(производную от e^y берем как производную сложной функции).

Отсюда находим y':

Пример. Дано уравнение $z^2-3zy^2+z^3x^3+8xy^2-5x=0,$ определяющее z как неявную функцию от x и y. Подставляя мысленно эту неявную функцию в заданное уравнение, обращаем его в тождество относительно x и y и дифференцируем это тождество по x и по y, помня, что z - функция от x и y . Дифференцирование по x (при постоянном y) дает:

$$2zz'_x-3z'_xy^2+3z^2z'_xx^3+z^3\cdot 3x^2+8y^2-5=0,$$

Откуда

$$z'_x = \frac{5-8y^2-3z^3x^2}{2z-3y^2+3x^3z^2}.$$

Аналогично дифференцируя по y (x постоянно), находим

$2zz'_y - 3z'_y y^2 - 3z\cdot 2y + 3z^2 z'_y x^3 + 8x\cdot 2y = 0,$

Откуда

$$z'_y = \frac{6zy-3xy}{2z-3y^2+3x^3z^2}.$$

$$z''_{yx} = \frac{2z'_x z'_y + 6z'_x y + 6zz'_x z'_y x^3 + 9z^2 z'_y x^2 + 16y}{3y^2+2z-3x^3z^2}.$$

Можно сразу определять и полный дифференциал неявной функции z:

$$2zdz + 3dz\cdot y^2 - 3z2ydy + 3z^2dz\cdot x^3 + z^3 3x^2dx + 8dx\cdot y^2 + 8x2ydy - 5dx = 0,$$

откуда $$dz = \frac{-3x^2z^3-8y^2+5}{2z-3y^2+3z^2x^3}dx + \frac{6yz-16xy}{2z-3y^2+3z^2x^3}dy,$$

причем множители при dx и dy совпадают с найденными выше частными производными z'_x, z'_y.

1.7 Лекция 10 (2 ч.)

Тема: Приложения дифференциального исчисления функций многих действительных переменных.

1.7.1 Вопросы лекции:

1.Скалярное поле. Производная по направлению.

2. Градиент. Его геометрический смысл.

3. Касательная и нормаль плоскость к поверхности, их уравнения

4.Экстремум функции многих переменных. Достаточное условие экстремума дифференцируемой функции.

1.7.2. Краткое содержание вопросов:

1.Скалярное поле. Производная по направлению.

Рассмотрим на плоскости точку $M_0(x_0;y_0)$ и исходящий из нее луч $\overline{L}$. Пусть $M(x;y)$ обозначает переменную точку на луче $\overline{L}$. Рассмотрим также функцию $f(x,y)$, имеющую непрерывные частные производные первого порядка.

Определение: Если существует конечный предел $\lim\limits_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{MM_0}$,

то он называется **производной функции *f(x,y)* по направлению** $\overline{L}$ в точке M_0 и обозначается $\frac{\partial f}{\partial l}$.

Используя обычный механический смысл производной, можно сказать, что $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ характеризует быстроту изменения функции *f(x,y)* по направлению $\overline{L}$ в точке M_0. Если направление совпадает с положительным направлением оси *Ox*, то $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ есть частная производная функции *f(x,y)* по *x* в точке M_0; если $\overline{L}$ совпадаете положительным направлением оси *Oy*, то $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ есть частная производная функции *f(x,y)* по *y* в точке M_0.

Таким образом, определенные ранее частные производные функции можно рассматривать как производные по направлениям координатных осей.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению. Обозначим расстояние $M_0M = t$; при $M \to M_0$, $t \to 0$. Из рис.2 видно, что

$x-x_0 = t\cos\alpha,\ y-y_0 = t\cos\beta$, следовательно,

$$x = x_0 + t\cos\alpha, y = y_0 + t\cos\beta, \frac{dx}{dt} = \cos\alpha, \frac{dy}{dt} = \cos\beta .$$

Подставив эти выражения в функцию *z=f(x,y)*, видим, что она через посредство *x* и *y* является сложной функцией от *t*:

$f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) = F(t)$.

Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{MM_0} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0)$.

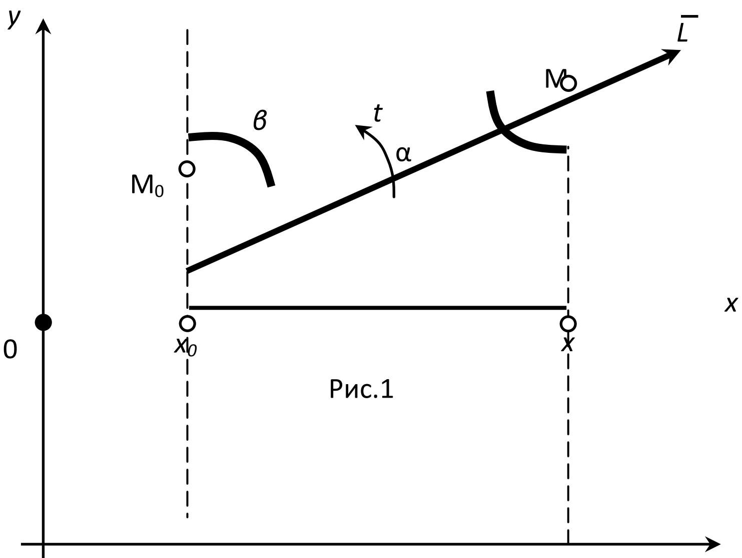


Рис.1

Последнее равенство написано по определению производной. Найдем *F'(0)* по формуле:

$$F'(0) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta$$

Итак, **производная по направлению** $\overline{L}$ **в точке** $\mathbf{M_0}$ равна

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{L}} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta .$$

Очевидно, что если дана функция трех переменных *u=f(x,y,z)* и направление $\overline{L}$ в пространстве, то определение остается без изменений, а формула принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{L}} = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma \ ,$$

где *α, β* и *γ* — углы между направлением $\overline{L}$ и положительным направлением трех координатных осей.

Пример. Найти производные по направлению биссектрисы первого координатного угла в точке $M_0(1;1)$ функции $z = x^3y - 5xy^2 + 8$.

Углы $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$. Находим $f'_x = 3x^2y - 5y^2$, $f'_y = x^3 - 10xy$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{L}} = (3\cdot 1\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 1)\frac{\sqrt{2}}{2} + (1 - 10\cdot 1\cdot 1)\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2} = -\frac{11}{2}\sqrt{2}\,.$$

2. Градиент. Его геометрический смысл.

В физике часто используется понятие градиента скалярной функции.

Определение: Градиентом скалярной функции $z=f(x,y)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси совпадают с соответствующими частными производными функции $z=f(x,y)$:

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \bar{j}\,.$$

Пользуясь понятием производной по направлению, можно вывести некоторые свойства градиента.

Возьмем единичный вектор какого-нибудь направления $\overline{L}$:

$$\overline{L} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta, \left|\overline{L}\right| = 1$$

(составляющие по осям единичного вектора любого направления совпадают с направляющими косинусами этого направления). Очевидно, что по определению скалярного произведения двух векторов можно написать:

$$(gradf, \overline{L}) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta = \frac{\partial f}{\partial \overline{L}}$$

С другой стороны,

$$(gradf, \overline{L}) = \left|gradf\right|\cdot\left|\overline{L}\right|\cdot\cos(gradf, \overline{L}) = \left|gradf\right|\cdot\cos(gradf, \overline{L}) = \text{пр}_{\bar{l}}\, gradf\,.$$

Из этой формулы видно, что производная функции по направлению $\overline{L}$ будет наибольшей по величине в том случае, когда $\cos(gradf, \bar{l}) = 1$ т.е. когда направление $\overline{L}$ совпадает с направлением вектора *gradf*. В этом случае будем иметь: $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \left|gradf\right|$.

Таким образом, градиент функции *f(x,y)* имеет направление быстрейшего увеличения функции и по величине равен производной функции по этому направлению.

Назовем **линией уровня** функции *f(x,y)* всякую кривую, вдоль которой функция сохраняет одно и то же постоянное значение.

Пусть на некоторой линии уровня $f(x,y)=C_0$. Возьмем на этой линии уровня точку $M_0(x_0;y_0)$ и напишем уравнение касательной к линии уровня в точке M_0 по формуле $f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0$.

Отсюда найдем угловой коэффициент этой касательной:

$$k = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Так как по определению градиента его проекция на ось Ox равна $f'_x(x_0,y_0)$ и проекция на ось Oy равна $f'_y(x_0,y_0)$, то тангенс того угла, который градиент составляет с положительным направлением оси Ox, равен $k_1 = \dfrac{f'_y(x_0,y_0)}{f'_x(x_0,y_0)}$. Из формул для k и k_1 видно, что $k \cdot k_1 = -1$, т. е. градиент перпендикулярен касательной к линии уровня в M_0.

Итак, можно сказать: градиент функции $f(x,y)$ в точке плоскости M_0 имеет направление нормали к линии уровня, проходящей через эту точку, и по величине равен производно функции f по направлению этой нормали.

Понятие градиента можно также определить и для функции трех переменных $f(x,y,z)$: $grad f = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \bar{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{k}$. Свойства градиента в этом случае также сохраняются (вместо линии уровня надо вводить понятие поверхности уровня).

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть кривая на плоскости задана неявным уравнением $F(x,y)=0$. Для того чтобы написать уравнение касательной к этой кривой в заданной точке $M_0(x_0;y_0)$, надо найти угловой коэффициент касательной в этой точке. Ордината в данном случае задана как неявная функция абсциссы, поэтому производную надо искать по формуле: $y'_x = -\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$ $\left(F'_y(x_0,y_0) \neq 0\right)$.

После этого уравнение касательной можно написать как уравнение прямой с известным угловым коэффициентом, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0).$$

Можно это же уравнение написать в более симметричной форме:

$$F'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + F'_x(x_0,y_0)(x-x_0) = 0.$$

Пример. Написать уравнение касательной к гиперболе $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$ в точке $M_0\left(0; -\dfrac{19}{12}\right)$.

Находим: $F'_x = 10x + 12y - 22, F'_y = 12x - 12,$

отсюда $F'_x(x_0,y_0) = -41, F'_y(x_0,y_0) = -12.$

Таким образом, получаем уравнение касательной: $-12\left(y + \dfrac{19}{12}\right) - 41x = 0$, или $41x + 12y + 19 = 0$.

Пусть некоторая кривая задана в пространстве параметрическими уравнениями: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Рассмотрим неособую точку этой кривой $M_0(x_0;y_0;z_0)$, т. е. такую точку, в которой производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ не равны нулю все три одновременно. Назовем касательной в точке M_0 (так же, как и в плоском случае) предельное положение секущей M_0M при условии, что $M \to M_0$ по кривой. Пусть точка M_0 отвечает значению параметра t_0, а точка M значению параметра $t_0+\Delta t$. Будем предполагать, что $\Delta t < 0$. Координаты точки M обозначим $x_0 + \Delta t$, $y_0+\Delta y$, $z_0+\Delta z$. Обозначим через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ единичные орты по осям координат. Тогда вектор, изображающий секущую M_0M (направление от M_0 к M), запишется через составляющие по осям следующим образом:

$$\overline{M_0M} = \Delta x \cdot \bar{i} + \Delta y \cdot \bar{j} + \Delta z \cdot \bar{k}.$$

Направляющие косинусы секущей будут равны:

$$\cos\alpha' = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{A}, \cos\beta' = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{A}, \cos\gamma' = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{A}.$$

Направляющие косинусы касательной получатся отсюда предельным переходом при $\Delta t \to 0$:

$$cos\,\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} cos\,\alpha' = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}{lim\,A} = \frac{x'(t_0)}{\sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2}} = \frac{x'(t_0)}{B}, cos\,\beta = \frac{y'(t_0)}{B}, cos\,\gamma = \frac{z'(t_0)}{B}.$$

Зная направляющие косинусы касательной, или числа им пропорциональные $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$, можно написать уравнения касательной как прямой в пространстве, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

(Через z обозначена текущая аппликата касательной.)

Пример. Найти уравнение касательной к винтовой линии $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t$ в точке $M_0\left(\sqrt{3};1;\frac{\pi}{2}\right)$ (при этом $t = \frac{\pi}{6}$)

Находим производные: $x'(t) = -2\sin t, y'(t) = 2\cos t, z'(t) = 3$.

Подставляем данные в уравнение прямой $\frac{x - \sqrt{3}}{-1} = \frac{y - 1}{\sqrt{3}} = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{3}$ и получаем искомые уравнения касательной.

Пусть дана поверхность уравнением $F(x, y, z) = 0$ (или $z = f(x, y)$) и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на ней. Проведем на поверхности какую-нибудь кривую L через точку M_0. Кривая L, как кривая в пространстве, имеет следующие параметрические уравнения: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Так как кривая L лежит на заданной поверхности, то координаты точек этой кривой удовлетворяют уравнению поверхности: $\boldsymbol{F[x(t), y(t), z(t)] = 0}$.

Следовательно, равен нулю и полный дифференциал левой части при всех t, а его в силу свойства неизменности формы полного дифференциала можно написать в следующем виде:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)dx + F'_y(x_0, y_0, z_0)dy + F'_z(x_0, y_0, z_0)dz = 0,$$

где $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt, dz = z'(t)dt$. Таким образом, числа dx, dy и dz пропорциональны числам $cos\alpha$, $cos\beta$ и $cos\gamma$, где α, β и γ — углы между проведенной к L в точке M_0 касательной и положительными направлениями координатных осей. Тогда полученное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + F'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + F'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma = 0.$$

Данное равенство, как известно из аналитической геометрии, есть условие перпендикулярности двух прямых в пространстве: одна из прямых определяется направляющими косинусами $cos\alpha$, $cos\beta$ и $cos\gamma$, т. е. является касательной к кривой L в точке M_0, а вторая прямая определяется числами $F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)$

(они пропорциональны направляющим косинусам этой прямой).

Это последнее направление не зависит от выбора кривой L на поверхности, а определяется только заданием поверхности и точки M_0 на ней. Если проводить разные кривые L на поверхности через M_0, то равенство будет каждый раз выражать условие перпендикулярности касательной к взятой кривой и одного и того же направления, определяемого числами $F'_x(x_0,y_0,z_0), F'_y(x_0,y_0,z_0), F'_z(x_0,y_0,z_0)$. Следовательно, касательные в M_0 ко всем возможным кривым, проведенным на поверхности через M_0, лежат в одной и той же плоскости.

Эта плоскость и называется **касательной плоскостью** к поверхности в точке M_0.

Уравнение всякой плоскости, проходящей через точку M_0, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

где числа A, B, C пропорциональны направляющим косинусам перпендикуляра к плоскости. В силу сказанного выше в качестве чисел A, B и C в уравнении касательной плоскости можно взять числа $F'_x(x_0,y_0,z_0), F'_y(x_0,y_0,z_0), F'_z(x_0,y_0,z_0)$ и уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0 будет иметь вид:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

(z обозначает текущую аппликату точек касательной плоскости.)

Если поверхность задана явным уравнением $z=f(x,y)$, то его можно переписать в виде $f(x,y)-z=0$, т. е. будет $F(x,y,z)=f(x,y)-z$. Тогда $F'_x=f'_x, F'_y=f'_y, F'_z=-1$ и уравнение касательной плоскости будет иметь вид: $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$.

Направление, перпендикулярное к касательной плоскости в M_0, называется направлением **нормали** к поверхности в точке M_0. Уравнение нормали в M_0 имеет следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Для явного задания поверхности:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

(здесь z — текущая аппликата нормали).

Пример. Написать уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1;\,1;\,2)$ к поверхности параболоида вращения $z=x^2+y^2$.

Так как уравнение параболоида вращения решено относительно z, то

$$f'_x=2x,\ f'_y=2y;\ f'_x(1,1)=2,\ f'_y(1,1)=2; 2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0 \text{ ,или}$$

$$2x+2y-z-2=0.$$

Уравнение касательной плоскости позволяет придать геометрический смысл понятию полного дифференциала. Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ — исходная точка, в которой вычисляется полный дифференциал функции $z=f(x,y)$. Приращения независимых переменных, для которых вычисляется дифференциал, обозначим $x-x_0=\Delta x, y-y_0=\Delta y$.

Тогда $dz=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

Сопоставляя с этим выражением, видим, что уравнение касательной плоскости примет вид: $dz-(Z-z_0)=0$, или $dz=Z-z_0$

(через z обозначаются аппликаты точек поверхности , а через Z — аппликаты точек касательной плоскости).

Равенство дает следующий геометрический смысл полного дифференциала: полный дифференциал функции $z=f(x,y)$, вычисленный в точке M_0 для приращений Δx и Δy независимых переменных, совпадает с приращением аппликаты точек касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке M_0, соответствующим взятым приращениям Δx и Δy.

3. Касательная и нормаль плоскость к поверхности, их уравнения

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$ некоторой области $D \in R^2$. Рассечем поверхность S, изображающую функцию z, плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$.

Плоскость пересекает поверхность по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции вместо x числа x_0. Точка $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ принадлежит кривой . В силу дифференцируемости функции в точке M_0 функция также является дифференцируемой в точке . Следовательно, в этой точке в плоскость к кривой $z_0(x)$ касательная l_1.

Проводя аналогичные рассуждения, для сечения построим касательную l_2 к кривой . Прямые и определяют плоскость α, которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке

Составим её уравнение. Так как плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, то её уравнение может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

которое можно переписать так:

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \quad (1)$$

(разделив уравнение на $-C$ и обозначив $\frac{-A}{C} = A_1, \; -\frac{B}{C} = B_1$).

Найдем A_1 и B_1.

Уравнения касательных и имеют вид

$$z - z_0 = f_y(x_0; y_0)(y - y_0), \quad x = x_0$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0), \quad x = x_0$$

соответственно.

Касательная лежит в плоскости , следовательно, координаты всех точек удовлетворяют уравнению (1). Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z - z_0 = f_y(x_0; y_0)(y - y_0), \\ x = x_0, \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \end{cases}.$$

Разрешая эту систему относительно , получим, что $B_1 = f_y(x_0; y_0)$.

Проводя аналогичные рассуждения для касательной, легко установить, что $A_1 = f_x(x_0; y_0)$.

Подставив значения и в уравнение (1), получаем искомое уравнение касательной плоскости:

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y(x_0; y_0)(y - y_0) \quad (2)$$

Прямая, проходящая через точку и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется её нормалью.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости легко получить каноническое уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \quad (3)$$

Если поверхность задана уравнением $F(x;y;z)=0$, то уравнения (2) и (3), с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции:

$$-\frac{F_x'(x_0;y_0)}{F_z'(x_0;y_0)},\quad f_y(x_0;y_0)=-\frac{F_y'(x_0;y_0)}{F_z'(x_0;y_0)}$$

Замечание. Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, т.е. не особых, точек поверхности. Точка поверхности называется особой, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы не рассматриваем.

Пример 1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1;-1;2)$.

Решение: Здесь $z_x'=f_x'(x;y)=2x,\quad f_y'(x;y)=2y,\quad f_x'(1;-1)=2,\quad f_y'(1;-1)=-2$. Пользуясь формулами (2) и (3) получаем уравнение касательной плоскости: $z-2=2(x-1)-2(y+1)$ или $2x-2y-z-2=0$ и уравнение нормали: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$.

4.Экстремум функции многих переменных. Достаточное условие экстремума дифференцируемой функции.

Для функций нескольких переменных термины «максимум функции» и «минимум функции» имеют тот же смысл, что и для функций одной переменной, а именно: этими терминами обозначаются наибольшее или соответственно наименьшее значение функции в точке M_0 по сравнению со значениями функции в точках, соседних с M_0. Дадим строгое определение.

Определение: Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ выполняется неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)(f(x_0,y_0)<f(x,y))$, то говорят, что функция $z=f(x,y)$ имеет **максимум (минимум)** в точке M_0.

Теорема: (необходимые условия экстремума). Если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке M_0, то обе частные производные функции $f(x,y)$ в этой точке равны нулю.

Замечание 1. Необходимые условия экстремума могут быть сформулированы в следующем виде: если в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум, то полный дифференциал функции $f(x,y)$, вычисленный в точке M_0, равен нулю.

Замечание 2. Как видно из уравнения касательной плоскости, в той точке графика дифференцируемой функции, в которой она имеет экстремум, уравнение имеет вид $z=z_0$, т. е. касательная плоскость в такой точке параллельна плоскости *ОУ* (это заключение можно сделать также исходя просто из геометрического смысла полного дифференциала).

Замечание 3. Точки, в которых обе частные производные функции $z=f(x,y)$ обращаются в 0, называются (так же, как и в случае функций одной переменной) **стационарными точками**.

Однако дифференцируемая функция может и не иметь экстремума в стационарной точке (так же, как и в случае функций одной переменной). Иначе говоря, необходимые условия экстремума не являются условиями, достаточными для наличия экстремума у функции в точке M_0.

Это подтверждает следующий **пример.**

Пусть дана дифференцируемая функция $z=x^2-y^2$**.** Найдем ее стационарные точки: $z_x'=2x, z_y'=-2y;\ z_x'=z_y'=0$ при $x=y=0$.

Итак, найдена стационарная точка $M_0(0;0)$. Значение самой функции z в точке M_0 равно нулю. Но в сколь угодно малой окрестности точки M_0 функция принимает как положительные, так и отрицательные значения; действительно, если $|x|<|y|$, то $z<0$; если же $|x|>|y|$, то $z>0$. Следовательно, в стационарной точке M_0 функция экстремума не имеет.

Условия, достаточные для наличия экстремума у дифференцируемой функции двух переменных в стационарной точке, формулируются следующим образом.

Теорема. Если в стационарной точке $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство

$$f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f''_{y^2}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2>0,$$

то функция $z=f(x,y)$ имеет в M_0 экстремум: минимум в случае, когда $f''_{x^2}(x_0,y_0)>0$, и максимум, когда $f''_{x^2}(x_0,y_0)<0$.

Пример. Найти экстремумы функции $z=x^2+y^2+1$.

Найдем стационарные точки: $z'_x=2x, z'_y=2y;$ $z'_x=0$ при $x=0$, $z'_y=0$ при $y=0$. Итак, есть одна стационарная точка $M_0(0;0)$. Проверим, выполняется ли неравенство из теоремы $z''_{x^2}(0,0)=2, z''_{y^2}(0,0)=2, z''_{xy}(0,0)=0;$ $2\cdot2-0>0$,

т. е. неравенство выполнено. Так как $z''_{x^2}(0,0)>0$,то в точке M_0 функция имеет минимум и в этой точке $z=1$.

Графиком рассмотренной функции является параболоид вращения. Наименьшая аппликата поверхности (минимум z) $z=1$ при $x=0$ и $y=0$. Касательная плоскость в этой точке горизонтальна и ее уравнение $z=1$.

Наибольшие и наименьшие значения функции двух переменных в области

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области (D) задана дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ и требуется найти наибольшее и наименьшее значение этой функции в области (D).

Очевидно, что наибольшее или наименьшее значение функции во внутренних точках области могут достигаться только в точках экстремума. Поэтому нужно найти все точки, подозрительные на экстремум внутри области, и, не занимаясь вопросом о том, есть ли в этих точках экстремумы и если есть, то какие, вычислить значения функции во всех найденных стационарных точках.

Но функция может принимать наибольшее или наименьшее значение и на границе области (D). Поэтому надо еще отдельно искать наибольшее и наименьшее значения функции на границе области. При этом можно использовать уравнения границы области для уменьшения числа независимых переменных функции и свести дело к исследованию функции одной переменной (на примере ниже будет показано, как это делать). Сравнивая все полученные таким образом значения функции, выбираем из них самое большое и самое маленькое.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^3+6y(y-x)$ в замкнутой области, заданной неравенствами $0\le y\le x\le 2$.

Для того чтобы начертить эту область, расчленим неравенство на отдельные части; точки плоскости, ординаты которых удовлетворяют неравенству $0\le y\le x$, расположены выше оси Ox и под биссектрисой $y=x;$

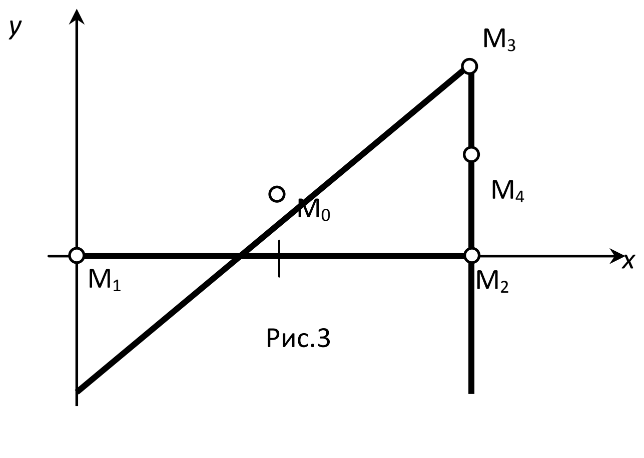


Рис.3

точки плоскости, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $x \leq 2$, расположены левее вертикальной прямой $x=2$. Точки плоскости, абсциссы и ординаты которых одновременно удовлетворяют указанным выше неравенствам, заполняют прямоугольный треугольник (рис.3) вместе с его границей.

Будем искать стационарные точки данной функции внутри треугольника:

$$z'_x = 3x^2 - 6y;\ 3x^2 - 6y = 0;\ \ z'_y = 12y - 6x;\ 12y - 6x = 0;$$

$$y = \frac{x^2}{2}; 6x^2 - 6x = 0, x_1 = 0, x_0 = 1; y_1 = 0, y = \frac{1}{2}\ .$$

Итак, найдена одна стационарная точка $M_0\left(0; \frac{1}{2}\right)$внутри области. Подсчитаем значение функции в этой точке: $z_0 = -\frac{1}{2}$.

Для исследования изменения функции на границе данной области рассмотрим отдельно каждую из трех линий, образующих границу.

Исследование на линии M_1M_2:

Уравнение этой линии $y=0$. Так как сейчас нас интересует изменение заданной функции только на линии M_1M_2, то можно положить в выражении функции $y=0$; тогда получим $z=x^3$. Так как x растет от 0 (точка M_1) до 2 (точка M_2) и x^3 при этом тоже растет, то достаточно сосчитать самое маленькое значение функции на линии M_1M_2, т. е. значение в точке M_1:$z_1=0$ и самое большое на линии M_1M_2 значение функции в точке M_2: $z_2=8$.

Исследование на линии M_1M_2:

Уравнение этой линии $x=2$. Полагаем в выражении функции $x=2$; тогда получим $z=8+6y^2-12y$, т. е. на линии M_2M_3 z обратилось в квадратичную функцию. Находим для этой квадратичной функции стационарные точки: $z'=12y-12$, $z'=0$ при $y=1$. Таким образом, найдена еще точка $M_4(2,1)$. Вычисляем значение функции в M_4: $z_4=2$. Находим и значение функции в точке M_3 (конец промежутка изменения y), так как функция одной переменной может достигать наибольшего или наименьшего значения на концах того промежутка, в котором она изменяется. Получаем $z_3=8$; значение на другом конце промежутка изменения y, т. е. в точке M_2, уже было вычислено раньше.

Исследование на линии M_3M_0:

Уравнение этой линии $y=x$. Полагаем в выражении функции $y=x$; тогда получаем $z=x^3$. Так как это возрастающая функция, то нужно сосчитать ее значения только в начале и в конце промежутка изменения x, т. е. в точках M_0 и M_3. Эти значения функции уже были вычислены.

Сравнивая теперь, между собой все пять вычисленных значений функции, видим, что самое большое из них 8 и самое маленькое $-\frac{1}{2}$.

Итак, наибольшее значение функции $z=8$ в заданной области достигается в точках M_2 и M_3; наименьшее значение функции $z = -\frac{1}{2}$ достигается в точке M_1.

1.8 Лекция 11 (2 ч.)

Тема: Неопределенны интеграл, его свойства, методы нахождения.

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная для функции, ее свойства. Неопределенный интеграл, его геометрический смысл. Таблица основных интегралов.

2. Основные методы интегрирования: непосредственное, подстановкой, «по частям».

3. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических выражений.

1.8.2. Краткое содержание вопросов:

1. Первообразная для функции, ее свойства. Неопределенный интеграл, его геометрический смысл. Таблица основных интегралов.

Основная задача дифференциального исчисления состоит в нахождении дифференциала данной функции или ее производной. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по заданному дифференциалу, а, следовательно, и производной неизвестной функции *F(x),* требуется определить эту функцию. Иными словами, имея выражение

$$dF(x) = f(x)dx \qquad (1)$$

или соответственно

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

где *f(x)* – известная функция, нужно найти функцию *F(x).* Искомая функция *F(x)* называется при этом **первообразной функцией** по отношению к функции *f(x).* Для простоты мы будем предполагать, что равенство (1) выполняется на некотором конечном или бесконечном промежутке.

Определение: Первообразной функцией для данной функции *f(x)* на данном промежутке называется такая функция *F(x),* производная которой равна *f(x)* или дифференциал которой равен *f(x)dx* на рассматриваемом промежутке.

Например, одной из первообразных функций для функции $3x^2$ будет x^3, ибо $(x^3)' = 3x^2$. Первообразная функция не единственна, так как $(x^3+1)' = 3x^2, (x^3-5)' = 3x^2$ и т.д., и поэтому функции x^3+1, x^3-5 и т.п. также являются первообразными для функции $3x^2$. Следовательно, данная функция имеет бесчисленное множество первообразных.

В нашем примере каждые две первообразные отличались друг от друга на некоторое постоянное слагаемое. Покажем, что это будет иметь место и в общем случае.

Теорема: Две различные первообразные одной и той же функции, определенной на некотором промежутке, отличаются друг от друга на этом промежутке на постоянное слагаемое.

Доказательство: В самом деле, пусть *f(x)* – некоторая функция, определенная на промежутке $\langle a, b \rangle$, и $F_1(x)$, $F_2(x)$ – ее первообразные, т.е.

$$F_1'(x) = f(x) \text{ и } F_2'(x) = f(x).$$

Отсюда $F_1'(x) = F_2'(x)$.

Но если две функции имеют одинаковые производные, то эти функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Следовательно,

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

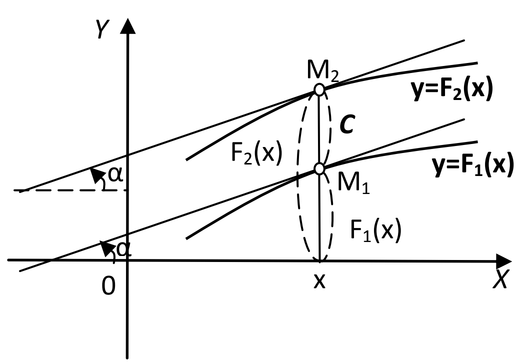


Рис. 1.

где *C* – постоянная величина. Теорема доказана.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию. Если $y = F_1(x)$ и $Y = F_2(x)$ - первообразные одной и той же функции *f(x),* то касательные к их графикам в точках с общей абсциссой *x* параллельны между собой (рис. 1):

$$tg\alpha = F_1'(x) = F_2'(x) = f(x).$$

В таком случае расстояние между этими кривыми вдоль оси *Oy* остается постоянным: $F_2(x) - F_1(x) = C$, т.е. эти кривые в некотором смысле «параллельны» друг другу.

Следствие: Прибавляя к какой-либо первообразной функции *f(x)*, определенной на промежутке $\langle a, b\rangle$, все возможные постоянные *C,* мы получим все первообразные для функции *f(x).*

В самом деле, если *F(x)* есть первообразная функция для *f(x),* то функция *F(x)+C*, где *C*- любая постоянная, также будет первообразной функции *f(x),* так как $[F(x)+C]' = F'(x)+C' = f(x)$.

С другой стороны, мы доказали, что каждая первообразная функции *f(x)* может быть получена из функции *F(x)* путем прибавления к ней надлежащим образом подобранного постоянного слагаемого *C*.

Следовательно, выражение *F(x) + C*, где $C \in (-\infty;+\infty)$, (2)

где *F(x)* – какая-либо первообразная для функции *f(x)*, исчерпывает всю совокупность первообразных для данной функции *f(x).*

В дальнейшем мы будем предполагать, если явно не оговорено противное, что рассматриваемая функция *f(x)* определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном промежутке $\langle a, b\rangle$.

Введем теперь основное понятие интегрального исчисления – понятие неопределенного интеграла.

Определение: Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции *f(x)* называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* или от дифференциального выражения *f(x)dx* и обозначается символом $\int \mathrm{f(x)dx}$.

При этом функция *f(x)* называется подынтегральной функцией, а выражение *f(x)dx* называется подынтегральным выражением.

Согласно определению неопределенного интеграла можно записать

$$\int \mathrm{f(x)dx} = F(x) + C, \qquad (3)$$

где $F'(x) = f(x)$, постоянная *C* может принимать любое значение, и поэтому называется произвольной постоянной.

Пример. Как мы видели, для функции $3x^2$ одной из первообразных является функция x^3. Поэтому $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Геометрически неопределенный интеграл *y=F(x)+C* представляет собой семейство «параллельных» кривых (рис.2).

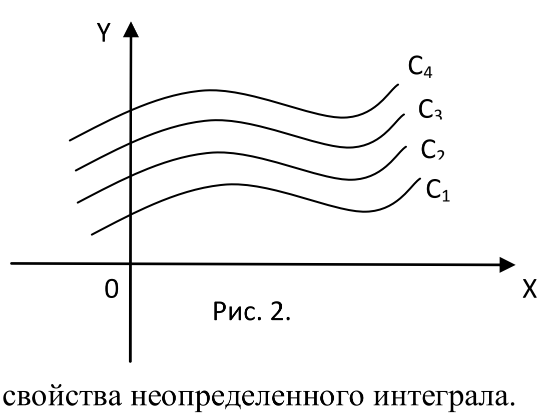


Рис. 2.

Основные свойства неопределенного интеграла

Опираясь на формулу (3), выведем основные свойства неопределенного интеграла.

I. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Это свойство непосредственно вытекает из определения неопределенного интеграла.

Таким образом, имеем

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \quad \text{и} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (4)$$

II. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

В самом деле, пусть $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx$, где функция $\varphi'(x)$ непрерывна. Функция $\varphi(x)$, очевидно, является первообразной для $\varphi'(x)$. Поэтому имеем

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \qquad (5)$$

Замечание: В формулах (4) и (5) знаки d и $\int$, следующие друг за другом в том или другом порядке, взаимно уничтожают друг друга (если не учитывать постоянного слагаемого). В этом смысле дифференцирование и интегрирование и являются взаимно обратными математическими операциями.

III. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е. если постоянная $A \neq 0$, то

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx. \qquad (6)$$

В самом деле, пусть $F(x)$- первообразная для $f(x)$. В силу формулы (3) имеем:

$$A\int f(x)dx = A[F(x) + C] = AF(x) + C_1, \qquad (7)$$

где $C_1=AC$, причем C и C_1 – произвольные постоянные при $A \neq 0$. Но $AF(x)$ есть первообразная для функции $Af(x)$, так как

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Поэтому из формулы (7) получаем требуемую формулу (6).

Замечание: При $A=0$ формула (3) неверна, так как левая часть ее представляет собой произвольную постоянную, а правая часть тождественна равна нулю.

IV. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т.е. если, например, функция $f(x), g(x), h(x)$ непрерывны в интервале (a,b), то

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx \quad \text{при } x\in(a,b). \qquad (8)$$

Действительно, пусть $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ – первообразные соответственно функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. На основании формулы (3) имеем:

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx = [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] - [H(x) + C_3] =$$
$$= [F(x) + G(x) - H(x)] + C, \qquad (9)$$

где C_1, C_2, C_3 − произвольные постоянные и $C=C_1+C_2-C_3$, очевидно, также является произвольной постоянной. Но функция $F(x)+G(x)-H(x)$ есть первообразная для функции $f(x)+g(x)-h(x)$, так как

$$[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = f(x) + g(x) - h(x).$$

Следовательно,

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = F(x) + G(x) - H(x) + C. \qquad (10)$$

Из формул (9) и (10) вытекает равенство (8).

Зная формулы для производных основных элементарных функций, можно составить таблицу неопределенных интегралов (первообразных), которую мы дополним еще несколькими часто встречающимися интегралами.

Таблица основных интегралов (ТОИ)

1. $\int 1\cdot dx = \int dx = x + C$

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $a \neq -1$ $\quad \left(\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \right)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln a} + C$ $\quad \left(\int e^x dx = e^x + C \right)$

5. $\int cos\, x dx = sin\, x + C$

6. $\int sin\, dx = -cos\, x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C, \forall a \in R$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

14. $\int \dfrac{dx}{sin\, x} = ln\left| tg \dfrac{x}{2} \right| + C$

2. Основные методы интегрирования: непосредственное, подстановкой, «по частям».

Метод интегрирования с помощью этой таблицы и свойств неопределенных интегралов обычно называют **методом непосредственного интегрирования.**

Примеры:

1. $\int \dfrac{(x-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{x^2\sqrt[3]{x}} dx =$ (перемножаем скобки в числителе)=

$\int \dfrac{x + x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{x^2\sqrt[3]{x}} dx =$ (записываем «корни» в виде степеней с дробными показателями)=

$\int \dfrac{x + x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{7}{3}}} dx =$ (делим почленно числитель на знаменатель)=

$\int (x^{-\frac{4}{3}} + x^{-\frac{5}{6}} - 2x^{-\frac{11}{6}}) dx =$ (применяем свойство 4 и формулу 2 из ТОИ)=

$$\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} - 2\frac{x^{-\frac{5}{6}}}{-\frac{5}{6}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 6\sqrt[6]{x} + \frac{12}{5\sqrt[6]{x^5}} + C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{1}{sin^2 x\,cos^2 x}dx=\left[sin^2 x+cos^2 x=1\right]=\int\frac{sin^2 x+cos^2 x}{sin^2 x\,cos^2 x}dx=$(делим почленно числитель на знаменатель) $=\displaystyle\int\frac{sin^2 xdx}{sin^2 x\,cos^2 x}+\int\frac{cos^2 xdx}{sin^2 x\,cos^2 x}=$(применяем формулы 7,8 ТОИ)=*tgx-ctgx+C*

3. $\displaystyle\int tg^2xdx=\left[1+tg^2x=\frac{1}{cos^2 x}\right]=\int(1-\frac{1}{cos^2 x})dx=\int 1\cdot dx-\int\frac{1}{cos^2 x}dx=x-tgx+C$

4. $\displaystyle\int\frac{3dx}{\sqrt{x^2-9}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}=$(по формуле 12 ТОИ)=$3ln|x+\sqrt{x^2-9}\,|+C.$

Одним из самых сильных методов интегрирования является **метод подстановки.** В его основе лежит легко проверяемая формула:

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx=\begin{vmatrix}t=\omega(x)\\ dt=\omega'(x)dx\end{vmatrix}=\int g(t)dt=G(t)+C=G(\omega(x))+C$$

Эту формулу следует применять тогда, когда первообразная для *g(t)* известна или легко находится.

Примеры:

1. $\displaystyle\int\frac{arctg^3x}{1+x^2}dx=\begin{vmatrix}t=arctgx\\ dt=\dfrac{1}{1+x^2}dx\end{vmatrix}=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=$(делаем обратную подстановку) $=\displaystyle\frac{1}{4}arctg^4x+C.$

2. $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{x^8+9}=\begin{vmatrix}t=x^4\\ dt=4x^3dx\end{vmatrix}=$(умножаем числитель и знаменатель на 4)= $\displaystyle=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3dx}{x^8+9}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+9}=$(формула 13 ТОИ)=$\displaystyle\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{1}{12}arctg\frac{x^4}{3}+C.$

В некоторых случаях полезны **специальные подстановки**.

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{5-3cos\,x}=\begin{vmatrix}t=tg\dfrac{x}{2}\Rightarrow\dfrac{x}{2}=arctgt\Rightarrow x=2arctgt\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\\ cos\,x=\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};sin\,x=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{vmatrix}=$

(это **«универсальная»** подстановка, которая применяется при интегрировании рациональных выражений от тригонометрических функций)=$\displaystyle\int\frac{2dt}{(1+t^2)(5-3\frac{1-t^2}{1+t^2})}=$ (выполняем тождественные преобразования)= $\displaystyle\int\frac{2dt}{8t^2+2}=\frac{2}{8}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$(формула 12 ТОИ)

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1/2} arctg\frac{t}{1/2} + C = \frac{1}{2} arctg 2t + C =$ (переходим к «*x*») = $\frac{1}{2} arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right) + C$.

4. $J = \int \frac{1+2tgx}{sin^2 x + 4cos^2 x}dx.$

При нахождении этого интеграла можно применить «универсальную» подстановку, но можно обойтись и без нее, сделав следующие преобразования:

1) в знаменателе $cos^2 x$ вынесем за скобки, получим:

$$J = \int\frac{1+2tgx}{(tg^2x+4)\cos^2 x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx \end{matrix} \right| = \int\frac{1+2t}{t^2+4}dt = \int\frac{1}{t^2+4}dt + \int\frac{2tdt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + \int\frac{2tdt}{t^2+4} = \left| \begin{matrix} z = t^2+4 \\ dz = 2tdt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + \int\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + ln|z| + C =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{tgx}{2} + ln\left|tg^2 x + 4\right| + C.$$

5. $J = \int cos^4 xdx$.

При четном показателе степени обычно применяют формулу «понижения степени» за счет перехода к двойному аргументу:

$cos^2 x = \frac{1}{2}(1+cos\,2x), sin^2 x = \frac{1}{2}(1-cos\,2x).$ В нашем случае будем иметь:

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x + \cos^2 2x).$$

Поэтому

$$\int cos^4 xdx = \frac{1}{4}\int(1+2\,cos\,2x + cos^2\,2x)dx = \frac{1}{4}\left(\int dx + 2\int cos\,2xdx + \int cos^2\,2xdx\right).$$

Второй интеграл в скобках преобразуется к виду:

$2\cdot\int cos\,2xdx = \int cos\,2xd(2x) =$ (формула 5 ТОИ)= $sin2x+C.$

Для вычисления третьего интеграла еще раз применим формулу «понижения степени»:

$$\int cos^2\,2xdx = \frac{1}{2}\int(1+cos\,4x)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int cos\,4xdx\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{sin4x}{4} + C.$$

Окончательно будем иметь:

$J = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x + C.$

6. $\int sin^3 x\cdot cos^4 xdx = \int sin^2 x\,sin\,x\,cos^4 xdx = \int(1-cos^2 x)cos^4 x\,sin\,xdx =$

$$= \left| \begin{matrix} cos\,x = t \\ dt = -sin\,xdx \end{matrix} \right| = -\int(1-t^2)t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{7}cos^7 x - \frac{1}{5}cos^5 x + C$$

Метод **интегрирования по частям** основан на применении следующей формулы: $\int udv = uv - \int vdu,$ где *u(x),v(x)*- непрерывные и дифференцируемые на промежутке *X* функции.

Эта формула обычно бывает полезна при интегрировании функций следующего вида:

$$(ax+b)^k\sin\beta x \qquad (u=(ax+b)^k)$$
$$(ax+b)^k\cos\beta x \qquad (u=(ax+b)^k)$$
$$(ax+b)^k\ln x \qquad (u=\ln x)$$
$$(ax+b)^k e^{\beta x} \qquad (u=(ax+b)^k)$$
$$x^k arctgx \qquad (u=arctgx)$$
$$x^k\arcsin x \qquad (u=\arcsin x)$$

Примеры:

1. $\int x^3\ln x dx=\begin{vmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=x^3dx & v=\dfrac{1}{4}x^4\end{vmatrix}=$ (подставляем в правую часть формулы)

$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

Иногда формулу приходится применять несколько раз.

2. $\int(2x+1)^2e^xdx=\begin{vmatrix} u=(2x+1)^2 & du=2(2x+1)\cdot 2dx \\ dv=e^xdx & v=e^x\end{vmatrix}=(2x+1)^2e^x-\int e^x4(2x+1)dx=$

$$=(2x+1)^2e^x-4\int(2x+1)e^xdx=\begin{vmatrix} u_1=2x+1 & du_1=2dx \\ dv_1=e^xdx & v_1=e^x\end{vmatrix}=$$

$$=(2x+1)^2e^x-4\left((2x+1)e^x-\int e^x2dx\right)=(2x+1)^2e^x-4(2x+1)e^x+8e^x+C$$

3. $J=\int e^x\sin x dx=\begin{vmatrix} u=e^x & du=e^xdx \\ dv=\sin x dx & v=-\cos x\end{vmatrix}=e^x(-\cos x)+\int e^x\cos x dx=$

$$=\begin{vmatrix} u_1=e^x & du_1=e^xdx \\ dv_1=\cos x dx & v_1=\sin x\end{vmatrix}=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx.$$

В правой части содержится точно такой же интеграл (***J***), только с другим знаком. Переносим его из правой части в левую и получаем:

$$2\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-e^x\cos x+C, \text{ откуда } \int e^x\sin x dx=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}+C.$$

3. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических выражений.

Рассмотрим дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ - многочлен n-ой степени от x, $Q_m(x)$ - многочлен m-ой степени от x. Возможны случаи:

1. n≥m. В этом случае рассматриваемая дробь называется неправильной.

Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть дроби (многочлен степени n-m):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R_{n-m}(x)+\frac{P^*{}_k(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } \boldsymbol{k<m} \Rightarrow \frac{P^*{}_k(x)}{Q_m(x)} \text{ - правильная дробь.}$$

2. $n<m$. В этом случае имеем правильную дробь. Остановимся сначала на интегрировании «простых» дробей, их четыре типа.

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k=2,3,\ldots$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $m=2,3,\ldots$.

При этом x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $D=p^2-4q<0$.

I. $\int\dfrac{A}{x-a}dx=A\int\dfrac{dx}{x-a}=\left|d(x-a)=1\cdot dx\right|=A\int\dfrac{d(x-a)}{x-a}=$(формула 3 ТОИ)$=$
$=A\ln|x-a|+C.$

II. $\int\dfrac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\dfrac{dx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}\cdot d(x-a)=$ (формула 2 ТОИ) $=$
$=A\dfrac{(x-a)^{k+1}}{-k+1}+C=\dfrac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$

III. Для интегрирования дробей третьего типа поступаем следующим образом (покажем на примере).

$J=\int\dfrac{3x+1}{x^2+4x+9}dx$

а) находим производную от знаменателя: $(x^2+4x+9)'=2x+4$ и числитель представляем следующим образом:

$3x+1=\dfrac{3}{2}\cdot 2x+1=\dfrac{3}{2}(2x+4-4)+1=\dfrac{3}{2}(2x+4)-6+1=\dfrac{3}{2}(2x+4)-5.$

$J=\int\dfrac{\frac{3}{2}(2x+4)-5}{x^2+4x+9}dx=$(по свойству 3 получаем)$=$

$=\dfrac{3}{2}\int\dfrac{(2x+4)dx}{x^2+4x+9}-5\int\dfrac{dx}{x^2+4x+9}=\dfrac{3}{2}J_1-5J_2.$

В первом интеграле делаем подстановку

$t=x^2+4x+9\Rightarrow dt=(2x+4)dx,$ которая приводит его к виду:

$\dfrac{3}{2}\int\dfrac{dt}{t}=\dfrac{3}{2}\ln|t|+C=$ (формула 3 ТОИ) $=\dfrac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+9\right|+C.$

Во втором интеграле выделяем полный квадрат в знаменателе дроби: $x^2+4x+9=x^2+2\cdot 2x+2^2-2^2+9=(x+2)^2+5$ и делаем подстановку $t=x+2\Rightarrow dt=dx$. Получаем:

$\int\dfrac{dx}{x^2+4x+9}=\int\dfrac{dx}{(x+2)^2+5}=\begin{vmatrix}t=x+2\\ dt=dx\end{vmatrix}=\int\dfrac{dt}{t^2+5}=$ (формула 13 ТОИ)$=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{1}{\sqrt{5}}+C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$

Окончательный результат: $J=\dfrac{3}{2}\ln(x^2+4x+9)-\sqrt{5}arctg\dfrac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$

IV.Дроби четвертого типа интегрируются в той же последовательности, что и дроби третьего типа, кроме того, применяется рекуррентная формула:

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n,\ \text{где}\quad J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Зная, что $J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C,$ находим:

$$J_2=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\right)=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+C.$$

По этой же формуле при n=2 находим:

$$J_3=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+C\right)=$$

$$=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}++\frac{3}{8a^5}arctg\frac{x}{a}+C\quad\text{и т.д.}$$

Таким образом, можно вычислить $\boldsymbol{J_n}$ для любого натурального n.

Примеры:

1.$\boldsymbol{J}$= $\int\frac{(2x-1)dx}{(x^2+6x+10)^2}=\int\frac{(2x+6)-7}{(x^2+6x+10)^2}dx=\int\frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+10)^2}-7\int\frac{dx}{(x^2+6x+10)^2};$

а) $(x^2+6x+10)'=2\tilde{o}+6$;

б) числитель *2x-1=2x+6-6-1=(2x+6)-7*;

в) в знаменателе $x^2+6x+10=x^2+6x+9+1=(x+3)^2+1.$ Тогда

$$J=\int\frac{dt}{t^2}-7\int\frac{dx}{((x+3)^2+1)^2}=\begin{vmatrix}x+3=z\\dz=dx\end{vmatrix}=\int t^{-2}dt-7\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{t^{-1}}{-1}-7J_2=-$$

$$-7\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z^2+1}+\frac{1}{2}arctgz\right)+C=-\frac{7}{2}\cdot\frac{x+3\cdot\frac{2}{7}}{x^2+6x+10}-\frac{7}{2}arctg(x+3)+C.$$

Чтобы проверить полученный результат, надо найти производную от последнего выражения и с помощью преобразований привести ответ к виду $\frac{2x-1}{(x^2+6x+10)^2}$ (предлагаем студентам выполнить эту работу самостоятельно).

2. Пусть теперь $\frac{P(x)}{Q(x)}$- правильная дробь. Не теряя общности, можно считать, что старший коэффициент *Q(x)* равен 1 (иначе его можно вынести за скобки и за знак интеграла).

Тогда *Q(x)*= $(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x-b)^l(x^2+px+q)^m\cdot\ldots\cdot(x^2+rx+s)^n,$ (11)

где *a,b, …* - действительные корни многочлена, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Справедлива теорема о представлении правильной дроби в виде суммы простейших дробей.

Теорема: Если знаменатель дроби Q(x) имеет разложение (11), то дробь представима в виде суммы простых дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+...+\frac{A_k}{x-a_i}+...+\frac{B_1}{(x-b)^l}+\frac{B_2}{(x-b)^{l-1}}+...+\frac{B_l}{x-b}+...$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^m}+...+\frac{M_mx+N_m}{x^2+px+q}+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+rx+s)^n}+...+\frac{E_nx+F_n}{x^2+rx+s},$$

где A_1, A_2, ...E_1,...F_n - некоторые коэффициенты.

Поясним применение теоремы на **примере**.

Пусть $Q(x)=(x-1)^3(x+2)(x^2+4)^2$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+4)^2}+\frac{C_2x+D_2}{x^2+4}.$$

Итак, линейный множитель $(x-1)^3$ порождает три простых дроби, $(x+2)$ – одну, $(x^2+4)^2$ – две дроби.

Рассмотрим различные способы нахождения коэффициентов разложения *A, B, C,…*

Примеры:

1.

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}.$$

Если равные дроби имеют одинаковые знаменатели, то и числители их одинаковы, т.е.

$2x+1=A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+1)$ (**)

Положим x=1, тогда $2\cdot1+1=A\cdot2(-2)+B\cdot0+C\cdot0$

x=-1, тогда $2\cdot(-1)+1=A\cdot0+B(-2)(-4)+C\cdot0$

x=3, тогда $2\cdot3+1=A\cdot0+B\cdot0+C\cdot2\cdot4$

Отсюда $A=-\frac{4}{3};B=-\frac{1}{8};C=\frac{7}{8}$.

Следовательно, $\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{-\frac{4}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{x+1}+\frac{\frac{7}{8}}{x-3}$.

Второй способ нахождения *A,B,C* состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях *«x»* в левой и правой частях равенства *(**)*.

1.9 Лекция 12 (2 ч.)

Тема: Определенны интеграл, его свойства, методы вычисления.

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегральные суммы. Определенный интеграл, его геометрический смысл.

2. Простейшие свойства определенного интеграла, теорема о среднем значении. Интеграл с переменным верхним пределом, формула Ньютона - Лейбница.

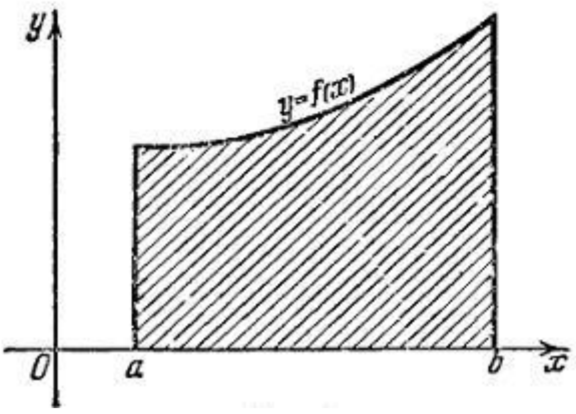
3.Методы вычисления определенного интеграла

1.9.2. Краткое содержание вопросов:

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегральные суммы. Определенный интеграл, его геометрический смысл.

Задача о площади криволинейной трапеции.

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат xOy на отрезке $[a,b]$, где b>a, определена непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$, т.е. $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Фигура aABb, ограниченная снизу отрезком оси Ox, сверху – дугой AB графика функции f, а слева и справа – отрезками прямых $x = a, \quad 0 \le y \le f(a)$ и $x = b, \quad 0 \le y \le f(b)$, называется криволинейной трапецией.



Дадим определение площади криволинейной трапеции на aABb. Разобьем отрезок на n малых отрезков; абсциссы точек разбиения обозначим через $a < x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$ Набор точек деления $\{x_k\}$ $(k = 1,2,...,n)$ назовем разбиением отрезка . Через точки разбиения проведем прямые $x = x_k$, параллельные оси Oy. Эти прямые разобьют криволинейную трапецию aABb на n узких полос, каждая из которых тоже является криволинейной трапецией с основанием $[x_{k-1}, x_k]$. Площадь S трапеции aABb равна сумме площадей полос ее составляющих. Если n достаточно велико и все от

резки малы, то площадь каждой из полос можно заменить площадью соответствующего прямоугольника, которая вычисляется легко. На каждом отрезке выберем какую-нибудь точку c_k, вычислим значение $f(c_k)$ в этой точке и примем за высоту прямоугольника. В силу непрерывности функция мало изменяется на отрезках , если они малы.

Поэтому на таких отрезках ее можно считать постоянной и равной .

Так как площадь одной полосы приближенно равна площади прямоугольника $f(c_k)(x_k - x_{k-1})$, то для площади S криволинейной трапеции aABb получим приближенное равенство

$$S \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \text{, где } \Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) \quad (1)$$

Приближенное равенство (1) тем точнее, чем меньше величина $d = \max\limits_k \Delta x_k$. Величина d называется диаметром разбиения . По определению, *площадью криволинейной трапеции* называется предел суммы S_n площадей прямоугольников при стремлении диаметра разбиения к нулю, т.е.

$$S = \lim_{d \to 0} S_n = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \quad (2)$$

Следовательно, вычисление площади криволинейной трапеции приводит к вычислению предела суммы вида (2) при $d \to 0$.

Задача о пройденном пути. Если закон движения какой – либо точки задан уравнением вида $s = f(t)$, где t – время, а s – пройденный путь, производная $f'(t)$ функции $f(t)$ равна скорости v движения, т.е. $v = f'(t)$. В физике часто приходится решать следующую обратную задачу. Пусть точка движется по прямой со скоростью v. Будем считать, что эта скорость является непрерывной функцией от времени t. Определим путь, пройденный точкой за некоторый отрезок времени от момента t-a до момента t=b. Разобьем отрезок точками $a < t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ на n достаточно малых отрезков времени. Так как за короткий отрезок времени $[t_{k-1}, t_k]$ скорость $v(t)$ почти не изменяется, то можно приближенно считать ее за этот отрезок времени постоянной и равной $v(c_k)$, где $c_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Это означает, что движение точки на отрезке считается равномерным. Тогда путь, пройденный точкой за это время, равен $v(c_k)(t_k - t_{k-1})$, а путь, пройденный за отрезок времени , составляет $S \approx S_n = \sum v(c_k)\Delta t_k$, где $\Delta t_k = (t_k - t_{k-1})$. Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше величина $d = \max\limits_k \Delta t_k$. По определению, *путем s* называется предел суммы при стремлении диаметра разбиения к нулю, т.е.

$$S = \lim_{d \to 0} S_n = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(c_k)\Delta t_k \quad (3)$$

Следовательно, вычисление пройденного пути приводит к вычислению предела суммы вида (3).

Задача о массе стержня

Если стержень однороден, то его истинная плотность одинакова во всех его точках и равна его средней плотности. У неоднородного же стержня истинная плотность *p* меняется от точки к точке. Если определять положение каждой точки *M* стержня с помощью расстояния *x* ее от одного из концов стержня (см. рис. 1), то его плотность *p* в точке *x* будет функцией от *x*, $p = p(x)$. Поставим задачу, как, зная эту функцию и длину *l* стержня, найти его массу *m*.

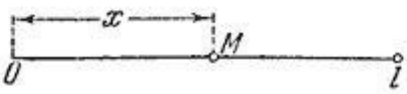


Рис. 1.

При решении этой задачи будем считать плотность $p(x)$ непрерывной функцией. Переходя к решению, разделим стержень точками $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ $(0 < x_k < l)$ на *n* небольших участков (см. рис. 2).

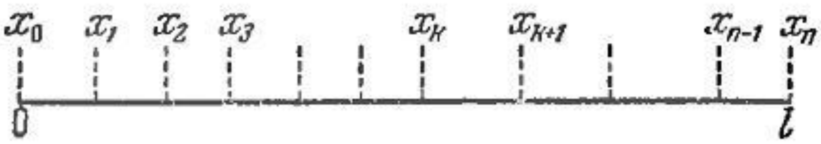


Рис. 2.

Для единообразия обозначений положим еще $x_0 = 0$, $x_n = l$, и пусть λ есть **наибольшая** из разностей $x_{k+1} - x_k$. Отдельный участок $[x_k, x_{k+1}]$ стержня приближенно можно считать однородным [т. к. из-за его малости (непрерывная) функция $p(x)$ не успевает на нем сколько-нибудь заметно измениться]. Делая такое допущение, мы тем самым принимаем плотность $p(x)$ на участке $[x_k, x_{k+1}]$ за постоянную. Пусть значение этой постоянной есть $p(\xi_k)$, где ξ_k есть произвольно выбранная точка участка $[x_k, x_{k+1}]$. Тогда масса участка $[x_k, x_{k+1}]$ будет равна $p(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$, а полная масса стержня будет

$$m = \sum_{k=0}^{n-1} p(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Полученное выражение массы является, однако, лишь приближенным, т. к. на самом деле отдельные участки стержня не однородны. Тем не менее, чем короче эти участки, т. е. чем меньше число λ, тем более точным будет найденное выражение m. Отсюда следует, что точное значение массы таково:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} p(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (1)$$

В рассмотренных задачах применялся один и тот же метод, сводившийся к нахождению предела сумм некоторого вида. К нахождения предела сумм, аналогичных рассмотренным выше, приводит ряд задач естествознания и техники. Поэтому займемся изучением выражений (1) и (2), называемых определенными интегралами, уже не интересуясь их конкретными истолкованиями.

2. Определенный интеграл, как предел интегральных сумм.

Пусть на отрезке , где b>a, задана функция . Выполним следующие четыре операции:

1. разобьем отрезок на части точками Положим . Набор точек деления назовем разбиением отрезка , а величину d –диаметром разбиения;
2. на каждом отрезке выберем какую-нибудь точку , вычислим значение в этой точке. Точки назовем отмеченными точками;
3. умножим значение на длину соответствующего отрезка и сложим все найденные произведения. Суммы вида

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$
, где (4)

назовем (одномерными) *интегральными суммами Римана* для функции f по заданному разбиению отрезка ;

4. измельчим разбиение , т.е. добавим новые точки деления и найдем предел интегральных сумм (4) при (если он существует).

Введем понятие предела интегральных сумм ω_n при .

Определение 1.Число I называется пределом интегральных сумм Римана при , если для любого $\varepsilon. > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|I - \omega_n| < \varepsilon$ при любом разбиении отрезка с диаметром разбиения $d < \delta$ независимо от выбора отмеченных точек $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,2,...,n)$.

Принята следующая запись этого определения: $I = \lim_{d \to 0} \omega_n$.

Замечание. Очевидно, что число I не зависит от разбиения отрезка и от выбора отмеченных точек .

Определение 2.Если интегральные суммы Римана (4) имеют предел при , то этот предел называется определенным (однократным) интегралом от функции f по отрезку и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

2. Простейшие свойства определенного интеграла, теорема о среднем значении. Интеграл с переменным верхним пределом, формула Ньютона - Лейбница.

Основные свойства определенного интеграла

При выводе основных свойств определенного интеграла мы будем исходить из формулы (13) Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F'(x)=f(x)$ при $x\in[a,b]$.

Пример. Найти интеграл от x^2 в пределах от 2 до 4.

Так как $\frac{1}{3}x^3$ есть первообразная для x^2, то согласно формуле (14) имеем

$$\int_2^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

Заметим, что тот же результат мы получили бы, если бы использовали другую первообразную для x^2, например, $\frac{x^3}{3}+1$ или $\frac{x^3}{3}-2$.

Это явление носит общий характер.

Теорема: Определенный интеграл от непрерывной функции не зависит от выбора первообразной для подынтегральной функции.

Будем рассматривать свойства определенного интеграла по группам.

А. Общие свойства.

1. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt,$$

где x, t – любые переменные.

Это свойство непосредственно вытекает из формулы (13).

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю.

Проверим по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный.

В самом деле, переставляя пределы интегрирования, в силу формулы (13) имеем:

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx.$$

Б. Свойство аддитивности.

4. Если промежуток интегрирования $[a,b]$ разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку $[a,b]$, равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.

- • • Пусть, например, $[a,b]=[a,c]\cup[c,b]$, где $a \le c \le b$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = \int_a f(x)dx + \int_c f(x)dx.$$

Замечание: Формула остается верной, если c лежит вне отрезка $[a,b]$ и подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$.

В. Свойство линейности.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

Действительно, пусть *F(x)* – первообразная для *f(x)* на [*a*,*b*] и *A* – постоянная величина, тогда *A F(x)* есть первообразная для *Af(x)*, так как

$$\left[AF(x)\right]' = AF'(x) = Af(x).$$

Следовательно, имеем

$$\int_a^b Af(x)dx = AF(x)\Big|_a^b = AF(b) - AF(a) = A\left[F(b) - F(a)\right] = A\int_a^b f(x)dx.$$

6. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

Рассмотрим, например, алгебраическую сумму $f(x)+g(x)-h(x)$ трех непрерывных функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ и пусть $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ – их первообразные, т.е. $F'(x)= f(x)$, $G'(x)= g(x)$, $H'(x)= h(x)$.

Тогда $F(x)+G(x) - H(x)$ является первообразной для суммы $f(x)+g(x)-h(x)$, так как

$$\left[F(x) + G(x) - H(x)\right]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = f(x) + g(x) - h(x).$$

Отсюда имеем

$$\int_a^b \left[f(x)+g(x)-h(x)\right]dx = \left[F(x)+G(x)-H(x)\right]_a^b = \left[F(b)+G(b)-H(b)\right] - \left[F(a)+G(a)-H(a)\right] =$$

$$= \left[F(b)-F(a)\right] + \left[G(b)-G(a)\right] - \left[H(b)-H(a)\right] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

Г. Свойство монотонности.

7. Если подынтегральная функция определенного интеграла непрерывна и неотрицательна, а верхний предел интегрирования больше нижнего или равен ему, то определенный интеграл также неотрицателен.

В самом деле, пусть $f(x)\geq 0$ при $a \leq x \leq b$. Так как $F'(x)= f(x)\geq 0$, то первообразная $F(x)$ есть неубывающая функция. В таком случае при $b\geq a$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0.$$

8. Неравенство между непрерывными функциями можно интегрировать почленно при условии, что верхний предел интегрирования больше нижнего.

Действительно, пусть $f(x)\leq g(x)$, $a \leq x \leq b$, где $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке [*a*,*b*]. Так как $g(x)- f(x) \geq 0$, то при $b\geq a$ в силу свойств 6, 7 имеем:

$$\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0, \text{отсюда} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Замечание: Пусть $f(x)$ – знакопеременная непрерывная функция на отрезке [*a*,*b*], где $b\geq a$. Например (рис. 3), $f(x)\leq 0$ при $a \leq x \leq \beta$,

$f(x)>0$ при $\beta \leq x \leq \gamma$ и $f(x)\leq 0$ при $\gamma\leq x \leq b$.

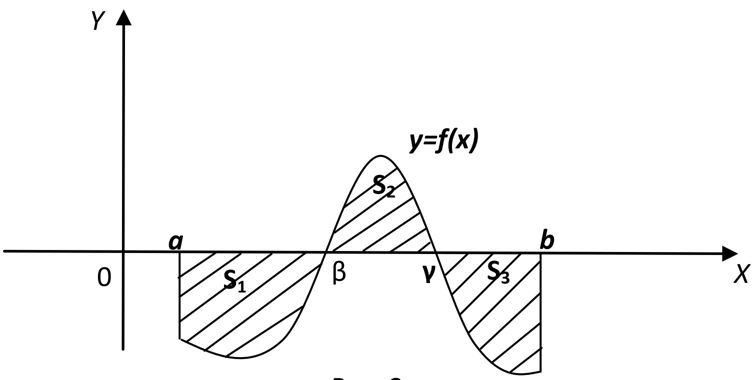


Рис. 3.

В силу свойства аддитивности 6, учитывая геометрический смысл интеграла, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_3,$$

где S_1, S_2, S_3 – площади соответствующих криволинейных трапеций.

Таким образом, определенный интеграл, в общем случае при ***a<b*** представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций, где площади трапеций, расположенных выше оси *Ox*, берутся со знаком «плюс», а площади трапеций, расположенных ниже оси *Ox,* - со знаком «минус». Для ***b < a*** наоборот.

Заметим, что площадь заштрихованной на рис. 3 фигуры, выражается интегралом

$$\int_a^b |f(x)|dx = S_1 + S_2 + S_3 \qquad \boldsymbol{(b < a)}.$$

9.**Теорема о среднем:** Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента (предполагается, что верхний предел интегрирования больше нижнего).

Доказательство. В самом деле, в силу формулы Ньютона-Лейбница имеем $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F'(x)=f(x)$. Применяя к разности первообразных теорему о конечном приращении функции, получим

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(c)=(b-a)f(c), \text{ где } a < c < b.$$

Отсюда

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), \text{ где } a < c < b. \qquad (15)$$

Таким образом, формула (15) геометрически означает, что можно всегда подобрать на дуге АВ такую точку С с абсциссой *c*, заключенной между *a* и *b*, что площадь соответствующего прямоугольника *a*DE*b* с высотой *c*С будет в точности равна площади криволинейной трапеции *a*AB*b*.

Итак, площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией, равновелика площади прямоугольника с тем же «основанием» и высотой, равной некоторой средней ординате линии.

Число $f(c)=\mu$ носит название среднего значения функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$. Из формулы (15) имеем:

$$\mu = \frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_a^b f(x)dx. \qquad (16)$$

3.Методы вычисления определенного интеграла

1.Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$, $\upsilon=\upsilon(x)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции. Имеем:

$$d\left[u(x)\upsilon(x)\right] = \upsilon(x)du(x) + u(x)d\upsilon(x).$$

Интегрируя это равенство в пределах от a до b и учитывая, что

$du(x) = u'(x)dx$ и, $d\upsilon(x) = \upsilon'(x)dx$,

Находим

$$u(x)\upsilon(x)\Big|_a^b = \int_a^b \upsilon(x)u'(x)dx + \int_a^b u(x)\upsilon'(x)dx.$$

Отсюда получаем формулу интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u(x)\upsilon'(x)dx = u(b)\upsilon(b) - u(a)\upsilon(a) - \int_a^b \upsilon(x)u'(x)dx. \qquad (17)$$

Для краткости употребляется обозначение

$$u(b)\upsilon(b) - u(a)\upsilon(a) = u(x)\upsilon(x)\Big|_a^b.$$

Пример. Найти $\int_0^{2\pi} x\cos x dx$.

$$\int_0^{2\pi} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x dx = .$$

$$= 2\pi \sin 2\pi - 0\cdot \sin 0 + \cos x\Big|_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 0$$

2. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Допустим, по каким-то соображениям нам желательно ввести новую переменную t, связанную с прежней переменной x соотношением: $x=\varphi(t)$ $(\alpha\le t\le \beta)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция. Если при этом: 1) при изменении t от α до β переменная x меняется от a до b, т.е. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$; 2) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\varphi(\mathrm{t}))\varphi'(\mathrm{t})\mathrm{dt}$.

Замечание: При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к прежней переменной, достаточно лишь ввести новые пределы интегрирования.

Пример. Вычислить $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \begin{vmatrix} t = \sqrt{1+x} \\ \tilde{o} = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x = 0 & x = 3 \\ t = 1 & t = 2 \end{vmatrix} = \int_1^2 (t^2 - 1)\cdot t\cdot 2tdt = 2\cdot\int_1^2 (t^4 - t^2)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = 7\frac{11}{15}.$$

1.10 Лекция 13 (2 ч.)

Тема: Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах

2. Вычисление объема тела с известным поперечным сечением, задача о нахождении объема тела вращения.

3. Длина дуги плоской кривой. Дифференциал дуги.

4. Площадь поверхности вращения.

5. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

6. Несобственные интегралы, их признаки сходимости расходимости.

1.10.2. Краткое содержание вопросов:

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах

Формулы для нахождения площади плоской фигуры:

в декартовой системе координат (рис.5) $$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx; \qquad (18)$$

в полярной системе координат (рис.6) $$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi))d\varphi; \qquad (19)$$

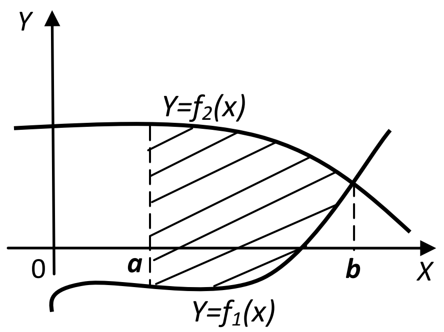


Рис. 5.

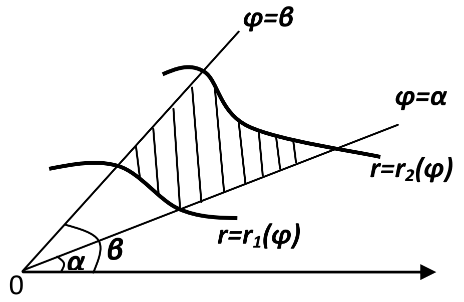
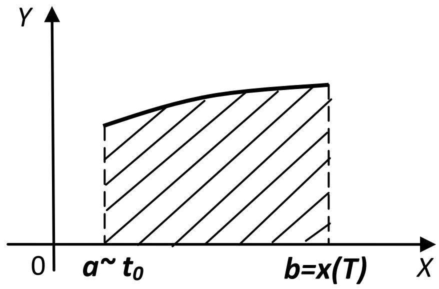


Рис. 6.

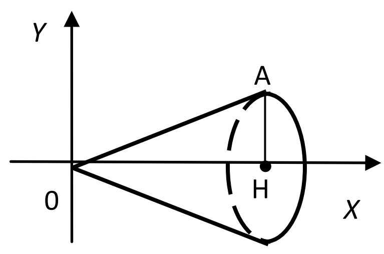
в случае параметрического задания кривой

$$S=\int_{t_0}^{T} y(t)x'(t)dt. \qquad (20)$$



2. Вычисление объема тела с известным поперечным сечением, задача о нахождении объема тела вращения.

Пусть T – тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг OX, тогда **объем тела T** определяется по



формуле: $$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (24).$$

Пример. Найти объем прямого кругового конуса (радиус основания -R, высота- H), полученного вращением треугольника OAH вокруг оси OX.

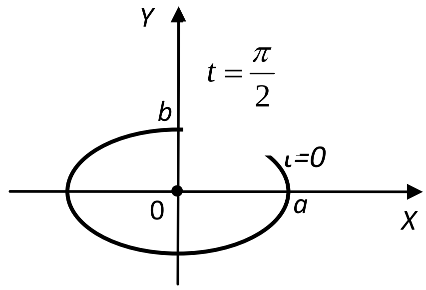
Решение: уравнение OA: $Y=\dfrac{R}{H}x,$ следовательно

$$V=\pi\int_0^H\frac{R^2x^2}{H^2}dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2H(\text{ед.}^3).$$

Замечание: Если кривая *f(x)* задана параметрически или в полярной системе координат, то в определенном интеграле надо сделать замену переменных. При этом не следует забывать про **новые пределы интегрирования.**

Пример. Найти объем эллипсоида, полученного вращением эллипса $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ вокруг оси OX

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^a y^2dx=\left|\begin{matrix}y=b\sin t\\ dx=-a\sin t\,dt\\ \alpha=\dfrac{\pi}{2};\beta=0\end{matrix}\right|=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b^2\sin^2t(-a\sin t)dt=$$



$$=\pi ab^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0(1-\cos^2t)d(\cos t)=\pi ab^2\left(\cos t-\frac{\cos^3t}{3}\right)\Bigg|_{\pi/2}^0=\frac{2}{3}\pi ab^2(\text{ед.}^3).$$

Площадь поверхности тела вращения *T* вычисляется по формулам:

1) в декартовой системе координат $P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$, (25)

где *f(x)* – непрерывно дифференцируема на [*a*,*b*];

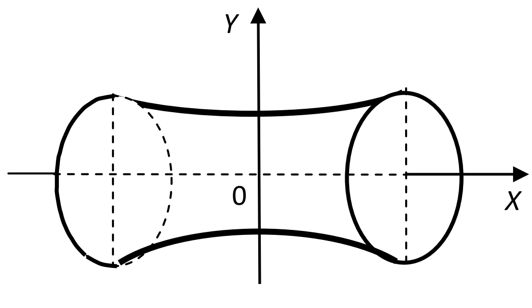
2) в полярной системе координат $P=2\pi\int_\alpha^\beta\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi$, (26)

где $\rho=\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\forall\varphi\in[\alpha,\beta]$;

3) в случае параметрического задания кривой $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},t_0\le t\le T$

$$P=2\pi\int_{t_0}^T y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt \qquad (27)$$

Пример. Найдите площадь поверхности катеноида, образованного вращение вокруг оси OX цепной линии $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $x\in[-1;1]$



$a)\; y' = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x});$

$б)\; 1 + (y')^{2} = 1 + \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})^{2} = \frac{1}{4}(4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{ч} + e^{-x})^{2}$

$$P = 4\pi\int_{0}^{1}\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\sqrt{\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^{2}}\,dx = 4\pi\int_{0}^{1}\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})dx =$$

$$= \pi\int_{0}^{1}(e^{2x}+2+e^{-2x})dx = = \pi\left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \pi\left(\frac{e^{2}}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2}\right)(ед.^{2}).$$

3. Длина дуги плоской кривой. Дифференциал дуги.

Формулы для нахождения длины дуги незамкнутой плоской кривой без точек самопересечения:

в декартовой системе координат $\quad l = \int_{a}^{b}\sqrt{1 + [f'(x)]^{2}}\,dx$, (21)

где $f(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[a,b]$;

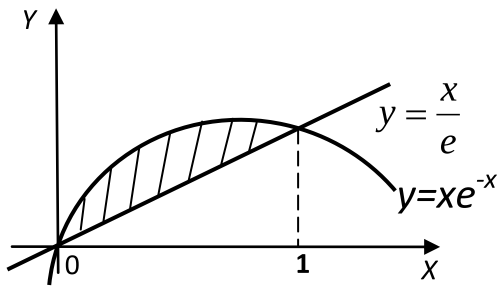
в полярной системе координат $\quad l = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^{2} + (\rho')^{2}}\,d\varphi$, (22)

где $\rho = \rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\forall\varphi \in [\alpha,\beta]$.

в случае параметрического задания кривой $l = \int_{t_0}^{T}\sqrt{(x_t')^{2} + (y_t')^{2}}\,dt$, (23) где производные от x и y по t непрерывны на $[t_0,T]$.

Примеры:

1. Найти площадь области, ограниченной графиками функций $y = \frac{x}{e}$ и $y=xe^{-x}$.



Решение. Строим графики функций $y = \frac{x}{e}$ и $y=xe^{-x}$ в одной системе координат. При этом график функции $y=xe^{-x}$ строим, предварительно проведя ее полное исследование.

Находим точки пересечения кривых

$$\begin{cases} y = xe^{-x} \\ y = \frac{x}{e} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{e} = xe^{-x} \Rightarrow x\left(e^{-x} - \frac{1}{e}\right) = 0.$$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ e^{-x} = e^{-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Площадь области находим по формуле (18): $S=\int\limits_0^1 (xe^{-x}-\frac{x}{e})dx=\int\limits_0^1 xe^{-x}dx-\int\limits_0^1 \frac{x}{e}dx$

Первый интеграл берется методом интегрирования по частям, второй интеграл табличный (предлагаем выполнить интегрирование самостоятельно). Окончательно $S=1-\frac{2}{e}-\frac{1}{2e}=\frac{2e-5}{2e}$ (кв. ед.).

2. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho=a\cdot\sin3\varphi$ (a>0). Установим область определения этой функции, а так как в полярной системе координат $\rho\geq0$ и $0\leq\varphi<2\pi$, то построим вспомогательный график функции $sin3\varphi$ на промежутке $[0,2\pi]$. Он получается из графика функции $sin\varphi$ сжатием в 3 раза по оси φ (рис.9).

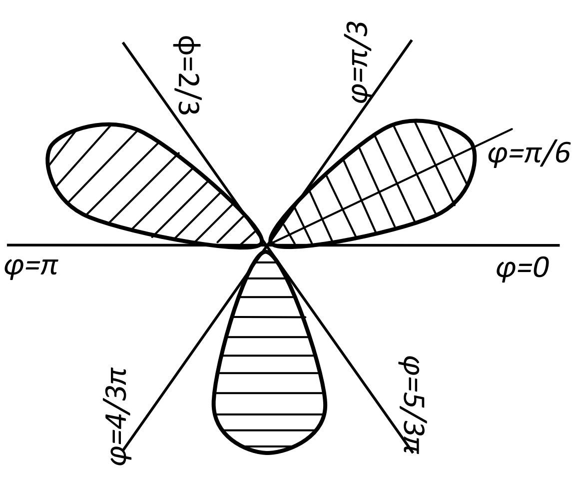
Т.к. $\rho\geq0$ => $sin3\varphi\geq0$, то из графика находим: $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$.

Составим таблицу значений функции $\rho=\rho(\varphi)$ на отрезке $[0,\frac{\pi}{3}]$. Строим кривую в полярной системе координат при $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$. Т.к. график функции $sin3\varphi$ симметричен относительно прямой $\varphi=\frac{\pi}{6}$, то полученная кривая симметрична относительно луча с уравнением $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Получаем один «лепесток» кривой. Остальные два «лепестка» (при $\frac{2\pi}{3}\leq\varphi\leq\pi$ и при $\frac{4\pi}{3}\leq\varphi\leq\frac{5\pi}{3}$) получаются аналогично.

В силу симметрии кривой достаточно вычислить площадь половины одного «лепестка» и умножить результат на 6. Для этого применим формулу площади плоской фигуры в полярных координатах (19).

$$\frac{1}{6}S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6}a^2\sin^2\varphi\cdot d\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/6}\frac{1-cos6\varphi}{2}d\varphi=\frac{a^2}{4}\int\limits_0^{\pi/6}(1-cos6\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{4}\left(\varphi-\frac{sin6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}sin\pi-0+\frac{1}{6}sin0\right)=\frac{a^2\pi}{24}.$$



Ответ: $S=\dfrac{\pi a^2}{4}$ (кв.ед.).

3. Найдите длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Решение. Построение кривой в полярной системе координат подробно разъяснено в предыдущем примере. Т.к. данная функция *ρ=ρ(φ)* четная, то кардиоида симметрична относительно луча *φ=0*, т.е. относительно полярной оси (рис.11). Составим таблицу значений функции *ρ(φ)*.

φ	0	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	π
ρ	$2a$	$\dfrac{3a}{2}$	a	a	0

Применяем формулу (22) для вычисления длины дуги кривой, заданной в полярных координатах: $\dfrac{1}{2}l=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.$

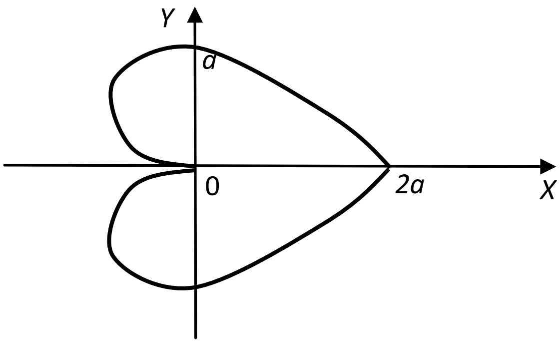
Имеем: $\rho'(\varphi)=(a(1+\cos\varphi))'=-a\sin\varphi;$

$\rho^2+(\rho')^2=a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi=a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2a^2(1+\cos\varphi)=$

$=4a\,cos^2\dfrac{\varphi}{2}$. Т.к. $0\le\varphi\le\pi$, то $0\le\varphi/2\le\pi/2$ и $\cos(\varphi/2)\ge 0$. Поэтому

$$\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=\sqrt{4a^2\,cos^2\frac{\varphi}{2}}=+2a\,cos\frac{\varphi}{2}\ .$$

Следовательно $\dfrac{l}{2}=\int\limits_0^{\pi}2a\,cos\dfrac{\varphi}{2}d\varphi=2a\int\limits_0^{\pi}cos(\dfrac{1}{2}\varphi)d\varphi=4a\,sin\dfrac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=4a.$



Ответ: l=8a (ед.)

4. Площадь поверхности вращения.

Площадь поверхности тела вращения определяется по формуле:

$$P=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением дуги параболы y2 = 2x вокруг оси Ox от x = 0 до x = 2.

Решение. В нашем случае $f(x)=\sqrt{2x}$. Поэтому

$$P=2\pi\int_0^2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx=2\pi\int_0^2\sqrt{2x+1}\,dx=$$

$$=\frac{2\pi}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{2\pi}{3}(5^{\frac{3}{2}}-1).$$

Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ Вокруг оси Ох.

Решение. Из уравнения эллипса имеем: $y=\frac{5}{2}\sqrt{4-x^2}$. Найдем производную: $y'=-\frac{5}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

Тогда $1+y'^2=\frac{16+21x^2}{4(4-x^2)}$. Так как полуось эллипса $a=2$, то $-a\leqslant x\leqslant a$ и, следовательно,

$$P=2\pi\int_{-2}^{2}\frac{5}{2}\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16+21x^2}{4-x^2}}\,dx=$$

$$=\frac{5\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{16+21x^2}\,dx=5\pi\int_0^2\sqrt{16+21x^2}\,dx=$$

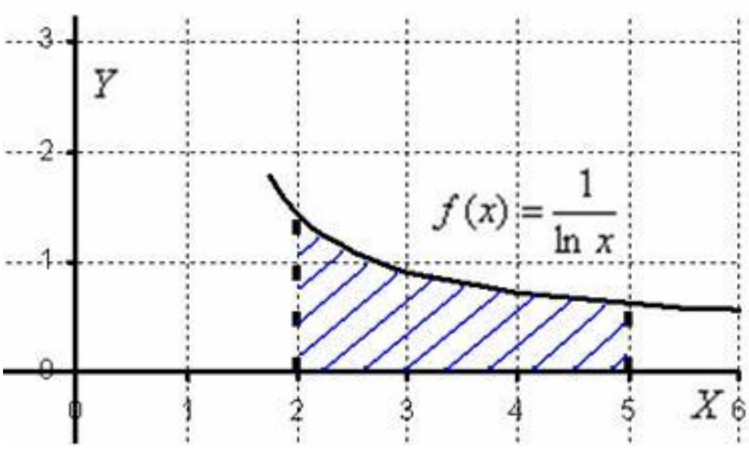
$$=\int_0^2\frac{16+21x^2}{\sqrt{16+21x^2}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{21}}\left[5\sqrt{21}+4\ln(2\sqrt{21}+10)-4\ln 4\right].$$

5. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Рассмотрим два метода приближенного вычисления определенного интеграла – **метод трапеций** и **метод Симпсона**.

Сначала зададимся вопросом, а зачем вообще нужны приближенные вычисления? Вроде бы можно найти первообразную функции и использовать формулу Ньютона-Лейбница, вычислив точное значение определенного интеграла. В качестве ответа на вопрос сразу рассмотрим демонстрационный пример с рисунком.



Вычислить определенный интеграл $\int_2^5\frac{dx}{\ln x}$

Всё было бы хорошо, но в данном примере интеграл не берётся – перед вами неберущийся, так называемый *интегральный логарифм*. А существует ли вообще этот интеграл? Изобразим на чертеже график подынтегральной функции $f(x)=\frac{1}{\ln x}$:

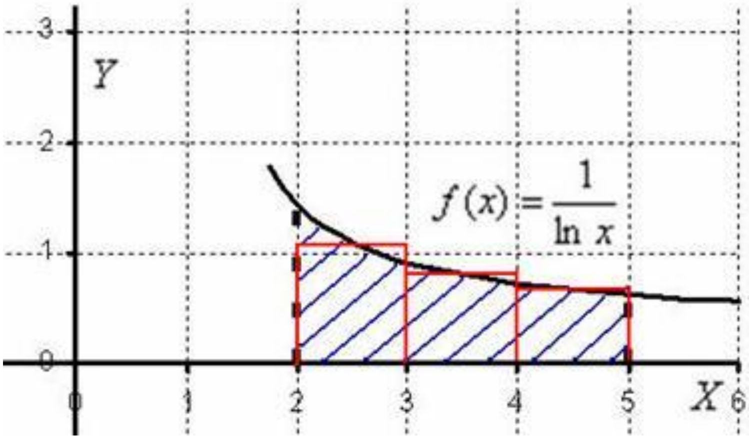
Подынтегральная функция **непрерывна** на отрезке $[2;5]$ и определенный интеграл $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ численно равен заштрихованной площади. Да вот только одна загвоздка – интеграл не берётся. И в подобных случаях на помощь как раз приходят численные методы. При этом задача встречается в двух формулировках:

1) Вычислить определенный интеграл приближенно**, округляя результат до определённого знака после запятой**. Например, до двух знаков после запятой, до трёх знаков после запятой и т.д. Предположим, получился приближенный ответ 5,347. На самом деле он может быть не совсем верным (в действительности, скажем, более точный ответ 5,343). Наша задача состоит **лишь в том**, чтобы округлить результат до трёх знаков после запятой.

2) Вычислить определенный интеграл приближенно, **с определённой точностью**. Например, вычислить определённый интеграл приближенно с точностью до 0,001. Что это значит? Это значит, мы должны отыскать такое приближенное значение, которое **по модулю** *(в ту или другую сторону)* отличается от истины не более чем на 0,001.

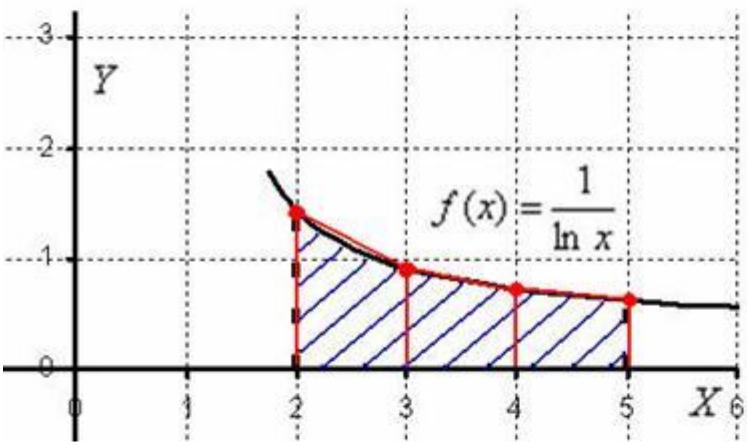
Существуют несколько основных методов приближенного вычисления определенного интеграла, который встречается в задачах:

Метод прямоугольников. Отрезок интегрирования разбивается на несколько частей и строится ступенчатая фигура, которая по площади близка к искомой площади:



В данном примере проведено разбиение отрезка интегрирования $[2;5]$ на три отрезка: $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$. Очевидно, что чем чаще разбиение, тем выше точность. «Ступенчатое» приближение является самым простым, и, видимо, поэтому довольно редко встречается в практических задачах.

Метод трапеций. Идея аналогична. Отрезок интегрирования разбивается на несколько промежуточных отрезков, и график подынтегральной функции приближается *ломаной* линией:



Таким образом, наша площадь (синяя штриховка) приближается суммой площадей трапеций (красный цвет). Отсюда и название метода. Легко заметить, что метод трапеций даёт значительно лучшее приближение, чем метод прямоугольников (при одинаковом количестве отрезков разбиения). И, естественно, чем больше более мелких промежуточных отрезков мы рассмотрим, тем будет выше точность. Метод трапеций время от времени встречается в практических заданиях, и в данной статье будет разобрано несколько примеров.

Метод Симпсона (метод парабол). Это более совершенный способ – график подынтегральной функции приближается не ломаной линией, а параболами. Сколько промежуточных отрезков – столько и маленьких парабол. Если взять те же три отрезка, то метод Симпсона даст ещё более точное приближение, чем метод прямоугольников или метод трапеций.

Чертеж строить не вижу смысла, поскольку визуально приближение будет накладываться на график функции $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ (ломаная линия предыдущего пункта – и то практически совпала).

Как вычислить определенный интеграл методом трапеций?

Сначала формула в общем виде.

Рассмотрим определенный интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$. Проведём разбиение отрезка $[a;b]$ на n **равных** отрезков: $[x_0;x_1],[x_1;x_2],[x_2;x_3],\ldots,[x_{n-1};x_n]$. При этом, очевидно: $x_0=a$ (нижний предел интегрирования) и $x_n=b$ (верхний предел интегрирования). Точки $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ также называют **узлами**.

Тогда определенный интеграл можно вычислить приближенно **по формуле трапеций**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right]$$

,где: $h=\dfrac{(b-a)}{n}$ – длина каждого из маленьких отрезков или **шаг**; $f(x_i)$ – значения подынтегральной функции в точках $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$.

Пример 1

Вычислить приближенно определенный интеграл по формуле трапеций. Результаты округлить до трёх знаков после запятой.

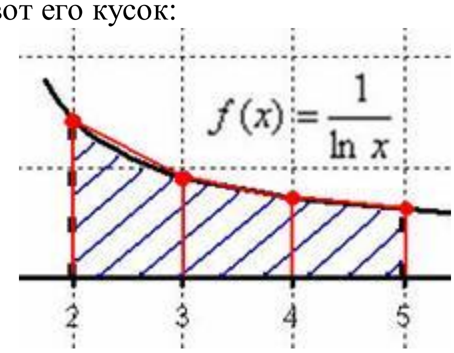
$$I=\int\limits_2^5\frac{dx}{\ln x}$$

а) Разбив отрезок интегрирования на 3 части.

б) Разбив отрезок интегрирования на 5 частей.

Решение:

а) Специально для чайников я привязал первый пункт к чертежу, который наглядно демонстрировал принцип метода. Если будет трудно, посматривайте на чертёж по ходу комментариев, вот его кусок:



По условию отрезок интегрирования нужно разделить на 3 части, то есть $n=3$. Вычислим длину каждого отрезка разбиения: $h=\dfrac{(b-a)}{n}=\dfrac{5-2}{3}=1$. Параметр h, напоминаю, также называют **шагом**.

Сколько будет точек x_i (узлов разбиения)? Их будет **на одну больше**, чем количество отрезков:

$x_0=2$ $\quad x_1=x_0+h=2+1=3$ $\quad x_2=x_1+h=3+1=4$ $\quad x_3=x_2+h=4+1=5$

Ну а общая формула трапеций сокращается до приятных размеров: $\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_3)}{2} + f(x_1) + f(x_2)\right]$

Для расчетов можно использовать обычный микрокалькулятор:

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}443$$

$$f(x_1) = f(3) = \frac{1}{\ln 3} \approx 0{,}910$$

$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{\ln 4} \approx 0{,}721$$

$$f(x_3) = f(5) = \frac{1}{\ln 5} \approx 0{,}621$$

Обратите внимание, что, **в соответствии с условием задачи, все вычисления следует округлять до 3-го знака после запятой**.

Окончательно:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_3)}{2} + f(x_1) + f(x_2)\right] \approx 1 \cdot \left[\frac{1{,}443+0{,}621}{2} + 0{,}910 + 0{,}721\right] = 2{,}664$$

С геометрической точки зрения мы вычислили сумму площадей трёх трапеций *(см. рис. выше)*.

б) Разобьём отрезок интегрирования на 5 равных частей, то есть $n = 5$. Зачем это нужно? Чтобы Фобос-Грунт не падал в океан – увеличивая количество отрезков, мы увеличиваем точность вычислений.

Если $n = 5$, то формула трапеций принимает следующий вид: $\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right]$

Найдем шаг разбиения: $h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$, то есть, длина каждого промежуточного отрезка равна 0,6.

При чистовом оформлении задачи все вычисления удобно оформлять расчетной таблицей:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2,6	3,2	3,8	4,4	5
$f(x_i)$	1,443	1,047	0,860	0,749	0,675	0,621

В первой строке записываем «счётчик»

Как формируется вторая строка, думаю, всем видно – сначала записываем нижний предел интегрирования $a = x_0 = 2$, остальные значения получаем, последовательно приплюсовывая шаг $h = 0{,}6$.

По какому принципу заполняется нижняя строка, тоже, думаю, практически все поняли. Например, если $x_3 = 3{,}8$, то $f(3{,}8) = \frac{1}{\ln 3{,}8} \approx 0{,}749$. Что называется, считай, не ленись.

В результате:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_5)}{2} + f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4) \right] =$$

$$= 0{,}6 \cdot \left[\frac{1{,}443+0{,}621}{2} + 1{,}047+0{,}860+0{,}749+0{,}675 \right] = 2{,}617$$

Если для 3 отрезков разбиения приближённое значение составило $I_3 \approx 2{,}664$, то для 5 отрезков $I_5 \approx 2{,}617$. Таким образом, с большой долей уверенности можно утверждать, что, по крайне мере $I \approx 2{,}6$.

6. Несобственные интегралы, их признаки сходимости расходимости.

Определение: Пусть *f(x)* определена на [*a*, $+\infty$) и для любого $b \geq a$ существует $\int_a^b f(x)dx$, тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ называется **несобственным интегралом первого рода от f(x).** Если этот предел конечен, то интеграл называется сходящимся, если предел бесконечен или вовсе не существует, то интеграл называется расходящимся.

Примеры:

1. $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)^3} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b (x+1)^{-3} d(x+1) = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{(x+1)^{-2}}{-2} \right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2(b+1)^2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} \Rightarrow$$ интеграл сходится.

2. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{x^4+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x^3 dx}{x^4+1} = \left| \begin{matrix} t = x^4+1 & \alpha = 0^4+1 = 1 \\ dt = 4x^3 dx & \beta = b^4+1 \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b^4+1} \frac{1}{4} \cdot \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{b\to+\infty} ln|t| \Big|_1^{b^4+1} = \frac{1}{4} \lim_{b\to+\infty} ln\left|b^4+1\right| = +\infty \Rightarrow$$ интеграл расходится.

Определение: Пусть *f(x)* определена и интегрируема в [*a*, *b*-ε], $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < b-a$ и неограниченна в [*b*-ε, *b*], тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ называется **несобственным интегралом второго рода.** Интеграл называется сходящимся, если этот предел конечен, и расходящимся, если предел бесконечен или не существует.

Пример: $$\int_0^1 \frac{dx}{3\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{3\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{2}{3} \lim_{\varepsilon\to 0} (1-\sqrt{\varepsilon}) = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

интеграл сходится.

1.11 Лекция 14 (2 ч.)

Тема: Кратные интегралы, их свойства, вычисление, приложения.

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Задачи о вычислении объема тела, о вычислении массы пластины.

2. Двойной интеграл, его свойства.

3. Вычисление двойного интеграла в декартовых, полярных координатах.

4. Площадь поверхности

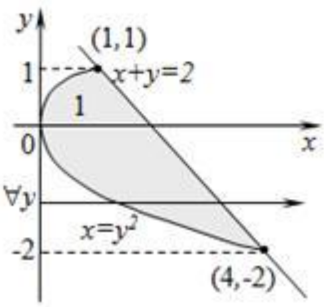
1.11.2. Краткое содержание вопросов:

1. Задачи о вычислении объема тела, о вычислении массы пластины.

Если плоская фигура занимает область $D \subset XOY$, то ее площадь может быть вычислена с помощью двойного интеграла по его свойству о значении двойного интеграла от функции, тождественно равной единице на области интегрирования. В результате получается формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла: $S_D = \iint\limits_D dS$

Пример (вычисление площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла)

Вычислить площадь фигуры, занимающей область D, ограниченную линиями $x = y^2$ и $x + y = 2$.



Решение

Строим область D и записываем ее системой неравенств:

$$D: \begin{cases} -2 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le 2 - y \end{cases}$$

По формуле (1) вычисляем площадь:

$$S_D = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y} dx = \int\limits_{-2}^{1} dy \cdot x\Big|_{y^2}^{2-y} = \int\limits_{-2}^{1} \left(2 - y - y^2\right) dy =$$

$$= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 2(1+2) - \frac{1}{2}(1-4) - \frac{1}{3}(1+8) = 4{,}5$$

Ответ: $S_D = 4{,}5$ (единиц площади).

Пусть на прямоугольнике G: $a \le x \le b, c \le y \le d$ задана неотрицательная функция $z = f(x;y)$. Найдем формулу для объема V тела, координаты точек которого удовлетворяют условиям: $(x;y) \in G, 0 \le z \le f(x;y)$.

Для функции $f(x;y), (x;y) \in G$, составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_i;\eta_j) \Delta x_i \Delta y_j$.

Эта сумма приближенно равна объему V и, очевидно, стремится к V при $n \to \infty$. Следовательно, $V = \iint\limits_G f(x;y)\,dxdy$.

Заметим, что эта формула справедлива и в том случае, когда G – произвольная область, ограниченная гладкими кривыми.

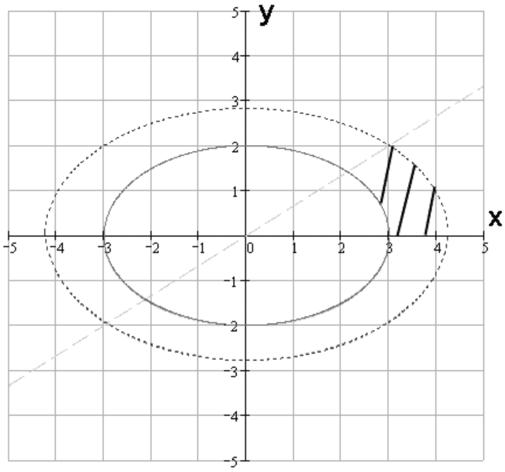
Задача. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ -поверхностная плотность. Найти массу пластинки. $D: 1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 2; y \ge 0, y \le \frac{2}{3}x; \mu = \frac{y}{x}.$

Обобщенная полярная система координат:

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi, \\ y = 2\rho\sin\varphi \end{cases}$$

Якобиан перехода:

$$I = \left| \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta\varphi} & \frac{\delta x}{\delta\rho} \\ \frac{\delta y}{\delta\varphi} & \frac{\delta y}{\delta\rho} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} -3\rho\sin\varphi & 3\cos\varphi \\ 2\rho\cos\varphi & 2\sin\varphi \end{vmatrix} \right| = |-6\rho\sin^2\varphi - 6\rho\cos^2\varphi| = 6\rho.$$



$$m = \int_0^{arctg\frac{2}{3}} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} 6\rho \cdot \frac{2\sin\varphi}{3\cos\varphi} d\rho = \int_0^{arctg\frac{2}{3}} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} 4\rho \cdot tg\varphi d\rho = 2\int_0^{arctg\frac{2}{3}} tg\varphi d\varphi =$$

$$= -2\ln|\cos\varphi| \Big|_0^{arctg\frac{2}{3}} = \ln 13 - 2\ln 3.$$

2. Двойной интеграл, его свойства.

Пусть функция $f(x;y)$ определена на области G (прямоугольник): $a \le x \le b, c \le y \le d$ (рис. 17). Отрезок $[a;b]$ оси Ox точками $x_i = a + \frac{b-a}{n}i, (i = 0,1,...,n)$ разобьем на n отрезков $[x_{i-1};x_i], (i = 1,...,n)$ длины $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Отрезок $[c;d]$ оси Oy точками $y_j = c + \frac{d-c}{n}j, (j = 0,1,...,n)$ разобьем на n отрезков $[y_{j-1};y_j], (j = 1,...,n)$ длины $\Delta y_j = \frac{d-c}{n}$.

Тогда прямоугольник G разобьется на n^2 прямоугольников G_{ij}, площадь каждого из которых равна $\Delta x_i \Delta y_j$.

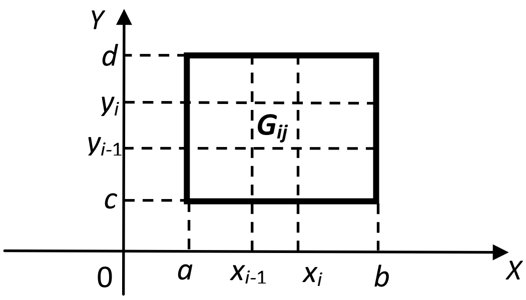


Рис. 17.

Составим двойную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i;\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$ где $(\xi_i;\eta_j)$ - некоторая точка прямоугольника G_{ij}.

Эта сумма называется **интегральной суммой** функции $f(x;y)$. Если предел интегральной суммы при $n \to \infty$ существует и не зависит от выбора точек $(\xi_i;\eta_j)$, то он называется **двойным интегралом** от функции $f(x;y)$ по области G и обозначается $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$.

Таким образом, согласно определению

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i;\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j \ .$$

Очевидно, что $\iint\limits_G dxdy = S(G)$, где $S(G)$ есть площадь области G.

Из определения двойного интеграла и соответствующих свойств пределов последовательностей сразу получается следующее важное утверждение:

Если интегралы от функций $f(x;y)$ и $g(x;y)$ по области G существуют, то для любых чисел α и β интеграл по области G от функции $\alpha f(x;y)+\beta g(x;y)$ также существует и при этом выполняется равенство:

$$\iint\limits_G (\alpha f(x;y)+\beta g(x;y))dxdy = \alpha\iint\limits_G f(x;y)dxdy + \beta\iint\limits_G g(x;y)dxdy.$$

Отсюда, в частности, следует, что постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла и что двойной интеграл от суммы функций равен сумме двойных интегралов от этих функций.

Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольника)

Пусть функция $f(x;y)$ определена и непрерывна на области G (прямоугольник): $a \le x \le b, c \le y \le d$. Используя определение и свойства можно показать, что вычисление двойного интеграла от $f(x;y)$ по области G сводится к вычислению двух однократных интегралов: интеграла по x от a до b и интеграла по y от c до d.

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x;y)dx\right)dy \qquad (33)$$

Формула (33) называется **формулой сведения двойного интеграла к повторному.** Повторный интеграл, стоящий в правой части, обычно записывают иначе, а именно:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx \qquad (34)$$

Справедлива и другая формула сведения двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x;y)dy \qquad (34')$$

Примеры:

1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x;y) = x^2 + y\sin xy$ по области G: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

Воспользуемся формулой (34) сведения двойного интеграла к повторному

$$\iint\limits_G (x^2 + y\sin xy)dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 (x^2 + y\sin xy)dx.$$

Сначала, считая y постоянной, вычислим интеграл по x

$$\int_0^1 (x^2 + y\,sin\,xy)dx = \left(\frac{x^3}{3} - cos\,xy\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - cos\,y + 1 = \frac{4}{3} - cos\,y\,,$$

затем от полученной функции вычислим интеграл по y

$$\iint\limits_G (x^2 + y\sin xy)dxdy = \int_0^1\left(\frac{4}{3} - \cos y\right)dy = \frac{4}{3} - \sin y\Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \sin 1.$$

2. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x;y) = y\cos x + xe^y$ по области *G*: $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1$

Воспользуемся формулой (34′):

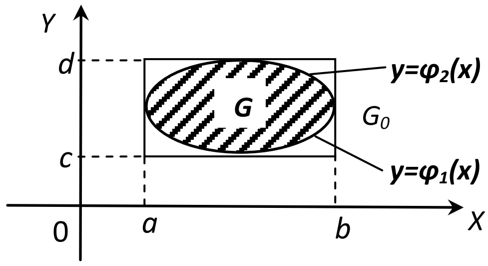
$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^1 (y\cos x + xe^y)dy = \int_0^{\pi} \left(\frac{y^2}{2}\cos x + xe^y \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\cos x + xe - x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos x dx + (e-1)\int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{2}\cdot 0 + (e-1)\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}(e-1)$$

3. Вычисление двойного интеграла в декартовых, полярных координатах.

Определение двойного интеграла для произвольной области

Пусть функция *f(x;y)* определена на некоторой ограниченной области *G*. Через G_0 обозначим наименьший прямоугольник, который содержит область *G* и стороны которого параллельны осям координат.



Через $f_0(x;y)$ обозначим функци авна *f(x;y)* на области *G* и нулю вне *G*. Теперь по определению положим

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_{G_0} f_0(x;y)dxdy.$$

Пусть область *G* ограничена слева и справа прямыми *x=a*, *x=b*, а снизу и сверху графиками непрерывных функций $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f_0(x;y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \right) dx,$$

так как при фиксированном *x* функция $f_0(x;y)$ равна *f(x;y)* на отрезке $[\varphi_1(x);\varphi_2(x)]$ и нулю вне этого отрезка. Таким образом, для двойного интеграла по области *G*: $a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ справедлива следующая формула:

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy.$$

Аналогично, если область *G* ограничена снизу и сверху прямыми *y=c*, *y=d*, а слева и справа графиками непрерывных функций $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y)$, то

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx$$

Примеры:

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_G (xy+y^2)dxdy$,

где G – область, ограниченная прямыми $y=x$, $y=2x$ и $x=1$ (рис. 19).

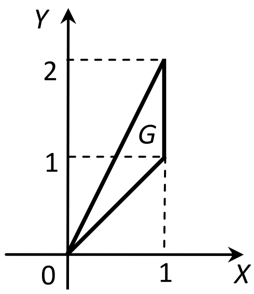


Рис. 19.

Воспользуемся формулой (35):

$$\iint\limits_G (xy+y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x}(xy+y^2)dy = \int\limits_0^1\left(x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=2x}dx =$$

$$= \int\limits_0^1\left(2x^3-\frac{x^3}{2}+\frac{8}{3}x^3-\frac{x^3}{3}\right)dx = \int\limits_0^1\frac{23}{6}x^3dx = \frac{23}{6}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{23}{24}$$

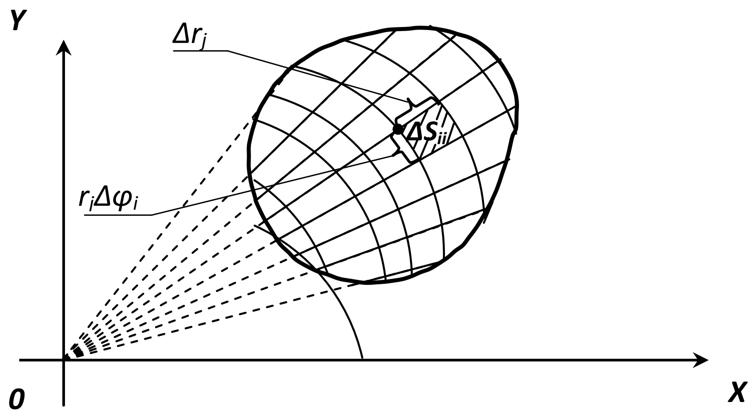
2. Вычислить двойной интеграл от функции $z=xy$ по кругу радиуса R с центром в начале координат.

Через K_R обозначим круг радиуса R с центром в точке (0;0). Тогда

$$\iint\limits_{K_R} xydxdy = \int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}xydy = \int\limits_{-R}^{R}x\cdot 0dx = 0.$$

Двойные интегралы в полярных координатах

Пусть в двойном интеграле $\iint\limits_S f(x;y)dxdy = \iint\limits_S f(x;y)dS$ при обычных предположениях мы желаем перейти к полярным координатам $(r,\ \varphi)$, полагая: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Рис. 20



Область интегрирования S разобьем на элементарные ячейки ΔS_{ij} с помощью координатных линий $r = r_j$ (окружности) и $\varphi=\varphi_i$ (лучи) (рис.20).

Введем обозначения $\Delta r_j = r_{j+1}-r_j, \Delta\varphi_i = \varphi_{i+1}-\varphi_i$. Внутренние ячейки ΔS_{ij} с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости относительно их площади можно рассматривать как прямоугольники с измерениями $r_j\Delta\varphi_i, \Delta r_j$. Поэтому площадь каждой такой ячейки будет равна $\Delta S_{ij}\approx r_j\Delta\varphi_i\Delta r_j$.

Что касается ячеек ΔS_{ij} неправильной формы, примыкающих к границе области интегрирования S, то эти ячейки не повлияют на значение двойного интеграла и мы их будем игнорировать.

В качестве точки $M_{ij} \in \Delta S_{ij}$ для простоты выберем вершину ячейки ΔS_{ij} с полярными координатами r_j, φ_i. Тогда декартовы координаты точки M_{ij} равны $x_{ij} = r_j \cos\varphi_i, y_{ij} = r_j \sin\varphi_i$ и, следовательно,

$$f(x_{ij}, y_{ij}) = f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i)$$

Двойной интеграл представляет собой предел двумерной интегральной суммы, причем можно показать, что на значение этого предела не влияют добавки к слагаемым интегральной суммы, являющиеся бесконечно малыми высшего порядка малости. Следовательно

$$\iint_S f(x;y)dS = \lim_{d\to 0}\sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta S_{ij} = \lim_{d\to 0}\sum_{i,j} f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i) r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j$$

где *d*- максимальный диаметр ячеек ΔS_{ij} и сумма распространена на все ячейки указанного выше вида, целиком содержащиеся в области *S*. С другой стороны, величины r_j, φ_i есть числа и их можно рассматривать как прямоугольные декартовы координаты некоторых точек плоскости $O\varphi r$. Таким образом, рассмотренная сумма является интегральной суммой для функции $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r$, соответствующая прямоугольной сетке с линейными элементами $\Delta\varphi_i, \Delta r_j$. Следовательно,

$$\lim_{d\to 0}\sum f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i) r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j = \iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi dr.$$

Сравнивая полученные выражения, окончательно получим

$$\iint_S f(x,y)dS = \iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi dr,$$

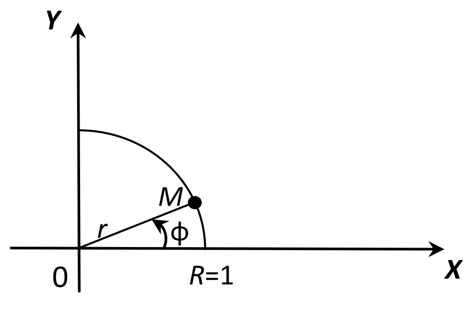
где $dS = r d\varphi dr$ называется двумерным элементом площади в полярных координатах. Для вычисления двойного интеграла его нужно заменить повторным. Пусть область интегрирования S определяется неравенствами $\alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$- однозначные непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Тогда по аналогии с прямоугольными координатами имеем

$$\iint_S F(r,\varphi) d\varphi dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi) dr, \text{ где } F(r,\varphi) = rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad (36)$$

Примеры:

1. Переходя к полярным координатам φ, r, вычислить двойной интеграл $I = \iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где S – первая четверть круга радиуса R=1 с центром в точке *O(0;0)*



Так как $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, то получим $I = \iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_S dr d\varphi$

Область S определяется неравенствами $0 \le \varphi \le \pi/2, 0 \le r \le 1$. Поэтому на основании формулы (36) имеем $I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 dr = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$.

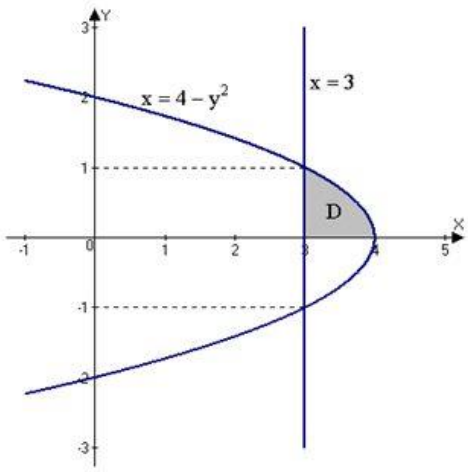
2. В интеграле $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\, dy$ перейти к полярным координатам.

Область интегрирования здесь есть треугольник *S*, ограниченный прямыми $y = 0, y = x, x = 1$. В полярных координатах уравнения этих прямых записываются следующим образом: $\varphi = 0, \varphi = \pi/4, r\cos\varphi = 1$ и, следовательно, область *S* определяется неравенствами

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi .$$

Отсюда на основании формулы (36) и учитывая, что $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, имеем

$$I = \iint_S r \cdot r d\varphi dr = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sec\varphi} r^2 dr .$$



4. Площадь поверхности

Площадь поверхности Ω , заданной уравнением z = f (x , y)
вычисляется по формуле:

$$|\Omega| = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dxdy$$

, где D − ортогональная проекция области Ω на плоскость OXY

С помощью двойного интеграла найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 1 + x^2 + y^2,\ z = 0,\ y^2 = 4 - x,\ x = 0,\ x = 3.$.

В проекции на плоскость Oxy получим:

На данной области имеем: $0 \le y \le 1,\ 3 \le x \le 4 - y^2$.

$$V = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dxdy = \int_0^1 dy \int_3^{4-y^2} (x^2 + y^2 + 1) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 + x \right) \Bigg|_3^{4-y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(4-y^2)^3}{3} + (4-y^2)y^2 + 4 - y^2 - 12 - 3y^2 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{64 - 48y^2 + 12y^4 - y^6}{3} + 4y^2 - y^4 + 4 - y^2 - 12 - 3y^2 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{64}{3} - 16y^2 + 4y^4 - \frac{y^6}{3} - y^4 - 8 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{40}{3} - 16y^2 + 3y^4 - \frac{y^6}{3} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{40y}{3} - \frac{16y^3}{3} + \frac{3y^5}{5} - \frac{y^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{40}{3} - \frac{16}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{21} = \frac{898}{105}.$$

1.12 Лекция 15 (2 ч.)

Тема: Криволинейные и поверхностные интегралы, их свойства, вычисление, приложения.

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Работа переменной силы. Криволинейный интеграл второго рода.

2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, его свойства.

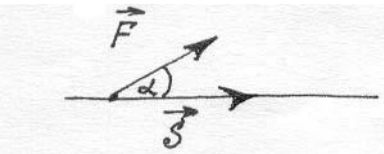
3. Векторное поле. Формула Грина – Остроградского. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

4. Криволинейны интеграл первого рода. Задача о массе, распределенной вдоль кривой.

1.12.2. Краткое содержание вопросов:

1. Работа переменной силы. Криволинейный интеграл второго рода. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, его свойства.

Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла

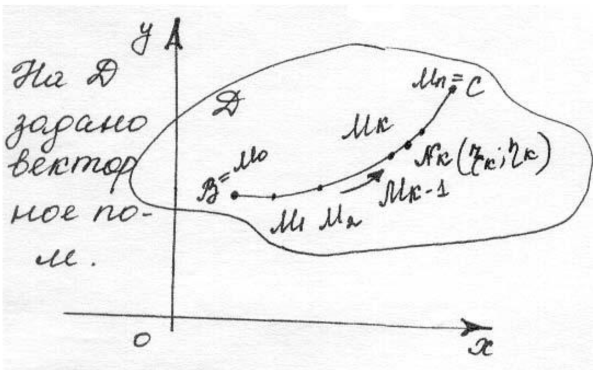


Пусть $\vec{F}$ - постоянная сила, $\vec{S}$ - перемещение $\Rightarrow A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot Cos\alpha = \left(\vec{F}, \vec{S}\right)$.

Рассмотрим общий случай, когда сила переменна по величине и направлению, а точка приложения движется по кривой.

Определение: Если в $\forall(x;y)$ некоторой плоской области задан вектор силы, лежащий в этой области, то говорят, что заданно плоское силовое поле.

По аналогии можно рассмотреть и силовое пространство.



Пусть $\vec{F}(P,Q)$ - вектор силы, где P=P(x,y), а Q = Q(x,y). Рассмотрим некоторую дугу BC в области Д и найдём работу поля по перемещению точки из B в C.

Разобьём $\overline{BC}: B = M_0 \angle M_1 \angle M_2 \angle ... \angle M_k \angle ... M_n = C.$ При достаточно мелком разбиении $T_{\overline{BC}}$ можно считать, что по $\forall$ частичной дуге $M_{k-1}M_k$ точка движется под действием постоянной силы $\overline{\overline{F_K = F : \overline{F}(P(\xi_K;\eta_K), Q(\xi_K;\eta_K))}}$ где $N_k(\xi_k;\eta_k) \in M_{k-1}M_k$, причём считается, что движение происходит не по дуге, а по хорде $M_{k-1}M_k$. Обозначим $\vec{S}_k = M_{k-1}\vec{M}_k$. Тогда работа A_k на дуге $\overline{M_{k-1}M_k}$ приближённа равна:

$$A_k\left(\overline{F(\xi_k;\eta_k), Q(\xi_k;\eta_k)}, \vec{S}_k\right)$$

$$\left.\begin{matrix} M_k(x_k;y_k) \\ M_{k-1}(x_{k-1};y_{k-1}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\begin{matrix} \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1} \end{matrix}\right| \Rightarrow \overrightarrow{S_k} = \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \overline{(\Delta x_k, \Delta y_k)} \Rightarrow A_k = \overline{F_k} \cdot \overline{S_k} = P(\xi_k;\eta_k)\Delta x +$$

$$+ Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y \Rightarrow A = \sum_{k=1}^{m} A_k = \sum_{k=1}^{m} \left[P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k\right]$$

Параметр разбиения $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le m} \left| M_{k-1} M_k \right|$.Рассмотрим предел, при λ→0 $\Rightarrow$ естественно считать: $A = \lim \sum\limits_{k=1}^{m} \left[P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k \right]$

Определение криволинейного интеграла по координатам для случая плоских фигур

Пусть в плоскости XОУ дана кривая ВС и на ней определена функция Р(х;у). Разобьём ВС в направлении от В к С. На $\forall$ частичной дуге выберем промежуточные точки. Вычислим значение Р(х;у) в этих промежуточных точках и составим интегральную сумму:

$$\sigma_1 = \sum P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k,\ \lambda = \max\left| M_{k-1} M_k \right| \Rightarrow \exists \lim_{\lambda \to 0} \sigma_1 = \int\limits_{\overrightarrow{BC}} P(x;y)dx$$

Аналогично определяется интеграл по второй координате у:

$$\exists \lim_{\lambda \to 0} \sigma_2 = \int\limits_{\overrightarrow{BC}} Q(x;y)dy.$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{BC}} P(x;y)dx + Q(x;y)dy \underline{\underline{\det}} \int\limits_{\overrightarrow{BC}} P(x;y)dx + \int\limits_{\overrightarrow{BC}} Q(x;y)dy \text{ - полный}$$

криволинейный интеграл.

$$A = \int\limits_{\overrightarrow{BC}} P(x;y)dx + Q(x;y)dy \text{ - криволинейный интеграл второго рода.}$$

Существование и вычисление криволинейных интегралов

Определение: Простая кривая Жордана r: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ называется регулярной $\Leftrightarrow \varphi'(t) \wedge \psi'(t)$ - непрерывны на [α,β]

Определение: Кривая Жордана называется кусочно-регулярной $\Leftrightarrow$ её можно разбить на конечное число регулярных кривых.

Примеры:

1) $\begin{matrix} x = RCost \\ y = RS\text{int} \end{matrix} \quad t \in [0;\pi]$

регулярная кривая.

2) $\begin{matrix} y = |t| \\ x = t \end{matrix} \; -1 \le t \le 1 \Big| \Rightarrow y = |x| \wedge \overline{\exists} \varphi'(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нерегулярная кривая, но кусочнорегулярная.

Теорема: Если f(x;y) –непрерывна на кусочно-регулярной кривой r $(\overrightarrow{BC})$, то интеграл от этой функции по любой координате существует и имеет место формула:

$$\int\limits_{BC} f(x;y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t);\psi(t))\varphi'(t)dt\ ,\ \int\limits_{BC} f(x;y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t);\psi(t))\psi'(t)dt.$$

Примеры:

1) $\int\limits_{AB} xydx + y^2xdy, AB: y = x^2, 0 \le x \le 1$

$$\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}, 0 \le x \le 1 \Rightarrow \begin{matrix} dx = dx \\ dy = 2xdx \end{matrix} \sim \int\limits_0^1 x^3dx + x^5 2xdx =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2}{7}x^7 \Bigg|_0^7 = \frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{15}{28}.$$

2) $\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{\pi}^{0} 4Sin^2\varphi(-2Sin\varphi)d\varphi + 4Cos^2\varphi(2Cos\varphi)d\varphi =$

$= 8\int\limits_{\pi}^{0}(1-Cos^2\varphi)(-Sin\varphi d\varphi) + 8\int\limits_{\pi}^{0}(1-Sin^2\varphi)Cos\varphi d\varphi =$

т.к. $Cos\varphi$ на [0;π] синус не является монотонным, то делать подстановку нельзя $= 8\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)dt + 8\int\limits_{\pi}^{0}(1-Sin^2\varphi) = 8\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} +$

$$+8\left(Sin\varphi - \frac{Sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_{\pi}^{0} = 8\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

2. Векторное поле. Формула Грина – Остроградского. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

$\oint P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$ Для замкнутого контура является принципиальным вопрос выбора направления, так как начальная и конечная (·) совпадают. Положительным называется направление, при котором наблюдатель, идущий по контуру в этом направлении, видит контур слева от себя. Противоположное направление – отрицательное.

Обозначения: $\oint\limits_{1} +;\ \oint\limits_{1} = \oint\limits_{-1}$

Рассмотрим пример: $\int\limits_{AB}(2xydx + x^2dy) = I$

а) AB: y = x; A(0;0); B(1;1). ; dx = dy.

$$I = \int\limits_{0}^{1} 2x^2dx + x^2dx = x^3\Big|_{0}^{1} = 1$$

б) $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx \Rightarrow I = \int\limits_{0}^{1} 2x^3dx + 2x^3dx = x^4\Big|_{0}^{1} = 1$

в) $y = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow I = \int\limits_{0}^{1} 2x\sqrt{x}dx + x^2\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int\limits_{0}^{1}\frac{5}{2}x^{3/2}dx = x^{5/2}\Big|_{0}^{1} = 1$

г) $y = \varphi(x); \varphi(x) = \varphi(0) = 0 \wedge \varphi(x) = \varphi(1) = 1; dy = \varphi'(x)dx.$

$$I = \int\limits_{0}^{1} 2x\varphi(x)dx + x^2\varphi'(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 2x\varphi(x)dx + \int\limits_{0}^{1} x^2\varphi'(x)dx = \left|\begin{matrix} u = x^2 du = 2xdx \\ dv = \varphi'(x)dx\_v = \varphi(x) \end{matrix}\right| =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} 2x\varphi(x)dx + x^2\varphi(x)\Big|_{0}^{1} - \int\limits_{0}^{1}\varphi(x)2xdx = 1$$

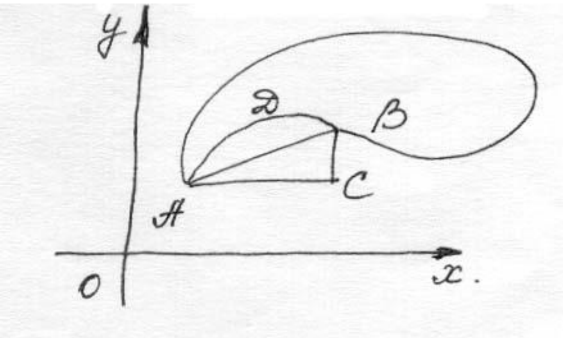
Формула Грина

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{\lambda} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

P,Q – непрерывны и непрерывны их частные производные.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Условия полного дифференциала (признак точного дифференциала).

Теорема: Криволинейный интеграл по дуге AB не зависит от пути интегрирования $\Leftrightarrow$ интеграл по любому замкнутому контуру, проходящему через (·) A и B был равен 0.



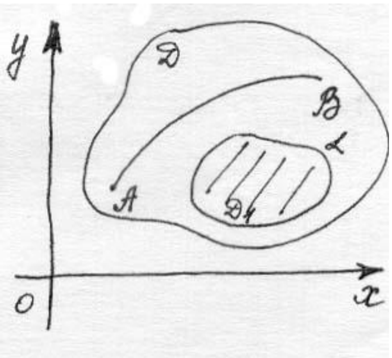
Доказательство: 1) Необходимость:

$$\int\limits_{ACB} = \int\limits_{ADB} = -\int\limits_{BDA} \Rightarrow \oint = \int\limits_{ACB} + \int\limits_{BDA} = -\int\limits_{BDA} + \int\limits_{BDA} = 0.$$

2) Достаточность:

$$\oint = 0 \Rightarrow \oint\limits_{\lambda} = \int\limits_{ACB} + \int\limits_{BDA} \Rightarrow \int\limits_{ACB} = -\int\limits_{BDA} = \int\limits_{ADB}.$$

Теорема: Пусть в области D – односвязной заданы две функции P(x;y), Q(x;y) – непрерывны $\wedge \exists \frac{\partial P}{\partial y} \wedge \exists \frac{\partial Q}{\partial x}$ - непрерывны в области D $\Rightarrow$ следующие три утверждения эквивалентны:

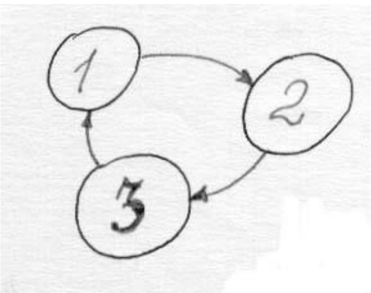


1) $\oint\limits_{\lambda} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \forall(\lambda) \subset D$

2) $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = dF(x;y)$; $\exists F(x;y)$, определенная в D: $dF = P(x;y)dx + Q(x;y)dy)$

3) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Доказательство:



1 → 2

Возьмём $\forall A(x_0; y_0), B(x;y) \in D$

$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0,$ не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от выбора (·)A и B:

$\int\limits_{A(x_0;y_0)}^{B(x;y)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$ A – фиксировано. B – меняем

$$\Rightarrow Ä \ni \forall B \Rightarrow Z = \int\limits_{A(x_0;y_0)}^{B(x;y)} Pdx + Qdy \in R \Rightarrow \int\limits_{A(x_0;y_0)}^{B(x;y)} Pdx + Qdy = F(x;y)$$ - функция

Т.д. 1) $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x;y) \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x;y)$

2) $\exists dF - ?$

I.

1. $\Delta x \neq 0$ при y = Const

$$F(x+\Delta x, y) = \int_A^C Pdx + Qdy \Rightarrow \Delta_x F = \int_A^C Pdx + Qdy - \int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^B + \int_B^C - \int_A^B = \int_B^C Pdx + Qdy \ (=)$$

$\int_A^C$ не зависит от пути интегрирования и в качестве дуги выберем ABC

(=) $\displaystyle\int_B^C Pdx + \underset{0}{\underset{//}{Qdy}} = \int_x^{x+\Delta x} P\left(x; \underset{const}{\underset{//}{y}}\right)dx$ (=) по т. О среднем (=)

(=) P(C;y)Δx, x ≤ C ≤ x+Δx $\left(BC: y = Const, x \in [x; x+\Delta x], dy = 0, dx = dx\right)$

2. $\dfrac{\Delta xF}{\Delta x} = \dfrac{P(C,y)\Delta x}{\Delta x} = P(C,y)$

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta xF}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ C \to X}} P(C,y)\,(т.к. P(x'y) - непр.) = P(x,y) \Rightarrow \exists \dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ - непрерывна в D.

II.

Аналогично доказывается $\exists \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$ - непрерывна в D.

Т.к. $\dfrac{\partial F}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial F}{\partial y}$ - непрерывна в D $\Rightarrow \exists dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$

2. $2 \to 7$ Д: $\exists F(x,y): df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Т.д. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}.$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left(P(x,y)\right)'_y = \frac{\partial P}{\partial y}$$ - непрерывна в D.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \left(Q(x,y)\right)'_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ - непрерывна в D $\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Big| что.$

3. Д: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ - непрерывна в D.

Т.д. $\oint_\lambda P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Т.к. область D – односвязная $\Rightarrow D_1 \subset D \Rightarrow$ можно применить формулу Грина:

$$\oint_\lambda P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0 \Big| что.$$

Восстановление функции по её дифференциалу

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right), F(x,y) - ?$$

$$F(x,y)=\int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} Pdx+Qdy.$$

Пример: 1) $\underbrace{3x^2y}_{P(x,y)}dx+\underset{(x,0)}{\exists}\,dF\Rightarrow F(x,y)=\int\limits_{A(0,0)}^{B(x,y)}3x^2ydx+x^3dy=\int\limits_{0}^{(x,0)}3x^2ydx+x^3dy+$

$$+\int\limits_{(x,0)}^{(x,y)}x^3dy+3x^2ydx=\int\limits_0^x(0+x^3)+0+\int\limits_0^y(3x^2y\cdot 0+x^3)dy=x^3y$$

2) $\left.\begin{array}{l}\underbrace{\sin 3y}_{P(x,y)}dx+\underbrace{3x\cos 3y}_{Q(x,y)}dy=0\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=3Cos3y\,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3Cos3xy\end{array}\right|\Rightarrow F(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\sin3ydx+3xCos3ydy=$

$$=\int\limits_{(0,0)}^{(x,0)}Sin3ydx+3xCos3ydy+\int\limits_{(x,0)}^{(x,y)}3xCos3ydy=3x\int\limits_0^y Cos3ydy=3x\frac{Sin3y}{3}=xSin3y$$

Как и в случае функции 1-й переменной $\exists$- т б. мн. Функций F(x,y), имеющих заданный dF и отличаются на аддитивную постоянную.

3. Криволинейны интеграл первого рода. Задача о массе, распределенной вдоль кривой.

Пусть в области С определенно силовое поле F = {X(x;y), Y(x;y)}.

Примером силового поля может служить поле силы тяжести у поверхности Земли, где на $\forall(\cdot)$ массой m действует сила, численно равная mg. Другим примером силового поля служит электрическое поле Кулона. Если $\exists U=U(x,y):\mathrm{X}=\dfrac{\partial U}{\partial x}\wedge\mathrm{Y}=\dfrac{\partial U}{\partial y}$, то говорят, что поле потенциальное, а U – потенциал поля. В этом случае: $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy=\dfrac{\partial U}{\partial x}dx+\dfrac{\partial U}{\partial y}dy=dU\Rightarrow$ для работы А потенциальной силы F вдоль пути соединяющего (·) $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)\Rightarrow$

$$A=\int\limits_{(x_1y_1)}^{(x_2y_2)}Xdx+Ydy=\int\limits_{(x_1y_1)}^{(x_2y_2)}dU=U(x_2y_2)-U(x_1,y_1).$$

Т.о. работа потенциальной силы не зависит от вида пути и равна разности потенциалов силы для конечной и начальной точек пути. В частности, если путь замкнут, то А = 0.

Пример: Найти работу А силы тяжести при перемещении в вертикальной плоскости Оxy (вблизи поверхности Земли) точки массы m из положения $M_1(x_1,y_1)$ в положение $M_2(x_2,y_2)$.

Решение: Т.к. криволинейный интеграл второго рода представляет собой работу переменной силы вдоль пути интегрирования, проекциями которой на координатные оси являются соответствующие коэффициенты при дифференциалах переменных, то X = 0, Y = -mg $\Rightarrow\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy=-mgdy=d(-mgy)\Rightarrow U=$

$=-mgy$ - потенциал поля силы тяжести $\Rightarrow A=-mgy\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}=-mg(y_2-y_1).$

Криволинейный интеграл первого рода

Пусть К – некоторая кусочно-гладкая плоская кривая:

$$x = x(t), y = y(t) \wedge t \in [\alpha, \beta], dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$ - дифференциал дуги;

$$\alpha \le \beta \wedge dt \rangle 0 \Rightarrow dS = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если f(x,y) – непрерывна на K, то под её криволинейным интегралом первого рода понимается интеграл вида: $\int\limits_K f(x,y)dS = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x^2+y^2}dt.$

Если кривая K задана y = y(x), $x \in [a,b]$, то $\int\limits_K f(x,y)dS = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y^2(x)}dx.$

Допустим, что K имеет массу. Пусть ΔS – некоторая дуга кривой K, содержащая точку M, а Δm – масса этой дуги. Тогда отношение $\Delta m / \Delta S$ - средняя плотность ΔS, а $\mu(M) = \lim\limits_{\Delta S \to M} \frac{\Delta m}{\Delta S}$ - линейная плотность дуги в (·)M.

Если μ = f(x,y) – рассматривать как линейную плотность дуги в текущей точке M(x,y), то dm = μdS – есть масса элементарной дуги ΔS и интеграл $m = \int\limits_K \mu dS$ -масса линии – физический смысл криволинейного интеграла I-го рода.

Свойства криволинейного интеграла I-го рода.

1) $\int\limits_{K+} = + \int\limits_{K-}$ 2) $K = K_1 \cup K_2 \Rightarrow \int\limits_{K_1 \cup K_2} = \int\limits_{K_1} + \int\limits_{K_2}$.

Пример: Найти массу $x^2 + y^2 = 1, y > 0, \mu = \kappa y. \forall (\cdot)M(x,y)$

Решение:

$$\begin{matrix} x = Cost \\ y = S\text{int} \end{matrix} \Rightarrow dm = \mu dS - \kappa y\sqrt{x^2 + y2dt =} \kappa S\text{int}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 dt} = \kappa \sin t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = k\int\limits_0^\pi \sin t dt = k(-\cos t)\Big|_0^\pi = 2k$$

Таблица.

1. Криволинейный интеграл 1-го рода (К1).

$$\int\limits_\ell f(x,y)ds$$

2. Сведение К1 к определённому интегралу:

1) $y = f(x) \quad a \le x \le b$

$$\int\limits_\ell f(x,y)ds = \int\limits_b^a f(x, f(x))\sqrt{1 + f^2(x)}dx$$

2) $x = x(t), y = y(t) \quad \alpha \le t \le \beta$

$$\int\limits_\ell f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2}dt$$

3. Криволинейный интеграл 2-го рода (К2).

$$\int\limits_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

4. Сведение К-2 к определённому интегралу:

1) $y = f(x) \quad x \in [\alpha, \beta]$

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\beta^\alpha \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\right] f'(x)dx$$

2) $x = x(t), y = y(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_\ell P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\beta^\alpha \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right] dx$$

5. Сведение К-2 к К-1:

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_l \left[P(x,y)Cos\alpha(x,y) + Q(x,y)Sin\alpha(x,y)\right] ds$$

где $\alpha(x,y)$ - угол между направляющей касательной к $\ell(v)$ и положительным направлением OX.

6. Формула Грина $\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

1.13 Лекция 16 (2 ч.)

Тема: Числовые ряды, сходимость, приложения.

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Числовые ряды их сходимость. Положительные числовые ряды, достаточные признаки сходимости положительных рядов.

2. Ряды с произвольными членами, абсолютная сходимость рядов.

3. Знакопеременные ряды, их свойства, применение к приближенным вычислениям.

1.13.2. Краткое содержание вопросов:

1. Числовые ряды их сходимость. Положительные числовые ряды, достаточные признаки сходимости положительных рядов.

Определение ряда и его суммы

Пусть задана числовая последовательность a_n $n \in N$. Тогда выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

называется **числовым рядом** и обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Числа a_1, a_2, … называются **членами ряда** (1), соответственно первым, вторым и т. д.; a_n называется *n-м* или **общим членом ряда** (1).

Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $Sn = a_1 + \ldots + a_n$, ... называются **частичными суммами ряда** (1).

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad (2)$$

называется n-м **остатком ряда** (1). Отметим, что у ряда (2) первым членом является $(n+1)$-й член исходного ряда (1) и k-й член ряда (2) равен a_{n+k} .

Ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм сходится. Если последовательность частичных сумм ряда расходится, то он называется **расходящимся**. Следовательно, ряд (1) называется сходящимся, если существует предел

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n}a_k$$

Этот предел называется **суммой ряда** (1).

Если ряд (1) сходится и S—его сумма, то будем писать $S=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$ сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|\geq 1$.

Этот ряд является суммой членов геометрической прогрессии. Напомним, что $S_n=\sum_{k=1}^{n}q^k=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}$ для всех $n\in\boldsymbol{N}$

Если $|q|<1$, то $\lim_{n\to\infty}q^{n+1}=0$, и поэтому $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{q-q^{n+1}}{1-q}=\frac{q}{1-q}$

Следовательно, если $|q|<1$, то данный ряд сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q}$

Если $|q|>1$, то $\lim_{n\to\infty}|q|^{n+1}=+\infty$, поэтому последовательность (q^{n+1}) неограниченная и, следовательно, не имеет предела. Отсюда следует, что последовательность (S_n) тоже не имеет предела, т. е. данный ряд расходится, если $|q|>1$.

Если $q=1$, то $S_1=l, S_2=2, \ldots, S_n=n, \ldots$ и, как легко видеть, данный ряд расходится.

Если $q=-1$, то $S_1=-1$, $S_2=-1+1=0$, $S_3=-1, \ldots$, т. е. частичные суммы с нечетными номерами равны 1, а с четными номерами равны 0. Такая последовательность не имеет предела. Следовательно, если $|q|=1$, то данный ряд расходится.

Теорема 1. Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-нибудь остаток ряда сходится, то и ряд сходится.

Теорема 2. Если ряды с общими членами a_n и b_n сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=B,$$

то для любых чисел α, и β ряд с общим членом $c_n=\alpha a_n+\beta b_n$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha a_k+\beta b_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k+\beta\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=\alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k+\beta\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\alpha A+\beta B$$

а это и означает, что ряд с общим членом $c_n=\alpha a_n+\beta b_n$ сходится и его сумма равна $\alpha A+\beta B$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot 3^{-n}+3\cdot 2^{1-n}\right)$

Общий член этого ряда имеет вид $c_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Как показано в примере 1, ряды с общими членами $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ и $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

В силу теоремы 2 данный ряд сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot 3^{-n} + 3\cdot 2^{1-n}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} + 6 = 7$

Теорема 3. (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд с общим, членом a_n сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство: Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1}$$

для любого $n \geq 2$, и поэтому $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Для этого ряда не выполняется необходимое условие сходимости.
Действительно,

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$$

и**,** следовательно $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$. Таким образом, данный ряд расходится.

Ряды с неотрицательными членами

Прежде всего заметим, что последовательность частичных сумм любого ряда с неотрицательными членами является неубывающей.

Действительно, пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами: $a_n > 0$. Тогда $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1}$ для всех n.

Известно, что если неубывающая последовательность ограничена, то она имеет конечный предел. Если же она неограниченная, то она является бесконечно большой; про нее говорят, что она расходится к $+\infty$. Поэтому, если ряд с неотрицательными членами расходится, то будем говорить, что он расходится к $+\infty$ и что его сумма равна $+\infty$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1: Если последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами ограничена, то ряд сходится. Если последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами неограниченна, то ряд расходится к $+\infty$.

Теорема 2: (признак сравнения). Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется условие: существует N такое, что $0 \leq a_n \leq b_n$ для всех $n \geq N$. Тогда, если ряд из b_n сходится, то и ряд из a_n сходится. Если же ряд из a_n расходится, то и ряд из b_n расходится.

Пример 1. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}$, где x - некоторое действительное число?

Так как $0 \le \frac{\sin^2 nx}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ для всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку сравнения данный ряд сходится для любого $x \in \mathbf{R}$

Пример 2. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$?

Так как $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ для всех $n \ge 3$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то по признаку сравнения данный ряд расходится.

Лемма: Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Тогда если существует q такое, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ для всех n, (1)

то ряд сходится. Если же $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ для всех n, (2)

то ряд расходится.

Если выполняется условие (1), то $a_{n+1} \le q a_n \le q^2 a_{n-1} \le \ldots \le a_1 q^n$.

Следовательно, $a_n \le a_1 q^{n-1}$ для всех n.

А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, у которого $0 < q < 1$, сходится, то по признаку сравнения данный ряд тоже сходится. Если выполняется условие (2), то $a_{n+1} > a_n > \ldots > a_1$, т.е. $a_n \ge a_1 > 0$ для всех n.Отсюда следует, что для ряда не выполняется необходимое условие сходимости и, следовательно, ряд расходится.

Теорема 3: (признак Даламбера). Пусть для ряда с положительными членами a_n выполняется условие $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда если $q<1$, то ряд сходится, а если $q>1$, то ряд расходится.

Пример 3. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$?

Здесь $a_n = \frac{n}{2^n}$, и поэтому $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

Здесь $a_n = \frac{10^n}{n!}$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 10^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1} = 0$

По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Замечание: Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, (3) то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при любом α выполняется условие (3). Однако, при $\alpha > 1$ ряд сходится, а при $\alpha \le 1$ расходится (см. пример 1).

Теорема 4: (интегральный признак Коши). Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке [1;+∞] функции $f(x)$, то сходимость исходного ряда определяется сходимостью несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot lnn}$. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x)=\frac{1}{x\cdot lnx}$ удовлетворяет условиям теоремы 4. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\,ln\,x}=ln\left|ln\,x\right|_2^{+\infty}=\infty$. Следовательно, исходный ряд расходится.

2. Ряды с произвольными членами, абсолютная сходимость рядов.

Важный класс сходящихся рядов образуют так называемые абсолютно сходящиеся ряды. Прежде чем давать соответствующее определение, докажем следующую теорему.

Теорема 1: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

Положим $p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}, q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}$. Очевидно, что $0\le p_n\le|a_n|$; $0\le q_n\le |a_n|$ для всех n.

По признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ сходятся. А так как $a_n=p_n-q_n$, то данный ряд тоже сходится.

Определение: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Теорема 1 утверждает, что если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.

Для исследования рядов на абсолютную сходимость можно пользоваться всеми признаками сходимости для рядов с неотрицательными членами.

Теорема 2: Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ выполняется условие $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q$.

Тогда если $q<1$, то ряд сходится абсолютно, а если $q>1$, то ряд расходится.

Доказательство. Если $q<1$, то абсолютная сходимость следует из признака Даламбера для рядов с положительными членами. Если $q>1$, то для ряда не выполняется необходимое условие сходимости ряда и, следовательно, ряд расходится.

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$,где $\alpha>1$, сходится абсолютно.

Этот ряд сходится и, более того, сходится абсолютно. Действительно, здесь $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$, $|a_n|=\frac{1}{n^{\alpha}}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ где $\alpha > 1$, сходится. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно и, в частности, он сходится.

Пример 2. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$, где $\alpha>1$, а x—произвольное действительное число? Сходится ли он абсолютно?

Этот ряд сходится абсолютно, так как $\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{n^{\alpha}}$ для всех n, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha>1$ сходится.

Пример 3. Сходится ли абсолютно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$, где $0<\alpha\le 1$?

Данный ряд не является абсолютно сходящимся, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha \le 1$, расходится. Ниже будет доказано, что данный ряд сходится при любом $\alpha > 0$.

3. Знакопеременные ряды, их свойства, применение к приближенным вычислениям.

Теорема 3: (признак Лейбница). Если последовательность (a_n) из положительных чисел убывает и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится.

Из признака Лейбница следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ сходится при любом $\alpha>0$. Однако он не является абсолютно сходящимся, если $0<\alpha<1$.

Определение: Ряд называется **условно сходящимся**, если он является сходящимся, но не является абсолютно сходящимся.

Например, оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходятся. Однако, если первый ряд абсолютно сходящийся, то второй ряд не является абсолютно сходящимся и, следовательно, является условно сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими свойствами обычных конечных сумм. В частности, для них имеет место свойство, аналогичное свойству переместительности: сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке членов ряда.

Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно. Более точно это утверждение формулируется следующим образом: если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ абсолютно сходятся и $A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, то ряд, членами которого являются всевозможные произведения вида a_kb_n, абсолютно сходится и его сумма равна произведению AB.

Условно сходящиеся ряды по своим свойствам существенно отличаются от обычных конечных сумм. Например, для них справедливо следующее утверждение: в условно сходящемся ряде можно так переставить члены, что полученный ряд будет сходиться к любому наперед заданному числу. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что полученный ряд будет расходиться.

1.14 Лекция 17 (2 ч.)

Тема: Функциональные последовательности и ряды в действительной области.

1.14.1 Вопросы лекции:

1.Функциональные последовательности, их свойства. Равномерная сходимость.

2. Функциональные ряды. Функциональные свойства суммы ряда. Степенные ряды.

3. Ряд Тейлора, его сходимость. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

4. Приближенные вычисления значений трансцендентных функций, интегралов.

1.14.2. Краткое содержание вопросов:

1.Функциональные последовательности, их свойства. Равномерная сходимость. Функциональные ряды. Функциональные свойства суммы ряда. Степенные ряды.

Рассмотрим последовательность, членами которой являются функции, имеющие общую область определения $D_{(fn(x))} = X$.

Пример:
$f_n(x)$: $1; x; x^2; \dots ; x^{n-1}; \dots$ $D(f_n(x)) = R$ - функциональная последовательность.
Зафиксируем x и тогда:
$x_1 = ½$: $1; ½; ¼; {}^1/_8; \dots; 1/2^{n-1}; \dots \to 0$
$x_2 = 3$: $1; 3; 3^2; 3^3;\dots; 3^{n-1};\dots \to +\infty$
$x_3 = -1$: $1; -1; 1; -1; 1; -1; \dots ; (-1)^{n-1}; \dots$ не существует $\lim f_n(x)$

При каждом конкретном значении x из функциональной последовательности получается числовая последовательность. Причем числовая последовательность может сходиться, а может и расходиться. Точки, в которых функциональная последовательность сходится, называются точками сходимости.

Определение. Точка x_0 области определения $D(f_n)$ называется точкой сходимости <=> существует $\lim f_n(x_0)$.

Определение. Совокупность точек сходимости $(f_n(x))$ называется областью сходимости данной последовательности.

Пример. 1). $f_n(x) = x^{n-1}$: $1;x; x^2; \dots; x^{n-1}$
$f_n(x) \to 0$ <=> $|x| < 1$; если $x = 1$, то $f_n(x) \to 1$; если $x = -1$, то предела не существует, если $|x|>1$, то $f_n(x) \to +\infty$. Следовательно $X = (-1;1]$.

Функциональные ряды и область их сходимости

Ряд вида $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots$ – называется функциональным рядом.

Определение. Областью сходимости функционального ряда называется множество значений x, при которых исходный функциональный ряд становится сходящимся числовым рядом.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем x.Следовательно, этот ряд сходится при $|x|<1$, то есть при всех x, принадлежащих промежутку (-1;1).

Среди функциональных рядов в математике и её приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции, то есть так называемый **степенной ряд**.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ –степенной ряд по степеням x.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$ – степенной ряд по степеням $(x-x_0)$.

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд (1) сходится при $x=x_0\neq 0$**,** то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд (1) расходится при $x=x_1$, то он расходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Пример. Найдите область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Воспользуемся признаком Даламбера.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right| = |x|\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси.

Степенные ряды любого вида можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости результирующего ряда не меньше, чем меньший из радиусов сходимости исходных рядов.

Степенные ряды любого вида можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости и интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости. Результирующий ряд будет иметь тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

2. Ряд Тейлора, его сходимость. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $f'(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Если функция $f(x)$, кроме того, имеет вторую непрерывную производную $f''(x)$, то по формуле интегрирования по частям имеем:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt$$

и, следовательно, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt$

Далее, если $f\{x)$ имеет третью непрерывную производную $f'''(x)$, то

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = \int_{x_0}^{x} f''(t)d\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) = -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt$$

и, следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt$$

Аналогично, если $f(x)$ имеет четвертую непрерывную производную $f^{(4)}(x)$, то

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x}f^{IV}(t)(x-t)^3\,dt$$

и т. д. Вообще, если $f(x)$ имеет (n+1)-ю непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$, то

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{n+1}(t)(x-t)^n\,dt. \qquad (1)$$

Эта формула называется **формулой Тейлора функции** $f(x)$ **в точке** x_0 **с остаточным членом в интегральной форме**.

Многочлен $f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

называется **многочленом Тейлора**, а функция

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{n+1}(t)(x-t)^n\,dt \qquad (2)$$

называется **остаточным членом**.

Пусть функция $f(x)$ определена и имеет производные всех порядков в некоторой окрестности точки x_o. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (3)$$

называется **рядом Тейлора** функции $f(x)$ в точке x_0.

Если в ряде Тейлора положить x_o=0 , то получим разложение функции по степеням x в так называемый **ряд Маклорена**.

Лемма. Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы, в этой точке остаток формулы Тейлора стремился к нулю при $n\to\infty$.

Из формулы Тейлора $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$ следует, что если $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-R_n(x))=f(x)$, т. е. ряд (3) сходится к $f(x)$.

Наоборот, если ряд (3) сходится к $f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)=f(x)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=0$$

Разложение элементарных функций в степенной ряд. Задача разложения функции в ряд Тейлора

Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая на $[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow\ f(x)\sim f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$ называется рядом Тейлора для $f(x)$. Он может быть сходящимся и расходящимся, более того, может случиться, что этот ряд сходится к функции $S(x)$, отличной от $f(x)$.

Пример. Пусть $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

a=0; $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}(-\dfrac{2}{x^3})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{1/x^2}}=0$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}(-\dfrac{2}{x^3})-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{x^4}}{e^{1/x^2}}=0$$

$$f(x)\sim 0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+...=0$$

Теорема. Если модули всех производных функции *f(x)* ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом *M>0*, то для любого х из этой окрестности ряд Тейлора функции *f(x)* сходится к функции *f(x)*, т.е. имеет место разложение $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Приведенная теорема дает простое достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Пример 1. Разложить функцию в ряд Маклорена. Функция *y=sinx* бесконечно дифференцируема на (-∞;+∞).

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})\,;\ y''=-\sin x=\sin(x+2\frac{\pi}{2})\,;\ y'''=-\cos x=\sin(x+3\frac{\pi}{2});$$

$$y^{IV}=\sin x=\sin(x+4\frac{\pi}{2})\,;\ \ldots\ y^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{\pi n}{2})\ldots$$

$$y^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}$$

Проверим условие теоремы $\left|y^{(n)}(x)\right|\le 1\Rightarrow \sin x=\sum\dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n!}x^n$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+...\quad (-\infty;+\infty).$$

Пример 2. Получить разложение в степенной ряд для *y=cosx*

$$y=\cos x=(\sin x)'\Rightarrow \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!!}+...$$

Пример 3. Разложить в степенной ряд *y=ln(1+x), D=(-1;+∞).*

$y'=\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...$ - сходится для $|x|<1$

$$\forall x\in(-1;1)\Rightarrow \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

$x=1\Rightarrow \ln 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...$ ряд удовлетворяет теореме Лейбница $\Rightarrow$

$$\Rightarrow(-1;1]:\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...$$

3. Приближенные вычисления значений трансцендентных функций, интегралов

1. Приближенное вычисление значений функции

а) Вычислить $\sin 10^o$ с точностью до 0,0001.

$\sin 10^o = \sin(\pi/18) = (\pi/18) - (\pi/18)^3 \cdot 1/3! + (\pi/18)^5 \cdot 1/5! - \ldots$

$(\pi/18) < 0{,}2 \Rightarrow a_3 = (\pi/18)^3 \cdot 1/5! < (0{,}2)^5/5!$;

$(2^5/5! \cdot 10^5) = (32/5! \cdot 10^5) < 0{,}00001$

$\Rightarrow \sin 10^o \approx (\pi/18) - (\pi/18)^3 \cdot 1/3! = 0{,}1745 - 0{,}0009 = 0{,}1736$

б) $(30)^{1/3} = (27)^{1/3} \cdot 30/27 = 3 \cdot (30/27)^{1/3} = 3 \cdot (1)^{1/3} + 1/9 = 3 \cdot (1+1/9)^{1/3} =$

$= 3 \cdot (1 + 1/3 \cdot 1/9 + 1/3 \cdot (1/3 - 1) \cdot (1/9)^2 \cdot 1/2! + 1/3 \cdot (1/3-1) \cdot (1/3-2) \cdot$

$\cdot (1\backslash 9)^3 \cdot 1/3! + \ldots) = 3 \cdot (1 + 1/27 - 2/2! \cdot 9^3 + 2 \cdot 5/3! \cdot 3^3 \cdot 9^3 - \ldots) = 3{,}1070$

2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots;\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Интегрируя обе части равенства на отрезке [0;1/4], лежащем внутри интервала сходимости, получим:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} (1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} + \ldots$$

Получили ряд типа Лейбница.

Так как $\frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} = 0{,}0052\ldots > 0{,}001$ *и* $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0{,}001$, то с указанной точностью имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245$$

1.15 Лекция 18 (2 ч.)

Тема: Ряды Фурье, их свойства.

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Периодические процессы и периодические функции. Ряд Фурье.
2. Ряды Фурье четных и нечетных функций.
3. Ряды Фурье по нестандартному отрезку. Ряд Фурье как способ продолжения функции.

1.15.2. Краткое содержание вопросов:

1. Периодические процессы и периодические функции. Ряд Фурье.

В науке и технике часто приходится иметь дело с периодическими явлениями. Различные величины, связанные с рассматриваемыми периодическими явлениями, по истечению периода t возвращаются к своим прежним значениям, и представляют, следовательно, периодические функции от времени t, характеризуемые равенством $\gamma(t+T) == \gamma(t)$

Таковы, например, сила и напряжение переменного тока.

Простейшей из периодических функций (если не считать постоянной) является синусоидальная величина: $A\sin(\varpi t+\alpha)$, где ϖ есть частота, связанная с периодом Т соотношением $\varpi=\dfrac{2\pi}{T}$. (1)

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные функции путем сложения нескольких. Причем складывать выгодней синусоидальные величины разных частот, так как сложение одинаковых приводит опять к синусоидальной величине, и той же частоты. Сложим несколько величин вида

$$Y_0=A_0,\ Y_1=A_1\sin(\varpi t+\alpha_1),\ Y_2=A_2\sin(2\varpi t+\alpha_2),$$
$$Y_3=A_3\sin(3\varpi t+\alpha_3),\ldots \qquad (2)$$

которые, если не считать постоянной, имеют частоты $\varpi, 2\varpi, 3\varpi,\ldots$, кратные наименьшей из них**,** ϖ, и периоды $T,\ \frac{1}{2}T,\ \frac{1}{3}T,\ \ldots$, получим периодическую функцию (с периодом Т), но уже существенно отличную от величины типа (2).

Теперь поставим обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию $\gamma(t)$ с периодом Т представить в виде суммы конечного или бесконечного множества синусоидальных величин типа (2)? Для функций довольно широкого класса имеет место разложение в «тригонометрический ряд»:

$$\gamma(t)=A_0+A_1\sin(\varpi t+\alpha_1)+A_2\sin(2\varpi t+\alpha_2)+A_3\sin(3\varpi t+\alpha_3)+\ldots=$$
$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\varpi t+\alpha_n) \qquad (3)$$

Причем $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2,\ldots$ постоянные, имеющие особые значения для каждой такой функции, а частота ϖ дается формулой (1)

Если за независимую переменную выбрать $x=\varpi t=\dfrac{2\pi t}{T}$

то получим функцию от х**:** $f(x)=\gamma\left(\dfrac{x}{\varpi}\right)$**,**тоже периодическую, но со стандартным периодом 2π .При этом разложение (3) примет вид

$$f(x)=A_0+A_1\sin(x+\alpha_1)+A_2\sin(2x+\alpha_2)+\ldots=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\alpha_n) \qquad (4)$$

Развернув члены этого ряда по формуле для синуса суммы, и положив

$$A_0=a_0,\ A_n\sin\alpha_n=a_n,\ A_n\cos\alpha_n=b_n$$

мы придем к окончательной форме тригонометрического разложения

$$f(x)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots=$$
$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (5)$$

Здесь функция от угла х, имеющая период 2π , оказывается разложенной по косинусам и синусам углов, кратных х.

Определение коэффициентов по методу Эйлера-Фурье

Для того чтобы установить возможность тригонометрического разложения (5) для заданной функции $f(x)$, имеющей период 2π, нужно исходить из определенного набора коэффициентов $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$. Укажем прием для определения их, который во второй половине XVIII века был применен Л. Эйлером и независимо от него в начале XIX века – Ж.-Б. Фурье.

Будем полагать функцию $f(x)$ непрерывной или кусочно-непрерывной в промежутке $[-\pi;\pi]$

Замечание: Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* в промежутке $[a;b]$, если она непрерывна на нем, за исключением конечного числа точек, где налицо скачки.

Допустим, что разложение (5) имеет место, и проинтегрируем его почленно в пределах от $-\pi$ до π; получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx\right]$$

Видим:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \dfrac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = -\dfrac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\dfrac{\cos n\pi}{n} + \dfrac{\cos n\pi}{n} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Поэтому все члены под знаком суммы будут нулями, а

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (7)$$

Для того, чтобы найти a_m, умножим равенство (5), которое мы предполагаем выполненным, на cos mx и проинтегрируем почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx\right]$$

Первый член суммы равен нулю в силу (6). Далее имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx = 0, \qquad (8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx = 0, \qquad (9)$$

если n не равно m. Если n=m, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2mx}{2}dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2mx}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin 2mx}{2m}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\pi + \pi + 0) = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \cdot \pi \qquad (10)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx \qquad (m=1,2,3,\ldots) \qquad (11)$$

Аналогично, умножив разложение (5) на sin mx, получим

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx \qquad (m=1,2,3,\ldots) \qquad (12)$$

Формулы (7), (11), (12) *формулы Эйлера-Фурье.* Вычисленные по этим формулам коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* данной функции, а составленный с их помощью тригонометрический ряд (5) - *рядом Фурье.*

Дадим теперь себе отчет в том, какова логическая ценность проведенных рассуждений. Так как мы исходим из предположения, что тригонометрическое разложение (5) имеет место, то вопрос о том, отвечает ли это действительности, естественно, остается открытым. Мы пользовались повторно почленным интегрированием ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n x$, а эта операция не всегда дозволительна в силу следующей теоремы:

Теорема о почленном интегрировании рядов

Если функции $U_n x$ (n=1,2,3...) непрерывны в промежутке [a;b], и составленный из них ряд сходится в этом промежутке *равномерно,* то интеграл от суммы $f(x)$ ряда представляется следующим образом:

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_b^a U_n(x)dx = \int_b^a U_1(x)dx + \int_b^a U_2(x)dx + ... + \int_b^a U_n(x)dx + ...$$

Достаточным условием для ее применимости является равномерная сходимость ряда. Поэтому строго установленным можно считать следующее:

Если функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (5), то последний необходимо будет ее рядом Фурье.

Замечание: Равномерная сходимость сохранится и при умножении всех членов ряда на ограниченные функции cos mx, sin mx.

Если же не предполагать наперед равномерности сходимости ряда, то наши соображения не доказывают даже и того, что функция может разлагаться *только* в ряд Фурье. Каков же смысл приведенных соображений? Их можно рассматривать лишь как наведение, достаточное для того, чтобы в поисках тригонометрического разложения данной функции начать с ее ряда Фурье, обязуясь (со всею строгостью!) установить условия, при которых он сходится и притом - именно к данной функции.

Пока это не сделано, мы имеем права лишь *формально* рассматривать ряд Фурье данной функции $f(x)$, но не можем ничего утверждать, кроме того, что он «порожден» функцией $f(x)$.

Эту связь ряда с функцией f обозначает так $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (5a)

Ортогональные системы функций. Обобщенный ряд Фурье

Определение: Две функции $\gamma(x)$ и $\psi(x)$, определенные в промежутке [a;b] называются **ортогональными** в этом промежутке, если их произведение имеет интеграл, равный нулю: $\int_a^b \gamma(x)\psi(x)dx = 0$

Определение: Система функций $\{\gamma_n(x)\}$, определенных в промежутке [a;b] и непрерывных в нем или, по крайней мере, кусочно-непрерывных, называется **ортогональной системой** функций, если:

$$\int_a^b \gamma(x)\psi(x)dx = 0 \tag{13}$$

Будем предполагать, что $\int_a^b \gamma_n^2(x)dx = \lambda_n > 0$ (14)

Если $\lambda_n = 1$ (n=0,1,2,...) система называется **нормальной.** Если эти условия не выполнены, то можно перейти к системе $\left\{\frac{\gamma_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$ - нормальной.

Важнейшим примером ортогональной системы функций и является тригонометрическая система

1, cos x, sin x, cos 2x, sin 2x, …, cos nx, sin nx, … (15)

в промежутке $[-\pi;\pi]$; ее ортогональность следует из соотношений: (6), (8), (9), но не будет нормальной в виду (10). Умножение функций (15) на надлежащие множители:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}};\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}};...;\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}};\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}};... \qquad (15^*)$$

даст нормальную систему.

Пусть в промежутке [a,b] дана какая-нибудь ортогональная система $\{\gamma_n(x)\}$. Разложим функцию $f(x)$, определенную в [a,b], в «ряд по функциям γ» вида

$$f(x) \sim c_0\gamma_0(x) + c_1\gamma_1(x) + ... + c_n\gamma_n(x) + ... \qquad (16)$$

Допуская возможность разложения, определим коэффициенты. Умножим обе части разложения на $\gamma_m(x)$, проинтегрируем почленно:

$$\int_b^a f(x)\gamma_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_m \int_a^b \gamma_n(x)\gamma_m(x)dx$$

В силу ортогональности [см. (13) и (14)] **и**меем

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\gamma_m(x)dx \quad \text{(m=0,1,2,…)} \qquad (17)$$

Формулы (7),(11), (12) частные случаи этой формулы

Ряд (16) с коэффициентами (17) называется **(обобщенным) рядом Фурье,** а коэффициенты **(обобщенные) коэффициенты Фурье** относительно системы $\{\gamma_n(x)\}$

В случае нормальной системы: $c_m = \int_a^b f(x)\gamma_m(x)dx$

Повторяя те же замечания, что и в предыдущем пункте мы имеем право только на такую запись $f(x) \sim \sum_0^{\infty} c_n\gamma_n(x)$

2. Ряды Фурье четных и нечетных функций. Ряды Фурье по нестандартному отрезку. Ряд Фурье как способ продолжения функции

Представление функции рядом Фурье

Возвратимся к прерванному исследованию поведения частичной суммы $S_n(x_0)$ ряда Фурье, для которой мы получили интегральное представление (4)**.**

Наложим теперь на функцию $f(x)$ более сильное требование, а именно - предположим ее кусочно-дифференцируемой в промежутке $[-\pi;\pi]$.

Определение. Функцию $f(x)$, определенную в промежутке [a;b], называют **кусочно-дифференцируемой,** если точками

$$a = a_0 \prec a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_i \prec a_{i+1} \prec ... \prec a_n = b$$

этот промежуток можно разложить на конечное число частей $[a_i, a_{i+1}]$, внутри которых функция дифференцируема, а на концах и сама функция и ее производная имеют предельные значения.

$$f(a_i+0),\ f'(a_i+0);\ f(a_{i+1}-0),\ f'(a_{i+1}-0).$$

Можно представить такую функцию как бы «склеенной» из конечного числа дифференцируемых (а следовательно и непрерывных) в замкнутых промежутках $[a_{i,}a_{i+1}]$ функций, с тем лишь условием, что в точках стыка, равно как и на концах промежутка [a;b], ее значение устанавливается особо.

В этом случае имеет место общая **теорема Дирихле.**

Теорема. Для кусочно-дифференцируемой функции $f(x)$ периода 2π ее ряд Фурье в каждой точке $x=x_0$ сходится и имеет сумму $S_0=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Эта сумма, очевидно, равна $f(x_0)$, если в точке $x=x_0$ функция непрерывна

Случай непериодической функции

Вся построенная выше теория исходила из предположения, что заданная функция определена для всех вещественных значений x и притом имеет период 2π. Между тем чаще всего приходится иметь дело с функцией f(x), которая либо (а) задана *только* в промежутке $(-\pi;\pi]$, либо (б) если и определена вне этого промежутка, то *непериодична.*

Чтобы иметь право применить к такой функции изложенную теорию, введем взамен исходной вспомогательную функцию f*(x), определенную следующим образом. В промежутке $(-\pi;\pi]$ мы отождествляем f* с f:

$$f^*(x)=f(x)(-\pi<x\le\pi) \qquad (12)$$

затем получаем $f^*(-\pi)=f^*(\pi)=f(\pi)$, а на остальные вещественные значения x распространяем функцию f*(x) по закону периодичности.

К построенной таким образом функции f*(x) с периодом 2π можно уже применять доказанную теорему разложения. Однако, *если речь идет о точке* x_0*. лежащей строго между* $-\pi$ *и* π, то, ввиду (12) нам пришлось бы иметь дело лишь с заданной функцией f(*x).* По той же причине и коэффициенты разложения можно вычислять по формулам (1), не переходя к функции f*(x). Короче говоря, *все доказанное выше непосредственно переносится на заданную функцию f(x),* минуя вспомогательную функцию f*(x).

Особого внимания, однако, требуют концы промежутка $x=\pm\pi$. При применении к функции f*(x) теоремы п.6, скажем, в точке $x=\pi$, нам пришлось бы иметь дело как со значением вспомогательной функции f*(x) *слева* от $x=\pi$, где они совпадают с соответственными значениями данной функции f(x), так и со значениями f*(x) *справа* от $x=\pi$, *где они совпадают уже со значениями f(x) справа от* $x=-\pi$. Поэтому для $x=\pm\pi$ в качестве значения S_0 надлежало бы взять

$$S_0=\frac{f^*(\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2}=\frac{f^*(-\pi+0)+f^*(-\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

Таким образом, если заданная функция f(x) даже непрерывна при $x=\pm\pi$, *но не имеет периода* 2π, так что $f(\pi)\ne f(-\pi)$, то при соблюдении требования кусочной дифференцируемости - суммой ряда Фурье будет число $\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$, отличное как от $f(-\pi)$, так и от $f(\pi)$. Для такой функции разложение может иметь место лишь в открытом промежутке $(-\pi;\pi)$.

Если тригонометрический ряд (2) сходится в промежутке $(-\pi;\pi]$ к функции f(x), то ввиду того, что его члены имеют период 2π, он сходится *всюду,* и сумма его f(x) сказывается тоже периодической функцией от x с периодом 2π.

Но эта сумма вне указанного промежутка вообще уже не совпадает с функцией f(x) (если последняя была задана на всей вещественной оси). На примерах, приведенных ниже это будет проиллюстрировано.

Отметим, что вместо промежутка $(-\pi;\pi]$ можно было бы взять любой промежуток $(-\alpha;\alpha+2\pi]$ длины 2π

Случай произвольного промежутка

Пусть функция f(x) удовлетворяет на всей числовой прямой условиям Дирихле, но только вместо периода 2π она имеет период $2l$ где l - любое положительное число. Если прибегнуть к подстановке $x=\dfrac{ly}{\pi}$ $\quad(-\pi<y\le\pi)$,

то получится функция $f(ly/\pi)=f(x)=\varphi(y)$.

Функция $\varphi(y)$ имеет период 2π. Докажем это.

$$\varphi(y+2\pi)=f(\frac{1}{\pi}(y+2\pi))+f(\frac{ly}{\pi}+2l)=f(x+2l)=f(x)=\varphi(y)$$

Функция φ(y) является тоже кусочно-дифференцируемой, и к ней уже приложимы предыдущие рассмотрения. За исключением точек разрыва, можно разложить ее в ряд Фурье

$$\varphi(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos ny+b_n\sin ny$$

, где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\cos ny\,dy=\begin{bmatrix} y=\dfrac{\pi x}{l} \\ dy=\dfrac{\pi}{l}dx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\cdot\frac{\pi dx}{l}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx(n=0,1,2,...)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

Здесь косинусы и синусы берутся от углов кратных (πx)/l. В отношении концов промежутка x±l сохраняют силу замечания, сделанные в п.7 относительно точек x=±π. Конечно, промежуток (-l;l] может быть заменен любым другим промежутком длины 2l, в частности, (0, 2l), тогда

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=0,1,2,...)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=1,2,3,...) \tag{14.1}$$

Разложение только по косинусам или только по синусам

Если заданная в промежутке $[-\pi;\pi]$ (непрерывная или, по крайней мере, кусочно-непрерывная) функция f(x) будет *нечетной,* то для нее $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$

Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{0}^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}=\int_{0}^{\pi}f(x)dx-\int_{\pi}^{0}f(-x)d(-x)=\int_{0}^{\pi}f(x)dx-\int_{0}^{\pi}f(x)dx=0$$

Аналогично доказывается, что в случае *четной* функции f(x):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

Пусть теперь f(x) будет кусочно-дифференцируемой на $[-\pi;\pi]$,четной функцией. Тогда произведение f(x) sin(nx) окажется *нечетной* функцией, и по сказанному

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0$$

Таким образом, *ряд Фурье четной функции содержит одни лишь косинусы:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (15)$$

Т.к. a(x) cos nx тоже четная функция, то применив второе замечание коэффициенты a_n можно написать так

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n=0,1,2,3,\ldots) \quad (16)$$

Если же f(x) *нечетная,* то *нечетной* будет функция f(x)cos nx dx, так что

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

Значит, ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (17)$$

В виду четности произведения f(x)sin nx dx можно писать:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=0,1,2,3,\ldots) \qquad (18)$$

Заметим, что каждая функция f(x), заданная в промежутке $[-\pi;\pi]$, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной составляющих функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ где } f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \; f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Ряд Фурье функции f(x) как раз и составится из разложения по косинусам функции $f_1(x)$ и разложения по синусам функции $f_2(x)$.

Предположим, далее, что функция f(x) *задана лишь в промежутке* $[0;\pi]$. Желая разложить ее в этом промежутке в ряд Фурье (2), дополним определение нашей функции для значений x в промежутке $[-\pi;0)$ по произволу, но с сохранением кусочной дифференцируемости, а затем применим сказанное в п.7. Этот произвол дает возможность получить различные тригонометрические ряды.

1-й случай: Определим функцию в промежутке $[-\pi;0)$ так, чтобы получить для f(x) разложение *только по косинусам*

Пусть для $0<x<\pi$

$$f(-x)=f(x), \qquad (18)$$

так, что в результате получится *четная* функция в промежутке $[-\pi:\pi]$ к тому же имеющая даже период 2π;. Ее разложение будет содержать одни косинусы, коэффициенты вычисляются по формулам (16), куда входят значения лишь первоначальной заданной функции f(x)

2-ой случай. Аналогично, или дополнить определение функции условием для $(0<x<\pi)$

$$f(-x)=-f(x), \qquad (19)$$

так, чтобы она оказалась нечетной (черт. 4), то в ее разложении будут участвовать только члены с синусами. Коэффициенты определяются по формулам (18).

Таким образом, заданную в промежутке [0; π] функцию при соблюдении известных условий оказывается возможным разлагать как в ряд по косинусам, так и в ряд по синусам.

Однако особого исследования требуют точки x=0 и x=π. Здесь оба разложения ведут себя по-разному. Предположим, что заданная функция f(x) непрерывна при x=0 и x=π, и рассмотрим сначала разложение по косинусам. Условие (19) *сохраняет* непрерывность при x=0, так что ряд (15) при x=0 будет сходиться именно к f(0). Далее f(-π+0)=f(π-0)=f(π), значит и при x=π имеет место аналогичное обстоятельство.

Иначе обстоит дело с разложением по синусам.

Заметим, если не вдаваться в соображения относительно нарушения непрерывности условием (20), то в точках x=0 и x=π сумма ряда (17) будет 0. Поэтому она может дать нам значения f(0) и f(π) лишь в том случае, если и эти значения равны нулю.

Для функции f(x) заданной в промежутке [0;1] (1>0) имеют место разложения в ряд по косинусам $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}$, синусам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ и с коэффициентами

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad \text{(n=0,1,2,…)} \qquad (20)$$

или

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad \text{(n=1,2,3,…)} \qquad (21)$$

Разложение функций в ряды Фурье

Функции, которые ниже приводятся в виде примеров, как правило, относятся к классу дифференцируемых или кусочно-дифференцируемых. Поэтому самая возможность их разложения в ряд Фурье - вне сомнения, и мы останавливаться на этом вопросе не будем.

Пример 1. Разложить функцию $y=|\cos x|$

Эта функция имеет период π. Функция непрерывна на отрезке $[-\pi/2;\pi/2]$.

$$a_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\cos\frac{\pi\cdot n\cdot x}{\pi/2}\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\cos 2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\cos(2n-1)x+\cos(2n+1)x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2n-1)\pi/2}{2n-1}+\frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1}\right)=\frac{2}{\pi}(-1)^n\frac{-2}{4n^2-1}=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1};\ a_n=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},\ a_0=4/\pi .$$

Так как функция непрерывна на основном промежутке $[-\pi/2;\pi/2]$ и периодична, примем $f(-\pi/2)=f(\pi/2)$, то для всех значений x справедливо равенство

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$$

Полагая $x=\pi/2$, получим: $\dfrac{1}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi\le x\le\pi$ функцию, имеющую период 2π.

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{при}\quad -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{\pi} & \text{при}\quad 0<x\le\pi,\end{cases}$$

Функция непрерывна на $[-\pi;\pi]$.

Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}dx = -\frac{x^2}{2\pi}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{x^3}{3\pi^2}\bigg|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\cdot x dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\cos nx dx\right) = \frac{3(-1)^n - 1}{\pi\cdot n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f x(\sin nx dx) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^3}$$

Следовательно, разложение нашей функции в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{5\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3(-1)^n - 1}{\pi\cdot n^2}\cos nx - \frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\right\}.$$

Полагая в этом разложении $x = \pi$, получим: $\pi = \frac{5\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^n - 1}{\pi\cdot n^2}(-1)^n$

Пример 3. Разложить в ряд по косинусам функцию y=x на $[0;\pi]$.

Продолжим функцию, заданную на отрезке $[0;\ \pi]$ четным образом на отрезок $[-\pi;\pi]$, затем с отрезка $[-\pi;\pi]$ продолжим периодически с периодом 2π. Для полученной функции имеем:

$$b_n = 0\ (n = 1,2,3\ldots),\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi\cdot n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Другими словами: $a_0 = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если n чётное,}} \\ \dfrac{-4}{\pi\cdot n^2}, & \text{\textit{если n нечётное}}\ (n = 1,2,\ldots) \end{cases}$

Вычислим a_0: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \pi$

Следовательно, разложение функции $y = x$ на отрезке $[0;\pi]$ по косинусам имеет вид:

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

Пример 4. Разложить в ряды по синусам функцию $y = x$ на промежутке $[0;\pi]$.

Продолжим функцию $y = x$, заданную на промежутке $[0;\pi]$ нечетным образом на промежуток $(-\pi;0]$. Затем с промежутка $(-\pi;\pi]$ продолжаем периодически с периодом 2π. Для полученной функции имеем:

$$a_n = 0\ (n = 0,1,\ldots),\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin x dx = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Следовательно, разложение функции $y = x$ в промежутке $[0;\pi]$ по синусам имеет вид:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(n\cdot x)$$

3. Практические занятия

3.1 Практическое занятие №1-2 (4 ч.)

Тема: Функция. Способы задания. Классификация функций. Числовая последовательность Предел числовой последовательности.

3.1.1 Задание для работы:

1.Способы задания функций. График функции. Его преобразования.
2.Классификация функций.
3.Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Способы задания функций. График функции. Его преобразования.

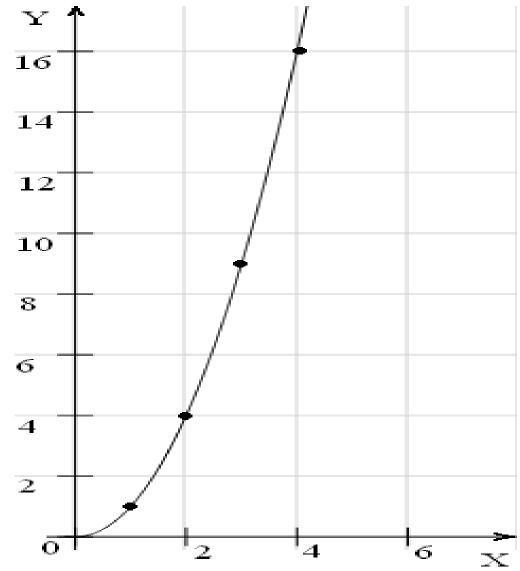
1. ***Табличный способ*** наиболее широко распространен (таблицы логарифмов, квадратных корней), основное его достоинство – возможность получения числового значения функции, недостатки заключаются в том, что таблица может быть трудно читаема и иногда не содержит промежуточных значений аргумента.

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

Например:

Аргумент x принимает заданные в таблице значения, а y определяется соответственно этому аргументу x.

2. ***Графический способ*** заключается в проведении линии (графика), у которой абсциссы изображают значения аргумента, а ординаты – соответствующие значения функции. Часто для наглядности масштабы на осях принимают разными.



Например: для нахождения по графику y, которому соответствует $x = 2{,}5$ необходимо провести перпендикуляр к оси x на отметке *2,5*. Отметку можно довольно точно сделать с помощью линейки. Тогда найдем, что при $x = 2{,}5$ yравно *7,5*, однако если нам необходимо найти значение y при x равном *2,76*, то графический способ задания функции не будет достаточно точным, т.к. линейка не дает возможности для столь точного замера.

Достоинства этого способа задания функций заключаются в легкости и целостности восприятия, в непрерывности изменения аргумента; недостатком является уменьшение степени точности и сложность получения точных значений.

3. ***Аналитический способ*** состоит в задании функции одной или несколькими формулами. Основным достоинством этого способа является высокая точность определения функции от интересующего аргумента, а недостатком является затрата времени на проведение дополнительных математических операций.

Например:

Функцию можно задать с помощью математической формулы $y=x^2$, тогда если x равно *2*, то y равно *4*, возводим x в квадрат.

4. ***Словесный способ*** состоит в задании функции обычным языком, т.е. словами. При этом необходимо дать входные, выходные значения и соответствие между ними.

Например:

Словесно можно задать функцию (задачу), принимающуюся в виде натурального аргумента x с соответствующим значением суммы цифр, из которых состоит значение y. Поясняем: если x равно *4*, то y равно *4*, а если x равно *358*, то y равен сумме $3 + 5 + 8$, т. е *16*. Далее аналогично.

5. ***Рекурсивный способ*** состоит в задании функции через саму себя, при этом **значения функции** определяются через другие ее же значения. Такой способ задания функции используется в задании множеств и рядов.

Например:

При разложении *числа Эйлера* задается функцией:

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \dots}}} = 2 + f(2)$$

$$f(n) = \frac{n}{n + f(n+1)}$$

Ее сокращение приведено ниже:

При прямом расчёте возникает бесконечная рекурсия, но можно доказать, что значение *f(n)* при возрастании *n* стремится к единице (поэтому, несмотря на бесконечность ряда, значение *числа Эйлера* конечно). Для приближённого вычисления значения *e* достаточно искусственно ограничить глубину рекурсии некоторым наперёд заданным числом и по достижении его использовать вместо *f(n)* единицу.

2.Классификация функций.

1.3. Сложные функции

Пусть даны две функции: y = f(z), определенная на множестве z, и z=g(x), определенная на множестве x. Если $g(x) \subset z$; то на множестве X можно определить функцию, которая каждому $x \in X$ поставит в соответствие $g(x) = z \in Z$. Тогда на множестве X определена функция $y = f[g(x)] = f_1(x)$. Эта функция называется **сложной** функцией x или **суперпозицией**(наложением) функций f и g.

Областью определения сложной функции $y = f[g(x)]$ является либо вся область определения функции z=g(x), либо та ее часть, в которой определены значения z, не выходящие из области определения f(z). Например, пусть $y = \sin x, \quad z = x^3$. Функция $y = \sin z$ определена на всей числовой оси, функция $z = x^3$ также определена на всей числовой оси. Суперпозиция этих функций $y = \sin x^3$ является сложной функцией x , определенной на всей числовой оси.
При рассмотрении сложных функций следует иметь в виду области определения составляющих функций. Например, из функций $y = \arccos z$ и $z = 5 + x^2$ нельзя образовывать сложную функцию, так как функция y=arccosz определена для $z \in [-1, 1]$, а функция $z = 5 + x^2 > 1$, т.е. не принадлежит этому отрезку.
Можно рассматривать суперпозиции не только двух, но и трех, четырех, т.е. любого конечного числа функций.

1.4. Обратные функции

Функция y=f(x) называется **обратимой**, если она принимает каждое свое значение один раз. Пусть f– отображение множества X на множество Y. Если для любого элемента y из Y существует единственный элемент x=g(y), для которого f(x)=y, то отображение f называется обратимым. Отображение, обратное к y, обозначается f^{-1} и называется обратной функцией, а функция y=f(x) называется прямой функцией. Например, функция $y = \ln x$ имеет обратную функцию $x = e^y$, а для функции $y = x^3$ обратной будет $x = \sqrt[3]{y}$. Не всякая функция имеет обратную. По графику прямой функции y=f(x) достаточно просто определить, имеет ли эта функция обратную. Если какая-либо прямая, параллельная оси OX, пересекает график прямой функции не более чем в одной точке, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует. Если же хотя бы одна из таких прямых пересекает график функции в двух или более точках, то обратная функция не существует. Если построить прямую и обратную функции в одной системе координат, то их графики будут симметричны относительно прямой $y = x$ - биссектрисы I и III координатных углов.

1.5. Монотонно возрастающие и убывающие функции

Функция f(x) называется **возрастающей** на множестве X, если для произвольных $x_1, x_2, \quad$ из $\quad X$ при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Например, $y = x^5$, $y = 3x + 2$ - возрастают. Функция f(x) называется **убывающей,** если, наоборот, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции: при . Например: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$. Возрастающие и убывающие функции называют **строго монотонными.**

1.6. Четные и нечетные функции

Числовое множество X называется симметричным, если для произвольного элемент $-x\in X$. Например, множество целых чисел, действительных чисел, отрезок [-a, a]. Функция f, определенная на симметричном множестве X, называется **четной**, если $\forall x\in X, f(-x)=f(x)$. Например: $y=x^2,\ y=\cos x,\ y=|x|$. График четной функции симметричен относительно оси OY.

Функция f, определенная на симметричном множестве X, называется **нечетной**, если $\forall x\in X,\ f(-x)=-f(x)$. Например: $y=\text{tg } x,\quad y=x^3,\quad y=\sin x$. График нечет-ной функции симметричен относительно точки O(0,0) – начала координат. Функция может быть нечетной, ни нечетной, например: $y=2x+3,\quad y=\log_3 x$.

1.7. Периодические функции

Пусть f определена на множестве X. Если существует $\omega\neq 0$ такое, что $\forall x\in X$ числа $x+\omega$ и $x-\omega$ также принадлежат множеству X и $f(x+\omega)=f(x), \left(f(x-\omega)=f(x)\right)$, то функцию f называют **периодической** с периодом ω.

Примеры:

1) $y=\sin x$ периодическая с периодом $\omega=2\pi k,$ где $k\in z$;
2) $y=\text{tg } x$ периодическая с периодом $\omega=\pi k,$ где ;
3) дробная часть числа: $y=\{x\}=x-[x]$ - периодическая, $\omega=1$.

Установление факта периодичности функции существенно облегчает ее изучение и построение графика: периодическую функцию можно исследовать в пределах одного периода. Для построения графика периодической функции с периодом достаточно построить график этой функции на интервале $(x, x+\omega)$, а затем полученный график периодически продолжить. Рассмотрим некоторые примеры на установление периодичности функции.

Пример. $f(x)=\sin 6x$

Существует ли такое **,**чтобы для всех действительных x выполнялось условие $\sin 6(x+\omega)=\sin 6x$?

Имеем $\sin 6(x+\omega)-\sin 6x=0$, $2\cos(6x+3\omega)\cdot\sin 3\omega=0$, это выполняется при $\sin 3\omega=0,\quad 3\omega=\pi k,\quad \omega=\frac{\pi k}{3},\quad k\in z$. Следовательно, такие существуют, функция является периодической, наименьший ее положительный период $\pi/3$.

Пример 2. $y=\left(\cos x+\sin x\right)^2$.

Имеем $y=\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x$ или $y=1+\sin 2x$ - периодическая функция с периодом .

1.8. Ограниченные и неограниченные функции

Функция f, определенная на множестве X, называется **ограниченной** на множестве $X_1\subset X$, если множество ее значений f(x) на множестве X_1 ограничено, т.е. существуют постоянные m и M такие, что $m\leq f(x)\leq M$. В противном случае функция называется **неограниченной.**

Примеры:

1) $y=2\cos 3x$ ограничена на всей числовой оси, т.к. $-2\leq 2\cos 3x\leq 2$;
2) функция ограничена снизу, так как $\forall x\quad e^x>0$;
3) функция $y=\text{ctg } x$ ограничена на промежутке $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, но ограничена на промежутке $(0,\pi)$.

3.Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

Пример

Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)$

Решение: нечто похожее на бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, но она ли это? Для ясности распишем несколько первых членов:

$x_1=\frac{1}{4}$

$x_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$

$x_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}$

…

$x_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}$

…

Так как $n\to\infty$, то речь идёт о **сумме** членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая рассчитывается по формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Оформляем решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)=(*)$

Используем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S=\frac{b_1}{1-q}$. В данном случае: $b_1=\frac{1}{4}$ – первый член, $q=\frac{1}{4}$ – знаменатель прогрессии.

Главное, совладать с **четырёхэтажностью дроби**:

$$(*)=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$$

Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3+(1-3n)^3}{8n^3-2n}$

Решение: сначала полное решение, потом пошаговые комментарии:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3+(1-3n)^3}{8n^3-2n}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-12n^2+6n-1+1-9n+27n^2-27n^3}{8n^3-2n}\overset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-19n^3+15n^2-3n}{8n^3-2n}=\frac{-\infty}{\infty}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-19n^3+15n^2-3n}{n^3}}{\frac{8n^3-2n}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-19+\frac{15}{n}^{\to0}-\frac{3}{n^2}^{\to0}}{8-\frac{2}{n^2}^{\to0}}=-\frac{19}{8}$$

Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2\cdot4^n}{4^{n+1}-5}$

Решение оформим по той же схеме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2\cdot 4^n}{4^{n+1}-5}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n+2\cdot 4^n}{4\cdot 4^n-5}\overset{(2)}{=}\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3\cdot 3^n+2\cdot 4^n}{4^n}}{\dfrac{4\cdot 4^n-5}{4^n}}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n_{\to 0}+2}{4-\dfrac{5}{4^n}^{\to 0}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(1) Используя **свойства степеней**, вынесем из показателей всё лишнее, оставив там только «эн».

(2) Смотрим, какие показательные последовательности есть в пределе: $3^n, 4^n$ и выбираем последовательность с **наибольшим** основанием: 4^n. В целях устранения неопределённости делим числитель и знаменатель на 4^n.

(3) В числителе и знаменателе проводим почленное деление. Поскольку $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией $(-1<q<1,\quad q\neq 0)$, то она стремится к нулю. И тем более к нулю стремится константа, делённая на растущую прогрессию: $\frac{5}{4^n}\to 0$. Делаем соответствующие пометки и записываем ответ.

Найти предел последовательности $\lim_{n\to\infty}\left(n^2 tg\frac{1}{2n+1}\right)$

Решение: неопределённость $\infty\cdot 0$ можно раскрутить двумя способами. Первый путь – через **первый замечательный предел**, который справедлив, как ни странно, и для последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 tg\frac{1}{2n+1}\right)=\infty\cdot 0\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sin\dfrac{1}{2n+1}}{\left(\cos\dfrac{1}{2n+1}\right)_{\to 1}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(n^2\sin\frac{1}{2n+1}\right)\overset{(3)}{=}\infty\cdot 0=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sin\dfrac{1}{2n+1}}{(2n+1)\cdot\dfrac{1}{2n+1}}\overset{(4)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2}{n^2}}{\dfrac{2n+1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{2}{n}^{\to 0}+\dfrac{1}{n^2}^{\to 0}}=\frac{1}{0}=\infty$$

(1) Используем формулу $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(2) Избавляемся от косинуса, указывая, что он стремится к единице.

(3) Неопределённость $\infty\cdot 0$ не устранена, но теперь вместо тангенса у нас синус, и появляется возможность организовать 1-й замечательный предел. Проводим стандартный искусственный приём: делим всё выражение на $\frac{1}{2n+1}$ и, чтобы ничего не изменилось, домножаем на $2n+1$.

(4) Используем **первый замечательный предел** $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, при этом, в качестве **бесконечно малой величины** выступает $\alpha=\frac{1}{2n+1}$, которая, понятно, стремится к нулю при $n\to\infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 tg\frac{1}{2n+1}\right)=\infty\cdot 0=(*)$. Заменим бесконечно малую последовательность **эквивалентной**: $tg\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$. В данном случае $\alpha=\frac{1}{2n+1}\to 0$

$$(*)=\lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{2n+1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{n}^{\to 0}+\frac{1}{n^2}^{\to 0}}=\frac{1}{0}=\infty$$

3.1.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и свойства теории функции одного действительного переменного, теории пределов последовательностей, классификацию функций;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при нахождении предела последовательности;
- выработали навыки по нахождению предела последовательности.

3.2 Практическое занятие №3-4 (4 ч.)

Тема: Предел функции в точке и на бесконечности

3.2.1 Задание для работы:

1. Техника вычисления предела функции в точке.
2. Техника вычисления предела функции на бесконечности.
3. Бесконечно малые эквивалентные данным. Замечательные пределы

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Техника вычисления предела функции в точке.

1. Найти пределы функций:

1а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$=(так как функция непрерывна при x=2)= $\frac{8-10-3}{12-8-15}=\frac{5}{11}$.

1б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$2x^2-5x-3=0;\quad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm 7}{4};$$

$$x_1=3,\ x_2=-\frac{1}{2}.\Rightarrow 2x^2-5x-3=2(x-3)(x+\frac{1}{2})=(x-3)(2x+1).$$

$$3x^2-4x-15=0;\quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{6}=\frac{4\pm 14}{6};$$

$$x_1=3,\ x_2=-\frac{5}{3}.\Rightarrow 3x^2-4x-15=3(x-3)(x+\frac{5}{3})=(x-3)(3x+5).$$

Получим $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(2x+1)}{\cancel{(x-3)}(3x+5)}=\dfrac{1}{2}.$

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}\left(\dfrac{0}{0}\right)=$ (Домножим числитель и знаменатель на сумму корней)

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-1-(7-x)}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{2\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x}}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x\cdot\sin x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x\cdot\sin x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\sin x}=$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Применили следствия из первого замечательного предела.

2. Техника вычисления предела функции на бесконечности.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}(2-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2})}{\cancel{x^2}(3-\frac{4}{x}-\frac{15}{x^2})}=\dfrac{2}{3}.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-2}(1^\infty).$ Применим второй замечательный предел. Сделаем замену

$\left|\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{x-1}=1+z;\ z=\dfrac{4}{x-1}\Rightarrow x\to\infty, z\to 0.\\ x-1=\dfrac{4}{z}.\ x=\dfrac{4}{z}+1\end{array}\right|$. Получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-2}=\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{4}{z}-1}=e^4.$

3.Бесконечно малые эквивалентные данным. Замечательные пределы

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot tg^2 3x}{\sin 4x\cdot(1-\cos x)}$$

На повестке дня неопределённость «ноль на ноль» и ситуация погранична: решение можно провести стандартно, но преобразований будет много. С моей точки зрения, здесь вполне уместно использовать замечательные эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot tg^2 3x}{\sin 4x\cdot(1-\cos x)}=\frac{0}{0}=(*)$$

Заменим бесконечно малые функции эквивалентными функциями. При $\alpha \to 0$:
$tg\alpha \sim \alpha$
$\sin\alpha \sim \alpha$
$1-\cos\alpha \sim \frac{1}{2}\cdot\alpha^2$

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(3x)^2}{4x\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}$$

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^3(1+x)}{\arcsin^2\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\sin\frac{x^2}{3}}$$

А вот это уже тяжёлый случай, когда провести решение стандартным образом весьма непросто. Используем замечательные эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^3(1+x)}{\arcsin^2\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\sin\frac{x^2}{3}} = \frac{0}{0} = (*)$$

Заменим бесконечно малые эквивалентными. При $\alpha \to 0$:
$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$
$\arcsin\alpha\sim\alpha$
$\sin\alpha\sim\alpha$

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2\cdot\frac{x^2}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{9}\cdot\frac{x^2}{3}} = 27\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4} = 27\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

Получена бесконечность, значит, знаменатель более высокого порядка малости, чем числитель.

3. Найти предел функции, используя эквивалентные бесконечно малые величины и другие преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)\sin 4x}{\ln^2(1-2x)}$$

Решаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)\sin 4x}{\ln^2(1-2x)} = \frac{0}{0} = (*)$$

На первом шаге используем замечательные эквивалентности. При $\alpha\to 0$:
$\sin\alpha\sim\alpha$
$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$

С синусом всё понятно: $\sin 4x\sim 4x$. Представим логарифм в виде $\ln(1-2x)=\ln(1+(-2x))$ и применим эквивалентность $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$. В данном случае $\alpha=-2x$ и $\ln(1+(-2x))\sim -2x$

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)\cdot 4x}{(-2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)\cdot 4x}{4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-6x}-1}{x} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)(\sqrt{1-6x}+1)}{x(\sqrt{1-6x}^{\to 1}+1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-6x-1}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-6x}{x} = \frac{1}{2}\cdot(-6) = -3$$

4. Найти предел функции с помощью эквивалентных бесконечно малых функций

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin^2 3x}}{\ln(\cos 3x)}$$

Перед решением необходимо выполнить предварительные преобразования.

В числителе вынесем за скобки «минус»: $1-e^{\sin^2 3x} = -(e^{\sin^2 3x}-1)$ чтобы в дальнейшем воспользоваться эквивалентностью $e^{\alpha}-1\sim\alpha$.

В знаменателе проведём искусственное преобразование $\ln(\cos 3x) = \ln(1 + (\cos 3x - 1))$, чтобы далее применить эквивалентность $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$. Кстати, запомните это трюк с логарифмом, он используется и в других задачах математического анализа.

Начнём оформлять решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin^2 3x}}{\ln(\cos 3x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{-(e^{\sin^2 3x}-1)}{\ln(1+(\cos 3x - 1))} = (*)$$

В числителе используем замечательную эквивалентность $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$. В данном случае $\alpha = \sin^2 3x$. **Важнейшим моментом** является тот факт, что при «икс», стремящемся к нулю, $\alpha = \sin^2 3x \to 0$.

В знаменателе $\cos 3x - 1$ тоже бесконечно малая величина, именно поэтому можно применить эквивалентность $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, где $\alpha = (\cos 3x - 1) \to 0$ при $x \to 0$.

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 3x}{\cos 3x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 3x}{-(1-\cos 3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 3x} = \frac{0}{0} = (*)$$

После замены проведена пара технических действий – вынесение «минуса» в знаменателе и сокращение минусов. Неопределённость 0:0 никуда не делась, и есть надобность воспользоваться бесконечно малыми эквивалентными функциями ещё раз. Если $\alpha \to 0$, то $\sin\alpha \sim \alpha, \quad 1-\cos\alpha \sim \frac{1}{2}\cdot\alpha^2$:

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}\cdot(3x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}\cdot(3x)^2} = 2$$

5. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x\sin\frac{1}{x}\right)$$

В данном примере «икс» стремится к бесконечности, и $f(x) = \sin\frac{1}{x} \to 0$. Иными словами, функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ *бесконечно мал А* в точке $x = \infty$. Чтобы раскрыть неопределённость $\infty\cdot 0$ целесообразно использовать теорию эквивалентных бесконечно малых величин.

Поскольку $\alpha = \frac{1}{x} \to 0$, то применима замечательная эквивалентность $\sin\alpha \sim \alpha$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x\sin\frac{1}{x}\right) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to\infty}\left(3x\cdot\frac{1}{x}\right) = 3$$

3.2.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия и свойства теории теории пределов функции, классификацию функций;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при нахождении предела функции в точке и на бесконечности;
- выработали навыки по нахождению предела функции с использованием замечательных пределов и таблицы бесконечно малых, эквивалентных данным.

3.3 Практическое занятие №5-6 (4 ч.)

Тема: Непрерывность функции в точке и на множестве. Классификация точек разрыва

3.3.1 Задание для работы:

1.Классификация точек разрыва. Исследование функции на непрерывность

3.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Классификация точек разрыва. Исследование функции на непрерывность

1. Найти точки разрыва функции, построить график этой функции:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{при } x\le 1\\ (1-x)^2 & \text{при } 1<x\le 3\\ x & \text{при } x>3\end{cases}.$$

Решение

Функция непрерывна в интервалах (-∞, 1), (1, 3), (3,+∞). Проверим функцию на непрерывность в точках x_0=1 и 3. Воспользуемся определением непрерывности функции f(x) в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

1) x_0=1

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1}(1-x)=0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1}(1-x)^2=0;$$

$$f(1)=1-1=0.$$

Следовательно функция непрерывна в точке x_0=1.

2) x_0=3.

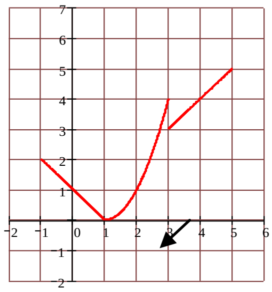
$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3}(1-x)^2=4;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3} x=3;$$

$$f(3)=(1-3)^2=4.$$

Следовательно функция разрывна в точке x_0=3.

Сделаем чертеж



2. Найти точки разрыва функции, построить график этой функции

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{при } x<0\\ x & \text{при } 0\le x<3\\ x^2-6x & \text{при } x\ge 3\end{cases}.$$

Решение

Функция непрерывна в интервалах (-∞, 0), (0, 3), (3,+∞). Проверим функцию на непрерывность в точках x_0=0 и 3. Воспользуемся определением непрерывности функции f(x) в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

1) $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0;$$

$$f(0) = 0.$$

Следовательно функция разрывна в точке $x_0=0$.

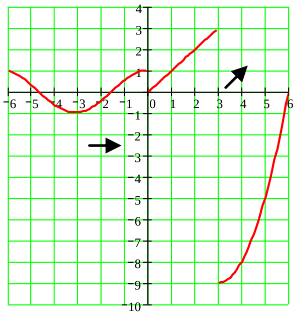
2) $x_0=3$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3} x = 3;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3} (x^2 - 6x) = 9 - 18 = -9;$$ Следовательно функция разрывна в точке $x_0=3$.

$$f(3) = 3^2 - 6\cdot 3 = -9.$$

Сделаем чертеж



3. Найти точки разрыва функции, Построить график этой функции

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x & \text{при } x \le 0 \\ 2 - x & \text{при } 0 < x < 3 \\ x^2 - 6x + 10 & \text{при } x \ge 3 \end{cases}.$$

Решение

Функция непрерывна в интервалах (-∞, 0), (0, 3), (3,+∞). Проверим функцию на непрерывность в точках $x_0=0$ и 3. Воспользуемся определением непрерывности функции f(x) в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

1) $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2\cos x = 2\cos 0 = 2;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0} (2 - x) = 2;$$

$$f(0) = 2\cos 0 = 2.$$

Следовательно функция непрерывна в точке $x_0=0$.

2) $x_0=0$.

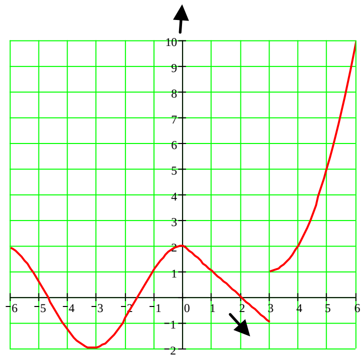
$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3} (2 - x) = -1;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3} (x^2 - 6x + 10) = 9 - 18 + 10 = 1;$$

$$f(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 10 = 1.$$

Следовательно функция разрывна в точке $x_0=3$.

Сделаем чертеж



4. Найти точки разрыва функции, построить график этой функции

$$f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{при } x<0 \\ 2\operatorname{tg}x+1 & \text{при } 0\le x<\dfrac{\pi}{4} \\ x-3 \ \text{ при } x\ge\dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Решение

Функция непрерывна в интервалах (-∞, 0), (0, π/4), (π/4,+∞). Проверим функцию на непрерывность в точках x_0=0 и π/4. Воспользуемся определением непрерывности функции f(x) в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

1) x_0=0

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)=1;$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2\operatorname{tg}x+1)=1;$

$f(x_0)=f(0)=1.$

Следовательно функция непрерывна в точке x_0=0.

2) x_0=π/4.

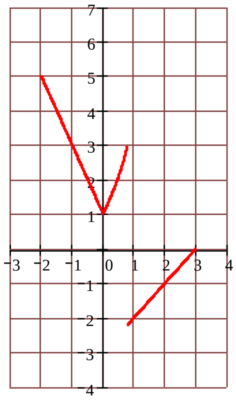
$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(2\operatorname{tg}x+1)=3;$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+0} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(x-3)=\dfrac{\pi}{4}-3;$

$f(x_0)=f(\dfrac{\pi}{4})==\dfrac{\pi}{4}-3.$

Следовательно функция разрывна в точке x_0=3.

Сделаем чертеж



3.3.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и свойства теории непрерывности функции одного действительного переменного, классификацию точек разрыва;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при нахождении и классификации точек разрыва;
- выработали навыки по исследованию функции на непрерывность.

3.4 Практическое занятие №7-9 (6 ч.)

Тема: Производная функции в точке, правила дифференцирования

3.4.1 Задание для работы:

1.Производная функции в точке. Ее геометрический и физический смысл. Правила дифференцирования.
2.Дифференцирование сложной, обратной функции.
3. Логарифмическая производная. Дифференцирование неявной функции.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Производная функции в точке. Ее геометрический и физический смысл. Правила дифференцирования.
1. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y=x^2-3x+5$, проведенной в точке M(2, 3). Найти угол, образованный касательной с осью абсцисс.

Решение

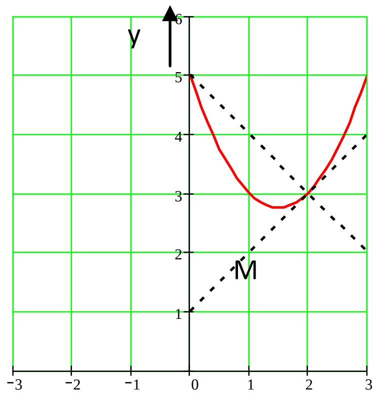
Уравнение касательной к кривой y=f(x) в точке $M(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Уравнение нормали к кривой y=f(x) в точке $M(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$.

Известно $x_0=2$, $y_0=3$. Найдем производную $y'=2x-3$. Тогда при x=2 $f'(x_0)=f'(2)=4-3=1$.
$y-3=1\cdot(x-2)$; $y=x+1$–уравнение касательной.
$y-3=-1\cdot(x-2)$; $y=-x+5$–уравнение нормали.

Производная функции в данной точке численно равна угловому коэффициенту касательной, поэтому $\text{tg}\varphi=1\Rightarrow\varphi=45°$.

Сделаем чертеж. Для этого перепишем уравнение параболы в виде
$y=x^2-2\cdot1{,}5x+1{,}5^2-1{,}5^2+5$, или $y=(x-1{,}5)^2+2{,}75$; $y-2{,}75=(x-1{,}5)^2$. Следовательно, вершина параболы лежит в точке (1,5; 2,75)



2. Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$, проведенной в точке M(-9;-8).

Решение

Уравнение касательной к кривой y=f(x) в точке M(x_0;y_0) имеет вид $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Уравнение касательной к кривой y=f(x) в точке M(x_0;y_0) имеет вид $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$.

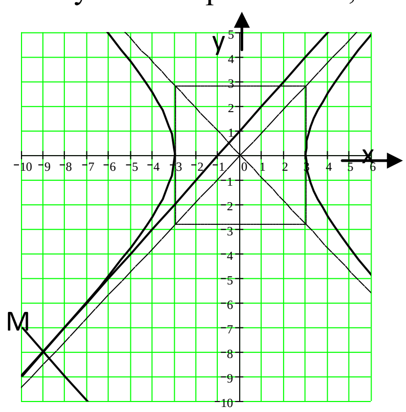
Найдем $f'(x_0)$, используя производную неявной функции. Дифференцируем равенство для функции по x.

$\frac{2x}{9}-\frac{2y\cdot y'}{8}=0,\Rightarrow\frac{y\cdot y'}{8}=\frac{x}{9},\Rightarrow y'=f'(x)=\frac{8x}{9y}$. Подставляя координаты точки M, получим $f'(x_0)=f'(-9)=\frac{8\cdot(-9)}{9\cdot(-8)}=1.$ Следовательно

y+8=1·(x+9), или y=x+1–уравнение касательной;

y+8=-1·(x+9), или y=-x-17–уравнение нормали.

Сделаем чертеж, учитывая, что полуоси гиперболы a=3, $b=\sqrt{8}\approx 2{,}8$.



Ответ: y=x+1–уравнение касательной;   y=-x-17–уравнение нормали.

2.Дифференцирование сложной, обратной функции.

Найти производные данных функций в произвольной точке:

а) $y=\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin 5x}$

Воспользуемся правилами и формулами нахождения производной:

- производная частного 2-х функций $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

- производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

-формулами $(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$y' = (\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin 5x})' = \frac{(1+\cos^2 x)' \cdot (1+\sin 5x) - (1+\cos^2 x) \cdot (1+\sin 5x)'}{(1+\sin 5x)^2} =$$

$$= \frac{-2\cos x \cdot \sin x \cdot (1+\sin 5x) - (1+\cos^2 x) \cdot 5\cos 5x}{(1+\sin 5x)^2}$$

б) $y = x \cdot \arcsin 2x + arctg\, 3x$

Воспользуемся правилами и формулам нахождения производной:
- производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$
- производная суммы 2-х функций $(u+v)' = u' + v'$
- производная произведения 2-х функций $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- формулами $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$(x \cdot \arcsin 2x + arctg 3x)' = x' \cdot \arcsin 2x + x \cdot (\arcsin 2x)' + (arctg 3x)' = \arcsin 2x +$$

$$+ \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{3}{1+9x^2}$$

в) $y = 5^{\sin 2x} - \sqrt[3]{x} \cdot tg 2x$

Воспользуемся правилами и формулам нахождения производной:
- производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$
-производная суммы 2-х функций $(u+v)' = u' + v'$
- производная произведения 2-х функций $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- формулами $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\sin x)' = \cos x$; $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$$y' = (5^{\sin 2x} - \sqrt[3]{x} \cdot tg 2x)' = 5^{\sin 2x} \cdot \ln 5 \cdot 2\cos 2x - \frac{tg 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\cos^2 2x};$$

Найти производные $\frac{dy}{dx}$ функций, заданных в явном виде.

а) $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}$.

Предварительно запишем функцию в виде, удобном для дифференцирования $y=2x^{3/2}-7x^{-1}+3x^2-2x^{-5}$, тогда $y'=3x^{1/2}+7x^{-2}+6x+10x^{-6}= \ 3\sqrt{x} + \frac{7}{x^2} + 6x + \frac{10}{x^6}$..

Ответ: $y' = 3\sqrt{x} + \frac{7}{x^2} + 6x + \frac{10}{x^6}$.

б) $y=e^{-x} \cdot tg(7x^6)$.

$y'=(e^{-x})'\cdot tg(7x^6)+e^{-x}\cdot(tg(7x^6))'= \; =e^{-x}\cdot(-x)'\cdot tg(7x^6)+e^{-x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2(7x^6)}\cdot(7x^6)'=$

$=-e^{-x}\cdot tg(7x^6)+\dfrac{42x^5\cdot e^{-x}}{\cos^2(7x^6)}.$

Ответ: $y'=-e^{-x}\cdot tg(7x^6)+\dfrac{42x^5\cdot e^{-x}}{\cos^2(7x^6)}.$

в) $y=arctg^2(5x)\cdot\ln(x-4).$

$y'=(arctg^2(5x))'\cdot\ln(x-4)+arctg^2(5x)\cdot(\ln(x-4))'=2arctg(5x)\cdot(arctg(5x))'\ln(x-$ $4)+arctg^2(5x)\cdot\dfrac{1}{x-4}\cdot(x-4)' = 2arctg(5x)\cdot\dfrac{1}{1+(5x)^2}\cdot(5x)'\cdot\ln(x-4)+\dfrac{arctg^2(5x)}{x-4}=$

$=\dfrac{10arctg(5x)\cdot\ln(x-4)}{1+25x^2}+\dfrac{arctg^2(5x)}{x-4}.$

Ответ: $y'=\dfrac{10arctg(5x)\cdot\ln(x-4)}{1+25x^2}+\dfrac{arctg^2(5x)}{x-4}.$

г)

$$y=\sqrt[5]{(x+4)^3}+\frac{x}{tgx}=(x+4)^{\frac{3}{5}}+\frac{x}{tgx}.$$

$$y'=\frac{3}{5}(x+4)^{\frac{3}{5}-1}+\frac{(x)'tgx-x(tgx)'}{tg^2x}=$$

$$=\frac{3}{5}(x+4)^{-2/5}+\frac{tgx-\dfrac{x}{\cos^2 x}}{tg^2x}=$$

$$=\frac{3}{5(x+4)^{\frac{2}{5}}}+\frac{tgx\cdot\cos^2 x-x}{tg^2x\cdot\cos^2 x}=\frac{3}{5\sqrt[5]{(x+4)^2}}+\frac{\sin x\cdot\cos x-x}{\sin^2 x}.$$

Ответ: $y'=\dfrac{3}{5\sqrt[5]{(x+4)^2}}+\dfrac{\sin x\cdot\cos x-x}{\sin^2 x}.$

д) $y=\sin^3(\cos^2(x\cdot e^{3x})).$

$$y'=3\sin^2(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot(\sin(\cos^2(x\cdot e^{3x}))'=$$
$$=3\sin^2(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot\cos(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot$$
$$\cdot(\cos^2(x\cdot e^{3x}))'=3\sin^2(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot\cos(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot$$
$$\cdot 2\cos(x\cdot e^{3x})\cdot(\cos(x\cdot e^{3x}))'=6\sin^2(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot$$
$$\cdot\cos(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot\cos(x\cdot e^{3x})\cdot(-\sin(x\cdot e^{3x}))\cdot(x\cdot e^{3x})'=$$
$$=-6\sin^2(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot\cos(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot\cos(x\cdot e^{3x})\cdot$$
$$\cdot\sin(x\cdot e^{3x})\cdot(e^{3x}+xe^{3x}\cdot 3).$$

Ответ:

$$y' = -6\sin^2(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot\cos(\cos^2(x\cdot e^{3x}))\cdot\cos(x\cdot e^{3x})\cdot\sin(x\cdot e^{3x})\cdot e^{3x}\cdot(3x+1).$$

3. Логарифмическая производная. Дифференцирование неявной функции.

Применим метод логарифмического дифференцирования.

Прологарифмируем обе части.

$$\ln y = \cos x \cdot \ln(\mathrm{tg}x).$$

Продифференцируем обе части по x

$$\frac{y'}{y} = -\sin x\cdot\ln(\mathrm{tg}x) + \cos x\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y' = y(-\sin x\cdot\ln(\mathrm{tg}x) + \frac{1}{\sin x});$$

$$y' = (\mathrm{tg}x)^{\cos x}(-\sin x\cdot\ln(\mathrm{tg}x) + \frac{1}{\sin x}).$$

$y=(\sin x)^{\arcsin x}$.

Применим метод логарифмического дифференцирования. Прологарифмируем обе части.

$$\ln y = \arcsin x \cdot \ln\sin x.$$

Продифференцируем обе части по x

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sin x + \arcsin x\frac{1}{\sin x}\cos x;$$

$$y' = y(\frac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{ctg}x\cdot\arcsin x);$$

$$y' = (\sin x)^{\arcsin x}(\frac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{ctg}x\cdot\arcsin x).$$

Ответ: $y' = (\sin x)^{\arcsin x}(\frac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{ctg}x\cdot\arcsin x)$.

Дифференцирование неявной функции.

Найти первую и вторую производные неявной функции и функции, заданной параметрически.

а) $y=e^y+4x$.

Продифференцируем обе части по x

$y'=e^y\cdot y'+4$; $y'(1-e^y)=4$;   (*) Отсюда $y' = \frac{4}{1-e^y}$.

Дифференцируем равенство (*) по x

$y''\cdot(1-e^y)+y'\cdot(-e^y)\cdot y'=0$. Отсюда $y'' = \frac{e^y\cdot(y')^2}{1-e^y}$ Подставляя вместо y' его выражение, получим $y'' = \frac{16e^y}{(1-e^y)^3}$.

Ответ: $y' = \frac{4}{1-e^y}$. $y'' = \frac{16e^y}{(1-e^y)^3}$.

б) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t-1} \end{cases}$

Первую и вторую производные найдем по формулам
$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$
$$y''_x=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_t\cdot x'_t-x''_t\cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

Найдем

$$x'_t=(t^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}};\ \ y'_t=((t-1)^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$x''_t=-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}};\ \ y''_t=-\frac{2}{9}(t-1)^{-\frac{5}{3}}.\ \ \text{Тогда}\ \ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{2}{3}}.}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{2}{9}\cdot(t-1)^{-\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot(t-1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)^3}=$$

$$=\frac{8}{36}\frac{(t-1)^{-\frac{5}{3}}\cdot t^{-\frac{3}{2}}}{t^{-\frac{3}{2}}}\left(4t+3(t-1)\right)=\frac{-2(t+3)}{9\sqrt[3]{(t-1)^5}}.$$

Ответ: $\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}.\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2(t+3)}{9\sqrt[3]{(t-1)^5}}.$

3. Найти первую и вторую производные неявной функции и функции, заданной параметрически.

а) $\ln y-\frac{7}{x}=7.$

Продифференцируем обе части по x : $\frac{1}{y}\cdot y'+\frac{7}{x^2}=0$; Отсюда $y'=\frac{-7y}{x^2}.$

Дифференцируем последнее равенство по x

$$y''=\left(\frac{-7y}{x^2}\right)'_x=\frac{-7y'x^2+14xy}{x^4}=\frac{-7\cdot\frac{-7y}{x^2}\cdot x^2+14xy}{x^4}=\frac{49y+14xy}{x^4}.$$

Ответ: $y'=\frac{-7y}{x^2}.\ y''=\frac{7y\cdot(7+2x)}{x^4}.$

б) $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2}\\ y=\frac{1}{t}\end{cases}$

Первую и вторую производные найдем по формулам

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y''_x=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_t\cdot x'_t-x''_t\cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

Найдем

$$x_t'=\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}=-t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}};\ y'_t=-\frac{1}{t^2}=-t^{-2}.$$

$$x''_t=-\frac{\sqrt{1-t^2}-t\cdot\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2}=-\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}=-(1-t^2)^{-\frac{3}{2}};\ y''_t=2t^{-3}.$$

Тогда $\frac{dy}{dx}=\frac{-t^{-2}}{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2t^{-3}\cdot(-t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}})+(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-t^{-2})}{-t^3(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}}=\frac{t^{-2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}(2(1-t^2)+1)}{t^3(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}}=\frac{3-2t^2}{t^5}.$$

Ответ: $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}.\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3-2t^2}{t^5}.$

3.4.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили понятие производной функции в точке, ее геометрический, физический смысл;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при нахождении производной функции по правилам дифференцирования;
- выработали навыки по нахождению производной сложной, обратной, неявной функции в точке , применению логарифмической производной.

3.5 Практическое занятие №10 (2 ч.)

Тема: Дифференциал функции, его свойства.

3.5.1 Задание для работы:

1. Дифференциал функции в точке, его геометрический смысл.
2. Правила вычисления дифференциалов.
3. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Дифференциал функции в точке, его геометрический смысл.

Дифференцируемость функции в точке, связь с непрерывностью.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ (1)

где А – некоторое число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ - функция аргумента Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

Установим связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в этой же точке.

Теорема1. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Таким образом, для функции одной переменной дифференцируемость и существование производной – понятия равносильные. Поэтому операцию нахождения производной часто называют дифференцированием.

Установим связь между понятием дифференцируемости и непрерывности.

Теорема2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, т. е. не иметь производной в этой точке.

Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, но производной в этой точке не имеет. Действительно,

$$x \geq 0 \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1; \ f'(0)$$

$$x \leq 0 \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \ f'(0)$$

.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то будем говорить, что функция $f(x)$ дифференцируема на данном промежутке.

2. Дифференциальная функции, его геометрический смысл.

Рассмотрим понятие дифференциала функции, которое тесно связано с понятием производной. Термин дифференциал происходит от латинского слова differentia, означающего разность. Этот термин был введен Лейбницем. Обозначается буквой d.

Пусть функция $y = f(x)$, дифференцируема в точке x_0, т. е. $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Слагаемое $A\Delta x$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой одного порядка с $\Delta x \ (при\ A \neq 0)$, оно линейного относительно Δx $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x}{\Delta x} = A$)

Слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ бесконечно малое более высокого порядка, чем Δx $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0$.

Таким образом, первое слагаемое $(при\ A \neq 0)$ является главной частью приращения функции $y = f(x)$.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции в этой точке:

$dy = A\Delta x$ (2)

Учитывая, что $A = f'(x_0)$ (на основании теоремы: Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную), формулу (2) можно записать в виде

$dy = f'(x_0)\Delta x$ (3)

Пусть $f(x)=x$. Тогда по формуле (3)

$$dy=(x_0)'\Delta x=(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x})\Delta x=1*\Delta x=\Delta x$$.

Дифференциалом независимой переменной x назовем приращение этой переменной $dx=\Delta x$. Тогда формула (3) примет вид

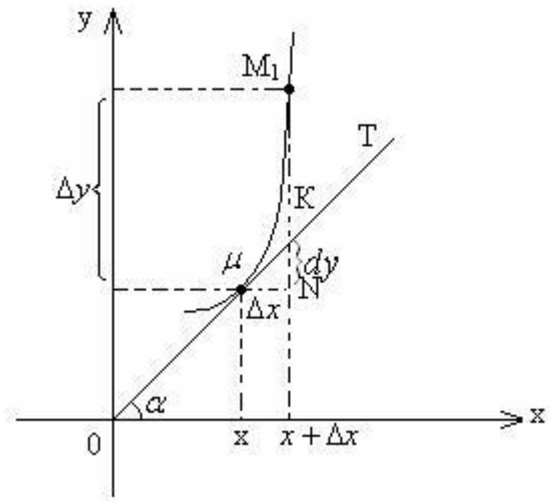
$dy=f'(x_0)dx$ (4)

Заметим, что с помощью равенства (4) производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу независимой переменной, т. е. $f'(x_0)=\dfrac{dy}{dx}$. (5)

Таким образом, если функция $y=f(x)$ имеет производную в любой точке x, то $dy=f'(x)dx$ (5) и $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ (6)

ка-

ве-



Геометрический смысл дифференциала.

Пусть точка M на графике функции $y=f(x)$ соответствует значению аргумента x, точка $M_1-x+\Delta x$, прямая MT - сательная к графику функции $y=f(x)$ в точке M, α - угол между касательной и осью OX, приращение функции Δy равно личине отрезка NM_1. Из прямоугольного треугольника MNK получаем

$$NK=tg\alpha*\Delta x=f'(x)\Delta x=dy,$$

т. е. дифференциал функции равен величине отрезка NK, причем, как видно из рисунка величины отрезков NM_1 и NK различны.

Таким образом, дифференциал функции $y=f(x)$ геометрически представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке с абсциссой x при переходе от точки касания в точку с абсциссой (в то время как приращение функции NM изображается приращением ординаты самой кривой $y=f(x)$, на этом же участке).

Если x - время, а $y=f(x)$ координата точки на прямой, в момент x, то дифференциал $dy=f(x)\Delta x$ равен этому изменению координаты, которое получила бы точка за время Δx, если бы скорость точки на отрезке времени $[x;x+\Delta x]$ была постоянной и равной $f'(x)$. Изменение скорости на этом отрезке приводит к тому, что, вообще говоря, $\Delta y\neq dy$. Однако на малых промежутках времени Δx изменение скорости незначительно и $\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x$. (механический смысл дифференциала).

2. Правила вычисления дифференциалов.

Свойства дифференциала, инвариантность его формы.

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной. Следовательно, большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняет свою силу и для дифференциала.

1. $dc=0$.

2. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

3. $d(uv) = vdu + udv, d(cv) = cdv$.

4. $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Пример. Найти дифференциал функции $u = A\cos(w_0 t = q_0)$. $du = -Aw_0 \sin(w_0 t = q_0)dt$.

Найдем дифференциал сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где $u = q(x)$, т. е. $y = f[q(x)]$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции $\frac{dy}{dx} = f'(u)q'(x)$, или $dy = f'(u)q'(x)dx$. Но $q'(x)dx = du$, следовательно $dy = f'(u)du$.

Если сравнить эту формулу с формулой $dy = f'(x)dx$, то можно видеть, что форма дифференциала не зависит от того, является аргументом функцией независимой переменной или функцией от независимой переменной.

Это свойство дифференциала называется инвариантностью формы дифференциала.

Пример. $y = \cos\sqrt{x}$. Найти dy:

$dy = -\sin\sqrt{x} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$ или $dy = -\sin\sqrt{x} d(\sqrt{x})$.

4. Дифференциал высших порядков.

Дифференциалы высших порядков определяются по аналогии с производными. Второй дифференциал $d^2 y$ есть дифференциал от первого дифференциала, т. е. $d^2 y = d(dy)$; и вообще, $d^{(n)} y = d(d^{(n-1)} y)$.

Найдем выражение для дифференциалов высших порядков от функции $y = f(x)$, считая, что её аргумент x - независимая переменная:

$d(dy) = (dy)'dx = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx$, или $d^2 y = f''(x)dx^2$.

Здесь при дифференцировании по xdxвыступает в роли постоянной величины.

Аналогично $d^3 y = f'''(x)dx^3$ и вообще $d^n y = f^n(x)dx^n$, (7), т. е. дифференциал порядка n равен производной того же порядка, умноженной на n-ю степень дифференциала аргумента. Отсюда $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ (8). Эта формула является обобщением формулы $y' = \frac{dy}{dx}$ и может служить удобным обозначением для производных высших порядков.

3.Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала, сохраняя два знака после запятой.

а) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 5x + 1}$ при x=1,04.

Воспользуемся приближенным равенством

$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+dy=f(x_0)+ f'(x_0)\cdot\Delta x$

Положим $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 5x + 1} = (2x^2 + 5x + 1)^{\frac{1}{3}}$, $x_0+\Delta x=1,04$; $x_0=1$. Тогда

$f'(x)=\frac{1}{3}(2x^2 + 5x + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4x + 5)$, $f(x_0)= f(1)=2$, $f'(x_0)= f'(1)=\frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$,

$\Delta x=1,04-1=0,04$. Получим $f(x_0+\Delta x) \approx 2+3/4 \cdot 0,04=2,03$.

б) cos61°

Возьмем $f(x)=\cos x$, $x_0+\Delta x=61°$; $x_0=60°$. Тогда $f'(x)=-\sin(x)$, $f(x_0)= f(60°)=\cos 60°=0,5$,

$f'(x_0)= f'(60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx -0{,}866.$ $\Delta x=61°-60°=1°=\frac{\pi}{180}\approx 0{,}017.$

Получим $\cos 61°\approx 0{,}5-0{,}866\cdot 0{,}017=0{,}48.$

в) $y=\sqrt{4x-3x^3}$ при $x=0{,}85$.

Воспользуемся приближенным равенством $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

Положим $f(x)=\sqrt{4x-3x^3}=(4x-3x^3)^{\frac{1}{2}}$, $x_0+\Delta x=0{,}85$; $x_0=1$. Тогда

$f'(x)=\frac{1}{2}(4x-3x^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4-9x^2)$, $f(x_0)= f(1)=1$, $f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-5)=-2{,}5.$,

$\Delta x=0{,}85-1=-0{,}15$. Получим $f(x_0+\Delta x)=f(0{,}85)\approx 1-2{,}5\cdot(-0{,}15)=1{,}37.$

г) $\sin 27°$

Возьмем $f(x)=\sin x$, $x_0+\Delta x=27°$; $x_0=30°$. Тогда

$f'(x)=\cos(x)$, $f(x_0)= f(30°)=\sin 30°=0{,}5$, $f'(x_0)= f'(30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866.$

$\Delta x=27°-30°=-3°=-3\cdot\frac{\pi}{180}\approx -0{,}052.$

Получим $\sin 27°\approx 0{,}5-0{,}866\cdot 0{,}052=0{,}45.$

3.5.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятие производной неявной функции, дифференциала функции в точке, его геометрический смысл;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при нахождении производной неявной функции функции, дифференциала функции в точке;
- выработали навыки по нахождению производной неявной функции, дифференциала функции в точке, его применению к приближенным вычислениям.

3.6 Практическое занятие №11-13 (6 ч.)

Тема: Исследование функции методами дифференциального исчисления

3.6.1 Задание для работы:

1. Исследование функции на экстремумы. Исследование формы кривой. Исследование функции на монотонность. Асимптоты функции. Полное исследование функции и построение схемы ее графика.

3.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Исследование функции на экстремумы. Исследование формы кривой. Исследование функции на монотонность. Асимптоты функции. Полное исследование функции и построение схемы ее графика

Провести полное исследование функции и построить ее график

$$\text{а) } y=\frac{x^3+4}{x^2}.$$

Решение

1)Область определения функции $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.Функция непрерывна в области определения, x=0–точка разрыва. Найдем односторонние пределы

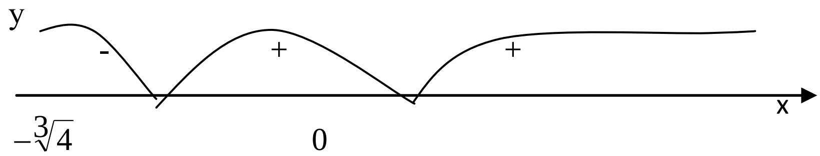
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^3+4}{x^2}.=+\infty,\quad \lim_{x\to 0+0}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty.$$

Следовательно, x=0–вертикальная асимптота.

2) $y(-x)=\dfrac{(-x)^3+4}{(-x)^2}.=\dfrac{4-x^3}{x^2}\neq\pm y(x)$. Следовательно, функция общего вида.

3) Точек пересечения с осью Оу нет.

Точка пересечения с осью Ох определяется из уравнения $x^3+4=0$; $x=-\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59$, т. е. точка пересечения с осью Ох-($-\sqrt[3]{4}$; 0)

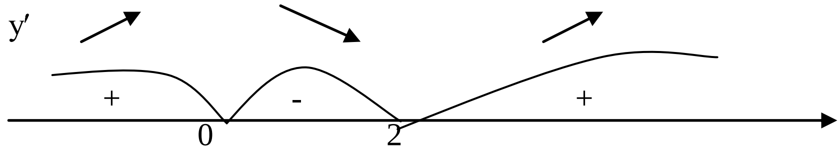


В интервале (-∞;$-\sqrt[3]{4}$) y<0; в интервале ($-\sqrt[3]{4}$; 0) y>0; в интервале (0;+∞) y>0;

4)Исследуем функцию на возрастание, убывание, точки экстремума.

$$y'=\frac{3x^2\cdot x^2-(x^3+4)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}.$$

$y'=0$ при x=2, y' не существует при x=0.



Таким образом

(-∞,) $y'>0$, функция возрастает; (0,2) $y'<0$, функция убывает.

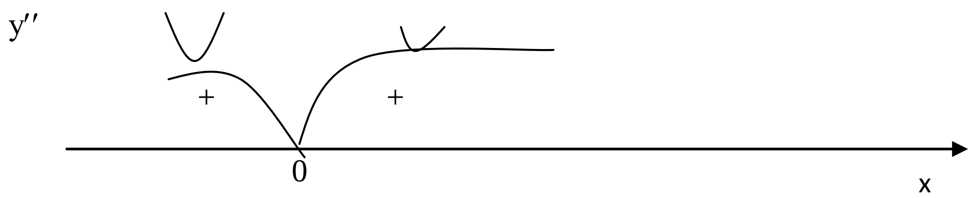
(2,+∞) $y'>0$, функция возрастает.

В точке x=2 функция имеет минимум $y_{min}=12/4=3$.

5)Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$$y''=\frac{3x^2\cdot x^3-(x^3-8)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{24}{x^4}.$$

y'' в ноль не обращается, y'' не существует при x=0.



(-∞,0) $y''>0$, функция вогнута;

(0,+∞) $y''>0$, функция вогнута.

Точек перегиба нет (так как при x=0 функция не определена).

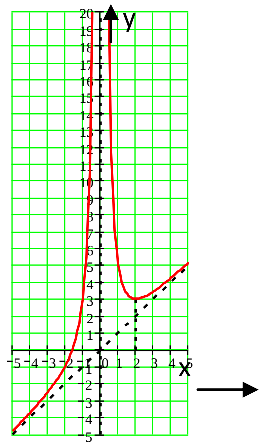
6) Найдем наклонную асимптоту.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x^3}) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}(\frac{x^3+4}{x^2} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = 0$$

Следовательно, y=x–наклонная асимптота.

7) Сделаем чертеж



б) $y = \frac{x}{x^2-1}.$

Решение

1)Область определения функции $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.Функция непрерывна в области определения, x=-1 и x=1–точки разрыва. Найдем односторонние пределы

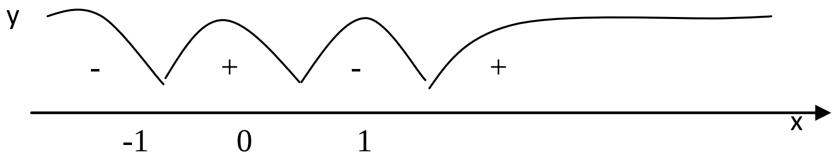
$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{x^2-1}. = -\infty,\ \lim_{x\to-1+0}\frac{x}{x^2-1}. = +\infty,\ \lim_{x\to1-0}\frac{x}{x^2-1}. = -\infty,\ \lim_{x\to1+0}\frac{x}{x^2-1}. = +\infty.$$

Следовательно x=-1 и x=1–вертикальные асимптоты.

2) $y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1}. = -\frac{x}{x^2-1} = -y(x)$.

Следовательно функция нечетная.

3) Точка пересечения с осями (0,0).



В интервале (-∞;-1) y<0;

В интервале (-1;0) y>0;

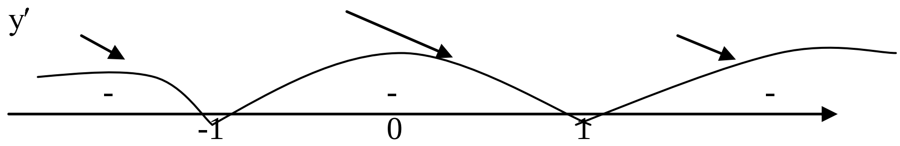
В интервале (0;1) y<0;

В интервале (1;+∞) y>0;

4)Исследуем функцию на возрастание, убывание, точки экстремума.

$$y' = \frac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

y′<0 во всей области определения.



Таким образом

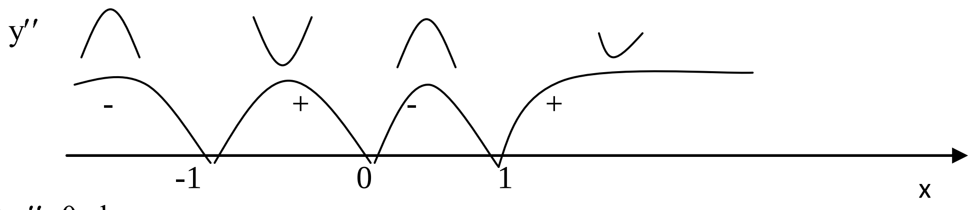
(-∞,-1) $y'<0$, функция убывает; (-1,1) $y'<0$, функция убывает; (1,+∞) $y'<0$, функция убывает.

Экстремумов нет.

5)Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$$y''=-\frac{2x(x^2-1)^2-(x^2+1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=-\cdot\frac{2x(x^2-1)}{(x^2-1)^4}\cdot(x^2-1-2x^2-2)=2\cdot\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

$y''=0$ при $x=0$, y'' не существует при $x=\pm1$.



(-∞,-1) $y''<0$, функция выпукла;

(-1, 0) $y''>0$, функция вогнута;

(0, 1) $y''<0$, функция выпукла;

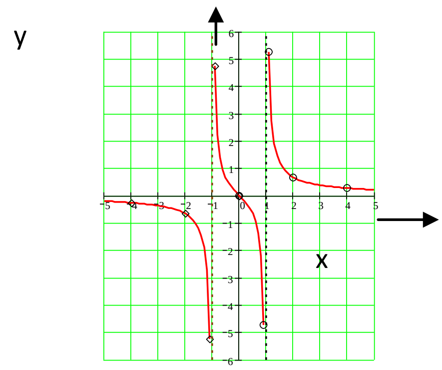
(1,+∞) $y''>0$, функция вогнута.

При x=0 имеем точку перегиба $y_{пер}=y(0)=0$.

6) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$, то y=0–горизонтальная асимптота (частный случай наклонной).

Найдем несколько дополнительных точек и сделаем чертеж

x	0,9	1,1	2	4
f(x)	-4,74	5,24	0,67	0,27



в) $y=\frac{x^3}{3-x^2}.$

Решение

1)Область определения функции $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$.Функция непрерывна в области определения, $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ –точки разрыва. Найдем односторонние пределы

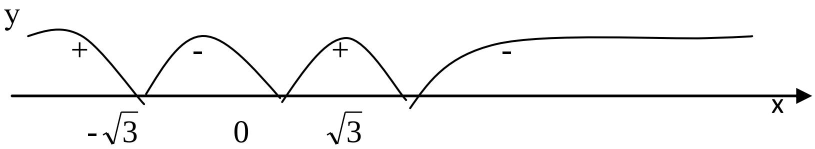
$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}.=+\infty,\quad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}.=-\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}.=+\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}.=-\infty.$$

Следовательно $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ –вертикальные асимптоты.

2) $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}.=-\dfrac{x^3}{3-x^2}=-y(x)$.

Следовательно функция нечетная.

3) Точка пересечения с осями (0,0).



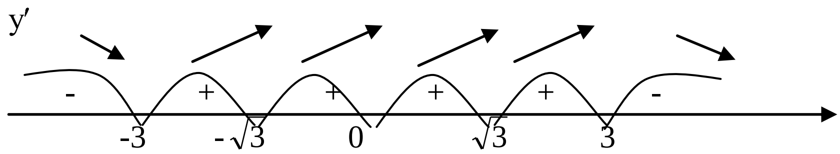
В интервале ($-\infty$;$-\sqrt{3}$) y>0; в интервале ($-\sqrt{3}$;0) y<0; в интервале (0; $\sqrt{3}$) y>0;

В интервале ($\sqrt{3}$;$+\infty$) y<0;

4)Исследуем функцию на возрастание, убывание, точки экстремума.

$$y'=\frac{3x^2(3-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

y'=0 при x=0, ±3, y' не существует при x=$\pm\sqrt{3}\approx\pm1{,}7$.



Таким образом

($-\infty$,-3) y'<0, функция убывает; (-3,$-\sqrt{3}$) y'>0, функция возрастает;

($-\sqrt{3}$,0) y'>0, функция возрастает; (0,$\sqrt{3}$) y'>0, функция возрастает;

($\sqrt{3}$,3) y'>0, функция возрастает; (3,$+\infty$) y'<0, функция убывает.

В точке x=-3 функция имеет минимум y_{min}=4,5.

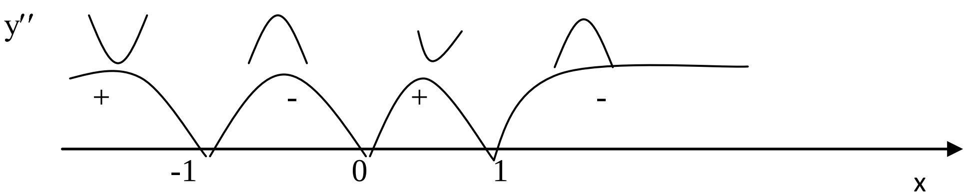
В точке x=3 функция имеет максимум y_{max}=-4,5.

5)Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$$y''=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2+(9x^2-x^4)\cdot 2(3-x^2)\cdot 2x}{(3-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x(3-x^2)}{(3-x^2)^4}\cdot[(9-2x^2)(3-x^2)+18x^2-2x^4]=6\cdot\frac{x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}.$$

y''=0 при x=0, y'' не существует при x=$\pm\sqrt{3}$.



($-\infty$,-1) y''<0, функция вогнута; (-1, 0) y''>0, функция выпукла;

(0, 1) y''<0, функция вогнута; (1,$+\infty$) y''>0, функция выпукла.

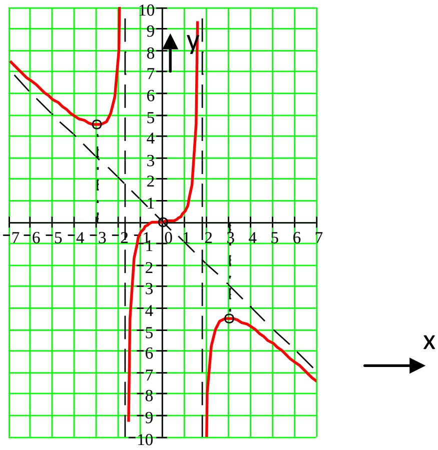
При x=0 имеем точку перегиба $y_{пер}$=y(0)=0.

6) Найдем наклонную асимптоту.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=-1;\ b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0$$

Таким образом y=-x–наклонная асимптота.

7) Сделаем чертеж



3.6.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили необходимое, достаточное условие существования экстремума, точки перегиба, теорему о монотонности дифференцируемой функции, теорему о форме кривой, достаточное условие существования асимптоты;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при исследовании функции методами дифференциального исчисления;

3.7 Практическое занятие №14 (2 ч.)

Тема: Задачи на экстремум и правила Лопиталя

3.7.1 Задание для работы:

1. Изопараметрические задачи
2. правила Лопиталя

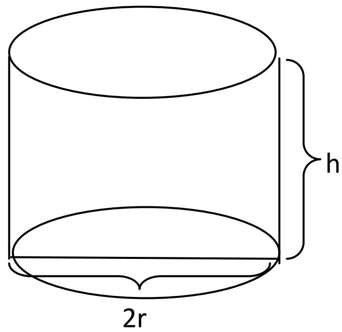
3.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Изопараметрические задачи

1. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема V. Каковы должны быть высота ведра и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести?

Решение

Обозначим:
h-высота ведра;
r-радиус дна.
Сделаем чертеж



По условию

$$V=\pi r^2 \cdot h \qquad (1)$$

Полная поверхность

$$S=S_{осн}+S_{бок}=\pi r^2+2\pi rh \qquad (2)$$

Выразим h из уравнения (1)

$$h=V/\pi r^2$$

и подставим в (2). Получим

$$S=\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

Таким образом, получили функцию от r. Исследуем эту функцию при

$$\frac{dS}{dr}=2\pi r-\frac{2V}{r^2}=0;$$

$r\in(0,\infty)$. $\pi r^3=V$; Так как $\frac{d^2S}{dr^2}=2\pi+\frac{4V}{r^3}>0$ при $r\in(0,+\infty)$, то функция имеет в

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

данной точке минимум. При этом $h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}}=\frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{V^2}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\ (=r)$. Таким образом,

у ведра оптимальных размеров $h=r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $y=4-x-\frac{4}{x^2}$ $[1;4]$

Решение

1. Находим производную

$$y'=-1+\frac{8}{x^3}.$$

2. Находим критические точки

Производная равна нулю

$$-1+\frac{8}{x^3}=0.$$

$$x^3=8$$

$$x=2\in[1;4]$$

Производная не существует при $x=0\notin[1;4]$

3. Находим значения функции в точках x=1, x=2, x=4.

y(1)=4-1-4=-1; y(2)=4-2-1=1; y(4)=4-4-1/4=-0,25.

4. Выбираем наименьшее и наибольшее значения

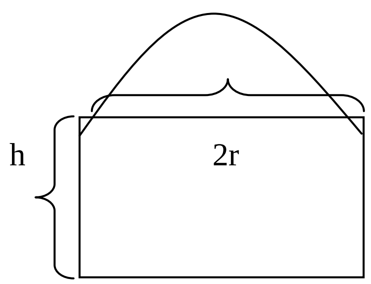
$y_{наим}=y(1)=-1$, $y_{наиб}=y(2)=1$.

Ответ: $y_{наим}=y(1)=-1$, $y_{наиб}=y(2)=1$.

3.Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

Решение

Сделаем чертеж



Для того, чтобы окно пропускало наибольшее количество света, нужно сделать площадь окна максимальной. Выразим площадь окна через h и r.

$$S=2\cdot h\cdot r+\pi r^2/2$$

По условию известен периметр

$$P=2h+2r+\pi r=a$$

Отсюда

$$h=\frac{a-\pi r-2r}{2}$$

Подставляя в выражение для площади, получим

$S=(a-\pi r-2r)\cdot r+\pi r^2/2=ar-2r^2-\pi r^2/2=ar-(2+\pi/2)r^2=ar-\frac{(4+\pi)r^2}{2}$.

Исследуем эту функцию при $r\in[0,\frac{a}{\pi+2}]$. (При больших значениях r получим h<0).

$$\frac{dS}{dr}=a-(4+\pi)r=0;$$

$$r=\frac{a}{4+\pi}.$$

Вычислим значения S в точках $r=0,\ \frac{a}{4+\pi},\frac{a}{2+\pi}$ $\quad S(0)=0;$

$S(\frac{a}{4+\pi})=a\cdot\frac{a}{4+\pi}-\frac{(4+\pi)}{2}\cdot\frac{a^2}{(4+\pi)^2}=\frac{a^2}{(4+\pi)}\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{a^2}{2(4+\pi)}\approx 0{,}07a^2.$

$S(\frac{a}{2+\pi})=a\cdot\frac{a}{2+\pi}-\frac{4+\pi}{2}\cdot\frac{a^2}{(2+\pi)^2}=\frac{a^2}{2(2+\pi)^2}\cdot(4+2\pi-4-\pi)=\frac{a^2\pi}{2(2+\pi)^2}\approx 0{,}059a^2$

Таким образом наибольшее значение площади получится при $r=\frac{a}{4+\pi}$, при этом

$h=\frac{a-(2+\pi)r}{2}=\frac{a}{2}(1-\frac{2+\pi}{4+\pi})=\frac{a}{4+\pi}$. Таким образом ширина оптимального окна (2r) в два раза больше высоты.

2. Правила Лопиталя.

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$

Предел можно предварительно упростить, избавившись от косинуса, однако проявим уважение к условию и сразу продифференцируем числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x\cdot\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x)'-(e^{-x})'}{(\sin x)'\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}\cdot(-x)'}{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1+1}{1-0}=2$$

В самом процессе нахождения производных нет чего-то нестандартного, так, в знаменателе использовано обычное правило дифференцирования произведения $(uv)'=u'v+uv'$.

2. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{\ln(1-2x)}$

Напрашивается применение замечательной эквивалентности, но путь жёстко предопределён по условию:

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2+x}{\ln(1-2x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{(3x^2+x)'}{(\ln(1-2x))'}=\lim_{x\to0}\frac{3\cdot2x+1}{\frac{1}{(1-2x)}\cdot(1-2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{6x+1}{\frac{-2}{(1-2x)}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(6x^{\to0}+1)(1-2x^{\to0})=-\frac{1}{2}$$

3. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(tg3x)'}{(tgx)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}=\frac{0}{0}=$$

$$=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2 x)'}{(\cos^2 3x)'}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\cdot(\cos x)'}{2\cos3x\cdot(\cos3x)'}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos3x\cdot(-3\sin3x)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\cdot\sin x}{\cos3x\cdot\sin3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\cdot(\sin x)^{\to1}}{\cos3x\cdot(\sin3x)^{\to-1}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos3x}=\frac{0}{0}=$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)'}{(\cos3x)'}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-3\sin3x}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^{\to1}}{(\sin3x)^{\to-1}}=\frac{1}{3}$$

Интересно, что первоначальная неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ после первого дифференцирования превратилась в неопределённость $\frac{0}{0}$, и правило Лопиталя применяется дальше. Также заметьте, как после каждого «подхода» устраняется четырёхэтажная дробь, а константы выносятся за знак предела. В более простых примерах константы удобнее не выносить, но когда предел сложный, упрощаем всё-всё-всё. Коварство решённого примера состоит ещё и в том, что при $x\to\frac{\pi}{2},\quad \sin x\to1$, а $\sin3x\to-1$.

4. Вычислить предел функции, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4}{\arcsin x}-\frac{1}{x}\right)$

На первом шаге приводим выражение к общему знаменателю, трансформируя тем самым неопределённость $\infty-\infty$ в неопределённость $\frac{0}{0}$. А затем применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{4}{\arcsin x}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to0}\frac{4x-\arcsin x}{x\arcsin x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(4x-\arcsin x)'}{(x\arcsin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{(4x)'-(\arcsin x)'}{(x)'\arcsin x+x(\arcsin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{4-\frac{1}{\sqrt{1-x^2{}_{\to0}}}}{\arcsin x^{\to0}+\frac{x^{\to0}}{\sqrt{1-x^2{}_{\to0}}}}=\frac{4-\frac{1}{\sqrt{1}}}{0+\frac{0}{\sqrt{1}}}=\frac{3}{0}=\infty$$

Неопределённость $0\cdot\infty$ тоже не сопротивляется превращению в $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

5. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to0+0}(x\ln^2 x)$

Предел здесь односторонний, графика «классического» логарифма не существует слева от оси OY, таким образом, мы можем приближаться к нулю только справа.

Правила Лопиталя для односторонних пределов работают, но сначала необходимо разобраться с неопределённостью $0\cdot\infty$. На первом шаге делаем дробь трёхэтажной, получая неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, далее решение идёт по шаблонной схеме:

$$\lim_{x\to 0+0}(x\ln^2 x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln^2 x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2\ln x}{x}=-2\lim_{x\to 0+0}(x\ln x)=0\cdot(-\infty)=(*)$$

После дифференцирования числителя и знаменателя избавляемся от четырёхэтажной дроби, чтобы провести упрощения. В результате нарисовалась неопределённость $0\cdot(-\infty)$. Затем снова делаем дробь трёхэтажной и к полученной неопределённости $\frac{-\infty}{\infty}$ применяем правило Лопиталя ещё раз:

$$(*)=-2\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}=-2\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=-2\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2}{x}=2\lim_{x\to 0+0}(x)=2\cdot 0=0$$

6. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\sin x}$

Для устранения неопределённости 0^0 используем основное логарифмическое тождество: $a=e^{\ln a}$. В данном случае $a=x^{\sin x}$: $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0+0}e^{\ln(x^{\sin x})}=\lim\limits_{x\to 0+0}e^{\sin x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x\cdot\ln x)}$

На предпоследнем шаге, согласно известному школьному свойству, «сносим» синус из степени за пределы логарифма, получая произведение $\sin x\cdot\ln x$. На последнем шаге перемещаем значок предела в показатель (поскольку экспоненциальная функция непрерывна, да и предел относится, прежде всего, к верхнему этажу).

Чтобы не мельчить, вычислим предел показателя отдельно: $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x\cdot\ln x)$

С неопределённостью $0\cdot(-\infty)$ разбираемся уже знакомым способом – делаем дробь трёхэтажной, получая неопределённость $\frac{-\infty}{\infty}$, к которой применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0}(\sin x\cdot\ln x)=0\cdot(-\infty)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot(\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Применим правило Лопиталя, как этого требует условие задачи:

$$(*)=-\lim_{x\to 0+0}\frac{(\sin^2 x)'}{(x\cos x)'}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{2\sin x\cdot(\sin x)'}{(x)'\cos x+x(\cos x)'}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=-\frac{2\cdot 0\cdot 1}{1-0}=-\frac{0}{1}=0$$

Не торопитесь, предел не равен нулю! Мы вычислили только предел показателя. В конце решения главное не забыть про экспоненту. Окончательно:

$$\lim_{x\to 0+0}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x\cdot\ln x)}=e^0=1$$

В ряде случаев после использование основного логарифмического тождества удаётся миновать неопределённость $0\cdot\infty$:

7. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-1)^{\frac{1}{x}}$

Очередной папуас ∞^0 тоже сдаётся перед формулой $a=e^{\ln a}$. В данном случае $a=(e^x-1)^{\frac{1}{x}}$: $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-1)^{\frac{1}{x}}=\infty^0=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln(e^x-1)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x-1)}{x}}$

В результате сразу получена неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, что облегчает задачу. Предел показателя для удобства вычислим отдельно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x-1)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(e^x-1))'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(e^x-1)}\cdot(e^x-1)'}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

В итоге: $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-1)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x-1)}{x}}=e^1=e$

3.7.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные алгоритмы решения оптимизационных задач;
- освоили основные алгоритмы применения правил Лопиталя;
- выработали навыки по раскрытию неопределенностей.

3.8 Практическое занятие №15-16 (4 ч.)

Тема: Функция многих переменных, ее дифференцирование. Дифференциал функции двух переменных

3.8.1 Задание для работы:

1.ОДЗ функции двух переменных. Частные и полное приращение функции двух переменных.
2.Частные производные функции двух переменных, ее дифференциал первого порядка. Дифференцируемость сложно заданных функций.
3. Дифференциал функции двух переменных, приближенные вычисления

3.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.ОДЗ функции двух переменных. Частные и полное приращение функции двух переменных.

Найти область определения функции:

1) $z=\ln(x^2-y^2-R^2), R\succ 0$ 2) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$

3) $z=\log(x^2+y^2-1)+\sqrt{16-x^2-y^2}$

Дана функция z=f(x,y) и точка $M_0(x_0,y_0)$. С помощью дифференциала вычислить приближенное значение функции в данной точке. Оценить относительную погрешность вычисления.

$$z=x^2+y^2-2x+2y, \quad M_0(1{,}08;1{,}94).$$

Решение

Найдем частные производные и дифференциал в любой точке

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2$$

$$dz = (2x - 2)dx + (2y + 2)dy$$

Вычислим его в точке M(1,2) при приращениях

$dx=\Delta x=1{,}08-1=0{,}08$; $dy=\Delta y=1{,}94-2=-0{,}06$. $dz=0\cdot 0{,}08+6\cdot(-0{,}06)=-0{,}36$.

Найдем $z(M)=z(1,2)=1+4-2+4=7$.

Тогда $\bar{z} = \bar{z}(M_0) = z(M) + dz = 7 - 0{,}36 = 6{,}64.$

Вычислим точное значение функции z в точке M_0 $z=1{,}08^2+1{,}94^2-2\cdot 1{,}08+2\cdot 1{,}94=6{,}65$.

Найдем относительную погрешность

$$\delta = \left|\frac{z - \bar{z}}{z}\right| \cdot 100\% = \frac{|\,6{,}65 - 6{,}64\,|}{6{,}65} \cdot 100\% = 0{,}15\%$$

Ответ: Приближенное значение $\bar{z} = 6{,}64$. Относительная погрешность $\delta \approx 0{,}15\%$.

3. Дана функция z=f(x,y) и точка $M_0(x_0,y_0)$. С помощью дифференциала вычислить приближенное знчение функции в данной точке. Оценить относительную погрешность вычисления.

$z=2xy+3y^2-5x$, $\quad M_0(3{,}04;3{,}95)$.

Решение

Найдем частные производные и дифференциал в любой точке

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 5 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 6y$$

$$dz = (2y - 5)dx + (2x + 6y)dy$$

Вычислим его в точке M(3,4) при приращениях

$dx=\Delta x=3{,}04-3=0{,}04$; $dy=\Delta y=3{,}95-4=-0{,}05$. $dz=(2\cdot 4-5)\cdot 0{,}04+(2\cdot 3+6\cdot 4)\cdot(-0{,}05)=-1{,}38$.

Найдем $z(M)=2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4^2-5\cdot 3=57$.

Тогда $\bar{z} = \bar{z}(M_0) = z(M) + dz = 57 - 1{,}38 = 55{,}62.$

Вычислим точное значение функции z в точке M_0 $z=2\cdot 3{,}04\cdot 3{,}95+3\cdot 3{,}95^2-5\cdot 3{,}04=55{,}624$.

Найдем относительную погрешность

$$\delta = \left|\frac{z - \bar{z}}{z}\right| \cdot 100\% = \frac{55{,}624 - 55{,}62}{55{,}624} \cdot 100\% = 0{,}007\%$$

Ответ: Приближенное значение $\bar{z} = 55{,}62$. Относительная погрешность $\delta \approx 0{,}007\%$.

2.Частные производные функции двух переменных, ее дифференциал первого порядка. Дифференцируемость сложно заданных функций.

1. Дана функция $z=\ln(3x^2+2y^3)$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Убедитесь, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Решение

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{3x^2+2y^3}\cdot(3x^2+2y^3)'_x=\frac{6x}{3x^2+2y^3};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{3x^2+2y^3}\cdot(3x^2+2y^3)'_y=\frac{6y}{3x^2+2y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{6x}{3x^2+2y^3}\right)'_x=\frac{6(3x^2+2y^3)-6x\cdot 6x}{(3x^2+2y^3)^2}=\frac{6(2y^3-3x^2)}{(3x^2+2y^3)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{6y}{3x^2+2y^3}\right)'_y=\frac{6(3x^2+2y^3)-6y\cdot 6y}{(3x^2+2y^3)^2}=\frac{6(3x^2-4y^3)}{(3x^2+2y^3)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{6x}{3x^2+2y^3}\right)'_y=\frac{0(3x^2+2y^3)-6x\cdot 6y}{(3x^2+2y^3)^2}=\frac{-36xy}{(3x^2+2y^3)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{6y}{3x^2+2y^3}\right)'_x=\frac{0(3x^2+2y^3)-6y\cdot 6x}{(3x^2+2y^3)^2}=\frac{-36xy}{(3x^2+2y^3)^2};$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2. Дана функция $z=\ln(x^2+y^2)$. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x};\dfrac{\partial z}{\partial y};\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2};\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2};\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Убедитесь, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

3.Дана функция $z=\dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$. Показать, что $F(x,y,z,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})=0$.

$$F=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}.$$

Решение

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{0\cdot(x^2-y^2)^5-y\cdot 5(x^2-y^2)^4\cdot 2x}{(x^2-y^2)^{10}}=-\frac{10xy}{(x^2-y^2)^6};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1\cdot(x^2-y^2)^5-y\cdot 5(x^2-y^2)^4\cdot(-2y)}{(x^2-y^2)^{10}}=\frac{x^2+9y^2}{(x^2-y^2)^6}.$$

Тогда

$$F=\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-\frac{10\cancel{x}y}{(x^2-y^2)^6}\right)+\frac{1}{y}\cdot\frac{x^2+9y^2}{(x^2-y^2)^6}-\frac{\cancel{y}}{y^{\cancel{2}}(x^2-y^2)^5}=$$

$$=\frac{-10y^2+x^2+9y^2-(x^2-y^2)}{y(x^2-y^2)^6}=0.$$

Что и требовалось доказать.

4. Дана функция $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$. Показать, что $F(x,y,z,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})=0$.

$$F=x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-xy\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+y^2.$$

Решение: Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}} \cdot (xy)'_x = -\frac{y^2}{3x^2} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3x} + \frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}} \cdot (xy)'_y = \frac{2y}{3x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

$$F = x^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{3x^2} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right) - xy \cdot \left(\frac{2y}{3x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right) + y^2 = -\frac{y^2}{3} + \frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} - \frac{2y^2}{3} -$$

$$-\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + y^2 = 0.$$

Что и требовалось доказать.

3. Дифференциал функции двух переменных, приближенные вычисления

При исследовании вопросов, связанных с дифференцируемостью, ограничимся случаем функции трех переменных, поскольку все доказательства для большего количества переменных проводятся так же.

Полным приращением функции U = F(X, Y, Z) называется

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z).$$

Теорема 1. Если частные производные

$$f'_x, f'_y, f'_z$$

Существуют в точке (X0 , y0 , Z0) и в некоторой ее окрестности и непрерывны в точке (X0 , Y0 , Z0) , то

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y +$$

$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,$$

Где α, β, γ – бесконечно малые, зависящие от DX, DУ, DZ.

Доказательство.

Представим полное приращение ΔU в виде:

$$\Delta u = (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)) +$$
$$+ (f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)) +$$
$$+ (f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)),$$

Где каждая разность представляет собой частное приращение функции только по одной из переменных. Из условия теоремы следует, что к этим разностям можно применить теорему Лагранжа. При этом получим:

$$\Delta u = f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y, z_0+\Delta z) \cdot \Delta y +$$
$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0+\theta_2\Delta z) \cdot \Delta z,$$

Так как по условию теоремы частные производные непрерывны в точке (X0 , y0 , Z0), можно представить их в виде:

$$f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = f'_x(x_0, y_0, z_0) + \alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y, z_0+\Delta z) = f'_y(x_0, y_0, z_0) + \beta,$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0+\theta_2\Delta z) = f'_z(x_0, y_0, z_0) + \gamma,$$

$$\text{где} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta y \to 0} \beta = \lim_{\Delta z \to 0} \gamma = 0.$$

Теорема доказана.

Можно показать, что

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z = o(\Delta\rho),$$

Где

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Действительно, α, β и γ – бесконечно малые при $\rho \to 0,$ а

$\dfrac{\Delta x}{\Delta\rho}, \dfrac{\Delta y}{\Delta\rho}, \dfrac{\Delta z}{\Delta\rho}$ –

Ограниченные (т. к. их модули не превышают 1).

Тогда приращение функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1, можно представить в виде:

$$\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\Delta\rho),$$

где

$$A = f'_x(x_0, y_0, z_0),$$

$$B = f'_y(x_0, y_0, z_0),$$

$$C = f'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Если приращение функции U = F (X, Y, Z) в точке (X_0 , Y_0 , Z_0) можно представить в виде

$$\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\Delta\rho),$$

то функция называется Дифференцируемой в этой точке, а выражение

$A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z$ –

Главной линейной частью приращения или полным дифференциалом рассматриваемой функции.

Обозначения: Du, Df (X_0 , Y_0 , Z_0).

Так же, как в случае функции одной переменной, дифференциалами независимых переменных считаются их произвольные приращения, поэтому

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

Замечание 1. Итак, утверждение «функция дифференцируема» не равнозначно утверждению «функция имеет частные производные» - для дифференцируемости требуется еще и непрерывность этих производных в рассматриваемой точке.

Замечание 2. Если в последней формуле считать

$$d_x u = u'_x \cdot dx, \quad d_y u = u'_y \cdot dy \quad и \quad d_z u = u'_z \cdot dz$$

Частными дифференциалами данной функции (как функции одного из аргументов), то можно сказать, что полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов:

$$du = d_x u + d_y u + d_z u.$$

По аналогии с линеаризацией функции одной переменной можно при приближенном вычислении значений функции нескольких переменных, дифференцируемой в некоторой точке, заменять ее приращение дифференциалом. Таким образом, можно находить приближенное значение функции нескольких (например, двух) переменных по формуле:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y,$$

Где

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0.$$

Пример.

Вычислить приближенное значение

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

И выберем X0 =1, y0 = 2. Тогда $\Delta X = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$; $\Delta У = 1{,}97 - 2 = -0{,}03$. Найдем

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{3x_0^2}{2\sqrt{x_0^3 + y_0^3}} = \frac{3 \cdot 1}{2\sqrt{1+8}} = \frac{1}{2},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{3y_0^2}{2\sqrt{x_0^3 + y_0^3}} = \frac{3 \cdot 4}{2\sqrt{1+8}} = 2.$$

Следовательно, учитывая, что F (1, 2) = 3, получим:

$$\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3} \approx 3 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 + 2 \cdot (-0{,}03) = 2{,}95.$$

3.8.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия теории функции многих переменных, предел и непрерывность функции многих переменных ;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые нахождении частных приращений и производных;
- выработали навыки по нахождению частных производных сложно заданных функций, полного дифференциала функции многих переменных;
- усвоили алгоритм применения дифференциала функции двух переменных к приближенным вычислениям

3.9 Практическое занятие №17-20 (8 ч.)

Тема: Экстремум функции дух переменных. Производная функции по направлению

3.9.1 Задание для работы:

1. Экстремум функции дух переменных. Критерий Сильвестра. Наибольшее и наименьшее значении функции двух переменных на области.
2. Производная функции по направлению. Градиент скалярного поля, его свойства.

3.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Экстремум функции дух переменных. Критерий Сильвестра. Наибольшее и наименьшее значении функции двух переменных на области.

1.Найти наименьшее и наибольшее значения функции z=f(x,y) в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

$z=x^2+y^2-9xy+27$, $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$.

Решение

Найдем стационарные точки функции, лежащие внутри области D.

A B

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 9y = 0 \\ 2y - 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Точка O(0;0) принадлежит границе области D.

Исследуем значения функции на границе области.

1) Отрезок OA. Его уравнение x=0, $0 \le y \le 3$. Подставим x=0 в функцию

$z=y^2+27$. $z'=2y=0$. $y=0$. Найдем значения функции при $y=0$, $y=3$.

$$z_1=z(0)=z(O)=27.$$
$$z_2=z(3)=z(A)=36.$$

2) Отрезок AB. Его уравнение $y=3$, $0\le x\le 3$

$z=x^2-27x+36$. $z'=2x-27=0, x=27/2\notin[0,3]$. Найдем значения в точке $x=3$ (при $x=0$ получится точка A, в которой значение посчитано).

$$z_3=z(3)=z(B)=9-81+36=-36.$$

3) Отрезок BC. Его уравнение $x=3$, $0\le y\le 3$. Подставим $x=3$ в функцию

$z=y^2-27y+36$. $z'=2y-27=0, y=27/2\notin[0,3]$.Найдем значение функции при $y=0$.

$$z_4=z(0)=z(C)=36$$

4) Отрезок OC. Его уравнение $y=0$, $0\le x\le 3$

$z=x^2+27$. $z'=2x=0, x=0$.Значения в точках O и C посчитаны.

Среди найденных значений выберем наименьшее и наибольшее

Ответ: $z_{наим}=z(3,3)=-36$.

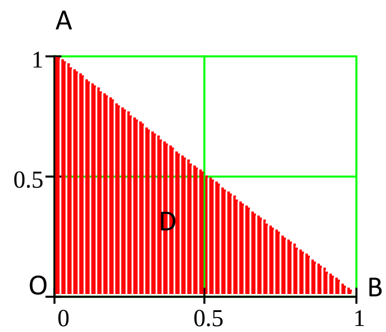
$z_{наиб}=z(0,3)=z(3,0)=36$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

$z=x^2+2y^2+1$, $x\ge 0$, $y\ge 0, x+y\le 1$.

Решение

Сделаем чертеж



Найдем стационарные точки функции, лежащие внутри области D.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=0\\ 4y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

Внутри области стационарных точек нет (найденная точка лежит на границе).

Исследуем значения функции на границе области.

5) Отрезок OB. Его уравнение $y=0$, $0\le x\le 1$. Подставим $y=0$ в функцию

$z=x^2+1$. $z'=2x=0, x=0$. Найдем значения функции при $x=0, x=1$.

$$z_1=z(0)=z(O)=1.$$
$$z_2=z(1)=z(B)=2.$$

6) . Отрезок OA. Его уравнение $x=0$, $0\le y\le 1$. Подставим $x=0$ в функцию

$z=2y^2+1$. $z'=4y=0, y=0$. Найдем значения функции при $y=1$ (при $y=0$ получается точка O, в которой значение уже посчитано).

$z_3=z(1)=z(A)=3$.

7) Отрезок AB. Его уравнение $x+y=1$ или $y=1-x$, $0\le x\le 1$. Подставим

$z=x^2+2(1-x)^2+1=3x^2-4x+3$, $z'=6x-4=0$, $x=2/3$. Вычислим z при этом значении x (при $x=0$ и $x=1$ получатся точки A и B).

$$z_4=z(2/3)=3\cdot 4/9-4\cdot 2/3+3=5/3$$

Среди найденных значений выберем наименьшее и наибольшее

Ответ: $z_{наим}=z(0,0)=1$.

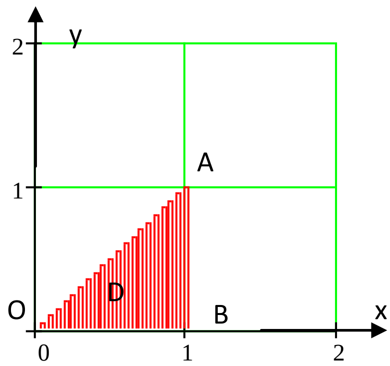
$z_{наиб}=z(0,1)=3$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции z=f(x,y) в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

$$z=3-2x^2-xy-y^2, \quad x\le 1,\ y\ge 0, y\le x.$$

Решение

Сделаем чертеж



Найдем стационарные точки функции, лежащие внутри области D.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4x-y=0\\ -x-2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

Внутри области стационарных точек нет (найденная точка лежит на границе).

Исследуем значения функции на границе области.

8) Отрезок OB. Его уравнение y=0, $0\le x\le 1$. Подставим y=0 в функцию $z=3-2x^2$. $z'=-4x=0, x=0$. Найдем значения функции при x=0,x=1.

$$z_1=z(0)=z(O)=3.$$
$$z_2=z(1)=z(B)=1.$$

9) . Отрезок AB. Его уравнение x=1, $0\le y\le 1$. Подставим x=1 в функцию

$z=1-y-y^2$. $z'=-1-2y=0, y=-½\notin[0,1]$. Найдем значения функции при y=1 (при y=0 получается точка B, в которой значение уже посчитано).

$$z_3=z(1)=z(A)=-1.$$

10) Отрезок OA. Его уравнение y=x , $0\le x\le 1$. Подставим

$z=3-2x^2-x^2-x^2=3-4x^2$, $z'=-8x=0$, x=0.При x=0 и x=1 получатся точки O и B, в которых значения посчитаны.

Среди найденных значений выберем наименьшее и наибольшее

Ответ: $z_{наим}=z(1,1)=-1$, $z_{наиб}=z(0,0)=3$.

2. Производная функции по направлению. Градиент скалярного поля, его свойства.

1. Даны функция z=f(x,y), точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\bar{a}(a_x, a_y)$. Найти:

1)gradz в точке A;

2)производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

$$z=x^2+xy+y^2),\ \ A(1,1),\ \ \bar{a}(2,-1).$$

Решение

1) Градиент функции найдем по формуле $\operatorname{grad} z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y$.

Вычислим их в точке A(1,1) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 3$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 3$.

Таким образом $\boxed{\operatorname{grad} z = 3 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j}.}$

2)Производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$ найдем по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Найдем направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{-1}{\sqrt{4+1}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом $\frac{\partial z}{\partial a} = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{grad} z = 3 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j}$. $\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

2. Даны функция z=f(x,y), точка A(x_0,y_0) и вектор $\bar{a}(a_x, a_y)$. Найти:

1)gradz в точке A;

2)производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

$$z=2x^2+3xy+y^2,\ A(2,1),\ \bar{a}(3,-4).$$

Решение

1) Градиент функции найдем по формуле $\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

Вычислим их в точке A(2,1) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$.

Таким образом $\operatorname{grad} z = 11 \cdot \bar{i} + 8 \cdot \bar{j}$.

Производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$ найдем по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Найдем направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5};\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{9+16}} = -\frac{4}{5}$$

Таким образом $\frac{\partial z}{\partial a} = 11 \cdot \frac{3}{5} - 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Ответ:

$$\operatorname{grad} z = 11 \cdot \bar{i} + 8 \cdot \bar{j}.\quad \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{5}.$$

3. Даны функция z=f(x,y), точка A(x_0,y_0) и вектор $\overline{a}(a_x, a_y)$. Найти:
1)gradz в точке A;
2)производную в точке A по направлению вектора $\overline{a}$.

$$z=\ln(5x^2+3y^2),\quad A(1,1),\quad \overline{a}\ (3,2).$$

Решение

1) Градиент функции найдем по формуле $\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{10x}{5x^2+3y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y}{5x^2+3y^2}$

Вычислим их в точке A(1,1)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4};\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом $\operatorname{grad} z = \frac{5}{4}\cdot\bar{i} + \frac{3}{4}\cdot\bar{j}.$

Производную в точке A по направлению вектора $\overline{a}$ найдем по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Найдем направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+4}} = \frac{3}{\sqrt{13}};\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} = \frac{2}{\sqrt{9+4}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Таким образом $\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{21}{4\sqrt{13}}.$

Ответ: $\operatorname{grad} z = \frac{5}{4}\cdot\bar{i} + \frac{3}{4}\cdot\bar{j}.$ $\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{21}{4\sqrt{13}}.$

4. Даны функция z=f(x,y), точка M_0(x_0,y_0) и вектор $\bar{s} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j}$. Найти градиент функции и производную по направлению вектора $\bar{a}$ в точке M_0.

$$z=-5x^2+xy+2y^2-x+4y+1;\qquad M_0(2;\ 1);\qquad \bar{s} = \bar{i} + \bar{j}.$$

Решение

Градиент функции найдем по формуле $\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -10x + y - 1;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 4y + 4$$

Вычислим их в точке M_0 (2,1)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = -20 + 1 - 1 = -20;\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 2 + 4 + 4 = 10.$$

Таким образом $\operatorname{grad} z = -20\bar{i} + 10\bar{j}.$

Производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$ найдем по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Найдем направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Таким образом

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -20 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{10}{\sqrt{2}} = -5\sqrt{2}.$$

Ответ: $\text{grad}\, z = -20 \cdot \bar{i} + 10 \cdot \bar{j}.$

3.8.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили теорему, выражающую достаточный признак существования экстремума функции двух переменных, основные понятия и свойства теории скалярного поля;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые нахождении экстремума функции двух переменных, производной скалярного поля по направлению;
- выработали навыки по градиента скалярного поля, направляющих косинусов.

3.9 Практическое занятие №21-23 (6 ч.)

Тема: Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования

3.9.1 Задание для работы:

1. Первообразная функции, неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла, метод непосредственного интегрирования. Метод подстановки.
2. Метод интегрирования «по частям».
3. Интегрирование рациональных дробей.

3.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Первообразная функции, неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла, метод непосредственного интегрирования. Метод подстановки.

1. Найдите неопределенные интегралы.

$$\int (2x^5 - \sqrt[3]{x} + 3)dx$$

Решение:

$$\int (2x^5 - \sqrt[3]{x} + 3)dx = 2\int x^5 dx - \int x^{1/3} dx + 3\int dx = 2\frac{x^{5+1}}{5+1} - \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + 3x + C =$$

$$\frac{x^6}{3} - \frac{3}{4}x^{4/3} + 3x + C.$$

Ответ: $\int (2x^5 - \sqrt[3]{x} + 3)dx = \frac{x^6}{3} - \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + 3x + C.$

$$\int \frac{\ln^6 x}{x} dx$$

Решение:

Применим замену переменной.

$$\int \frac{ln^6 x}{x}dx = \begin{vmatrix} ln\,x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{ln^7 x}{7} + C.$$

Ответ: $\int \frac{ln^6 x}{x}dx = \frac{ln^7 x}{7} + C.$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$$

Решение:

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат.

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{(x+2)^2-4+8}}dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{(x+2)^2+4}}dx =$$

$$\begin{vmatrix} x+2=t \\ dx=dt \\ x=t-2 \end{vmatrix} = \int \frac{t-3}{\sqrt{t^2+4}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = I_1 - 3I_2.$$

1) $I_1 = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}} = \begin{vmatrix} t^2+4=z \\ 2tdt=dz \\ tdt=\frac{1}{2}dz \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\int z^{-1/2}dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{1/2}}{1/2} = \sqrt{z} = \sqrt{t^2+4}.$

2) $I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = ln(t+\sqrt{t^2+4}).$

Таким образом

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \sqrt{t^2+4} - 3ln(t+\sqrt{t^2+4}) + C =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2+4} - 3ln(x+2+\sqrt{(x+2)^2+4}) + C =$$

$$= \sqrt{x^2+4x+8} - 3ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+8}) + C.$$

Ответ: $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \sqrt{x^2+4x+8} - 3ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+8}) + C.$

2. Найдите неопределенные интегралы.

$$\int \frac{3x^2-5x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

Решение:

$$\int\frac{(3x^2-5x+2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\left(\frac{3x^2}{x^{2/3}}-\frac{5x}{x^{2/3}}+\frac{2}{x^{2/3}}\right)dx=3\int x^{4/3}dx-5\int x^{1/3}dx+2\int x^{-2/3}dx=$$

$$3\frac{x^{4/3+1}}{4/3+1}-5\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}+2\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1}+C=\frac{9x^{7/3}}{7}-\frac{15x^{4/3}}{4}+6x^{1/3}+C=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}}{28}\left(6x^2-105x+168\right)+C.$$

Ответ: $\int\frac{(3x^2-5x+2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\frac{\sqrt[3]{x}}{28}\left(6x^2-105x+168\right)+C.$

b) $\int\frac{x^2}{1+x^3}dx$

Решение:

Применим замену переменной.

$$\int\frac{x^2}{1+x^3}dx=\left|\begin{matrix}1+x^3=t\\3x^2dx=dt\\x^2dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C.$$

Ответ: $\int\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C.$

$$\int\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx$$

Решение:

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат.

$$\int\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx=\int\frac{3x-4}{\sqrt{(x+3)^2-9+10}}dx=\int\frac{3x-4}{\sqrt{(x+3)^2+1}}dx=$$

$$\left|\begin{matrix}x+3=t\\dx=dt\\x=t-3\end{matrix}\right|=\int\frac{3t-13}{\sqrt{t^2+1}}dt=3\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}-13\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=3I_1-13I_2.$$

1) $I_1=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=\left|\begin{matrix}t^2+1=z\\2tdt=dz\\tdt=\frac{1}{2}dz\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\int z^{-1/2}dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{1/2}}{1/2}=\sqrt{z}=\sqrt{t^2+1}.$

2) $I_2=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln(t+\sqrt{t^2+1}).$

Таким образом

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = 3\sqrt{t^2+1} - 13\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C =$$

$$= 3\sqrt{(x+3)^2+1} - 13\ln(x+3+\sqrt{(x+3)^2+1}) + C =$$

$$= 3\sqrt{x^2+6x+10} - 13\ln(x+3+\sqrt{x^2+6x+10}) + C.$$

Ответ: $\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = 3\sqrt{x^2+6x+10} - 13\ln(x+3+\sqrt{x^2+6x+10}) + C.$

$$\textit{d)}\quad \int \frac{1+x^3-5x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$$

Решение:

$$\int \frac{(1+x^3-5x\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{1}{x^{1/2}} + \frac{x^3}{x^{1/2}} - \frac{5x^{4/3}}{x^{1/2}} + \right)dx = \int x^{-1/2}dx + \int x^{5/2}dx - 5\int x^{5/6}dx + =$$

$$\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + \frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} - 5\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + C = 2x^{1/2} + \frac{2x^{7/2}}{7} - \frac{30x^{11/6}}{11} + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{30}{11}x\sqrt[6]{x^5} + C.$$

Ответ: $\int \frac{(1+x^3-5x\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{30}{11}x\sqrt[6]{x^5} + C.$

$$\int \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2}dx$$

Решение:

Применим замену переменной.

$$\int \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2}dx = \left|\begin{aligned} &\mathrm{arctg}x = t \\ &\frac{dx}{1+x^2} = dt \end{aligned}\right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\mathrm{arctg}^6 x}{6} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2}dx = \frac{\mathrm{arctg}^6 x}{6} + C.$

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3}dx$$

Решение:

Преобразуем знаменатель, выделив полный квадрат.

$$x^2-4x+3 = x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2 - 2^2 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{3x+2}{(x-2)^2-1}dx = \left|\begin{aligned} &x-2=t \\ &dx = dt \\ &x = t+2 \end{aligned}\right| =$$

$$\int \frac{3t+8}{t^2-1}dt = 3\int \frac{tdt}{t^2-1} + 8\int \frac{dt}{t^2-1} = 3I_1 + 8I_2.$$

1) $I_1 = \int \frac{tdt}{t^2-1} = \left| \begin{matrix} t^2-1=z \\ 2tdt=dz \\ tdt=\frac{1}{2}dz \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| = \frac{1}{2}\ln|t^2-1| = \frac{1}{2}\ln\left|(x-2)^2-1\right| =$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+3|.$

2) $I_2 = \int\frac{dt}{t^2-1} = -\int\frac{dt}{1^2-t^2} = -\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2)}{1+x-2)}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3-x}{x-1}\right|.$

Таким образом

$$\int\frac{3x+2}{x^2-4x+3}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+3| + 4\ln\left|\frac{3-x}{x-1}\right| + C.$$

Ответ: $\int\frac{3x+2}{x^2-4x+3}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+3| + 4\ln\left|\frac{3-x}{x-1}\right| + C.$

2. Метод интегрирования «по частям».

Найдите интеграл:

а) $\int x\cos\frac{2}{3}xdx$

Решение:

Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

$$\int x\cos\frac{2}{3}xdx = \left| \begin{matrix} u=x;\ dv=\cos\frac{2}{3}xdx; \\ du=dx;\ v=\int\cos\frac{2}{3}xdx = \frac{\sin\frac{2}{3}x}{2/3} = \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}x. \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}x\sin\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\int\sin\frac{2}{3}xdx = \frac{3}{2}x\sin\frac{2}{3}x + \frac{9}{4}\cos\frac{2}{3}x + C.$$

Ответ: $\int x\cos\frac{2}{3}xdx = \frac{3}{2}x\sin\frac{2}{3}x + \frac{9}{4}\cos\frac{2}{3}x + C.$

$\int x\sin\frac{4}{5}xdx$

Решение:

Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

$$\int x\sin\frac{4}{5}xdx = \left| \begin{matrix} u=x;\ dv=\sin\frac{4}{5}xdx; \\ du=dx;\ v=\int\sin\frac{4}{5}xdx = -\frac{\cos\frac{4}{5}x}{4/5} = -\frac{5}{4}\cos\frac{4}{5}x. \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{5}{4}x\cos\frac{4}{5}x + \frac{5}{4}\int\cos\frac{4}{5}xdx = -\frac{5}{4}x\cos\frac{4}{5}x + \frac{25}{16}\sin\frac{4}{5}x + C.$$

Ответ: $\int x\sin\frac{4}{5}x dx=-\frac{5}{4}x\cos\frac{4}{5}x+\frac{25}{16}\sin\frac{4}{5}x+C.$

3. Интегрирование рациональных дробей.

$$\int\frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}dx$$

Решение:

Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}=\overset{x^2+4/}{\frac{A}{x-1}}+\overset{x-1/}{\frac{Bx+C}{x^2+4}}$$

Приравнивая числители, получим

7x-2=A(x^2+4)+(x-1)(Bx+C), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0 \\ x & -B+C=7 \\ 1 & 4A-C=-2 \end{array}$$

. Складывая все уравнения, получим 5A=5; A=1; B=-A=-1; C=4A+2=6.

Следовательно $\frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{1}{x-7}+\frac{-x+6}{x^2+4}.$

$$\int\frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}dx=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{xdx}{x^2+4}+6\int\frac{dx}{x^2+4}=I_1-I_2+6I_3.$$

$$\int\frac{4x^2+3x-3}{x^3-x}dx$$

Решение:

Разложим знаменатель на множители

x^3-x=x(x-1)(x+1)

Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{4x^2+3x-3}{x(x-1)(x+1)}=\overset{x^2-1)}{\frac{A}{x}}+\overset{x^2+x)}{\frac{B}{x-1}}+\overset{x^2-x)}{\frac{C}{x+1}}$$

Приравнивая числители, получим

4x^2+3x-3=A(x^2-1)+B(x^2+x)+C(x^2-x), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B+C=4 \\ x & B-C=3 \\ 1 & -A=-3 \end{array}.$$

Отсюда A=3, B=2, C=-1

Следовательно $\frac{4x^2+3x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

$$\int\frac{4x^2+3x-3}{x(x-1)(x+1)}dx=3\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}=3\ln|x|+2\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$$

Ответ: $\int\frac{4x^2+3x-3}{x(x-1)(x+1)}dx=3\ln|x|+2\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2-1)(x+1)}$$

Решение:

Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{\overset{x^2+2x+1}{\overline{)A}}}{x-1}+\frac{\overset{x^2-1}{\overline{)B}}}{x+1}+\frac{\overset{x-1}{\overline{)C}}}{(x+1)^2}$$ Приравнивая числители, получим $x^2=A(x^2+2x+1)+B(x^2-1)+C(x-1)$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях.

$$\begin{array}{r|c} x^2 & A+B=1 \\ x & 2A+C=0 \\ 1 & A-B-C=0 \end{array}$$. Складывая все уравнения, получим 4A=1; A=1/4; B=1-A=3/4; C=A-B=-1/2.

Следовательно $\frac{x^2}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{1/4}{x-1}+\frac{3/4}{x+1}-\frac{1/2}{(x+1)^2}$.

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}+C.$$

Ответ: $\int\frac{x^2dx}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}+C$

3.9.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия, свойства, теоремы интегрального исчисления функции одной действительной переменной;
- усвоили алгоритмы непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, методом «по частям»;
- выработали навыки нахождения интегралов методом непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, методом «по частям»;

3.10 Практическое занятие №24-25 (2 ч.)

Тема: Определенный интеграл. Интегрирование непрерывных функций.

3.10.1 Задание для работы:

1. Формула Ньютона - Лейбница. Непосредственное вычисление определенного интеграла.
2. Вычисление определенного интеграла методом подстановки. Вычисление определенного интеграла методом «по частям».

3.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Формула Ньютона - Лейбница. Непосредственное вычисление определенного интеграла.

1. Вычислите определенные интегралы ***a)*** $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{6x+2}dx$

Решение:

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{6x+2}dx = \int\limits_0^1 (6x+2)^{1/3}dx = \left.\frac{(6x+2)^{4/3}}{4/3\cdot 6}\right|_0^1 = \frac{1}{8}(8^{4/3} - 2^{4/3}) = \frac{1}{8}(16 - 2\sqrt[3]{2}) =$$

$$= 2 - \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \approx 1{,}685.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{6x+2}dx = 2 - \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \approx 1{,}685.$

b) $\int\limits_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx$

Решение:

$$\int\limits_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx = \left| \begin{matrix} x^2 = u; \text{ Если } x = 0, \text{то } u = 0; \\ 2xdx = du; \text{ Если } x = 1, \text{то } u = 1; \end{matrix} \right| = \int\limits_0^1 e^{-u}du = -e^{-u}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$

Вычислите определенные интегралы.

c) $\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}dx$

Решение:

$$\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}dx = \int\limits_0^2 (4x+1)^{1/2}dx = \left.\frac{(4x+1)^{3/2}}{3/2\cdot 4}\right|_0^2 = \frac{1}{6}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Ответ: $\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}dx = \frac{13}{3}.$

d) $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^2 2xdx$

Решение:

Воспользуемся тригонометрической формулой $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4}\right) - 0 = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2xdx = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}393.$

2. Вычислите определенные интегралы. а) $\int_1^2 \sqrt{5x-1}dx$ b) $\int_1^e \frac{ln^2 x}{x}dx$

3. Вычислить определенные интегралы:
а) по формуле Ньютона-Лейбница;
б) по формуле Симпсона при n=10 с точностью до двух знаков.

а) $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1} = \begin{vmatrix} x+1=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{vmatrix}$ = Найдем новые пределы интегрирования

$$\begin{vmatrix} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=7 \Rightarrow t=2 \end{vmatrix} = \int_1^2 \frac{3t^2dt}{t+1} = 3\int_1^2 \frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt = 3\int_1^2 (t-1+\frac{1}{t+1})dt =$$

$$3(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|)|_1^2 = 3(2-2+\ln 3) - 3(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2) = 1{,}5 + 3\ln 3 - 3\ln 2 = = 1{,}5 + 3\ln 1{,}5 \approx 2{,}716$$

Ответ: $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1} = 1{,}5 + 3\ln 1{,}5 \approx 2{,}716$

б) $\int_1^{11} \sqrt{x^3+32}dx$ Применим приближенную формулу Симпсона

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}))$ где h=(b-a)/n, (n-четное число, у нас n=10), y_i значения подынтегральной функции в точках $x_i=a+ih$.

В нашем случае $h = \frac{11-1}{10} = 1$. Заполним таблицу

i	x_i	$y_i = \sqrt{x_i^3 + 32}$
0	1	5,74
1	2	6,32
2	3	7,68
3	4	9,80
4	5	12,53
5	6	15,75
6	7	19,36
7	8	23,32
8	9	27,59
9	10	32,12
10	11	36,92

Находим: y_0+y_{10}=5,74+36,92=42,66.
$y_1+y_3+y_5+y_7+y_9$=6,32+9,80+15,75+23,32+32,12=87,32. 4·87,32=349,28.
$y_2+y_4+y_6+y_8$=7,68+12,53+19,36+27,59=67,16. 2·67,16=34,32.

$$\int_1^{11} \sqrt{x^3+32}dx \approx \frac{1}{3}(42{,}66 + 349{,}28 + 134{,}32) = \frac{1}{3} \cdot 526{,}26 = 175{,}42$$

2. Вычисление определенного интеграла методом подстановки. Вычисление определенного интеграла методом «по частям».

1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/4} xtg^2 x dx$

$\int\limits_0^{\pi/4} xtg^2 xdx = (*)$ Интегрируем по частям:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = tg^2 xdx \Rightarrow v = \int tg^2 xdx = tgx - x$

$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$

$$(*) \overset{(1)}{=} (x(tgx - x))\Big|_0^{\pi/4} - \int\limits_0^{\pi/4} (tgx - x)dx \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{4}\cdot\left(tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 0\cdot(tg0 - 0) - \int\limits_0^{\pi/4} tgxdx + \int\limits_0^{\pi/4} xdx \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^{\pi/4} \overset{(4)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1) Записываем решение в соответствии с формулой интегрирования по частям.

(2) Для произведения $x(tgx - x)$ применяем формулу Ньютона-Лейбница. Для оставшегося интеграла используем свойства линейности, разделяя его на два интеграла.

(3) Берем два оставшихся интеграла.

(4) Применяем формулу Ньютона-Лейбница для двух найденных первообразных.

2. $\int\limits_0^{\pi/4} xtg^2 xdx$

На первом этапе я нахожу неопределенный интеграл: $\int xtg^2 xdx = (*)$

Интегрируем по частям:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = tg^2 xdx \Rightarrow v = \int tg^2 xdx = tgx - x$

$\int udv = uv - \int vdu$

$$(*) = x(tgx - x) - \int (tgx - x)dx = xtgx - x^2 - \int tgxdx + \int xdx =$$

$$= xtgx - x^2 + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} = xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|$$

Первообразная функция найдена. Константу C в данном случае добавлять не имеет смысла.

На втором этапе я провожу проверку (обычно на черновике).

Тоже логично. Если я неправильно нашел первообразную функцию, то неправильно решу и определенный интеграл. Это лучше выяснить немедленно, дифференцируем ответ:

$$\left(xtgx-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|\right)'=(x)'tgx+x(tgx)'-\frac{1}{2}(x^2)'+(\ln|\cos x|)'=$$

$$=1\cdot tgx+x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=tgx+\frac{x}{\cos^2 x}-x-\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=tgx+\frac{x}{\cos^2 x}-x-tgx=\frac{x}{\cos^2 x}-x=\frac{x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\frac{x\sin^2 x}{\cos^2 x}=xtg^2 x$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, первообразная функция найдена верно.

Третий этап – применение формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2 x dx=\left(xtgx-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|-\left(0\cdot tg0-\frac{0^2}{2}+\ln\cos 0\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-(0-0+0)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.10.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия, свойства, теоремы, связанные с определенным интегралом;
- усвоили алгоритмынахождения определенного интеграла методом непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, методом «по частям»;
- выработали навыки нахождения определенных интегралов методом непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, методом «по частям»;

3.11 Практическое занятие №26-28 (6 ч.)

Тема: Геометрическое приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

3.11.1 Задание для работы:

1.Вычисление площади плоской фигуры.
2. Вычисление длины дуги плоской кривой.
3. Вычисление объема тела вращения.
4. Исследование на сходимость несобственного интеграла первого рода. Исследование на сходимость несобственного интеграла второго рода

3.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Вычисление площади плоской фигуры.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

$y=x^2-4$ и $y=4-x^2$.

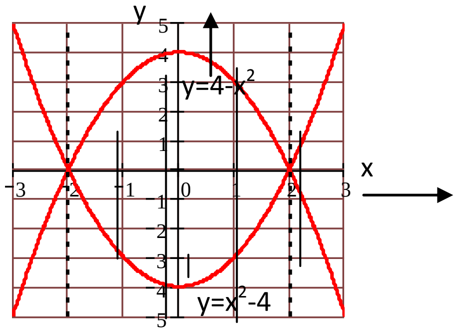
Решение:

Обе линии являются параболами.
Вершина первой параболы находится в точке (0; -4). Ветви направлены вверх.
Вершина второй параболы находится в точке (0; 4). Ветви направлены вниз.
Найдем точки пересечения этих линий.

$$\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=4-x^2 \end{cases} \quad x^2-4=4-x^2,\quad 2x^2=8,\quad x^2=4,$$

$$x_{1,2}=\pm 2,\ x_1=-2,\ x_2=2,\ y_1=0,\ y_2=0.$$

Сделаем чертеж:



Площадь найдем по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$

$$S = \int_{-2}^{2}[(4 - x^2) - (x^2 - 4)]dx = \int_{-2}^{2}(8 - 2x^2)dx = \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3}(\text{кв.ед.}).$$

Ответ: Искомая площадь 64/3 (кв. ед.).

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

$y=x^2-5x-6$ и $y=x+10$.

Решение:

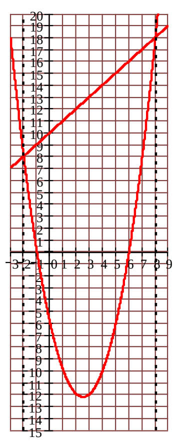
Первая линия является параболой, вторая - прямой. Для построения параболы преобразуем ее уравнение: $y=x^2-2\cdot2{,}5\cdot x+2{,}5^2-2{,}5^2-6$; $y=(x-2{,}5)^2-12{,}25$; $y+12{,}25=(x-2{,}5)^2$.

Из последнего уравнения следует, что вершина параболы находится в точке (2,5; -12,25), а ось симметрии параллельна оси Оу. Найдем точки пересечения этих линий

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 6 \\ y = x + 10 \end{cases} \quad x^2 - 5x - 6 = x + 10, \quad x^2 - 6x - 16 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2},$$

$x_1=-2$, $x_2=8$, $y_1=8$, $y_2=18$.

Сделаем чертеж:



Площадь найдем по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$

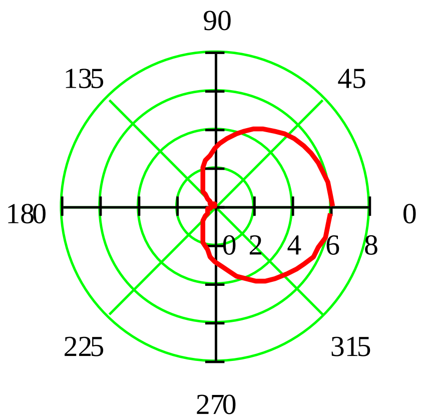
$$S=\int_{-2}^{8}[x+10-x^2+5x+6]dx=\int_{-2}^{8}(6x+16-x^2)dx=\left(3x^2+16x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{8}=$$

$$=\left(192+128-\frac{512}{3}\right)-\left(12-32+\frac{8}{3}\right)=340-\frac{520}{3}=166\frac{2}{3}(\text{кв.ед.}).$$

Ответ: Искомая площадь 166 2/3 (кв. ед.).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=3(1+\cos\varphi)$.

Решение Сделаем чертеж



Площадь фигуры в полярной системе координат найдем по формуле: $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^2(\varphi)d\varphi.$

Найдем

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=$$

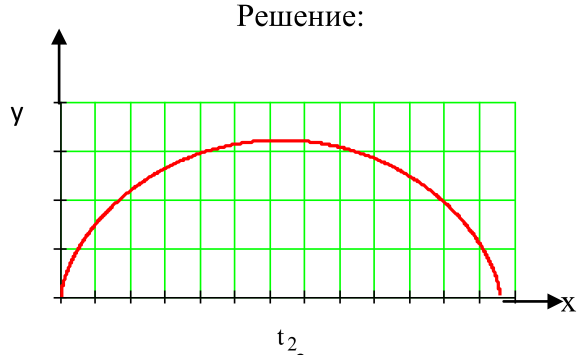
$$=\frac{1}{2}(\varphi+2\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\pi+\frac{1}{4}\left(\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

Ответ: Длина кардиоиды равна $\frac{3}{2}\pi$ (кв. ед.)

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды x=a(t-sint), y=a(1-cost); ($0\le t\le 2\pi$) и осью OX.

Решение:

Сделаем чертеж:



Площадь фигуры найдем по формуле: $S=\int\limits_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot x'(t)dt.$ $2\pi a$

или $S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt =$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})dt = a^2(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\cos 2t}{4})\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Ответ: S=3π a^2 (кв. ед.)

2. Вычисление длины дуги плоской кривой.

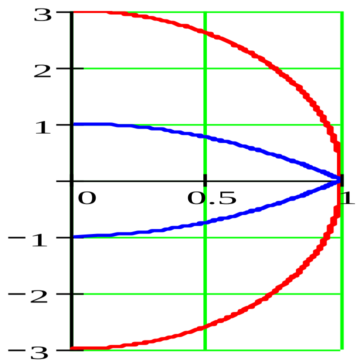
1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y=3\sqrt{1-x^2}$, $x=\sqrt{1-y}.$ и осью OY, $(x\ge 0, y\ge 0)$.

Решение:

Для построения чертежа, выясним, что это за линии.

$y=3\sqrt{1-x^2}$, $y^2=9-9x^2$, $9x^2+y^2=9$, $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$Это уравнение эллипса с полуосями a=1, b=3.

$x=\sqrt{1-y}$, $x^2=1-y$, $y=1-x^2$. Это уравнение параболы с вершиной в точке (0, 1), ветви параболы направлены вниз. Сделаем чертеж:



Объем тела вращения найдем по формуле $V=\pi\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]dx,$

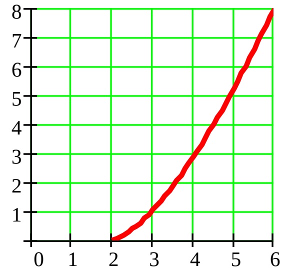
$$V=\pi\int_0^1 [9-9x^2-(1-x^2)^2]dx = \pi\int_0^1 (8-7x^2-x^4)dx =$$

$$\pi(8x-\frac{7}{3}x^3-\frac{x^5}{5})\Big|_0^1 = \pi(8-\frac{7}{3}-\frac{1}{5}) = \pi\frac{82}{15}\approx 17{,}174(\text{куб. ед})$$

Ответ: Объем тела вращения равен $\pi\frac{82}{15}\approx 17{,}174$ (куб. ед.)

2. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки A(2,0) до точки B(6,8).

Решение. Сделаем чертеж



Длину дуги линии, заданной параметрически, найдем по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Найдем $f'(x) = ((x-2)^{3/2})' = \frac{3}{2}(x-2)^{1/2};$

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{9}{4}(x-2) = \frac{9x-14}{4} = \frac{9}{4}x - \frac{7}{2} = \frac{9}{4}(x - \frac{14}{9}).$$

Получим

$$L = \frac{3}{2}\int_2^6 \sqrt{x - \frac{14}{9}}\,dx = \frac{3}{2}\int_2^6 (x - \frac{14}{9})^{1/2} dx = \frac{3}{2}\frac{(x-\frac{14}{9})^{3/2}}{3/2}\Bigg|_2^6 = (\frac{40}{9})^{3/2} - (\frac{4}{9})^{3/2} =$$

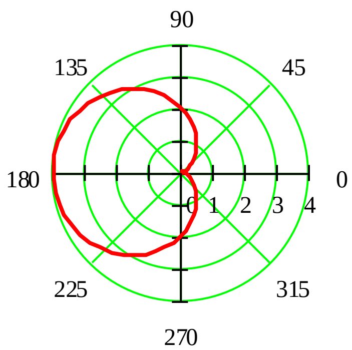
$$\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1) \approx 9{,}073 \text{ (лин.ед.)}$$

Ответ: Длина дуги равна $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1) \approx 9{,}073$ (лин. ед.).

3. Вычислить длину дуги кардиоиды r=2(1-cosφ).

Решение:

Сделаем чертеж:



Длина дуги в полярной системе находится по формуле:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Найдем $r'(\varphi) = 2\sin\varphi$;

$r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2=4(1-\cos\varphi)^2+4\sin^2\varphi=4-8\cos\varphi+4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi=8(1-\cos\varphi)=4\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Тогда $L=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=-2\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^{2\pi}=4+4=8.$

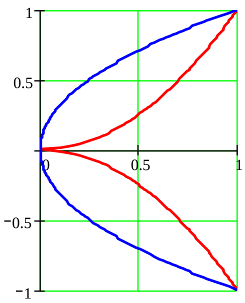
Ответ: Длина дуги кардиоиды равна 8 (ед.).

3. Вычисление объема тела вращения.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболами $y=x^2,\quad y=\sqrt{x}.$

Решение:

Сделаем чертеж:



Объем тела вращения найдем по формуле

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2(x)-y_1^2(x)]dx,\text{ или } V=\pi\int_0^1[x-x^4]dx=\pi(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5})\Big|_0^1=\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})=\frac{3}{10}\pi.$$

Ответ: Объем тела вращения равен $\frac{3}{10}\pi\approx0{,}942$ (куб. ед.)

4. Исследование на сходимость несобственного интеграла первого рода. Исследование на сходимость несобственного интеграла второго рода

1. Вычислите несобственные интегралы

$$\textit{а)}\ \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

Решение:

Подынтегральная функция непрерывна в промежутке $[1;\ \infty)$. По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-1/3}dx=\lim_{N\to\infty}\frac{x^{2/3}}{2/3}\Big|_1^N=\frac{3}{2}\lim_{N\to\infty}\left(N^{2/3}-1\right)=\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл расходится.

$$\text{б)}\ \int_{2/3}^{2}\frac{dx}{3x-2}$$

Решение:

Подынтегральная функция терпит разрыв в точке x=2/3. По определению

$$\int\limits_{2/3}^{2}\frac{dx}{3x-2}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{2/3+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{3x-2}=\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln|3x-2|\Big|_{2/3+\varepsilon}^{2}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln 4-\ln(3\varepsilon))=+\infty.$$

То есть интеграл расходится.

2. Вычислите несобственные интегралы**.**

$$\textbf{\textit{a)}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(3-4x)^2}$$

Подынтегральная функция непрерывна в промежутке $[1;\ \infty)$. По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования

Решение:

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(3-4x)^2}=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{1}^{N}\frac{dx}{(3-4x)^2}=\lim_{N\to\infty}-\frac{1}{3-4x}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\Big|_{1}^{N}=\frac{1}{4}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{3-4N}+1\right)=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, несобственный интеграл сходится и равен $\frac{1}{4}$.

$$\textbf{\textit{b)}}\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x+1}$$

Решение:

Подынтегральная функция терпит разрыв в точке x=-1. По определению

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x+1}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{x+1}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln|x+1|\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln 1-\ln\varepsilon)=+\infty.$$

То есть интеграл расходится.

3.11.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные формулы для вычисления площади плоской фигуры, длины дуги плоской кривой, объема тел вращения и условия их применения;
- усвоили алгоритмы нахождения площади плоской фигуры, длины дуги плоской кривой, объема тел вращения ;
- выработали навыки исследования на сходимость несобственных интегралов.

3.12 Практическое занятие №29-31 (6 ч.)

Тема: Двойной интеграл, его вычисление. Геометрические приложения двойного интеграла

3.12.1 Задание для работы:

1. Переход от двойного интеграла к повторному. Смена порядка интегрирования. Вычисление повторных интегралов.
2. Вычисление площади плоской фигуры.
3. Вычисление объема тела.

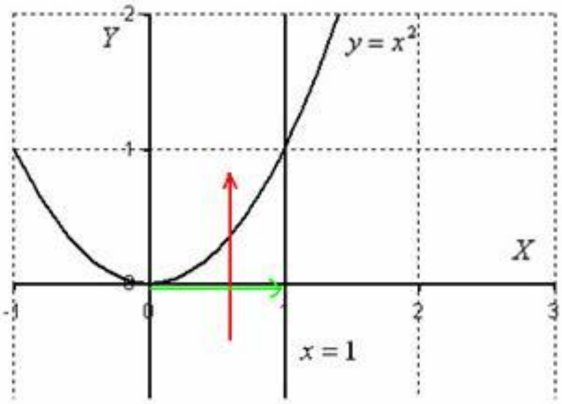
3.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Переход от двойного интеграла к повторному. Смена порядка интегрирования.

Пример 1

Дан двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy$ с областью интегрирования $D: x=1;\ y=x^2;\ y=0$ Перейти к повторным интегралам и расставить пределы интегрирования двумя способами.

Решение: Изобразим область интегрирования на чертеже:



Луч проходит область интегрирования **строго снизу вверх**, то есть указку вы ВСЕГДА держите **ниже** плоской фигуры. Луч входит в область через ось абсцисс, которая задаётся уравнением $y=0$ и выходит из области через параболу $y=x^2$ (красная стрелка). Чтобы пройти всю область, вам нужно **строго слева направо** провести указкой вдоль оси OX от 0 до 1 (зелёная стрелка).

Итак, что получилось:

«игрек» изменяется от 0 до x^2;

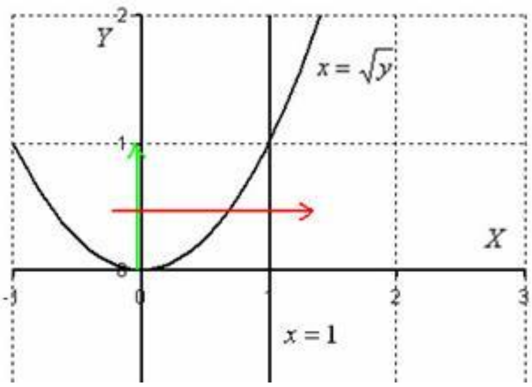
«икс» изменяется от 0 до 1.

В задачах вышесказанное записывают в виде неравенств: $\begin{matrix} 0 \le y \le x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{matrix}$

Данные неравенства называют **порядком обхода области интегрирования** или просто **порядком интегрирования**

После того, как мы разобрались с порядком обхода, можно перейти от двойного интеграла к повторным интегралам: $\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;\,y)dy$

Половина задачи решена. Теперь необходимо перейти к повторным интегралам вторым способом. Для этого следует найти обратные функции. Смотрим на функции, которыми задается область $D: x=1;\ y=x^2;\ y=0$. Если совсем просто, то перейти к обратным функциям, это значит – выразить «иксы» через «игреки». Единственной функцией, где есть и «икс» и «игрек», является $y=x^2$.



Если $y=x^2$, то $x=\pm\sqrt{y}$, причём:

обратная функция $x=\sqrt{y}$ задает правую ветку параболы;

обратная функция $x=-\sqrt{y}$ задает левую ветку параболы.

Нередко возникают сомнения, вот, к примеру, функция $x=\sqrt{y}$ определяет левую или правую ветвь параболы? Сомнения развеять очень просто: возьмите какую-нибудь точку параболы, например, $(1;\,1)$ (с правой ветви) и подставьте её координаты в любое уравнение, например, в то же уравнение $x=\sqrt{y}$: $\begin{matrix}1=\sqrt{1}\\1=1\end{matrix}$

Получено верное равенство, значит, функция $x=\sqrt{y}$ определяет именно правую ветвь параболы, а не левую.

Более того, **данную проверку** (мысленно или на черновике) **желательно проводить всегда**, после того, как вы перешли к обратным функциям.

Обходим область интегрирования вторым способом:

Теперь указку держим **слева** от области интегрирования. Луч проходит область **строго слева направо**. В данном случае он входит в область через ветвь параболы $x=\sqrt{y}$ и выходит из области через прямую, которая задана уравнением $x=1$ (красная стрелка). Чтобы просканировать лазером всю область, нужно провести указкой вдоль оси OY **строго снизу вверх** от 0 до 1 (зеленая стрелка).

Таким образом:

«икс» изменяется от $\sqrt{y}$ до 1;
«игрек» изменяется от 0 до 1.

Порядок обхода области следует записать в виде неравенств: $\begin{matrix}\sqrt{y}\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{matrix}$

И, следовательно, переход к повторным интегралам таков:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x;y)\,dx$$

Ответ можно записать следующим образом:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x;y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x;y)\,dx$$

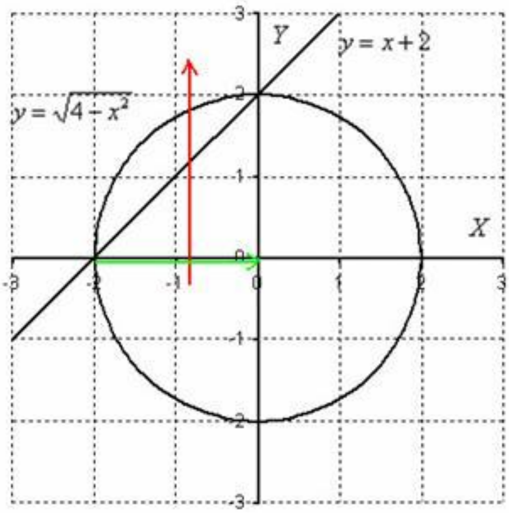
Окончательный результат вычислений не зависит от того, какой порядок обхода области мы выбрали.

Пример 2

Построить область интегрирования и изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^0 dx\int_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy$$

Решение: По условию дан первый способ обхода области. Решение опять начинается с чертежа. Здесь область D не задана аналитически, но построить её не составляет особого труда. Сначала «снимаем» функции с пределов интегрирования: $y=x+2$, $y=\sqrt{4-x^2}$. Функция $y=x+2$, понятно, задаёт прямую, но что задаёт функция $y=\sqrt{4-x^2}$? Давайте её немного преобразуем:



$y=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow y^2=4-x^2\Rightarrow y^2+x^2=2^2$ – окружность с центром в начале координат радиуса 2. Функция же $y=\sqrt{4-x^2}$ задаёт верхнюю полуокружность (не забываем, что если есть сомнения, то всегда можно подставить точку лежащую на верхней или нижней полуокружности).

Смотрим на пределы внешнего интеграла: «икс» изменяется от –2 до 0.

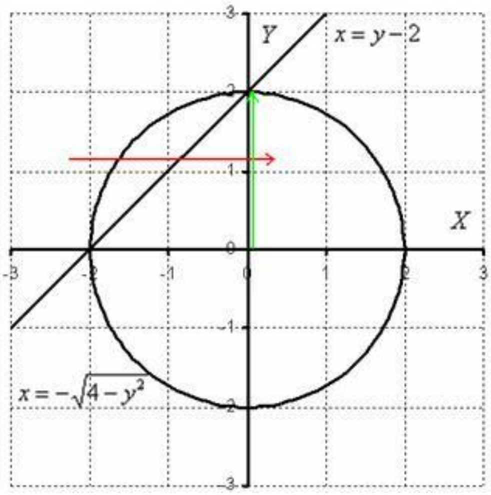
Выполним чертёж:

Для наглядности я указал стрелками первый способ обхода области, который соответствует повторным интегралам условия: $\int_{-2}^{0}dx\int_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}}f(x;y)dy$.

Теперь нужно изменить порядок обхода области, для этого перейдем к обратным функциям (выразим «иксы» через «игреки»):

$y=x+2\Rightarrow x=y-2$

Недавно мы преобразовали функцию $y=\sqrt{4-x^2}$ к уравнению окружности $y^2+x^2=4$, далее выражаем «икс»: $y^2+x^2=4\Rightarrow x^2=4-y^2$



В результате получаем две обратные функции:

$x=\sqrt{4-y^2}$ – определяет правую полуокружность;

$x=-\sqrt{4-y^2}$ – определяет левую полуокружность.

Изменим порядок обхода области:

Согласно второму способу обхода, луч **входит** в область **слева** через левую полуокружность $x=-\sqrt{4-y^2}$ и **выходит справа** через прямую $x=y-2$ (красная стрелка). В то же время указка проводится вдоль оси ординат **снизу вверх** от 0 до 2 (зелёная стрелка).

Таким образом, порядок обхода области:

$-\sqrt{4-y^2}\le x\le y-2$

$0\le y\le 2$

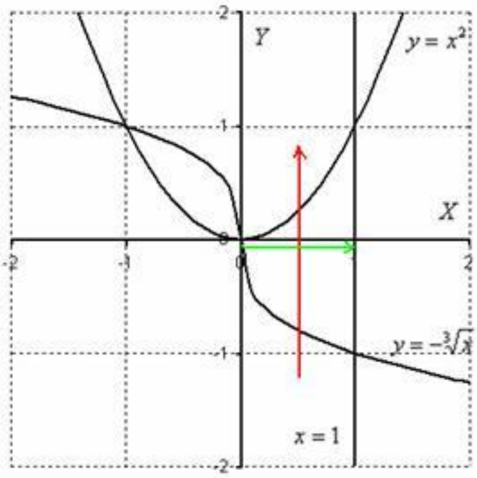
Ответ: $\int_{-2}^{0}dx\int_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}}f(x;y)dy=\int_{0}^{2}dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y-2}f(x;y)dx$

.

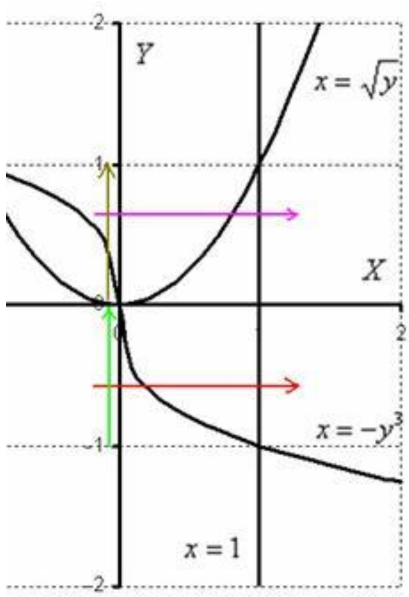
Пример 3

Изменить порядок интегрирования $\int_{0}^{1}dx\int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^2}f(x;y)dy$

Решение: Выполним чертёж, при этом, график функции $y=-\sqrt[3]{x}$ фактически представляет собой кубическую параболу, просто она «лежит на боку»:



Порядок обхода области, который соответствует повторным интегралам $\int_{0}^{1}dx\int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^2}f(x;y)dy$, обозначен стрелками. Обратите внимание, что в ходе выполнения чертежа прорисовалась еще одна ограниченная фигура (левее оси ординат). Поэтому следует быть внимательным при определении области интегрирова-



ния – за область можно ошибочно принять не ту фигуру.

Перейдем к обратным функциям:

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ – нужная нам правая ветвь параболы;

$y = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow y^3 = -x \Rightarrow x = -y^3$

Изменим порядок обхода области. Тут наблюдается интересная вещь:

Как поступать в подобных случаях? В таких случаях следует разделить область интегрирования на две части и для каждой из частей составить свои повторные интегралы:

1) Если «игрек» изменяется от –1 до 0 (зеленая стрелка), то луч входит в область через кубическую параболу $x = -y^3$ и выходит через прямую $x = 1$ (красная стрелка). Поэтому порядок обхода области будет следующим: $\begin{matrix} -y^3 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 0 \end{matrix}$

И соответствующие повторные интегралы: $\int_{-1}^{0} dy \int_{-y^3}^{1} f(x;y)dx$

2) Если «игрек» изменяется от 0 до 1 (коричневая стрелка), то луч входит в область через ветвь параболы $x = \sqrt{y}$ и выходит через ту же прямую $x = 1$ (малиновая стрелка). Следовательно, порядок обхода области будет следующим: $\begin{matrix} \sqrt{y} \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{matrix}$

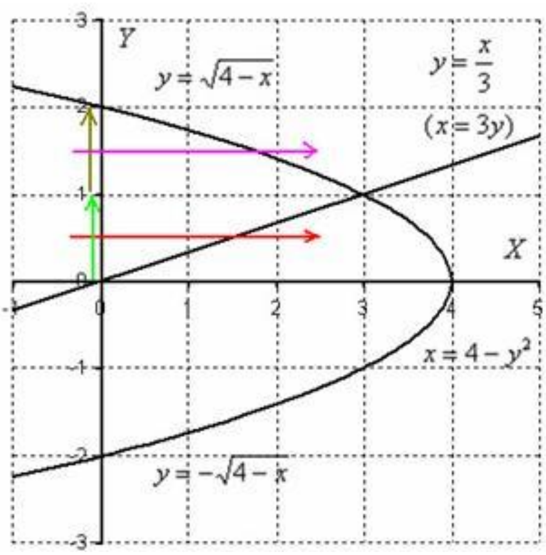
И соответствующие повторные интегралы: $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x;y)dx$

У определенных и кратных интегралов есть весьма удобное свойство *аддитивности*, то есть, их можно сложить, что в данном случае и следует сделать:

$\int_{-1}^{0} dy \int_{-y^3}^{1} f(x;y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x;y)dx$ – а вот и наш обход области вторым способом в виде суммы двух интегралов.

Ответ записываем так:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^2} f(x;y)dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-y^3}^{1} f(x;y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x;y)dx$$



Пример 4

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{3y} f(x;y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{4-y^2} f(x;y)dx$$

Решение: Когда порядок обхода задан вторым способом, то перед построением чертежа целесообразно перейти к «обычным» функциям. В данном примере присутствуют два слагаемых: $x = 3y$ и $x = 4 - y^2$.

С линейной функцией всё просто: $x = 3y \Rightarrow y = \frac{x}{3}$

График функции $x = 4 - y^2$ представляется собой обычную параболу, но у этой параболы есть один бзик – она лежит на боку. Выразим «игрек» через «икс»:

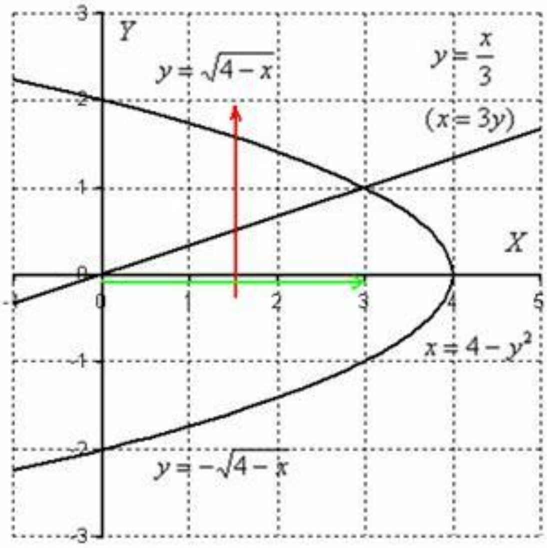
$x = 4 - y^2 \Rightarrow y^2 = 4 - x$

Получаем две ветви параболы: $y = \sqrt{4-x}$ и $y = -\sqrt{4-x}$. Какую ветку выбрать? Выполним чертёж. Даже если вы не сразу понимаете, как расположены ветви параболы, всегда можно прибегнуть к поточечному методу построения:
Обращаю внимание на тот факт, что на данном чертеже получилось несколько плоских фигур, и очень важно выбрать нужную фигуру! В выборе искомой фигуры как раз помогут пределы интегрирования исходных интегралов:

$\int_0^1 dy \int_0^{3y} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{4-y^2} f(x;y)dx$, при этом не забывайте, что обратная функция $x = 4 - y^2$ задаёт **всю** параболу.

Стрелочки, которыми обозначен обход фигуры, в точности соответствуют пределам интегрирования интегралов $\int_0^1 dy \int_0^{3y} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{4-y^2} f(x;y)dx$.

Когда фигура найдена, заключительная часть решения, в общем-то, очень проста, меняем порядок обхода области:



Обратные функции уже найдены, и требуемый порядок обхода области:

$\frac{x}{3} \le y \le \sqrt{4-x}$

$0 \le x \le 3$

Отет:

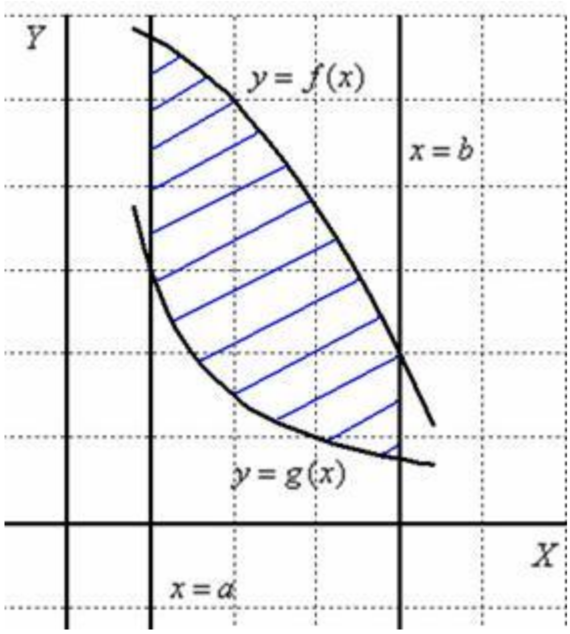
$$\int_0^1 dy \int_0^{3y} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{4-y^2} f(x;y)dx = \int_0^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{4-x}} f(x;y)dy$$

2. Вычисление площади плоской фигуры.

Начинаем рассматривать собственно процесс вычисления двойного интеграла $\iint_D f(x;y)dxdy$ и знакомиться с его геометрическим смыслом.

Двойной интеграл $\iint_D dxdy$ численно равен площади плоской фигуры D (области интегрирования). Это простейший вид двойного интеграла, когда функция двух переменных равна единице: $f(x;y) = 1$. Сначала рассмотрим задачу в общем виде. Сейчас вы немало удивитесь, насколько всё действительно просто! Вычислим площадь плоской фигуры D, ограниченной линиями $x = a,\ x = b,\ y = f(x),\ y = g(x)$. Для определённости считаем, что $f(x) > g(x)$ на отрезке $[a;b]$. Площадь данной фигуры численно равна: $S = \iint_D dxdy$

Изобразим область D на чертеже:



Выберем первый способ обхода области:

$g(x) \le y \le f(x)$

$a \le x \le b$

Таким образом: $$S = \iint_D dxdy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy$$

И сразу важный технический приём: **повторные интегралы можно считать по отдельности**. Сначала внутренний интеграл, затем – внешний интеграл.

1) Вычислим внутренний интеграл, при этом интегрирование проводится по переменной «игрек»:

$$\int_{g(x)}^{f(x)} dy = (y)\Big|_{g(x)}^{f(x)} = f(x) - g(x)$$

Неопределённый интеграл тут простейший, и далее используется банальная формула Ньютона-Лейбница, с той лишь разницей, что **пределами интегрирования являются не числа, а функции**. Сначала подставили в «игрек» (первообразную функцию) верхний предел, затем – нижний предел

2) Результат, полученный в первом пункте необходимо подставить во внешний интеграл:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

. Более компактная запись всего решения выглядит так:

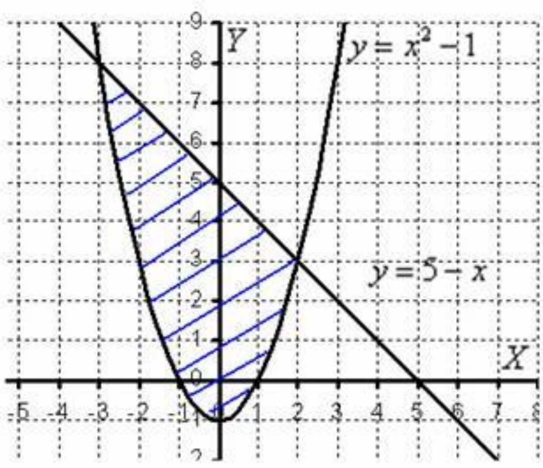
$$S = \iint_D dxdy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy = \int_a^b (y)\Big|_{g(x)}^{f(x)} \cdot dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Полученная формула $$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$ – это в точности рабочая формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью «обычного» определённого интеграла

Пример

С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры D, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $x + y = 5$

Решение: Изобразим область D на чертеже:



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \iint_D dxdy$$

Выберем следующий порядок обхода области:

$x^2 - 1 \le y \le 5 - x$

$-3 \le x \le 2$

Таким образом: $$S = \iint_D dxdy = \int_{-3}^{2} dx \int_{x^2-1}^{5-x} dy$$

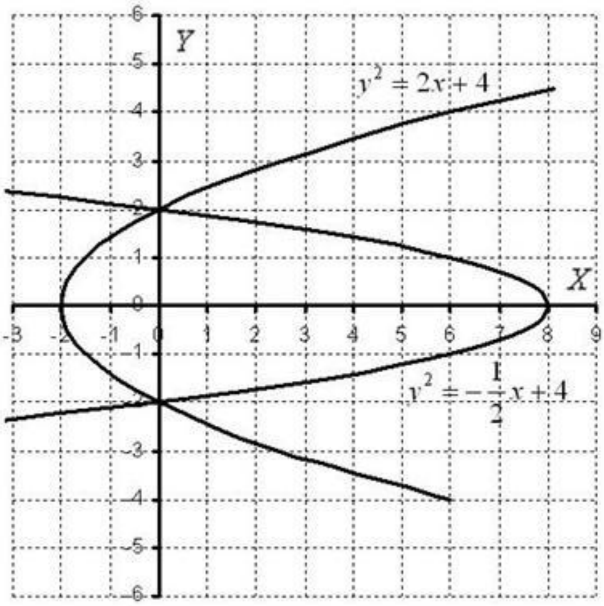
Лучше вычислять повторные интегралы по отдельности

1) Сначала с помощью формулы Ньютона-Лейбница разбираемся с внутренним интегралом:
$\int\limits_{x^2-1}^{5-x} dy = (y)\Big|_{x^2-1}^{5-x} = 5 - x - (x^2 - 1) = 6 - x - x^2$
2) Результат, полученный на первом шаге, подставляем во внешний интеграл:
$\int\limits_{-3}^{2}(6 - x - x^2)dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{2} = 12 - 2 - \frac{8}{3} - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9\right) = 10 - \frac{8}{3} + 9 + \frac{9}{2} =$
$= 19 + \frac{27-16}{6} = 19 + \frac{11}{6} = 19 + 1\frac{5}{6} = 20\frac{5}{6}$
Пункт 2 – фактически нахождение площади плоской фигуры с помощью определённого интеграла.

Ответ: $S = 20\frac{5}{6}\ ed.^2$

Пример
С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры D, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 4$, $y^2 = -\frac{1}{2}x + 4$
Решение.
Как проще всего сделать чертёж?
Представим параболу $y^2 = 2x + 4$ в виде двух функций:
$y = \sqrt{2x+4}$ – верхняя ветвь и $y = -\sqrt{2x+4}$ – нижняя ветвь.

Аналогично, представим параболу $y^2 = -\frac{1}{2}x + 4$ в виде верхней $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x + 4}$ и нижней $y = -\sqrt{-\frac{1}{2}x + 4}$ ветвей.
Получается вот такая причудливая фигура:



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле:
$S = \iint\limits_D dxdy$

Если мы выберем первый способ обхода области, то данную область придётся разделить на две части. А во-вторых, мы будем иметь: $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} dy + \int\limits_{0}^{8} dx \int\limits_{-\sqrt{-\frac{1}{2}x+4}}^{\sqrt{-\frac{1}{2}x+4}} dy$ Поэтому из данных в условии, выразим обратные функции:

$$y^2 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = y^2 - 4 \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} - 2$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 8 - 2y^2$$

Согласно второму способу, обход области будет следующим:

$$\frac{y^2}{2}-2 \le x \le 8-2y^2$$
$$-2 \le y \le 2$$

Таким образом: $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{\frac{y^2}{2}-2}^{8-2y^2}dx$.

1) Расправляемся с внутренним интегралом:

$$\int\limits_{\frac{y^2}{2}-2}^{8-2y^2}dx=(x)\Big|_{\frac{y^2}{2}-2}^{8-2y^2}=8-2y^2-\left(\frac{y^2}{2}-2\right)=8-2y^2-\frac{y^2}{2}+2=10-\frac{5y^2}{2}$$

Результат подставляем во внешний интеграл:

2)

$$\int\limits_{-2}^{2}\left(10-\frac{5y^2}{2}\right)dy=2\int\limits_{0}^{2}\left(10-\frac{5y^2}{2}\right)dy=\int\limits_{0}^{2}(20-5y^2)dy=\left(20y-\frac{5y^3}{3}\right)\Big|_0^2=40-\frac{40}{3}-0=\frac{80}{3}=26\frac{2}{3}$$

Обратите внимание на первый шаг: подынтегральная функция $10-\frac{5y^2}{2}$ является чётной, а отрезок интегрирования симметричен относительно нуля. Поэтому отрезок можно споловинить, а результат – удвоить.

Ответ: $S=26\frac{2}{3}$ $ед.^2$

3. Вычисление объема тела.

Пример . Вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями: $z=3x^2+y^2+1$, $y+x=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение.

Из определения двойного интеграла следует, что если в области D, лежащей в плоскости xOy, задана непрерывная функция $z=f(x,y)$ больше либо равная нулю, то двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области равен объему тела, ограниченного поверхностью $z=f(x,y)$, плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области D. Таким образом, в условиях нашей задачи необходимо вычислить интеграл:

$$\iint\limits_D z\,dxdy=\iint\limits_D\left(3x^2+y^2+1\right)dxdy,$$

где область D ограничена линиями $y+x=2$, $x=0$, $y=0$.

Для вычисления двойного интеграла представим его в виде двукратного (повторного). Поскольку область интегрирования D является правильной, то порядок интегрирования может быть взят любой.

$$\iint\limits_D\left(3x^2+y^2+1\right)dxdy=\int\limits_0^2\int\limits_0^{2-y}\left(3x^2+y^2+1\right)dxdy=\int\limits_0^2\left(x^3+y^2x+x\right)\Big|_0^{2-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(\left(2-y\right)^3+y^2\left(2-y\right)+\left(2-y\right)\right)dy=\int\limits_0^2\left(\left(2-y\right)^3+2y^2-y^3+2-y\right)dy=$$

$$=\left(\frac{1}{(-1)}\cdot\frac{(2-y)^4}{4}+2\cdot\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+2y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\left(-\frac{(2-2)^4}{4}+2\cdot\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}+2\cdot2-\frac{2^2}{2}\right)-$$

$$-\left(-\frac{(2-0)^4}{4}+2\cdot\frac{0^3}{3}-\frac{0^4}{4}+2\cdot0-\frac{0^2}{2}\right)=\frac{16}{3}-4+4-2+4=7\frac{1}{3}.$$

Ответ: объем тела равен $7\frac{1}{3}$ куб.ед.

3.12.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные формулы для вычисления площади плоской фигуры, длины дуги плоской кривой, объема тел вращения и условия их применения;
- усвоили алгоритмы нахождения площади плоской фигуры, длины дуги плоской кривой, объема тел вращения ;
- выработали навыки исследования на сходимость несобственных интегралов.

3.13 Практическое занятие №32-33 (4 ч.)

Тема: Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Криволинейные интегралы первого рода.

3.13.1 Задание для работы:

1. Вычисление площади поверхности тела.
2. Криволинейны интеграл второго рода.
3. Криволинейный интеграл первого рода.
4. Формула Грина.
5. Интегрирование полного дифференциала.

3.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычисление площади поверхности тела.

Пример. Вычислить площадь поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$, ограниченной плоскостями $x+y=2,\ x+y=3$.

$$F=z^2-x^2-y^2=0,\quad F_x^{'}=-2x,\ F_y^{'}=-2y,\ F_z^{'}=2z\ \ \frac{1}{\cos\gamma}=\sqrt{1+\frac{\left(x^2+y^2\right)}{z^2}}=\sqrt{2}$$

$$S=\iint\limits_D\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}S_D=\sqrt{2}\frac{1}{2}(9-4)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

.

2. Криволинейны интеграл второго рода.

Пример 1

Вычислить $\int\limits_{AB}x^2ydx+2ydy$, где – дуга параболы $y=x^2$ от точки с абсциссой $x=0$ до точки с абсциссой $x=1$.

Решение: Поскольку линия интегрирования задана условиями ,$x\in[0,1]$, то используем принцип перехода к определенному интегралу, указанный выше в пункте 1 (формула(1)):

$$\int\limits_{AB} x^2ydx+2ydy=\left|\begin{array}{l} AB: y=x^2,\ x\in[0;1],\ dy=2xdx, \\ x^2ydx+2ydy=x^2\cdot x^2dx+2\cdot x^2\cdot 2xdx=x^4dx+4x^3dx=(x^4+4x^3)\,dx \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^1(x^4+4x^3)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{4x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}.$$

Пример 2

Вычислить $\int\limits_{AB} zdx-2xdy+3ydz$, где – отрезок прямой между точками A(2, –2, 0) и B(1, 1, 1).

Решение: Найдем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-0}{1-0}\ \Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}=t\ \begin{cases} x=2-t, \\ y=3t-2, \\ z=t. \end{cases}$$

При этом точке A(2, –2, 0) соответствует значение $t=0$, а точке B(1, 1, 1) – значение$t=1$, значит, на линии$t\in[0;1]$.

Таким образом, имеем случай задания линии интегрирования, рассмотренный выше в пункте 4 (формула (4)). Тогда

$$\int\limits_{AB} zdx-2xdy+3ydz=\left|\begin{array}{l} AB: x=2-t,\ y=3t-2,\ z=t,\ t\in[0;1], \\ \quad dx=-dt,\quad dy=3dt,\quad dz=dt, \\ zdx-2xdy+3ydz=t(-dt)-2(2-t)3dt+3(3t-2)dt= \\ =-tdt-(12-6t)dt+(9t-6)dt=(-t-12+6t+9t-6)dt= \\ =(14t-18)dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^1(14t-18)dt=\left(\frac{14t^2}{2}-18t\right)\Bigg|_0^1=7-18=-11.$$

Пример 3.

Вычислить $\int\limits_L f(x-y)dy-3dx$, если L – контур треугольника с вершинами $A(1;1)$,B(3,1), C(1,5), пробегаемый против часовой стрелки. Рисунок 1

Решение.

Треугольник ABC, по которому идет интегрирование, изображен на рисунке 1. Как видим, контур L этого треугольника состоит из трех участков: AB, BC и CA. Эти отрезки лежат на разных прямых, и, следовательно, задаются разными уравнениями. Поэтому сначала необходимо воспользоваться свойством аддитивности криволинейного интеграла и расписать его в виде суммы трех интегралов по соответствующим отрезкам:

$$\int\limits_L(x-y)dy-3dx=\int\limits_{AB}(x-y)dy-3dx+\int\limits_{BC}(x-y)dy-3dx+\int\limits_{CA}(x-y)dy-3dx.$$

Вычислим каждый из этих интегралов отдельно. При этом обязательно нужно учитывать, что движение по контуру – против часовой стрелки: $A\to B\to C\to A$(кстати, это означает, что контур ориентирован положительно).

Отрезок AB имеет уравнениеy=1,$x\in$[1,3], следовательно (формула(1))

$$\int\limits_{AB}(x-y)dy-3dx\left|\begin{array}{l} y=1,\ x\in[1;3],\ dy=0 \\ (x-y)dy-3dx=(x-1)\cdot 0-3dx=-3dx \\ \quad x_A=1,\ \ x_B=3 \end{array}\right|=\int\limits_1^3-3dx=-3\int\limits_1^3dx=-6.$$

Рассмотрим отрезок BC. Найдем сначала уравнение прямой, проходящей через точки$B(3;1)$ и$C(1;5)$:

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-1}{5-1}\Rightarrow\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{4}\Rightarrow 4(x-3)=-2(y-1)\Rightarrow y-1=-2(x-3)\Rightarrow$$

$$y=-2x+7.$$

Таким образом, уравнение отрезка *B C* имеет вид , а так как обход контура осуществляется против часовой стрелки (т.е. движение вдоль этого отрезка происходит от точки *B* к точке *C*), то переменная *x* меняется от 3 до 1. Тогда (снова формула(1)) получим

$$\int_{BC}(x-y)dy-3dx=\left|\begin{array}{l} y=7-2x,\ dy=-2dx \\ (x-y)dy-3dx=(x-7+2x)(-2)dx-3dx= \\ =(-2x+14-4x-3)dx=(11-6x)dx, \\ \quad x_B=3,\quad x_C=1 \end{array}\right|=$$

$$=\int_3^1(11-6x)dx=(11x-3x^2)\Big|_3^1=11-3-(33-27)=8-6=2.$$

Отрезок *CA* определяется уравнением *x*=1 (т.е. уравнение вида $x=\psi(y)$, используем формулу (2)) направление движения вдоль этого отрезка от точки *C* к точке *A*, значит, переменная *y* меняется от 5 до 1. Поэтому соответствующий интеграл равен

$$\int_{CA}(x-y)dy-3dx=\left|\begin{array}{l} x=1,\ dx=0 \\ (x-y)dy-3dx=(1-y)dy-3\cdot 0=(1-y)dy \\ y_C=5,\quad y_A=1 \end{array}\right|=$$

$$=\int_5^1(1-y)dy=(y-\frac{y^2}{2})\Big|_5^1=1-\frac{1}{2}-(5-\frac{25}{2})=1-\frac{1}{2}-5+\frac{25}{2}=-4+\frac{24}{2}=-4+12=8.$$

Тогда заданный интеграл равен

$$\int_L(x-y)dy-3dx=-6+2+8=4.$$

Пример 4.

Вычислить $\int_L ydx$, если L – первая арка циклоида $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

Решение. Очевидно, заданный интеграл есть криволинейный интеграл II рода:

Рисунок 2

$$\int_L ydx=\int_L ydx+0\cdot dy.$$

Циклоида $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ имеет вид, изображённый на рис.2. Первая арка циклоиды расположена в первой четверти и соответствует изменению параметра *t* от 0 до 2π. Поскольку линия L задана параметрическими уравнениями, то криволинейный интеграл II рода сводиться к определённому по формуле (3). Тогда получаем

$$\int_L ydx=\left|\begin{array}{l} x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t), t\in[0;2\pi] \\ \quad dx=a(1-\cos t)dt, \\ \qquad \alpha=0,\quad \beta=2\pi. \end{array}\right|=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=a^2\left(3\pi-2\sin 2\pi+\frac{1}{4}\sin 4\pi-0\right)=3\pi a^2.$$

3. Криволинейный интеграл первого рода.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^5+8xy)\,dl,$, где L - дуга кривой $4y=x^4$ Между точками, для которых $x=0,\ x=1.$

Поскольку $y'=x^3$, $dl=\sqrt{1+x^6}dx$ И на дуге кривой $4y=x^4$ Функция $f(x,\ y)=$ $=(x^5+8xy)=x^5+4y\cdot 2x=x^5+x^4\cdot 2x=3x^5$, то по формуле (21.4) находим

$$\int\limits_L (x^5+8xy)\,dl=\int\limits_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx=3\int\limits_0^1 (1+x^6)^{1/2}\frac{1}{6}\,d(1+x^6)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1+x^6)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

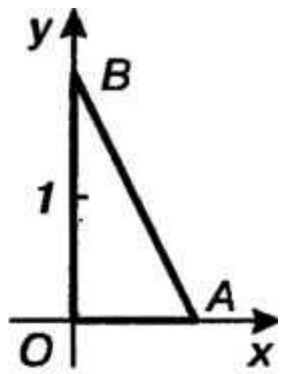
Пример 2. Вычислить $\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}dl,$. Где L - дуга кривой $x=\ln y$ Между точками, для которых $y=1,\ y=4.$

Применяем формулу (2J.6). В данном случае $c=1,\ d=4,\quad x=\varphi(y)=\ln y,$ $x'_y=1/y,\ dl=\sqrt{1+x'^2}dy=\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\,dy=\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}dy,$ поэтому

$$\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}\,dl=\int\limits_1^4 y\sqrt{y^2+1}\,\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}\,dy=$$

$$=\int\limits_1^4 (y^2+1)\,dy=\left(\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=24.$$

Пример .3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (2x+y)\,dl,$ Где L - Контур треугольника ABO (рис. 21.2) с вершинами $A(1{,}0),\ B(0{,}2),\ O(0{,}0).$ В соответствии со свойством 4) криволинейного интегра первого рода имеем



$$\int\limits_L (2x+y)\,dl=\int\limits_{AB}(2x+y)\,dl+\int\limits_{BO}(2x+y)\,dl+\int\limits_{OA}(2x+y)\,dl.$$

На отрезке AB $y=-2x+2,$ Поэтому $y'=-2,\ dl=\sqrt{1+y'^2}\ dx=\sqrt{5}dx.$

На отрезке $BO\ \ x=0,\ \ x'=0,\ \ dl=\sqrt{1+x'^2}\ dy=dy,$ На отрезке $OA\ \ y=0,\ \ y'=0,\ \ dl=\sqrt{1+y'^2}\ dx=dx.$ Принимая во внимание свойство криволинейного интеграла, используя формулы, получаем

$$\int\limits_L (2x+y)\,dl=\int\limits_0^1 2\sqrt{5}\,dx+\int\limits_0^2 ydy+\int\limits_0^1 2xdx=2\sqrt{5}x\,\Big|_0^1+\frac{y^2}{2}\Big|_0^2+x^2\Big|_0^1=3+2\sqrt{5}.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_L (x+y)\,dl,$ Где L - лепесток лемнискаты $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi},$ Расположенный в первом координатном углу.

Линия L Задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой для полярного задания функции

Так как $\rho' = a\cos 2\varphi/\sqrt{\sin 2\varphi}$, То

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \sqrt{a^2\sin 2\varphi + (a^2\cos^2 2\varphi)/\sin 2\varphi} = a/\sqrt{\sin 2\varphi} = a^2/\rho.$$

Заметив еще, что $0 \le \varphi \le \pi/2$, Т. е. $\alpha = 0,\ \beta = \pi/2$, Получим

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_0^{\pi/2} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\frac{a^2 d\varphi}{\rho} =$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = a^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = 2a^2.$$

Пример.5. Вычислить $\int_L (2x+4y-4z+7)\,dl,$ Где L - отрезок прямой Между точками $M_1(8,9,3),\ M_2(6,10,5)$.

Составим сначала уравнения прямой, проходящей через точки M_1 И M_2:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3}, \text{ Или } \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2} = t.$$

Таким образом, получаем параметрические уравнения прямой:

$$x = 8-2t,\ y = 9+t,\ z = 3+2t.$$

Точка M Пробегает отрезок M_1M_2, когда t Изменяется от 0 До 1, т. е. $t_1 = 0,$ $t_2 = 1.$ Так как $x' = -2,\ y' = 1,\ z' = 2,$ То $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt =$ $= \sqrt{4+1+4}\,dt = 3dt.$

Находим

$$\int_L (2x+4y-4z+7)\,dt = \int_0^1 (2(8-2t)+4(9+t)-4(3+2t)+7)\,3dt =$$

$$= 3\int_0^1 (47-8t)\,dt = 3(47t-4t^2)\Big|_0^1 = 3(47-4) = 129.$$

4. Формула Грина.

Пример. С помощью формулы Грина вычислить интеграл $\oint_C y^2dx + (x+y)^2dy$, где контур C представляет собой треугольник *ABD* с вершинами *A* (*a*,0), *B* (*a*,*a*), *D* (0,*a*). (рисунок 3).

Решение.

В заданном криволинейном интеграле $P = y^2,\ Q = (x+y)^2$, так что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left((x+y)^2\right)}{\partial x} = 2(x+y),\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y.$$

Тогда по формуле Грина получаем

$$I = \oint_C y^2dx + (x+y)^2dy = \iint_R \left(2(x+y) - 2y\right)dxdy = 2\iint_R xdxdy.$$

Уравнение стороны *AD* имеет вид $y = -x + a$. Следовательно, полученный двойной интеграл вычисляется следующим образом

$$I=2\iint\limits_R x\,dx\,dy=2\int\limits_0^a\left[\int\limits_{-x+a}^{a}dy\right]x\,dx=2\int\limits_0^a\left[y\Big|_{-x+a}^{a}\right]x\,dx=2\int\limits_0^a\left(a-\left(-x+a\right)\right)x\,dx=2\int\limits_0^a x^2dx=2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2a^3}{3}.$$

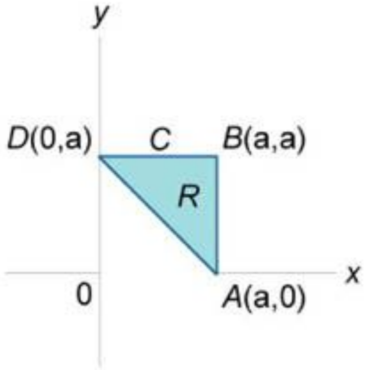


Рис.3

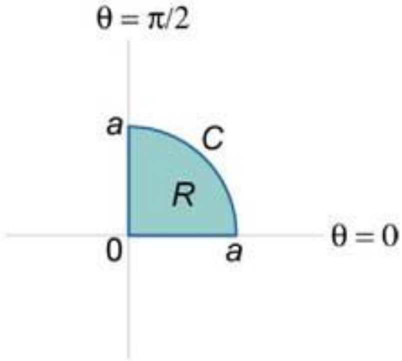


Рис.4

Пример. С помощью формулы Грина найти интеграл $\oint\limits_C\left(y-x^2\right)dx-\left(x+y^2\right)dy$. Контур C ограничивает сектор круга радиусом a, лежащий в первом квадранте (рисунок 4).

Решение.

В соответствии с формулой Грина

$$\oint\limits_C Pdx+Qdy=\iint\limits_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

находим

$$P=y-x^2,\quad Q=-\left(x+y^2\right),\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial\left(x+y^2\right)}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\left(y-x^2\right)}{\partial y}=1.$$

Следовательно,

$$I=\oint\limits_C\left(y-x^2\right)dx-\left(x+y^2\right)dy=\iint\limits_R\left(-1-1\right)dxdy=-2\iint\limits_R dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, вычисляем интеграл

$$I=-2\iint\limits_R dxdy=-2\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^a rdr=-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^a=-\frac{\pi a^2}{2}.$$

Пример 7 Вычислить интеграл $\int\limits_C\frac{dx-dy}{x+y}$ с использованием формулы Грина. Контур интегрирования C представляет собой квадрат с вершинами в точках A (1,0), B (0,1), D (−1,0), E (0,−1) (рисунок 5).

Решение. В соответствии с формулой Грина запишем

$$P=\frac{1}{x+y},\quad Q=-\frac{1}{x+y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial\left(-\frac{1}{x+y}\right)}{\partial x}=\frac{1}{\left(x+y\right)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{1}{x+y}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{\left(x+y\right)^2}.$$

Следовательно,

$$I=\int_C \frac{dx-dy}{x+y}=\iint_R\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)dxdy=2\iint_R\frac{dxdy}{(x+y)^2}.$$

Найдем уравнения сторон квадрата:

$AB:\quad y=-x+1,$

$BD:\quad y=x+1,$

$DE:\quad y=-x-1,$

$EA:\quad y=x-1.$

Далее удобно ввести новые переменные. Пусть $u=y+x,\ v=y-x$. Уравнения сторон квадрата записываются через новые переменные *u* и *v* в виде

$y=-x+1,\ \Rightarrow\ y+x=1$ или $u=1,$

$y=x+1,\ \Rightarrow\ y-x=1$ или $v=1,$

$y=-x-1,\ \Rightarrow\ y+x=-1$ или $u=-1,$

$y=x-1,\ \Rightarrow\ y-x=-1$ или $v=-1.$

Как видно, образ *S* первоначальной области интегрирования *R* является "более симпатичным" квадратом (рисунок 6). Найдем якобиан для нашей замены переменных.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial(y+x)}{\partial x} & \frac{\partial(y+x)}{\partial y}\\ \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(y-x)}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2.$$

Соответственно, абсолютное значение определителя обратной матрицы равно $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\right|=\frac{1}{2}.$ Тогда $dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{2}dudv,$ и интеграл имеет значение

$$I=2\iint_R\frac{dxdy}{(x+y)^2}=2\iint_S\frac{\frac{1}{2}dudu}{u^2}=\iint_S\frac{dudu}{u^2}=\int_{-1}^{1}dv\int_{-1}^{1}\frac{du}{u^2}=v\Big|_{-1}^{1}\cdot\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_{-1}^{1}=(1-(-1))\cdot(-1-(-1))=-4.$$

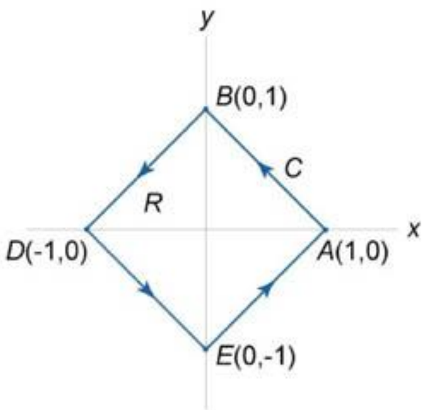


Рис.5

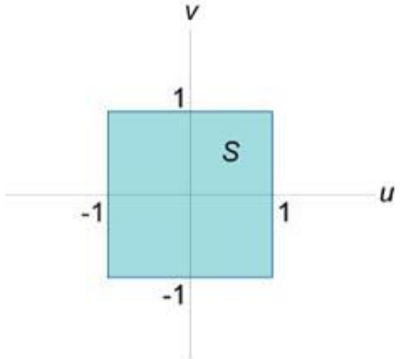


Рис.6

5. Интегрирование полного дифференциала.

Примеры (восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу)

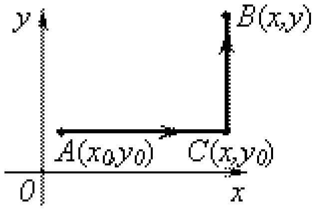
1. Найти $U(x,y)$, если $dU = (x^2 - y^2)dx - 2xydy$.

Решение

Проверяем условие полного дифференциала функции двух переменных:

$$\begin{cases} P = x^2 - y^2 \\ Q = -2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

— условие полного дифференциала выполнено, значит, функцию $U(x,y)$ восстановить можно.



$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(x^2 - y_0^2\right)dx + \int_{y_0}^{y} -2xydy = \left(\frac{x^3}{3} - y_0^2 x\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} - xy^2\Big|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - y_0^2 x - \frac{x_0^3}{3} - y_0^2 x_0 - xy^2 + xy_0^2 = \underbrace{\left(\frac{x^3}{3} - xy^2\right)}_{U(x,y)} - \underbrace{\left(\frac{x_0^3}{3} - x_0 y_0^2\right)}_{U(x_0,y_0)} \Rightarrow$$

$$U(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2.$$

Проверка: $dU = U'_x \cdot dx + U'_y \cdot dy = \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy$ – верно.

Ответ: $U(x,y) = x^3/3 - xy^2 + C$.

2. Найти функцию $U(x,y,z)$, такую что $dU = \dfrac{dx - 3dy}{z} + \dfrac{3y - x + z^3}{z^2}dz$

Решение

Проверяем необходимые и достаточные условия полного дифференциала функции трех переменных: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$, если дано выражение $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

В решаемой задаче

$$P(x,y,z) = \frac{1}{z},\quad Q(x,y,z) = -\frac{3}{z},\quad R(x,y,z) = \frac{3y - x + z^3}{z^2}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow & \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\dfrac{1}{z^2}, & \dfrac{\partial R}{\partial x} = -\dfrac{1}{z^2} \Rightarrow & \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{3}{z^2}, & \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{3}{z^2} \quad \Rightarrow & \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

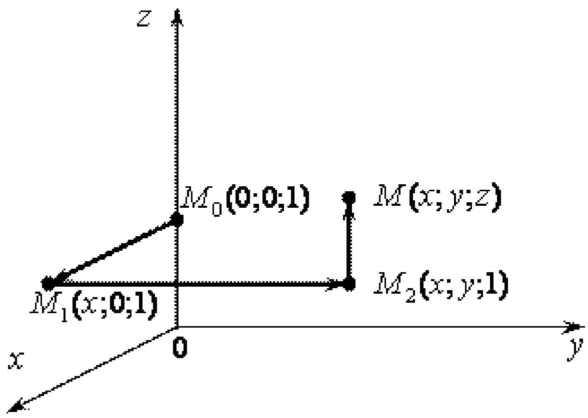
все условия полного дифференциала выполнены, следовательно, функцию $U(x,y,z)$ восстановить можно (задача поставлена корректно).

Будем восстанавливать функцию $U(x,y,z)$ с помощью криволинейного интеграла II рода, вычислив его по некоторой линии, соединяющей фиксированную точку (x_0,y_0,z_0) и переменную точку (x,y,z), так как $\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} dU(x,y,z) = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0)$

(это равенство выводится так же, как и в двумерном случае).

С другой стороны, криволинейный интеграл II рода от полного дифференциала dU не зависит от формы линии интегрирования, поэтому его проще всего считать по ломаной, состоящей из отрезков, параллельных осям координат. При этом в качестве фиксированной точки (x_0,y_0,z_0) можно взять для просто ты взять точку с конкретными числовыми координатами, отслеживая лишь только, чтобы в этой точке и на всей линии интегрирования выполнилось условие существования криволинейного интеграла (то есть чтобы функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ были непрерывными). С учетом этого замечания в данной задаче можно взять фиксированной точкой, например, точку $M_0(0;0;1)$. Тогда на каждой из звеньев ломаной $M_0M_1M_2M$ будем иметь

$$(M_0M_1):\begin{cases} y=0 \Rightarrow dy=0 \\ z=1 \Rightarrow dz=0 \\ x - \text{переменная} \\ x_{нач.}=0,\ x_{кон.}=x \end{cases}$$



$$(M_1M_2):\begin{cases} x=x=\mathbf{const} \Rightarrow dx=0 \\ z=1 \Rightarrow dz=0 \\ y - \text{переменная} \\ y_{нач.}=0,\ y_{кон.}=y \end{cases}$$

$$(M_2M):\begin{cases} x=x=\mathbf{const} \Rightarrow dx=0 \\ y=y=\mathbf{const} \Rightarrow dy=0 \\ z - \text{переменная} \\ z_{нач.}=1,\ z_{кон.}=z \end{cases}$$

$$U(x,y,z)-U(0,0,1)=\int\limits_{M_0(0;0;1)}^{M(x;y;z)} dU = \int\limits_{M_0(0;0;1)}^{M(x;y;z)} \frac{1}{z}dx-\frac{3}{z}dy+\frac{3y-x+z^3}{z^2}dz =$$

$$\underset{\substack{\text{свойство аддитивности}\\ \text{интеграла}}}{=} \int\limits_{(M_0M_1)} + \int\limits_{(M_1M_2)} + \int\limits_{(M_2M)} \underset{\substack{\text{сводим криволинейный интеграл}\\ \text{к определенным интегралам}}}{=}$$

$$= \int\limits_{x=0}^{x}\left(\frac{1}{1}\cdot dx-\frac{3}{1}\cdot 0+\frac{3\cdot 0-x+1^3}{1^2}\cdot 0\right)+\int\limits_{y=0}^{y}\left(\frac{1}{1}\cdot 0-\frac{3}{1}\cdot dy+\frac{3y-x+1^3}{1^2}\cdot 0\right)+$$

$$+\int_{z=1}^{z}\left(\frac{1}{z}\cdot 0-\frac{3}{z}\cdot 0+\underbrace{\frac{3y-x+z^3}{z^2}dz}_{x,y-\text{постоянные}}\right)=\int_0^x dx+\int_0^y -3dy+\int_1^z\left(\frac{3y-x}{z^2}+z\right)dz=$$

$$=x\Big|_0^x-3y\Big|_0^y+\left(-\frac{3y-x}{z}+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=1}^{z}=x-3y-\frac{3y-x}{z}+\frac{z^2}{2}-\left(-\frac{3y-x}{1}+\frac{1}{2}\right)\underset{\text{упрощаем}}{=}$$

$$=x-3y+\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+3y-x-\frac{1}{2}=\underbrace{\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}}_{U(x,y,z)}-\underbrace{\frac{1}{2}}_{U(0,0,1)}\Rightarrow U(x,y,z)=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}.$$

Проверка:

$$U'_x=\left(\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}\right)'_x=\frac{1}{z}=P(x,y,z)-\text{верно},$$

$$U'_y=\left(\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}\right)'_y=-\frac{3}{z}=Q(x,y,z)-\text{верно},$$

$$U'_z=\left(\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}\right)'_z=-\frac{x-3y}{z^2}+z=\frac{3y-x+z^3}{z^2}=R(x,y,z)-\text{верно},$$

$$dU=U'_x\cdot dx+U'_y\cdot dy+U'_z\cdot dz=\frac{1}{z}dx-\frac{3}{z}dy+\frac{3y-x+z^3}{z^2}dz-\text{верно}.$$

Ответ: $U(x,y,z)=\dfrac{x-3y}{z}+\dfrac{z^2}{2}+C$, где C - это произвольная постоянная.

3.13.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия и теоремы теории криволинейных интегралов;
- усвоили алгоритмы вычисления криволинейного интеграла первого и второго рода;
- выработали навыки по применению формулы Грина, восстановлению функции по ее полному дифференциалу.

3.14 Практическое занятие №34-35 (4 ч.)

Тема: Положительные числовые ряды, признаки их сходимости. Произвольные ряды. Абсолютно сходящиеся ряды. Знакочередующиеся ряды, их свойства и приложения.

3.14.1 Задание для работы:

1. Числовые ряды, общий член ряда.
2. Положительные числовые ряды, достаточные признаки сходимости положительных рядов.
3. Абсолютно сходящиеся ряды. Знакочередующиеся ряды, их свойства. Исследование произвольных рядов на сходимость.

3.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые ряды, общий член ряда.

Пример. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$.

Решение. Имеем $u_n=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$. Так как: $u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, то

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\ u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),\ u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\ u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right),\ldots.$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, то ряд сходится и его сумма равна $1/2$.

Пример. Исследовать сходимость ряда (2) $\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$.

Решение. Составим частичные суммы ряда:

$$S_1=\frac{1}{1\bullet 2},\quad S_2=4\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4},\ldots.$$

Представим их в виде

$$S_1=1-\frac{1}{2},\quad S_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},$$

$$S_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4},\ldots.$$

Нетрудно заметить закономерность в образовании частичных сумм: каждая представляет разность между единицей и дробью, числитель которой 1, а знаменатель n-й частичной суммы равен $n+1$, т.е. $S_n=1-\frac{1}{n+1}$. Найдём предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Пример 1. Записать первые пять членов ряда, если дана формула его общего члена: $u_n=\frac{4n-3}{n^2+1}$.

Решение. Подставляем в формулу вместо n последовательно 1, 2, 3, 4, 5. Получаем:

$$u_n=\frac{1}{2}+1+\frac{9}{10}+\frac{13}{17}+\frac{17}{26}+\ldots.$$

Пример. Записать формулу общего члена ряда, если даны пять его первых членов:

$$u_n=1+\frac{4}{3}+\frac{7}{9}+\frac{10}{27}+\frac{13}{81}+\ldots.$$

Решение. Ищем закономерность образования членов ряда. Нетрудно заметить, что знаменатель является числом 3 в некоторой степени. Для первого члена ряда степень равна нулю, то есть 1 - 1, для второго члена степень равна 1, то есть 2 - 1, для пятого - 4, то есть 5 - 1. Следовательно, степень числа три равна n - 1. В свою очередь, в числителе число всегда на 2 меньше $3n$. Следовательно, формула общего члена ряда: $u_n = \frac{3n-2}{3^{n-1}}$

2.Положительные числовые ряды, достаточные признаки сходимости положительных рядов.

1.Исследуйте числовой ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

Решение:

Применим признак Даламбера.

Пусть $P = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, тогда если P<1, то ряд сходится; если P>1, то ряд расходится; если P=1, то требуется дополнительное исследование.

Найдем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}(n+2)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{5^n(n+1)!} = \frac{5(n+2)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{5n(1+\frac{2}{n})}{n^2(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}.$$

$P = \lim_{n\to\infty}\frac{5(1+\frac{2}{n})}{n(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})} = 0 < 1$, Следовательно, ряд сходится.

2. Исследуйте числовой ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{(n+2)!}$.

Решение:

Применим признак Даламбера.

Пусть $P = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, тогда если P<1, то ряд сходится; если P>1, то ряд расходится; если P=1, то требуется дополнительное исследование.

Найдем: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{(n+3)!}\cdot\frac{(n+2)!}{n^2 2^n} = \frac{3(n^2+2n+1)}{(n+3)n^2} = \frac{3n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\frac{3}{n})}$.

$P = \lim_{n\to\infty}\frac{3(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n(1+\frac{3}{n})} = 0 < 1$, Следовательно, ряд сходится.

3. Исследуйте числовой ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Решение:

Применим признак сравнения. Пусть $a_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}$; $b_n = \frac{1}{n^2}$. Очевидно, что $a_n \le b_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - это обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Так как s=2>1, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. По признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Ответ: Ряд сходится.

4. Исследуйте числовой ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Решение:

Применим признак сравнения. Пусть $a_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}$; $b_n = \frac{1}{n^2}$. Очевидно, что $a_n \le b_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - это обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Так как s=2>1, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. По признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Ответ: Ряд сходится.

5. Исследуйте числовой ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{5n+1}{2n-1}\right)^n$.

Решение:

Применим признак Коши.

Пусть $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, тогда если l<1, то ряд сходится; если l>1, то ряд расходится; если l=1, то требуется дополнительное исследование.

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{5n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{5n+1}{2n-1}\right) =$$

Найдем:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(5+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(6-\frac{1}{n})} = \frac{5}{6} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится

6. Исследуйте числовой ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Решение:

Применим интегральный признак. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln b}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и числовой ряд.

Ответ: ряд сходится.

7. Исследуйте числовой ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Решение:

Применим признак Коши.

Пусть $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, тогда если l<1, то ряд сходится; если l>1, то ряд расходится; если l=1, то требуется дополнительное исследование.

Найдем: $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2^n}} =$ Следовательно, ряд сходится.

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Ответ: Ряд сходится.

3. Абсолютно сходящиеся ряды. Знакочередующиеся ряды, их свойства. Исследование произвольных рядов на сходимость.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}$, абсолютно сходится, т. к. ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов приводим без доказательства.

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ (или соответственно $S_1 - S_2$).

3. Под произведением двух рядов $u_1 + u_2 + \dots$ и $v_1 + v_2 + \dots$ понимают ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_1v_n + uv_{n-1} + \dots + u_nv_1)$

$$(u_1v_1) + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \dots \dots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \dots + u_nv_1) + \dots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды суммируются, вычитаются, перемножаются как обычные ряды. Суммы таких рядов не зависят от порядка записи членов.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения (свойства), вообще говоря, не имеют места.

Так, переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна S. Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое.

Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (теорема Римана).

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.

Пример:

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$

В общий член ряда входит множитель $(-1)^n$, а значит, нужно использовать признак Лейбница

1) Проверка ряда на знакочередование. Обычно в этом пункте решения ряд расписывают подробно $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n = -1+2-3+4-5+\ldots$ и выносят вердикт «Ряд является знакочередующимся».

2) Убывают ли члены ряда по модулю? Необходимо решить предел $\lim_{n\to+\infty}|a_n|$, который чаще всего является очень простым.

$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}(n) = +\infty \neq 0$ – члены ряда не убывают по модулю.

Вывод: ряд расходится.

Пример:

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Используем признак Лейбница:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

Ряд является знакочередующимся.

2) $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ – члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, таким образом, убывание монотонно.

Вывод: ряд сходится.

Если ряд сходится по признаку Лейбница, то также говорят, что ряд **сходится условно**.

Если сходится и ряд, составленный из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то говорят, что ряд **сходится абсолютно**.

Исследуем наш ряд на абсолютную сходимость.

Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится (гармонический ряд).

Таким образом, наш ряд **не является абсолютно сходящимся**. Исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ **сходится только условно**.

Пример:

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)}$

Используем признак Лейбница:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)}=\frac{1}{1\cdot 6}-\frac{1}{2\cdot 11}+\frac{1}{3\cdot 18}-\frac{1}{4\cdot 27}+\dots$

Данный ряд является знакочередующимся.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-1)(n^2+2)}=0$ – члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий: $\frac{1}{((n+1)-1)((n+1)^2+2)}<\frac{1}{(n-1)(n^2+2)}$, значит, убывание монотонно.

Вывод: Ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n^2+2)}$

Анализируя начинку ряда, приходим к выводу, что здесь нужно использовать предельный признак сравнения. Скобки в знаменателе удобнее раскрыть:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n^2+2)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n^2+2n-2}$$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Используем предельный признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3-n^2+2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+2n-2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}^{\to 0}+\frac{2}{n^2}^{\to 0}-\frac{2}{n^3}^{\to 0}\right)=1$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ сходится вместе с рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Исследуемый ряд **сходится абсолютно**.

Пример:

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}$

Используем признак Лейбница.

1) Ряд является знакочередующимся.

2)

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{4n+7}{n}}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{n}^{\to 0}}{4+\frac{7}{n}^{\to 0}}\right)^{2n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$$

Члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит, убывание монотонно.

Вывод: ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}$$

Очевидно, что нужно использовать радикальный признак Коши:
$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{\frac{2n}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{2} ==$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{4n+7}{n}}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{n}^{\to 0}}{4+\frac{7}{n}^{\to 0}}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} < 1$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится.

Исследуемый ряд **сходится абсолютно**.

Нередко встречаются знакочередующиеся ряды, которые вызывают затруднения.

Пример:

Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^n\cdot n^4}{n!}$

Используем признак Лейбница:

1) Ряд является знакочередующимся.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!} = ?!$

Дело в том, что не существует стандартных обыденных приемов для решения подобных пределов. Куда стремится такой предел? К нулю, к бесконечности? **Здесь важно, ЧТО на бесконечности растёт быстрее** – числитель или знаменатель.

Попробуем записать несколько первых членов ряда:
$|a_1| = \frac{7^1\cdot 1^4}{1!} = 7$

$|a_2| = \frac{7^2\cdot 2^4}{2!} = \frac{784}{2}$

$|a_3| = \frac{7^3\cdot 3^4}{3!} = \frac{27783}{6}$

Факториал растёт быстрее, чем **любая** показательная последовательность, иными словами: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{10^n}{n!} = 0$ или $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{10^n} = +\infty$. То есть, факториал *более высокого порядка роста*, чем любая показательная последовательность.

– Факториал растёт быстрее, чем **любая** степенная последовательность или многочлен, иными словами: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{10}}{n!} = 0$ или $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^{10}} = +\infty$. Вместо n^{10} можно подставить какой-нибудь многочлен тысячной степени, это опять же не изменит ситуацию – рано или поздно факториал всё равно «перегонит» и такой страшный многочлен. Факториал *более высокого порядка роста*, чем любая степенная последовательность.

– Факториал растёт быстрее, чем **произведение любого количества** показательных и степенных последовательностей (наш случай).

– **Любая** показательная последовательность растёт быстрее, чем любая степенная последовательность, например: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{10}}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n^{10}} = +\infty$. Показательная последовательность *более высокого порядка роста*, чем любая степенная последовательность. Аналогично факториалу, показательная последовательность «перетягивает» произведение любого количества любых степенных последовательностей или многочленов: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^5\cdot(n^2+3)\cdot n^7}{2^n}=0$.

–Степенно-показательная последовательность («эн» в степени «эн») растёт быстрее факториала.

Таким образом, второй пункт исследования (можно записать так:

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!}=0$, так как $n!$ более высокого порядка роста, чем $7^n\cdot n^4$. Члены ряда убывают по модулю, **начиная с некоторого номера** n, при этом, каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, таким образом, убывание монотонно.

Вывод: ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!}$$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot(n+1)^4}{(n+1)!}}{\dfrac{7^n\cdot n^4}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^4\cdot 7^{n+1}\cdot n!}{n^4\cdot 7^n\cdot(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}^{\to 0}\right)^4\cdot\frac{7\cdot 7^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{7^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{(n+1)}=0<1$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится.

Исследуемый ряд **сходится абсолютно**.

Разобранный пример можно решить другим способом.

Теорема: Если ряд сходится абсолютно, то он сходится и условно.

Наверное, вы уже заметили, что обратное неверно: если ряд сходится условно, то это еще не значит, что он сходится абсолютно.

3.14.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и теоремы теории положительных и произвольных числовых рядов;
- усвоили алгоритмы исследования рядов на сходимость;
- выработали навыки по применению признаков сходимости положительных рядов4
- усвоили алгоритм исследования на сходимость произвольного ряда.

3.15 Практическое занятие №36 (2 ч.)

Тема: Степенные ряды, область их сходимости.

3.15.1 Задание для работы:

1. Степенные ряды, область их сходимости.
2. Разложение элементарных функций в степенные ряды.
3. Приближенные вычисления интегралов и значений трансцендентных функций.

3.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Степенные ряды, область их сходимости.

1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{x^n}{n^2+1}$.

Решение: Радиус сходимости найдем по формуле $R=\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. $R=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Предел знаменателя - это второй замечательный предел, равный e. Найдем предел числителя. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{x}}$, $\ln f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$(по правилу Лопиталя)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x(1+\frac{1}{x^2})}=0\cdot$$

Следовательно, функция стремится к 1. Таким образом $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}=1$ Следовательно искомый предел равен 1/e. Таким образом радиус сходимости $R=\frac{1}{e}$. Интервал сходимости

$$\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right).$$

Исследуем сходимость степенного ряда в концах интервала сходимости.

1. x=1/e. Подставим в ряд. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{\frac{1}{e^n}}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{e}\right)^n\cdot\frac{1}{n^2+1}$

Пусть $c_n=\left(\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{e}\right)^n$. Покажем, что существует конечный, отличный от нуля предел c_n при $n\to\infty$. Прологарифмируем $\ln c_n=n^2\ln\frac{n+1}{n}-\ln e^n=n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n$. Воспользуемся табличным разложением в ряд Маклорена.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots(-1<x\le 1).$$

Подставим x=1/n Получим

$\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\ldots$ Следовательно

$$\ln c_n = n - \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n^2} + \ldots - n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n^2} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln c_n = -\frac{1}{2}; \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = e^{-\frac{1}{2}}$$

Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при s>1 и расходится при s≤1. Поэтому ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Применим предельный признак сравнения. Пусть даны два ряда

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$
$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots \qquad (2)$$

Тогда если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то оба ряда (1) и (2) одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Положим

$$a_n = \left(\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{e} \right)^n \cdot \frac{1}{n^2+1} = \frac{c_n}{n^2+1};\ b_n = \frac{1}{n^2}, \text{ тогда } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} c_n \frac{n^2}{n^2+1} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Следовательно ряд сходится.

2. x=-1/e. Подставим в степенной ряд. Получим $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{e} \right)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n^2+1}$. Ряд из абсолютных величин членов этого ряда совпадает со сходящимся рядом, рассмотренным в пункте 1. Следовательно, он сходится и, причем, абсолютно.

Ответ: Область сходимости степенного ряда $\left[-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right]$.

2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+1} x^n$.

Решение:

Радиус сходимости найдем по формуле $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

$$a_n = \frac{5^n}{n+1};\ a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{n+2};\ \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{5^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{5}$$

Следовательно искомый предел равен 1/5.Таким образом радиус сходимости $R = \frac{1}{5}$. Интервал сходимости $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Исследуем сходимость степенного ряда в концах интервала сходимости.
1. x=1/5. Подставим в ряд.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Ряд расходится как гармонический.
2. x=-1/5. Подставим в степенной ряд. Получим
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Ряд знакочередующийся. Так как абсолютные величины членов этого ряда монотонно убывают и стремятся к нулю, то по признаку Лейбница ряд сходится.
Ответ: Область сходимости степенного ряда $[-\frac{1}{5};\frac{1}{5})$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}$.

Решение:

Радиус сходимости найдем по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

$$a_n=\frac{1}{2^n n};\ a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)};\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2(1+\frac{1}{n})$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}2(1+\frac{1}{n})=2$$

Следовательно искомый предел равен 2.Таким образом радиус сходимости $R=2$. Интервал сходимости $(-2;\ 2)$.
4. Исследуем сходимость степенного ряда в концах интервала сходимости.
1. x=2. Подставим в ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Ряд расходится как гармонический.

2. x=-2. Подставим в степенной ряд. Получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Ряд знакочередующийся. Так как абсолютные величины членов этого ряда монотонно убывают и стремятся к нулю, то по признаку Лейбница ряд сходится.
Ответ: Область сходимости степенного ряда $[-2;2)$.

4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{2n}\cdot\sqrt[3]{n}}$.

Радиус сходимости найдем по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

$$a_n=\frac{1}{2^{2n}\sqrt[3]{n}};\ a_{n+1}=\frac{1}{2^{2n+2}\sqrt[3]{n+1}};\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2^{2n}\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{2^{2n+2}\sqrt[3]{n+1}}{1}=4\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}4\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}=4$$

Следовательно искомый предел равен 4.Таким образом радиус сходимости $R=4$. Интервал сходимости $(-4;4)$.
Исследуем сходимость степенного ряда в концах интервала сходимости.
1. x=4. Подставим в ряд.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2^{2n}\cdot\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Ряд расходится как обобщенный гармонический при s=1/3<1.

2. x=-4. Подставим в степенной ряд. Получим

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{2^{2n}\cdot\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Ряд знакочередующийся. Так как абсолютные величины членов этого ряда монотонно убывают и стремятся к нулю, то по признаку Лейбница ряд сходится.

Ответ: Область сходимости степенного ряда $[-4;4)$.

2. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

Пример. Используя известные разложения, разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=x\ln(1+x^2)$.

Решение

Необходимо найти разложение функции в ряд Маклорена, т.е. в степенной ряд по степеням x. Будем использовать разложение $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}+...$ при $t\in(-1;1]$.

Полагая $t=x^2$, получим $\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}+...$

Это разложение справедливо, когда $-1<x^2\le 1$, откуда $x^2\le 1$, тогда область сходимости $-1\le x\le 1$.

Таким образом, умножая обе части равенства на x, получим

$x\ln(1+x^2)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n}+...$ при $x\in[-1;1]$.

Пример. Используя известные разложения, разложись функцию $f(x)=\frac{1}{2+x}$ в ряд Тейлора в окрестности точкиx_0=1.

Решение.

Необходимо получить разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точкиx_0= 1, т.е. по степеням (x–1).

Будем использовать разложение $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+...+(-1)^n t^n+...$, при $t\in$(-1;1).

Для того, чтобы получить разложение данной функции по степеням (x–1) введем новую переменную t=x–1, тогда $x=t+1$. Преобразуем данную функцию к новой переменной, полагая $x=t+1$:

$$f(x)=f(t+1)=\frac{1}{2+(t+1)}=\frac{1}{3+t}=\frac{1}{3\left(1+\frac{t}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{3}}$$

Полагая в известном разложении вместо t выражение $\frac{t}{3}$ и умножая на число $\frac{1}{3}$,получим

$$\frac{1}{3\left(1+\frac{t}{3}\right)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{t}{3}+\left(\frac{t}{3}\right)^2-...+(-1)^n\left(\frac{t}{3}\right)^n+...\right)=\frac{1}{3}-\frac{t}{3^2}+\frac{t^2}{3^3}-...+(-1)^n\frac{t^n}{3^{n+1}}+...$$,

при $\in$ (-1;1).

Полагая в полученном разложении $t=x$–1, возвратимся к исходной переменной x и получим разложение данной функции в степенной ряд по степеням (x -1):

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{3}-\frac{x-1}{3^2}+\frac{(x-1)^2}{3^3}-...+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}+...$$

Это разложение справедливо при условии $-1<\frac{x-1}{3}<1$, откуда $-2<x<4$.

Итак, получили разложение при $x\in(-2;\ 4)$.

Пример. Разложить функцию $f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ в степенной ряд в точке $x_0=0$.

Решение. Преобразуем данную функцию, используя свойства логарифмов:

$$f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{3}\ln\frac{1+2x}{1-x}=\frac{1}{3}\left(\ln(1+2x)-\ln(1-x)\right)$$

Используя известное разложение $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}+...$ при $t\in(-1;1]$.

найдем разложение функции $y=\ln(1+2x)$, полагая $t=2x$, и функции $y=\ln(1-x)$, полагая $t=-x$:

$$\ln(1+2x)=(2x)-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n}+...=$$

$$=2x-\frac{2^2x^2}{2}+\frac{2^3x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{2^nx^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^nx^n}{n},$$

разложение справедливо при $2x\in(-1;1)$, т.е. при $x\in\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

Аналогично,

$$\ln(1-x)=(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}+...=$$

$$=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}+...=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

и разложение справедливо при $(-x)\in(-1;1)$, т.е. при $x\in(-1;1)$.

Степенные ряды можно почленно складывать и умножать на число, значит

$$\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{3}\left(\ln(1+2x)-\ln(1-x)\right)=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^nx^n}{n}-\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}2^n+1\right)\frac{x^n}{n}=x-\frac{1}{2}x^2+x^3-\frac{5}{4}x^4+...,$$

причем это разложение справедливо на общей области сходимости, т.е. при .

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$.

Решение. Преобразуем функцию

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

.

Используя известное разложение в ряд Маклорена функции $y=(1+t)^m$, полагая $m=-\frac{1}{2}$ и $t=\frac{x^2}{4}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\cdot\frac{x^4}{4^2}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\cdot\frac{x^6}{4^3}-\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2!2^3\cdot 4^2}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^4\cdot 4^3}x^6+\dots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{n!\cdot 2^{3n+1}}x^{2n}+\dots.$$

Используемый биномиальный ряд при имеет область сходимости $t \in(-1;1]$, следовательно, полученное разложение справедливо при $-1<\frac{x^2}{4}\leq 1$, откуда $x^2\leq 4$, $-2\leq x\leq 2$.

Итак, $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{n!\cdot 2^{3n+1}}x^{2n}$ при $x\in[-2;\ 2]$.

3. Приближенные вычисления интегралов и значений трансцендентных функций.

1. Вычислите определенный интеграл с точностью до 0,001, раскладывая подынтегральную функцию в ряд и затем интегрируя почленно.

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Решение:

Разложим подынтегральное выражение в ряд. Воспользуемся табличным разложением

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$ Разделим обе части на x. Получим

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\dots$$

Интегрируем это равенство от 0 до 0,5=1/2

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx = x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^5}{5!\cdot 5}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(2n+1)}+\dots\Big|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{144}+\frac{1}{19200}-\dots$$

Получили знакочередующийся ряд. Если мы ограничимся двумя слагаемыми, то ошибка не превзойдет первого отброшенного члена $\frac{1}{19200}<0,001$

Поэтому с точностью до 0,001 $\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{144}=0,493$

Ответ: с точностью до 0,001 $\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=0,493$.

2. Вычислите определенный интеграл с точностью до 0,001, раскладывая подынтегральную функцию в ряд и затем интегрируя почленно.

$$\int_0^{0,5}x\cos x dx.$$

Решение:

Разложим подынтегральное выражение в ряд. Воспользуемся табличным разложением

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

Умножим обе части этого равенства на x. Получим

$$x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + \ldots$$

Интегрируем это равенство от 0 до 0,5=1/2

$$\int_0^{0,5} x\cos x dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{24\cdot 6} + \ldots + \frac{x^{2n+2}}{(2n)!\cdot(2n+2)} + \cdots \Big|_0^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{128} + \frac{1}{9216} - \ldots\right)$$

Получили знакочередующийся ряд. Если мы ограничимся двумя слагаемыми, то ошибка не превзойдет первого отброшенного члена $\frac{1}{9216} < 0{,}001$. Поэтому с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,5} x\cos x dx = \frac{1}{8} - \frac{1}{128} = 0{,}117$$

Ответ: с точностью до 0,001 $\int_0^{0,5} x\cos x dx = 0{,}117$.

3.15.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия и теоремы теории произвольных числовых рядов, степенных рядов;
- усвоили алгоритмы нахождения области сходимости степенного ряда, разложения в степенные ряды элементарных функций;
- выработали навыки по применению степенных рядов к приближенным вычислениям

3.16 Практическое занятие №37 (2 ч.)

Тема: Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье

3.16.1 Задание для работы:
1. Ортонормированные системы. Коэффициенты, ряд Фурье.
2.Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье.
3. Разложение функции в ряд Фурье по «неправильному промежутку

3.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Ортонормированные системы. Коэффициенты, ряд Фурье.

Начнем с определения ортогональных функций. Функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на $[a;b]$, если $\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = 0$.

Термин «ортогональность» требует некоторых пояснений. Функции на отрезке $[a;b]$ образуют (бесконечномерное) векторное пространство (сумма функций и произведение функции на число – это снова функция). Рассмотрим для интегрируемых функций величину $\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx$ (1) и назовем нормой ϕ, $\|\phi\| = \sqrt{(\phi,\phi)}$. Разумеется, это билинейная симметричная функция:

1. $(\phi,\psi)=\int\limits_a^b \phi(x)\psi(x)dx=\int\limits_a^b \psi(x)\phi(x)dx=(\psi,\phi)$;

2. $(\phi_1+\phi_2,\psi)=\int\limits_a^b (\phi_1(x)+\phi_2(x))\psi(x)dx=\int\limits_a^b \phi_1(x)\psi(x)dx+\int\limits_a^b \phi_2(x)\psi(x)dx=$
$=(\phi_1,\psi)+(\phi_2,\psi)$;

3. $(\lambda\phi,\psi)=\int\limits_a^b \lambda\phi(x)\psi(x)dx=\lambda\int\limits_a^b \phi(x)\psi(x)dx=\lambda(\phi,\psi)$.

4. Кроме того, если рассматривать только непрерывные функции, из равенства $(\phi,\phi)=0$ следует, что $\phi(x)=0$ на $[a;b]$.

Действительно, если бы существовала точка $x_0\in[a;b]$ такая, что $\phi(x_0)=c\neq 0$, то, ввиду непрерывности $\phi(x)$ на $[a;b]$ существовало бы δ такое, что при $x\in[x_0-\delta;x_0+\delta]$ для функции $\phi^2(x)$ было бы справедливо неравенство $\phi^2(x)>\dfrac{c^2}{2}$. Но тогда $\int\limits_a^b \phi^2(x)dx=\int\limits_a^{x_0-\delta}\phi^2(x)dx+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\phi^2(x)dx+\int\limits_{x_0+\delta}^b\phi^2(x)dx\geq 0+2\delta\dfrac{c^2}{2}+0=\delta c^2>0$.

Поэтому для непрерывных функций ϕ,ψ величина (1) представляет собой скалярное произведение.

Если рассмотреть более широкий класс, чем непрерывные функции, то свойство 4 уже не имеет места. Например, для отличной от тождественного нуля функции $\phi(x)=\begin{cases}1, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases}$ на $[a;b]=[-1;1]$ выполняется равенство $\int\limits_{-1}^{1}\phi^2(x)dx=0$.

Однако, если $\phi(x)$ - кусочная непрерывная функция, то можно доказать, что из равенства $\|\phi\|^2=\int\limits_a^b\phi^2(x)dx=0$ следует, что $\phi(x)$ равна 0 всюду, кроме конечного числа точек, где она имеет устранимый разрыв.

Таким образом, величина (1) по своим свойствам близка к скалярному произведению.

Система функций $\{\phi_n(x)\}$ - ортогональная на $[a;b]$, если $(\phi_n,\phi_m)=\int\limits_a^b\phi_n(x)\phi_m(x)dx=0$ при $n\neq m$. Система функций называется ортонормированной на $[a;b]$, если $(\phi_n,\phi_m)=\begin{cases}0, \text{при } n\neq m\\ 1, \text{при } n=m\end{cases}$.

Если рассмотреть символ Кронекера $\delta_{m,n}$, определяемый так: $\delta_{m,n}=\begin{cases}0, \text{при } n\neq m\\ 1, \text{при } n=m\end{cases}$, то условие ортонормированности можно записать так: $(\phi_n,\phi_m)=\delta_{n,m}$.

Если ортогональная система функций $\{\phi_n(x)\}$ на $[a;b]$ не содержит функций с нулевой нормой, то система $\left\{\dfrac{\phi_n(x)}{\|\phi_n(x)\|}\right\}$ - ортонормированная.

Действительно, $\left(\dfrac{\phi_n}{\|\phi_n\|},\dfrac{\phi_m}{\|\phi_m\|}\right)=\dfrac{1}{\|\phi_n\|\|\phi_m\|}(\phi_n,\phi_m)=\begin{cases}0, n\neq m\\ \dfrac{(\phi_n,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}=1, n=m\end{cases}$.

Обобщенные ряды Фурье. Пусть $\phi_n(x),\ n=1,2,\ldots,\ \|\phi_n\|\neq 0$ - ортогональная на $[a;b]$ система функций. Пусть $f(x)$ представляет собой равномерно сходящийся на $[a;b]$ ряд $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k$. Найдем коэффициенты c_k. Для этого вычислим $(f,\phi_n)=\int\limits_a^b f(x)\phi_n(x)dx=$ $=\int\limits_a^b\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k(x)\right)\phi_n(x)dx=\int\limits_a^b\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k(x)\phi_n(x)dx=$ (ввиду равномерной сходимости) $=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\int\limits_a^b\phi_k(x)\phi_n(x)dx=c_n\int\limits_a^b\phi_n(x)\phi_n(x)dx=$ (ввиду ортогональности) $=c_n\|\phi_n\|^2$. Поэтому $c_n=\dfrac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}$.

Однако коэффициент c_n некоторой функции $f(x)$ можно вычислять по этой формуле и без предположения о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$. Этот коэффициент называется коэффициентом Фурье относительно системы $\{\phi_n(x)\}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$ называется рядом Фурье функции $f(x)$. Мы пока не говорим о сходимости этого ряда к $f(x)$, а говорим лишь о том, что функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье, и записываем это так: $f\propto\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$.

Мы вернемся к этому важнейшему вопросу о сходимости немного позднее.

Тригонометрические ряды Фурье. Пусть отрезок имеет длину $2l$. Для определенности, пусть это отрезок $[-l;l]$. Рассмотрим следующую систему функций: $1,\cos\dfrac{\pi x}{l},\sin\dfrac{\pi x}{l},\ldots,\cos\dfrac{n\pi x}{l},\sin\dfrac{n\pi x}{l},\ldots$.

Предположим теперь, что $f(x)$ определена на $(-l;l)$ и периодически продолжена на всю числовую ось. Сопоставим ей ряд Фурье по тригонометрической системе: $f(x)\propto\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$,

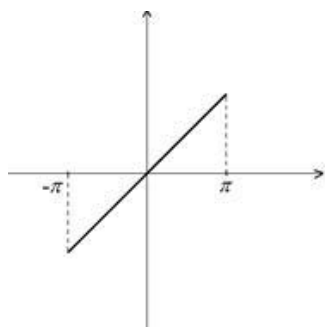
где $a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l},\ n=0,1,2,\ldots;\ \ b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,\ldots$.

(Важнейший частный случай: $l=\pi$, тогда тригонометрическая система имеет вид $1,\cos x,\sin x,\ldots,\cos nx,\sin nx$. Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$ и ряд Фурье, соответствующий $f(x)$, есть $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$).

2.Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье.

1. Ортонормированные системы. Коэффициенты, ряд Фурье.
2. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье.

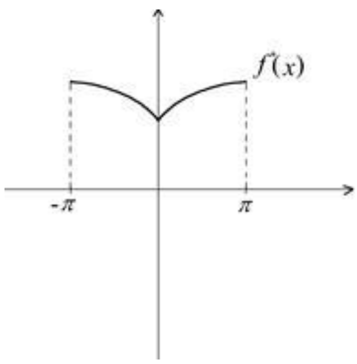
Пример. Разложим в ряд Фурье $y = x$ на интервале $(-\pi; \pi)$. Эта функция – нечетная, поэтому в разложении все $a_n = 0,\ n = 1,2,...$. Интегрируя по частям, находим $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi + \right.$ $\left. + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n}$ (здесь использовано то, что $\cos n\pi = (-1)^n$).

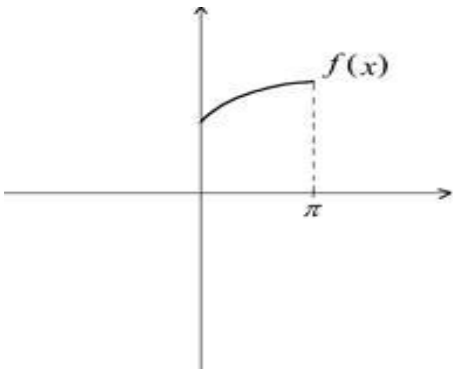


Итак, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$, который сходится к функции x на $(-\pi; \pi)$(и к 0 в точках $x = -\pi,\ x = \pi$).

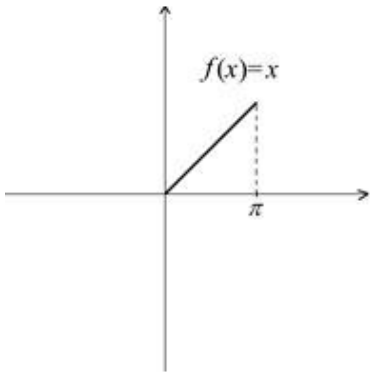
Обратим внимание на еще один часто встречающийся тип задач.

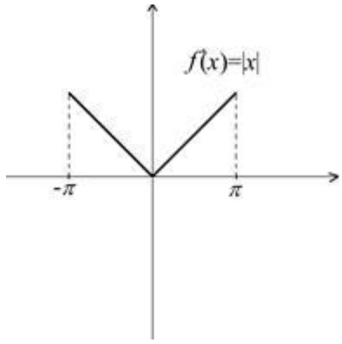
Пример. Разложить функцию $f(x)$ на интервале $(0; \pi)$ по косинусам кратных дуг. В качестве $f(x)$рассмотрим x . Эту задачу не следует путать с разложением в ряд Фурье функции x на интервале $(0; \pi)$. При таком разложении тригонометрическая система имела бы вид $1, \cos 2nx, \sin 2nx,\ n = 1,2,...$, и разложение содержало бы как функции $\cos 2nx$, так и функции $\sin 2nx$. Не следует также видеть в этой задаче противоречие с разобранным выше примером. Там ведь функция была задана на $(-\pi; \pi)$, и была нечетной на этом интервале. В рассматриваемом случае мы должны сначала доопределить $f(x)$ на интервале $(-\pi;0)$ (в нашем случае это будет $-x$) так, чтобы получилась Четная функция $f^*(x)$.





Разложение $f^*(x)$ содержит только Косинусы. Рассматривая это разложение Только при $x > 0$, получаем решение исходной задачи. При $f(x) = x$ $f^*(x) = |x|$.





Разложим $|x|$ на $(-\pi; \pi)$. Это – четная функция. $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi\right) =$$
,

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, \; n = 2k \\ -\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}, \; n = 2k+1 \end{cases}.$$ $$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$. Поэтому при $x > 0$

получаем искомое разложение x по косинусам кратных дуг. $$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, x > 0$$.

Пример.

Дана функция $f(x) = |x|$. Требуется:

1) разложить функцию в ряд Фурье с периодом $T = 2l$, где l – произвольное положительное число;

2) записать разложение на промежутке $[-\pi; \pi]$, построить функцию $f(x) = |x|$ и график полной суммы ряда $S(x)$.

Решение: в первом пункте предлагается решить задачу в общем виде, и это очень удобно! Появится надобность – просто подставьте своё значение.

1) В данной задаче период разложения $T = 2l$, полупериод l. В ходе дальнейших действий, в частности при интегрировании, «эль» считается константой

Функция $f(x) = |x|$ является чётной, а значит, раскладывается в ряд Фурье только по косинусам: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$.

Коэффициенты Фурье ищем по формулам $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$. Обратите внимание на их безусловные преимущества. Во-первых, интегрирование проводится по положительному отрезку разложения, а значит, мы благополучно избавляемся от модуля $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & если \quad x\geq 0 \\ -x, & если \quad x<0 \end{cases}$, рассматривая из двух кусков только «икс». И, во-вторых, заметно упрощается интегрирование.

Раз:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l xdx=\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^l=\frac{1}{l}\cdot(l^2-0)=l$$

Два:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{\pi nx}{l}dx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$$u=x\Rightarrow du=dx$$

$$dv=\cos\frac{\pi nx}{l}dx\Rightarrow v=\int\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{l}{\pi n}\int\cos\frac{\pi nx}{l}d\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l-\frac{l}{\pi n}\int_0^l\sin\frac{\pi nx}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(l\sin\pi n-0\cdot\sin 0)-\frac{2}{\pi n}\cdot\left(-\frac{l}{\pi n}\right)\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l=$$

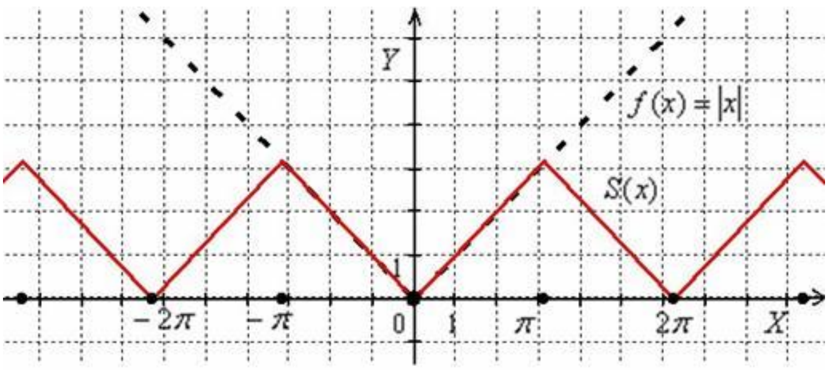
$$=\frac{2}{\pi n}(0-0)+\frac{2l}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-\cos 0)=\frac{2l\cdot((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}$$

Таким образом:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}=\frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2l\cdot((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}\right]=\frac{l}{2}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{l}\right]$$, при этом константу $\frac{2l}{\pi^2}$, которая не зависит от «эн», выносим за пределы суммы.

Ответ: $f(x)\sim\frac{l}{2}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{l}\right]$

2) Запишем разложение $f(x)=|x|$ на промежутке $[-\pi;\pi]$, для этого в общую формулу подставляем нужное значение полупериода $l=\pi$:



$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{\pi}\right]=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[((-$

. В данном случае сумма ряда **непрерывна**, и, разумеется, чётна. Построение графика $S(x)$ вряд ли нуждается в комментариях:

Хотел ещё построить частичную сумму

$S_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2}{1^2}\cos x + 0 + \frac{-2}{3^2}\cos 3x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9}\right)$, но её график практически совпал с «красной пилой» – настолько хорошо уже такое малое количество слагаемых приближает полную сумму.

Ответ: $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n - 1)}{n^2}\cos nx\right]$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом , заданную в интервале $(-\pi;\pi)$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

Решение. Графиком этой функции в интервале является отрезок, соединяющий точки $(-\pi;0)$ и $(\pi;2\pi)$. Сумма ряда Фурье функции является периодической функцией с периодом и совпадает с функцией на сегменте .

Определяем коэффициенты ряда Фурье. Сначала находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx.$$

Второй интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции, взятый по интервалу, симметричному относительно начала координат. Таким образом, $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$.

Далее, находим коэффициенты a_m. Имеем

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos mx dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx dx.$$

Нетрудно видеть, что оба интеграла равны нулю (подынтегральная функция второго интеграла является нечетной как произведение четной функции на нечетную). Итак, $a_m = 0$, т.е. $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$.

Найдем теперь коэффициенты b_m:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\sin mx dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx dx.$$

Первый интеграл равен нулю. Подынтегральная функция второго интеграла – четная как произведение двух нечетных функций. Таким образом,

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin mx dx.$$

Интегрируя по частям, получим $u = x$, $dv = \sin mx\,dx$, $du = dx$, $v = -\frac{1}{m}\cos mx$, т.е.

$$b_m = -\frac{2x}{m\pi}\cos mx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{m\pi}\int_0^{\pi}\cos mx dx = -\frac{2}{m}\cdot\cos m\pi + \frac{2}{\pi m^2}\sin mx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{m}(-1)^m = \frac{2}{m}(-1)^{m+1}.$$

Следовательно, разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \pi + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\sin mx =$$

$$= \pi + 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right).$$

Это равенство имеет место во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева, т. е. нулю.

Пример. Периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π определена следующим образом:
$f(x) = -1$ при $-\pi < x < 0$,
$f(x) = 1$ при $0 \le x \le \pi$.

Эта функция кусочно монотонна и ограничена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \int_0^{\pi}dx\right] = 0$$
,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx dx + \int_0^{\pi}\cos kx dx\right] = -1\cdot\frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_0^{\pi} = 0$$

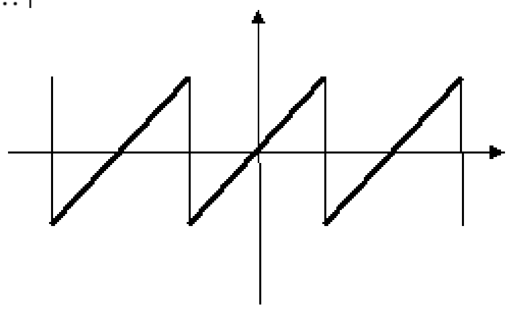
$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx dx + \int_0^{\pi}\sin kx dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{при } k \text{ нечетном} \end{cases}$$

Следовательно, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \ldots\right]$$

.



Пример 3.Периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π определяется следующим образом: $f(x) = x$, $-\pi < x \le \pi$.

Эта функция – кусочно монотонная и ограниченная. Следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

По формуле (4) находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Применяя формулам (17), (18) и интегрируя по частям, получим:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx\right] = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx\right] = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$$
.

Таким образом, получаем ряд:

$$f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right].$$

Это равенство имеет место во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева, т. е. нулю.

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва.

3. Разложение функции в ряд Фурье по «неправильному промежутку

Пример.

Пусть требуется разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π, которая на отрезке $0 < x \le 2\pi$ задана равенством $f(x)= x$.

Эта функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ задается двумя формулами:

$f(x) = x + 2\pi$ на отрезке $[-\pi, 0]$

$f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$.

В то же время на отрезке $[0, 2\pi]$ гораздо проще она задается одной формулой $f(x) = x$. Поэтому для разложения этой функции в ряд Фурье выгоднее воспользоваться формулами (20), приравняв λ=0.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx=2\pi$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}+\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{2\pi}=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}+\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{2\pi}=-\frac{2}{k}$$

Следовательно,

$$f(x)=\pi-2\sin x-\frac{2}{2}\sin 2x-\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{2}{4}\sin 4x-\frac{2}{5}\sin 5x-\ldots$$

Пример

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье и построить график суммы.

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{если} -3<x\le 0\\ 3-x, & \text{если } 0\le x\le 3\end{cases}$$

Решение: **с разрывом 1-го рода** в точке $x=0$. В данной задаче период разложения $T=6$, полупериод $l=3$. Функция определена только на полуинтервале $(-3;3]$, но это не меняет дела – важно, что оба куска функции интегрируемы.

Разложим функцию в ряд Фурье:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{3}+b_n\sin\frac{\pi nx}{3}\right)$$

Поскольку функция разрывна в начале координат, то каждый коэффициент Фурье очевидным образом следует записать в виде суммы двух интегралов:

1) Первый интеграл распишу максимально подробно:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)dx+\frac{1}{l}\int_0^{l} f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2)dx+\frac{1}{3}\int_0^3(3-x)dx=$$

$$=-\frac{2}{3}(x)\Big|_{-3}^{0}+\frac{1}{3}\cdot\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3=-\frac{2}{3}(0-(-3))+\frac{1}{3}\cdot\left(9-\frac{9}{2}-3\cdot 0+\frac{0^2}{2}\right)=-\frac{2}{3}(0+3)+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}=-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

2) Тщательным образом вглядываемся в поверхность Луны:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2)\cdot\cos\frac{\pi nx}{3}dx+\frac{1}{3}\int_0^3(3-x)\cos\frac{\pi nx}{3}dx=(*)$$

Второй интеграл **берём по частям**:

$u = 3 - x \Rightarrow du = -dx$

$dv = \cos\frac{\pi nx}{3}dx \Rightarrow v = \int\cos\frac{\pi nx}{3}dx = \frac{3}{\pi n}\int\cos\frac{\pi nx}{3}d\left(\frac{\pi nx}{3}\right) = \frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}$

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

$$(*) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\int_{-3}^{0}\cos\frac{\pi nx}{3}d\left(\frac{\pi nx}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}(3-x)\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3 + \frac{3}{\pi n}\int_0^3\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{0} + \frac{1}{\pi n}\cdot\left[(3-3)\sin\pi n - (3-0)\sin 0\right] + \frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{3}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(\sin 0 - \sin(-\pi n)) + \frac{1}{\pi n}(0-0) - \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n - \cos 0) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(0-0) + 0 - \frac{3((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \frac{3(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}$$

На что следует обратить пристальное внимание, после того, как мы звёздочкой $(*) = \ldots$ открываем продолжение решения?

Во-первых, не теряем первый интеграл $-\frac{2}{3}\int_{-3}^{0}\cos\frac{\pi nx}{3}dx$, где сразу же выполняем **подведение под знак дифференциала**. Во-вторых, не забываем злополучную константу $\frac{1}{3}$ перед большими скобками и **не путаемся в знаках** при использовании формулы $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$. Большие скобки, всё-таки удобнее раскрывать сразу же на следующем шаге.

Остальное дело техники, затруднения может вызвать только недостаточный опыт решения интегралов.

Да, не зря именитые коллеги французского математика Фурье возмущались – как это тот посмел раскладывать функции в тригонометрические ряды?! =) К слову, наверное, всем интересен практический смысл рассматриваемого задания. Сам Фурье работал над математической моделью теплопроводности, а впоследствии ряд, названный его именем стал применяться для исследования многих периодических процессов, коих в окружающем мире видимо-невидимо. Сейчас, кстати, поймал себя на мысли, что не случайно сравнил график второго примера с периодическим ритмом сердца. Желающие могут ознакомиться с практическим применением *преобразования Фурье* в сторонних источниках. …Хотя лучше не надо – будет вспоминаться, как Первая Любовь =)

3) Учитывая неоднократно упоминавшиеся слабые звенья, разбираемся с третьим коэффициентом:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2)\cdot\sin\frac{\pi nx}{3}dx + \frac{1}{3}\int_0^3(3-x)\sin\frac{\pi nx}{3}dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$u = 3 - x \Rightarrow du = -dx$

$dv = \sin\frac{\pi nx}{3}dx \Rightarrow v = \int \sin\frac{\pi nx}{3}dx = \frac{3}{\pi n}\int \sin\frac{\pi nx}{3}d\left(\frac{\pi nx}{3}\right) = \frac{3}{\pi n}\cdot\left(-\cos\frac{\pi nx}{3}\right) = -\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}$

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

$$(*) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\int_{-3}^{0}\sin\frac{\pi nx}{3}d\left(\frac{\pi nx}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{\pi n}(3-x)\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3 - \frac{3}{\pi n}\int_0^3\cos\frac{\pi nx}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{0} - \frac{1}{\pi n}\cdot\left[(3-3)\cos\pi n - (3-0)\cos 0\right] - \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3 =$$

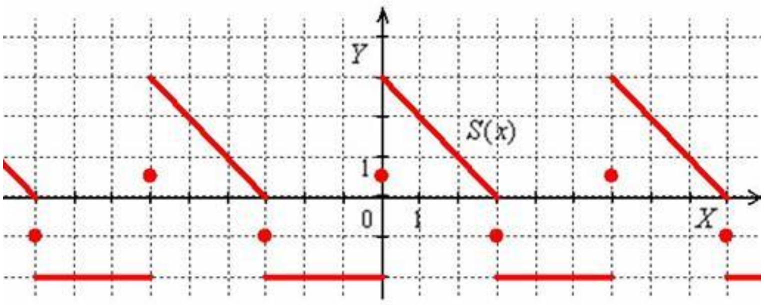
$$= \frac{2}{\pi n}(\cos 0 - \cos(-\pi n)) - \frac{1}{\pi n}(0-3) - \frac{3}{\pi^2 n^2}(\sin\pi n - \sin 0) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) + \frac{3}{\pi n} - \frac{3}{\pi^2 n^2}(0-0) = \frac{2(1-(-1)^n)+3}{\pi n} - 0 = \frac{2-2(-1)^n+3}{\pi n} = \frac{(5-2(-1)^n)}{\pi n}$$

Подставим найдённые коэффициенты Фурье $a_0 = -\frac{1}{2}, a_n = \frac{3(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}, b_n = \frac{(5-2(-1)^n)}{\pi n}$ в формулу $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{3} + b_n\sin\frac{\pi nx}{3}\right)$, не забывая поделить нулевой коэффициент пополам:

$$f(x) \sim -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{3} + \frac{(5-2(-1)^n)}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\right]$$

Построим график суммы ряда. Кратко повторим порядок действий: на интервале $(-3;0)$ строим прямую $f(x) = -2$, а на интервале $(0;3)$ – прямую $f(x) = 3 - x$. При нулевом значении «икс» ставим точку посередине «скачка» разрыва $(y = 0{,}5)$ и «тиражируем» график на соседние периоды:



На «стыках» периодов $\ldots, x = -9, x = -3, x = 3, x = 9, \ldots$ сумма также будет равна серединам «скачка» разрыва $(y = -1)$.

Готово. Напоминаю, что сама функция по условию определена только на полуинтервале $(-3;3]$ и, очевидно, совпадает с суммой ряда на интервалах $(-3;0), (0;3)$

Ответ: $f(x) \sim -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{3} + \frac{(5-2(-1)^n)}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\right]$

3.16.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия и теоремы теории тригонометрических рядов;
- усвоили алгоритмы разложения функций в ряд Фурье по симметричному промежутку;
- выработали навыки по разложению функций в ряд Фурье по произвольному промежутку.