ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.03.01 Теория вероятностей и математическая статистика

Направление подготовки (специальность): 10.03.01 Информационная безопасность (уровень бакалавриата)
Профиль образовательной программы Безопасность автоматизированных систем
Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция 1 (Л-1) (2 ч.)

Тема: Случайные события, классификация и вероятности

1.1.1 Вопросы лекции:

1.Случайные события, их классификация.
2.Вероятность случайных событий, ее интерпретации.
3. Основные теоремы теории вероятностей.

1.1.2. Краткое содержание вопросов:

1.Случайные события, их классификация.

Определение. *Два события называются* ***равными****, если одно из них наступает тогда и только тогда, когда наступает другое*.

Пример. Будут произведены 3 выстрела в мишень. A – число попаданий в мишень равно 0, B – число попаданий в мишень меньше, чем 0,5. Очевидно, что $A = B$.

Определение. *Два события называются* ***равновозможными,*** *если вероятности их наступления равны (в смысле статистического определения вероятности).*

На практике равновозможность событий обычно усматривается из симметрии ситуации.

Пример. Пусть испытание – бросание монеты. Тогда события A – выпадение “орла” и B – выпадение “решки” являются равновозможными.

Определение. *Событие называется* ***достоверным,*** *если оно наступает в каждом из испытаний.*

Достоверное событие будем обозначать через E. Такое событие определено однозначно для каждого вида испытания.

Пример. Пусть испытание – бросание игральной кости. Тогда $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ $= (m < 10) = (m > 0) = ...,$ где m – число выпавших очков.

Т.к. $N_E = N$, то $P(E) = \lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{N_E}{N} = \lim\limits_{N \to \infty} 1 = 1,$ т.е.

$$P(E) = 1.$$

Определение. *Событие называется* ***невозможным,*** *если оно не наступает ни в одном из испытаний.*

Невозможное событие будем обозначать символом $\varnothing$. Это событие определено однозначно для каждого вида испытания.

Пример. Пусть измеряется рост наудачу взятого человека. Тогда $\varnothing$ = (значение роста – отрицательное число) = (рост – более 100 км) =….

Т.к. $N_{\varnothing} = 0,$ то $P(\varnothing) = \lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{N_{\varnothing}}{N} = \lim\limits_{N \to \infty} 0 = 0,$ т.е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

Определение. *Два события называются* ***несовместными (несовместимыми)****, если они не могут наступить одновременно.*

Пример. Испытание – извлечение карты из колоды. Если событие *A* – извлечена карта красной масти, событие *B* – извлечена карта черной масти, то *A* и *B* – несовместны.

Пример. Пусть по мишени производится 3 выстрела и m – число попаданий в мишень. Тогда события, например, $(m = 3)$ и $(m \le 1)$ – несовместны.

Определение. *События* $A_1, A_2, ..., A_k$ *называются* ***единственно возможными*** *для некоторого испытания, если в результате испытания хотя бы оно из них обязательно наступает.*

Пример. Пусть испытание – бросание игральной кости. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{3,4,5\}$. Тогда события *A* и *B* – единственно возможны (т.к. не существует такого исхода бросания игральной кости, при котором ни *A,* ни *B* не наступило). Напротив, *A* и *C* не являются единственно возможными (т.к. при выпадении “6” ни *A,* ни *C* не наступают).

Определение. *Говорят, что события* $A_1, A_2, ..., A_k$ *образуют* ***полную систему (группу),*** *если эти события попарно несовместимы и единственно возможны.*

Пример. Пусть испытание – бросание игральной кости. Тогда события $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, ..., A_6 = \{6\}$ образуют полную систему.

Пример. Пусть по мишени производится 3 выстрела и m – число попаданий в мишень. Тогда события, например, $(m = 0), (1 \le m \le 2), (m = 3)$ образуют полную систему.

Заметим, что при заданном типе испытания полная система событий определена, вообще говоря, неоднозначно.

Определение. *Если два события образуют полную систему, то они называются парой* ***взаимно противоположных*** *событий.*

Если одно из событий такой пары обозначено, скажем, через A, другое будет обозначено $\overline{A}$.

Пример. Пусть испытание – бросание монеты. Тогда события *A* – выпадение “орла” и *B* – выпадение “решки” являются взаимно противоположными ($B = \overline{A}$).

Пример. Пусть по мишени производится 3 выстрела, и m – число попаданий в мишень. Тогда события, например, $(m < 2) = (m = 0 \text{ *или* } m = 1)$ и $(m \ge 2) = (m = 2 \text{ *или* } m = 3)$ – взаимно противоположны.

Операции над событиями

Определение. ***Суммой*** *событий A и B называется такое событие* $C = A + B$, *которое считается наступившим тогда и только тогда, когда наступило или событие A, или событие B, или оба эти события вместе.*

Пример. Пусть испытание – извлечение карты из колоды, а следующие события состоят в извлечении: *A* – карты красной масти, *B* – картинки, *D* – числовой карты. Если в результате конкретного испытания из колоды достали, например, “семерку” крестей то событие *A*+*B* не наступило, а события $A + D$ и $B + D$ наступили.

Пример. Пусть по мишени производится 3 выстрела, m – число попаданий в мишень $A = (m < 2)$, $B = (m > 0)$, $C = A + B$. Тогда $C = \{m = 1\}$.

Замечание 1. Условие единственной возможности событий $A_1, A_2, ..., A_k$ равносильно тому, что $A_1 + A_2 + ... + A_k = E$. В частности, если события $A_1, A_2, ..., A_k$ образуют полную систему, то $A_1 + A_2 + ... + A_k = E$, и при $k = 2$ имеем

$$A + \overline{A} = E.$$

Определение. ***Произведением*** *событий A и B называется такое событие $C = AB$, которое считается наступившим тогда и только тогда, когда события A и B наступили одновременно.*

Пример. Пусть испытание состоит в бросании игральной кости.

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$. Тогда $AB = \{3\}$ и $A + B = \{1,2,3,4\}$.

Замечание 2. Произвольные события A и B являются несовместимыми тогда и только тогда, когда $AB = \varnothing$.

Таблица 1.

Номер исхода	Номер монеты		
	1	2	3
1	О	О	О
2	О	Р	О
3	О	О	Р
4	О	Р	Р
5	Р	О	О
6	Р	Р	О
7	Р	О	Р
8	Р	Р	Р

2.Вероятность случайных событий, ее интерпретации.

Определение. *Пусть некоторое испытание имеет n исходов, причем эти исходы*

а) попарно несовместимы;

б) единственно возможны;

в) равновозможны

и наступлению события A благоприятствует m исходов из n. Тогда вероятность $P(A)$ наступления события A (в одном испытании) определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример. В коробке имеется 10 хороших деталей и 5 бракованных. Наудачу из коробки извлекается одна деталь. Найти вероятность наступления события A – извлеченная деталь – хорошая.

Решение. Общее число исходов $n = 15$ равно полному числу деталей в коробке. Извлечению хорошей детали благоприятствует $m = 10$ исходов из общего числа (число хороших деталей). Тогда

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Пример. Одновременно бросаются три монеты. Найти вероятность того, что на двух из них выпадет «орел».

Решение. Для удобства будем предполагать, что монеты некоторым образом занумерованы. Единичным исходом здесь является совокупный результат по трем монетам (другими словами, для того, чтобы задать единичный исход, надо сказать, *что* выпало на первой монете, на второй и на третьей). Перечислим возможные исходы (см. Таблицу 1, в которой выпадение «орла» на соответствующей монете обозначено буквой «О», «решки» – «Р»). Видно, что общее число n исходов равно 8. Число m благоприятствующих исходов равно 3 – это исходы с номерами 2, 3, 5 Таблицы 1. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}.$$

Пример. В коробке 6 белых шаров и 8 красных. Наудачу одновременно извлекаются 3 шара. Найти вероятность, того, что среди них будут:

а) два белых шара;

б) не менее одного белого.

Решение. а) Для удобства будем предполагать, что имеющиеся шары некоторым образом перенумерованы. Пусть, например, белые шары имеют номера 1, 2, … ,6 красные – 7, 8 , … ,14. Тогда единичным исходом является произвольная тройка номеров: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, …, $\{12,13,14\}$.

Тогда общее число n исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 3 номера из имеющихся 14-ти номеров. Напомним, что такое число равно соответствующему числу сочетаний:

$$n = C_{14}^{3}.$$

(В общем случае, $C_k^s = \dfrac{k!}{s!(k-s)!}$ *равно числу способов, которыми можно выбрать s объектов из* k *имеющихся объектов.*) Таким образом,

$$n = C_{14}^{3} = \frac{14!}{3!\,11!} = \frac{1\cdot 2\cdot ...\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot ...\cdot 10\cdot 11} = 2\cdot 13\cdot 14 = 364.$$

Найдем теперь число m исходов, благоприятствующих появлению двух белых шаров среди трех извлеченных. Число способов, которыми можно выбрать 2 шара из имеющихся 6-ти белых шаров, равно C_6^2. Но число благоприятствующих исходов с фиксированной парой белых шаров равно числу способов, которыми можно выбрать оставшийся красный шар в тройку, т.е. равно C_8^1. Поэтому

$$m = C_6^2 \cdot C_8^1 = \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{8!}{1!\cdot 7!} = 5\cdot 3\cdot 8 = 120.$$

Окончательно имеем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{120}{364} = \frac{30}{91},$$

где A – событие состоящее в том, что среди трех отобранных шаров ровно 2 белых шара.

б) Полное число n исходов найдено в п. а). Число троек, в которых не менее 2-х белых шаров, равно сумме троек с двумя белыми шарами и троек с тремя белыми шарами:

$$m = C_6^2 \cdot C_8^1 + C_8^3 = 120 + 56 = 176.$$

Окончательно имеем

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{176}{364} = \frac{44}{91},$$

где B – событие состоящее в том, что среди трех отобранных шаров не менее 2-х белых шаров.

Теорема. Вероятность события, противоположного событию равна

Доказательство. Пусть полная система равновозможных элементарных исходов содержит n событий, из которых m ($m \le n$), благоприятны событию A. Тогда $n-m$ исходов неблагоприятны событию A, т.е. благоприятствуют событию $\overline{A}$. Таким образом,

$$P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

Классическое определение вероятности предполагает, что
- число элементарных исходов конечно;
- эти исходы равновозможны.

Однако на практике встречаются испытания с бесконечным числом возможных исходов. Кроме того, нет общих методов, позволяющих результат испытания, даже с конечным числом исходов, представить в виде суммы равновозможных элементарных исходов. Поэтому применение классического определения вероятности весьма ограничено. ***Пример***: кубик со смещенным центром тяжести.

Классическое определение вероятности имеет ограниченную применимость. Так, оно неприемлемо, если результаты испытания не равновозможны.

Во многих случаях более удобным оказывается **статистическое определение вероятности**, которое связано с понятием *относительной частоты* появления события A в опытах. **Относительная частота** появления события A – это отношение числа m появлений события A в серии из n опытов к числу испытаний: $P^*(A) = \frac{m}{n}$.

Опыт показывает, что при проведении сравнительно малого числа испытаний относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут сильно отличаться друг от друга. При однотипных **массовых** испытаниях во многих случаях наблюдается устойчивость относительной частоты события, т.е. с увеличением числа испытаний относительная частота колеблется около некоторого постоянного числа $P(A)$, причем эти отклонения тем меньше, чем больше произведено испытаний.

Вероятностью события в статистическом смысле называется число, относительно которого стабилизируется (устанавливается) относительная частота при неограниченном увеличении числа опытов.

Поэтому, на практике за вероятность события A принимается относительная частота $P^*(A)$ при достаточно большом числе испытаний.

Свойства вероятности, вытекающие из классического определения вероятности, сохраняются и при статистическом определении вероятности.

Если вероятность некоторого события близка к нулю, то, в соответствии со сказанным следует, что при единичном испытании в подавляющем большинстве случаев такое событие не наступит. Возникает вопрос: насколько малой должна быть вероятность, чтобы можно было пренебречь вероятностью наступления некоторого события в единичном испытании (например, землетрясение в Минске)? Достаточно малую вероятность, при которой наступление события можно считать практически невозможным, называют **уровнем значимости**. На практике уровень значимости обычно принимают равным 0,05 (пятипроцентный уровень) или 0,01 (однопроцентный уровень).

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, связанный с его неприменимостью к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят понятие геометрической вероятности – вероятности попадания точки в некоторую область (отрезок, часть плоскости и т.д.).

В подобных случаях пространство элементарных исходов может быть представлено областью G, а под событием A можно понимать исходы, входящие в некоторую область g, принадлежащую области G.

Пусть на область G наугад бросается «точка». Какова вероятность того, что эта точка попадет в область g, являющуюся частью области G?

1. Пусть отрезок g длины l_g, составляет часть отрезка G длина которого l_G. На отрезок G наудачу поставлена точка. Предполагается, что

-поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка G;

- вероятность попадания точки на отрезок g пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка G.

Тогда вероятность попадания точки на отрезок g определяется равенством $P = \frac{l_g}{l_G}$.

2. Пусть плоская фигура g с площадью S_g составляет часть плоской фигуры G, площадь которой S_G. На фигуру G наудачу брошена точка. Предполагается, что:

- брошенная точка может оказаться в любой точке фигуры G;
- вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно фигуры G, ни от формы g.

В этих предположениях вероятность попадания точки на фигуру g определяется равенством $P = \frac{S_g}{S_G}$.

3. Аналогично вводится понятие геометрической вероятности при бросании точки в пространственную область G объема V_G, содержащую область g объема

Множество попарно несовместных событий называют **полной группой событий**, если при любом исходе случайного эксперимента непременно наступает одно из событий, входящих в это множество. Другими словами, для полной группы событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ выполнены следующие условия:
- появление одного из событий данного множества в результате испытания является достоверным событием, т.е. событие $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$;
-события A_i и A_j ($i \neq j$) попарно несовместны и $A_i \cdot A_j$ – событие невозможное при любых $i \neq j$, т.е. $A_i \cdot A_j = \varnothing$.

Простейшим примером полной группы событий является пара противоположных событий A и $\overline{A}$.

Основные понятия комбинаторики.

При решении ряда теоретических и практических задач требуется из конечного множества элементов по заданным правилам составлять различные комбинации и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи принято называть *комбинаторными*.

При решении задач комбинаторики используют правила суммы и произведения.

Правило суммы – если элемент *a* может быть выбран n способами, а элемент *b* – *m* способами, то один из этих элементов можно выбрать *n+m* способами.

Правило произведения – если элемент *a* может быть выбран n способами и после каждого такого выбора элемент *b* можно выбрать *m* способами, то пару (*ab*) из этих элементов в указанном порядке можно выбрать *nm* способами.

Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранные из n данных элементов, называются **размещениями** из n элементов по k. Размещения могут отличаться как элементами, так и порядком.

Теорема. Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Действительно, первый элемент размещения может быть выбран n способами. Для каждого из этих вариантов есть n-1 способов расположения одного из оставшихся элементов на втором месте. Следовательно, по правилу произведения, имеется n*(n-1) различных способов выбора элементов на первых двух местах. Продолжая это рассуждение по индукции, получаем доказательство.

Пример: Различными размещениями множества из трех элементов {1,2,3} по два будут наборы (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)

В частном случае k=n размещения называются **перестановками** P_n.

Так как каждая перестановка содержит все ***n*** элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов и

$$P_n = A_n^n = n!$$

Пример: Различными перестановками множества элементов {1,2,3} будут (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,2,1), (3,1,2)

Неупорядоченные наборы из k элементов, взятых из данных n элементов, называются **сочетаниями** из n элементов по k.

Теорема. Число сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3. Основные теоремы теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей.

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

Важным частным случаем этой теоремы является

Теорема сложения вероятностей для несовместных событий. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей, т.е.*

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B).}$$

Доказательство. Так как события A и B несовместны, то их произведение равно невозможному событию, т.е. $AB = \varnothing$. Поскольку вероятность невозможного события равна нулю, то из теоремы сложения вероятностей следует требуемое утверждение.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо для любого числа попарно несовместных событий: *вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей.*

Следствие. *Пусть события $A_1, A_2, ..., A_k$ образуют полную систему, тогда сумма их вероятностей равна 1 т.е.*

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) = 1.$$

Доказательство. Из определения полной системы следует, что события $A_1, A_2, ..., A_k$, в частности, являются единственно возможными, поэтому $A_1 + A_2 + ... + A_k = E$. Тогда

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_k) = P(E).$$

Вероятность достоверного события равна 1. События $A_1, A_2, ..., A_k$, в частности, являются попарно несовместными. Тогда из теоремы сложения вероятностей для несовместных событий следует требуемое утверждение.

Данное следствие при $k = 2$ представляет важное свойство противоположных событий: *сумма вероятностей взаимно противоположных событий равна 1, т.е.*

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1.}$$

Определение. ***Условной вероятностью*** $P_B(A)$ *называется вероятность наступления события A в предположении наступления события B.*

Определение. *Два события называются* ***независимыми,*** *если вероятность наступления одного из них не зависит от того, считается ли другое событие наступившим или нет.*

Данное определение равносильно следующему:

$$\text{события } A \text{ и } B \text{ независимы} \Leftrightarrow \begin{cases} P_B(A) = P_{\overline{B}}(A), \\ P_A(B) = P_{\overline{A}}(B). \end{cases}$$

Пример. Пусть испытание состоит в извлечении карты из колоды. Событие A – извлечена «картинка», событие B – извлечена «7». Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

Решение. Так как среди «картинок» нет «семерок», то $P_A(B) = \frac{0}{16} = 0$**.** Так как среди «не картинок» – 4 «семерки», то $P_{\overline{A}}(B) = \frac{4}{36-16} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$**.** Таким образом,

$P_A(B) \neq P_{\overline{A}}(B)$**,** поэтому события A и B зависимы. Аналогично, в общем случае *произвольные (неравные) несовместные события – зависимы.*

Теорема (*необходимое и достаточное условие независимости событий***).** *События A и B независимы тогда и только тогда, когда*

$$P(A) = P_B(A).$$

Пример. Пусть испытание состоит в бросании игральной кости, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$. Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

Решение. Очевидно, что $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. В предположении обязательного наступления события *B,* полное число возможных исходов равно 4, из которых 2 исхода благоприятствуют наступлению события *A,* поэтому $P_B(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Так как $P(A) = P_B(A)$, то события A и B – независимы.

Теорема умножения вероятностей.

$$\boxed{\begin{gathered} P(AB) = P(A)P_A(B), \\ P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C), \\ P(ABCD) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C)P_{ABC}(D), \end{gathered}}$$

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей, т.е.*

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B).}$$

Аналогичное утверждение справедливо для любого числа независимых событий.

Пример. Два стрелка одновременно выстреливают в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет:

а) одна пробоина;

б) хотя бы одна пробоина.

Решение. а) Прежде всего, укажем, когда может наступать интересующее нас событие, перебирая все возможные варианты.

В мишени будет одна пробоина

тогда и только тогда, когда

первый стрелок попал и второй стрелок промахнулся

или

первый стрелок промахнулся и второй стрелок попал.

Пусть событие A – в мишени будет одна пробоина, событие B_1 – первый стрелок попал, событие B_2 – второй стрелок попал. Тогда $\overline{B}_1$ – первый стрелок промахнулся, $\overline{B}_2$ – второй стрелок промахнулся. "Тогда и только тогда, когда" соответствует отношению равенства событий. **Соединительный союз "или" соответствует операции сложения событий. Соединительный союз "и" соответствует умножению событий.** Тогда фраза русского языка, в которой мы перечислили все возможности для наступления события *A,* равносильна следующему символическому равенству

$$A = B_1\overline{B}_2 + \overline{B}_1 B_2.$$

Откуда следует равенство вероятностей

$$P(A) = P(B_1\overline{B}_2 + \overline{B}_1 B_2).$$

Так как события $B_1\overline{B}_2$ и $\overline{B}_1 B_2$ несовместны, то, применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, приходим к равенству

$$P(A) = P(B_1\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1 B_2).$$

События $B_1, \overline{B}_2$ и $\overline{B}_1, B_2$ попарно независимы, поэтому, применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, получаем

$$P(A) = P(B_1)P(\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1)P(B_2).$$

По условию, $P(B_1) = 0{,}6$ и $P(B_2) = 0{,}8.$ Тогда, по свойству взаимно противоположных событий (см. следствие из теоремы сложения вероятностей для несовместных событий, $k = 2$), $P(\overline{B}_1) = 1 - P(B_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ и $P(\overline{B}_2) = 1 - P(B_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$ Окончательно имеем

$$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44.$$

б) Пусть m – число попаданий в мишень, тогда искомой является вероятность $P(m \geq 1)$ (заметим, что слова «хотя бы один», «не менее чем один», «по-крайней мере один» являются синонимами). Событие $(m \geq 1)$ равносильно тому, что число попаданий в мишень будет равно 1 или 2, т.е.

$$(m \geq 1) = (m = 1) + (m = 2).$$

Тогда, учитывая несовместность событий $(m = 1)$ и $(m = 2)$, получаем

$$P(m \geq 1) = P(m = 1) + P(m = 2).$$

$P(m = 1) = P(A) = 0{,}44$ (см. п. а) данного примера). Событие $(m = 2)$ (два попадания в мишень) наступает тогда и только тогда, когда первый стрелок попадет в мишень и второй стрелок попадет, т.е.

$$(m = 2) = B_1 B_2.$$

Поэтому

$$P(m = 2) = P(B_1)P(B_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$$

(см. теорему умножения вероятностей для независимых событий). Окончательно имеем

$$P(m \geq 1) = P(m = 1) + P(m = 2) = 0{,}44 + 0{,}48 = 0{,}92.$$

Отметим, что эта задача допускает и другое решение. Так как события $(m \geq 1)$ и $(m = 0)$ взаимно противоположны, то

$$P(m \geq 1) = 1 - P(m = 0).$$

Но $P(m = 0) = P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08.$ Следовательно

$$P(m \geq 1) = 1 - P(m = 0) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92.$$

Пример. В коробке лежат 4 белых шара и 6 красных. Наудачу, один за другим из коробки извлекается 2 шара. Найти вероятность того, что среди них будет:

а) один красный шар;

б) менее 2-х красных шаров.

Решение. а) Пусть событие A – среди двух извлеченных шаров – ровно один красный. Это событие наступает тогда и только тогда, когда первый из извлеченных шаров – красный, а второй – белый или первый шар – белый, а второй – красный. Напомним, что соединительный союз "или" соответствует сложению событий, союзы "и", "а" соответствуют умножению событий. Тогда описание всех возможностей наступления события A равносильно следующему формальному равенству

$$A = К_1 Б_2 + Б_1 К_2,$$

где $К_1$ ($К_2$) – первый (второй) шар – красный, $Б_1$ ($Б_2$) – первый (второй) шар – белый. События $К_1 Б_2$ и $Б_1 К_2$ – несовместны, поэтому, используя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем

$$P(A) = P(К_1 Б_2) + P(Б_1 К_2).$$

Применяя теперь теорему умножения вероятностей, приходим к равенству

$$P(A) = P(К_1) P_{К_1}(Б_2) + P(Б_1) P_{Б_1}(К_2).$$

Для вычисления вероятностей из правой части последнего равенства используем классическое определение вероятности. Тогда

$$P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}.$$

б) Пусть m – число красных шаров среди двух извлеченных. Тогда искомой является вероятность $P(m < 2)$. Очевидно, что $(m < 2) = (m = 0) + (m = 1)$, и $P(m = 1) = P(A)$ (см. п. а) данного примера). Вместе с тем, событие $(m = 0)$ – среди извлеченных шаров нет красных – равносильно тому, что первый шар окажется белым и второй – также белым, т.е. $(m = 0) = Б_1 Б_2$, поэтому

$$P(m = 0) = P(Б_1 Б_2) = P(Б_1) P_{Б_1}(Б_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

Окончательно имеем

$$P(m < 2) = P(m = 0) + P(m = 1) = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Заметим, что вероятность $P(m < 2)$ может быть также найдена по-другому. События $(m < 2)$ и $(m = 2)$ взаимно противоположны, поэтому

$$P(m < 2) = 1 - P(m = 2).$$

Но $P(m = 2) = P(К_1 К_2) = P(К_1) P_{К_1}(К_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$

Тогда $P(m < 2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

1.2 Лекция 2 (Л-2) (2 ч.)

Тема: Следствия основных теорем теории вероятностей, схема повторных испытаний

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Условная вероятность события. Формула полной вероятности, формула Байеса.
2.Схема повторных испытаний. Формулы Бернулли, Пуассона, Лапласа.
3. Простейший поток событий, его свойства.

1.2.2. Краткое содержание вопросов:

1. Условная вероятность события. Формула полной вероятности, формула Байеса

Определение. ***Условной вероятностью*** $P_B(A)$ *называется вероятность наступления события А в предположении наступления события В.*

Определение. *Два события называются* ***независимыми,*** *если вероятность наступления одного из них не зависит от того, считается ли другое событие наступившим или нет.*

Если при наступлении события A вероятность события B не меняется, то события A и B называются **независимыми**.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **попарно независимыми**, если независимы любые два из них.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности (или просто независимыми)**, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Пусть событие A может произойти только с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу. Например, в магазин поступает одна и та же продукция от трех предприятий и в разном количестве. Вероятность выпуска некачественной продукции на этих предприятиях различна. Случайным образом отбирается одно из изделий. Требуется определить вероятность того, что это изделие некачественное (событие A). Здесь события H_1, H_2, H_3 – это выбор изделия из продукции соответствующего предприятия.

В этом случае вероятность события A можно рассматривать как сумму произведений событий $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$. Используя теорему умножения вероятностей, находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Полученная формула называется **формулой полной вероятности**

Пусть событие A происходит одновременно с одним из n несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, вероятности которых $P(H_i)$ ($i = 1,2,\ldots,n$) известны до опыта (*вероятности априори*). Производится опыт, в результате которого зарегистрировано появление события A, причем известно, что это событие имело определенные условные вероятности $P(A/H_i)$($i = 1,2,\ldots,n$). Требуется найти вероятности событий H_i если известно, что событие A произошло (*вероятности апостериори*).

Задача состоит в том, что, имея новую информацию (событие А произошло), нужно переоценить вероятности событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

На основании теоремы о вероятности произведения двух событий

$$P(H_iA) = P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A / H_i),$$

откуда

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}.$$

Полученная формула носит название **формулы Байеса**.

2.Схема повторных испытаний. Формулы Бернулли, Пуассона, Лапласа.

Серия повторных независимых испытаний, в каждом из которых данное событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$, не зависящую от номера испытания, называется **схемой Бернулли**. Таким образом, в схеме Бернулли для каждого испытания имеются только два исхода: событие A (успех), вероятность которого $P(A) = p$ и событие $\overline{A}$ (неудача), вероятность которого $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Для того чтобы найти вероятность появления события ровно m раз в серии k опытов, достаточно произвести перемножение сомножителей в производящей функции. Коэффициент при члене и даст искомую вероятность.

Мы предполагали, что вероятность наступления события в каждом из опытов постоянна. На практике часто приходится встречаться с более сложным случаем, когда опыты производятся в неодинаковых условиях, и вероятность события от опыта к опыту меняется. Например, производится серия выстрелов при изменяющейся дальности.

Случай непостоянной вероятности появления события в опытах

Способ вычисления вероятности заданного числа появлений событий в таких условиях дает ***общая теорема о повторении опытов***.

Пусть проводится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A, причем вероятность появления этого события в i -м опыте равна p_i, а вероятность его не появления соответственно $q_i = 1 - p_i \quad (i = 1, \dots, n)$.

Требуется найти вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n опытов событие A появится ровно m раз.

Решение данной задачи проводится с помощью так называемой ***производящей функции***, имеющей вид: $\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z)$.

Пример. Производится 4 независимых выстрела по одной и той же цели с различных расстояний. Вероятности попадания при этих выстрелах равны соответственно

$p_1 = 0{,}1 \quad p_2 = 0{,}2 \quad p_3 = 0{,}3 \quad p_4 = 0{,}4$.

Найти вероятность трех попаданий.

Решение: Составим производящую функцию

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z) = (0{,}9 + 0{,}1z) \cdot (0{,}8 + 0{,}2z) \cdot (0{,}7 + 0{,}3z) \cdot (0{,}6 + 0{,}4z) =$$

$$0{,}302 + 0{,}440z + 0{,}215z^2 + 0{,}040z^3 + 0{,}002z^4$$

Отсюда вероятность трех попаданий равна 0,040. Легко найти и вероятности ни одного, одного, двух и четырех попаданий, выписывая коэффициенты при z^0, z^1, z^2 и z^4.

Число наступлений события A называется **наивероятнейшим**, если оно имеет наибольшую вероятность по сравнению с вероятностями наступления A любое другое количество раз.

Теорема. Наивероятнейшее число наступлений события в независимых испытаниях заключено между числами $m_0' = np - q$ и $m_0'' = np + p$.

Рассмотрим задачу – частный случай задач предыдущей темы. Наблюдение над решением позволит нам получить формулу, существенно упрощающую вычисления в аналогичных случаях.

Пример. Предполагается произвести 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле считается известной и равной 0,7. Найти вероятность того, что

число попаданий в мишень будет:

а) равно 2;

б) не менее 2-х;

в) менее 4-х.

. Число выстрелов по мишени обозначим через n (здесь $n = 4$), $p = 0{,}7 -$ вероятность попадания в мишень при каждом выстреле, $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 -$ вероятность промаха при каждом выстреле, m – число попаданий. Требуется найти $P(m = 2)$, эту же вероятность обозначим через $P_{2,4}$. Перебирая все случаи, в которых число попаданий в мишень будет равно 2, получаем

$$P_{2,4} = ppqq + pqpq + pqqp + qppq + qpqp + qqpp =$$
$$= 6p^2q^2 = 6 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}2646.$$

Теорема. *Пусть произведено n повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A наступает с вероятностью p. Тогда вероятность $P_{m,n}$ того, что в этих n испытаниях событие A наступит m раз, вычисляется по формуле*

$$\boxed{P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m},}$$

где C_n^m – число сочетаний из n по m , $q = 1 - p$.

Полученная формула носит название *формулы Бернулли.*

Завершим рассмотрение нашего примера.

б) Так как $(m \geq 2) = (m = 2) + (m = 3) + (m = 4)$, то, применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем

$$P(m \geq 2) = P(m = 2) + P(m = 3) + P(m = 4) = P_{2,4} + P_{3,4} + P_{4,4}.$$

Первое слагаемое последней суммы найдено в п. а) данного примера. Аналогично для остальных:

$$P_{3,4} = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3 = 4 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3 = 0{,}4116,$$

$$P_{4,4} = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^0 = 1 \cdot 0{,}7^4 \cdot 1 = 0{,}2401.$$

Окончательно имеем

$$P(m \geq 2) = 0{,}2646 + 0{,}4116 + 0{,}2401 = 0{,}9163.$$

в) По аналогии с предыдущим пунктом задания,

$$P(m < 4) = P_{0,4} + P_{1,4} + P_{2,4} + P_{3,4},$$

т.е. решение требует, вообще говоря, четырех применений формулы Бернулли. Однако возможно и более короткое решение. Действительно, события $(m < 4)$ и $(m = 4) -$ взаимно противоположны, следовательно

$$P(m < 4) = 1 - P(m = 4).$$

Вероятность $P(m = 4) = P_{4,4}$ найдена в п. б) примера. Таким образом, получаем

$$P(m < 4) = 1 - P_{4,4} = 1 - 0{,}2401 = 0{,}7599.$$

Если число испытаний велико, формулу Бернулли применять неудобно. В этом случае можно применять приближенные формулы, точность которых увеличивается с возрастанием n.

Теорема Пуассона.

Теорема. *Пусть произведено* n *повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A наступает с вероятностью* p *, причем*

а) число испытаний достаточно велико ($n \geq 100$ *);*

б) $\lambda = np \leq 10$.

Тогда вероятность $P_{m,n}$ *того, что в этих* n *испытаниях событие A наступит* m *раз, вычисляется по следующей приближенной формуле*

$$P_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Эта формула и называется *формулой Пуассона (редких событий).*

Пример. По каналу связи передано 1000 сигналов. Вероятность ошибки при передаче каждого из сигналов равна 0,005. Найти вероятность того, что неверно передано:

а) 7 сигналов;

б) не менее 4-х сигналов.

Решение. а) Воспользуемся формулой Пуассона, т.к. условия ее применимости в данном случае выполнены: число испытаний достаточно велико $(n = 1000 \geq 100)$ и $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}005 = 5 \leq 10.$ Искомое значение $P_{7,1000}$ найдем по таблице функции Пуассона при $m = 7$ и $\lambda = 5$ (см. учебник Н.Ш. Кремера, с.556): $P_{7,1000} = 0{,}1045.$

б) Требуется найти $P(m \geq 4)$, где m – число неверно принятых сигналов. Так как $(m \geq 4) = (m = 4) + (m = 5) + ... + (m = 1000),$ то $P(m \geq 4) = P_{4,1000} + P_{5,1000} + ... + P_{1000,1000}$.

Искать каждое из слагаемых этой суммы и затем выполнять суммирование – такое решение не представляется рациональным из-за большого числа слагаемых и потому, что таблица функции Пуассона не дает искомых значений с требуемой в данном случае точностью. Воспользуемся переходом к противоположному событию: $P(m \geq 4) = 1 - P(m < 4) = 1 - (P_{0,1000} + P_{1,1000} + P_{2,1000} + P_{3,1000})$.

Находя вероятности из правой части последнего равенства по таблице функции Пуассона, окончательно получаем

$$P(m \geq 4) = 1 - (0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 + 0{,}1404) = 0{,}735.$$

Формула Пуассона находит применение в теории массового обслуживания. Она может рассматриваться как математическая модель *простейшего потока событий* с интенсивностью $\lambda = np$. Параметр $\lambda = np$ представляет при этом *среднее число успехов*.

Теоремы Лапласа

Лапласом была получена важная приближенная формула для вероятности $P_n(m)$ появления события A точно m раз, при условии, что n достаточно велико. В отличие от формулы Пуассона здесь нет ограничения на малость величины p в отдельном испытании, т.е. область применимости формулы Лапласа шире.

Теорема. *Пусть произведено* n *повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A наступает с вероятностью* p *, причем число испытаний достаточно велико (* $n \geq 100$ *). Тогда вероятность* $P_{m,n}$ *того, что в этих* n *испытаниях событие A наступит* m *раз, вычисляется по следующей приближенной формуле*

$$P_{m,n} = \frac{f(x)}{\sqrt{npq}},$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$ *– функция Гаусса,* $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Пример. Имеется партия деталей, состоящая из 1000 штук. В среднем среди деталей такого вида стандартные детали составляют 90%. Найти вероятность того, что число стандартных деталей в данной партии окажется равным 890.

Решение. Число испытаний в данном случае достаточно велико $(n = 1000 \geq 10)$, поэтому локальная теорема Муавра-Лапласа применима. Из условия следует, что вероятность быть стандартной для произвольной детали данной партии равна

$p = \frac{90}{100} = 0{,}9$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $m = 890$. Тогда

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{890 - 1000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -1{,}05.$$

По локальной теореме Муавра-Лапласа,

$$P_{890,1000} = \frac{f(-1{,}05)}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}.$$

Учитывая, что функция Гаусса четная, используя таблицу этой функции, находим $f(-1{,}05) = f(1{,}05) = 0{,}2299$. Окончательно, получаем

$$P_{890,1000} = \frac{0{,}2299}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 0{,}0242.$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа содержит приближенную формулу для вероятности $P_n(m_1, m_2)$ того, что событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз.

Теорема. *Пусть произведено* n *повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие А наступает с вероятностью* p *, причем число испытаний достаточно велико* $(n \geq 100)$. *Тогда вероятность того, что число* m *наступлений события А в этих* n *испытаниях будет заключено в границах от* m_1 *до* m_2, *вычисляется по следующей приближенной формуле*

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$ *– функция Лапласа,* $q = 1 - p$.

Пример. Каждая из 1000 деталей партии стандартна с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что число стандартных деталей этой партии будет не меньше 880.

Решение. Число n повторных независимых испытаний в данном случае равно числу деталей в партии (каждая из деталей партии будет проверяться на предмет качества, а в этой проверке и состоит испытание). $n = 1000 \geq 100$, поэтому интегральная теорема Муавра-Лапласа применима; неравенство $(m \geq 880)$, где m – число стандартных деталей в партии, здесь равносильно $(880 \leq m \leq 1000)$, поэтому $m_1 = 880$, $m_2 = 1000$; $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $np = 1000 \cdot 0{,}9 = 900$; $npq = 1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 90$. Тогда

$$P(880 \leq m \leq 1000) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{1000 - 900}{\sqrt{90}}\right) - \Phi\left(\frac{880 - 900}{\sqrt{90}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi(10{,}5) - \Phi(-2{,}11)\right).$$

По свойствам функции Лапласа (см. ниже), $\Phi(10{,}5) = 1$, $\Phi(-2{,}11) = -\Phi(2{,}11)$. По таблице функции Лапласа (см. учебник Н.Ш. Кремера, с. 555) находим $\Phi(2{,}11) = 0{,}9651$. Тогда окончательно имеем

$$P(880 \le m \le 1000) = \frac{1}{2}(1 + \Phi(2{,}11)) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}9651) = 0{,}9826.$$

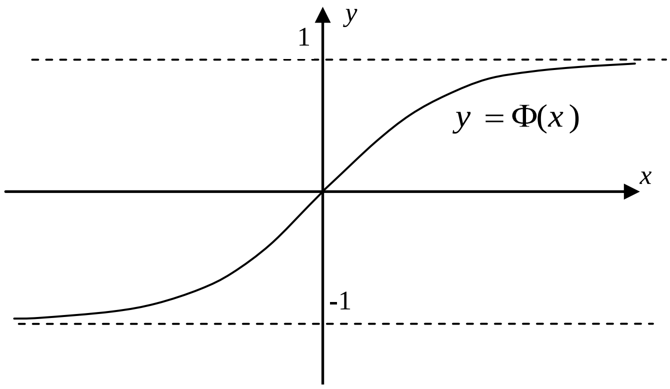


Рис. 2

Свойства функции Лапласа

1. Функция Лапласа нечетна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Функция Лапласа – монотонно возрастающая;
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi(x) = 1$, $\lim\limits_{n \to -\infty} \Phi(x) = -1$, т.е. прямые $y = 1$ и $y = -1$ являются горизонтальными асимптотами (правой и левой соответственно) графика $y = \Phi(x)$; на практике полагаем $\Phi(x) \approx 1$ при $x \ge 4$.

График функции Лапласа схематично изображен на рис. 2.

Пример. Имеется партия деталей, состоящая из 1000 штук. В среднем среди деталей такого вида стандартные детали составляют 90%. Найти вероятность того, что число стандартных деталей в данной партии окажется равным 890.

Решение. Число испытаний в данном случае достаточно велико $(n = 1000 \ge 10)$, поэтому локальная теорема Муавра-Лапласа применима. Из условия следует, что вероятность быть стандартной для произвольной детали данной партии равна

$p = \frac{90}{100} = 0{,}9$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $m = 890$. Тогда

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{890 - 1000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -1{,}05.$$

По локальной теореме Муавра-Лапласа,

$$P_{890,1000} = \frac{f(-1{,}05)}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}.$$

Учитывая, что функция Гаусса четная, используя таблицу этой функции, находим $f(-1{,}05) = f(1{,}05) = 0{,}2299$. Окончательно, получаем

$$P_{890,1000} = \frac{0{,}2299}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 0{,}0242.$$

3. Простейший поток событий, его свойства.

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. **Интенсивностью потока** λ называют среднее число событий в единицу времени. Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами *стационарности*, *отсутствия последействий* и *ординарности*.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность $P_t(m)$ появления m событий на любом промежутке времени зависит только от числа m и от длительности промежутка времени t и не зависит от начала его отсчёта.

Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления m событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка, т.е. предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий.

Свойство **ординарности** характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени маловероятно по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Если интенсивность простейшего потока λ известна, то вероятность появления m событий за время t определяется формулой

$$P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m\cdot e^{-\lambda t}}{m!}$$

Пример простейшего потока событий. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит 4 вызова.

Подставляя в вышеприведенную формулу $\lambda=3,\ t=2,\ m=4$, получим $P_2(4)=0.135$

1.3 Лекция 3-4 (Л-3-4) (4 ч.)

Тема: Случайные величины, их классификация, законы распределения, числовые характеристики.

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Случайные величины, их классификация, закон распределения.
2. Функция распределения, плотность распределения, вероятность попадания в интервал.
3. Числовые характеристики ДСВ. Числовые характеристики НСВ.

1.3.2. Краткое содержание вопросов:

1. Случайные величины, их классификация, закон распределения.

Определение. ***Случайной величиной*** *называется переменная, которая в результате испытания принимает то или иное числовое значение.*

Пример. Число попаданий в мишень при n выстрелах – случайная величина.

Пример. Рост наудачу взятого человека – случайная величина.

Определение. *Случайная величина называется* ***дискретной****, если число ее возможных значений конечно или счетно., в противном случае – она является недескретной.* (Напомним, что множество называется *счетным*, если его элементы можно перенумеровать натуральными числами.)

В этом смысле, число попаданий в мишень – пример дискретной случайной величины. Рост человека – непрерывная случайная величина (такие случайные величины будут рассмотрены ниже).

Для обозначения случайных величин будем использовать заглавные буквы латинского алфавита (возможно с индексами), например, $X, Y, Z, ..., X_1, Y_2, Z_3, ...$ и т.п.

Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями, т.е. совокупность пар чисел $(x_i : p_i)$ называется **законом распределения** данной случайной величины.

Закон распределения можно задавать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Определение. ***Законом распределения*** *дискретной случайной величины называется такая таблица, в которой перечислены все возможные значения этой случайной величины (без повторений) с соответствующими им вероятностями.*

В общем виде закон распределения для случайной величины, например, X :

X :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
p_i	p_2	p_2	$\ldots$	p_k

где $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Из определения закона распределения следует, что события $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, …, $(X = x_k)$ образуют полную систему, поэтому (см. следствие из теоремы сложения вероятностей для несовместных событий в §1.6):

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_k) = 1,$$

т.е.

$$\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.}$$

Данное равенство называется *основным свойством закона распределения*

Пример. Два стрелка одновременно выстреливают в мишень. Вероятность попадания для первого равна 0,6, для второго – 0,8. Составить закон распределения случайной величины Z – общего числа попаданий в мишень.

Решение. Возможные значения данной случайной величины: 0, 1, 2. Через B_1 и B_2 обозначим события, состоящие в попадании в мишень первого и второго стрелков (соответственно). Тогда аналогично упомянутому примеру получаем

$$P(Z = 0) = P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2) = (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08,$$

$$P(Z = 1) = P(B_1)P(\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1)P(B_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44,$$

$$P(Z = 2) = P(B_1)P(B_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

Окончательно, закон распределения случайной величины Z имеет вид:

Z :

z_i	0	1	2	Σ
p_i	0,08	0,44	0,48	1

Упражнение. В коробке 3 белых шара и 2 красных. Составить закон распределения случайной величины X – числа белых шаров среди 2-х извлеченных шаров.

Ответ.

X :

x_i	0	1	2	Σ
p_i	0,1	0,6	0,3	1

Пример. В коробке – 3 белых шара и 2 красных. Шары извлекаются последовательно до появления белого шара. Составить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных шаров.

Решение. Возможные значения данной случайной величины: 1, 2, 3. Событие $(X = 1)$ (из коробки будет извлечен один единственный шар) наступает тогда и только тогда, когда первый из шаров оказывается белым, т.к. появление именно белого шара является сигналом к прекращению последующих извлечений (см. условие). Поэтому

$$P(X=1)=P(Б_1)=\frac{3}{5},$$

где событие $Б_1$ – первый из извлеченных шаров – белый. Событие $(X=2)$ (из коробки будет извлечено ровно 2 шара) наступает тогда и только тогда, когда первый из извлеченных шаров оказывается красным, а второй – белым. Поэтому

$$P(X=2)=P(К_1Б_2)=P(К_1)P_{К_1}(Б_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10},$$

где событие $К_1$ – первый из извлеченных шаров – красный, $Б_2$ – второй шар – белый. Наконец событие $(X=3)$ (из коробки будет извлечено 3 шара) наступает тогда и только тогда, когда первый шар – красный, второй – красный и третий – белый. Поэтому

$$P(X=3)=P(К_1К_2Б_3)=P(К_1)P_{К_1}(К_2)P_{К_1К_2}(Б_3)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{10}.$$

Окончательно искомый закон распределения имеет вид:

X:

x_i	1	2	3	$\sum$
p_i	0,6	0,3	0,1	1

Определение. *Случайная величина X имеет* ***биномиальный закон распределения*** *с параметрами* n *и* p*, если ее закон распределения имеет вид*:

X:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$P_{0,n}$	$P_{1,n}$	$P_{2,n}$	…	$P_{n,n}$

,

где вероятности $P_{m,n}$ *вычисляются по формуле Бернулли:*

$$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m},$$

n *– положительное целое число,* $m=0,1,2,...,n,\quad 0<p<1.$

В пределе при $n\to\infty$ и $\lambda=np=const$ биномиальное распределение переходит в так называемое распределение Пуассона.

Определение. *Говорят, что случайная величина X имеет* ***распределение Пуассона*** *с параметром* λ*, если ее закон распределения имеет вид:*

X:

x_i	0	1	2	…
p_i	P_0	P_1	P_2	...

,

где

$$P_m=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

$m=0,1,2,\ldots,$ λ *– положительное число.*

Убедимся в том, что для распределения Пуассона выполняется основное свойство закона распределения: $\sum\limits_{m=0}^{\infty}P_m=1$. Действительно, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}P_m=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}+...=\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+...\right)\cdot e^{-\lambda}=e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda}=1$$

(см. курс математического анализа, разложение функции $y=e^x$ в ряд Маклорена).

Арифметические операции над случайными величинами

Определение. *Случайные величины X и Y называются* ***равными****, если их законы распределения точно совпадают, и для произвольного числа* α *справедливо равенство:* $(X=\alpha)=(Y=\alpha)$.

Пример. Пусть законы распределения случайных величин X *и* Y имеют вид:

X:

x_i	0	1
p_i	0,5	0,5

Y:

y_i	0	1
p_i	0,5	0,5

.

Эти случайные величины равны, если дополнительно справедливы равенства $(X=0)=(Y=0)$ и $(X=1)=(Y=1)$, т.е. случайная величина X принимает значение 0 тогда и только тогда, когда случайная величина Y принимает значение 0, и аналогично со значением 1.

Произвольная случайная величина допускает умножение на число. Действительно, пусть закон распределения случайной величины X имеет вид:

X :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_i	p_2	p_2	$\cdots$	p_k

и α – некоторое число.

Определение. *Случайной величиной* $Y=\alpha\cdot X$ *называется такая случайная величина, закон распределения которой имеет вид:*

Y :

y_i	$\alpha\cdot x_1$	$\alpha\cdot x_2$	$\cdots$	$\alpha\cdot x_k$
p_i	p_2	p_2	$\cdots$	p_k

Пример. Пусть закон распределения случайной величины X имеет вид:

X:

x_i	0	1	2
p_i	0,16	0,48	0,36

и $\alpha=5$, $Y=\alpha\cdot X$. Тогда закон распределения Y :

Y :

y_i	0	5	10
p_i	0,16	0,48	0,36

Можно придумать, например, следующую интерпретацию данному примеру. Заметим, что X – биномиально распределена с параметрами $n=2$, $p=0{,}6$. Пусть X – число попаданий в мишень при 2-х выстрелах, при каждом из которых попадание случается с вероятностью 0,6, и дополнительно известно, что за каждое попадание стрелку выплачивается вознаграждение в размере 5 ден. ед. Тогда Y – заработок стрелка.

Определение. *Случайные величины X и Y называются* ***независимыми****, если для любых i и j события* $(X=x_i)$ *и* $(Y=y_j)$ *– независимы.*

Пример. Пусть из коробки, в которой – 6 белых и 8 красных шаров, извлекается 1 шар. Рассмотрим случайные величины X – число белых шаров, Y – число красных шаров из извлеченных. События, например, $(X=1)$ и $(Y=1)$ – несовместны, а поэтому – зависимы. Следовательно, и случайные величины X и Y зависимы.

Определение. ***Суммой (разностью, произведением)*** *случайных величин X и Y называется такая случайная величина* $Z = X + Y$ $(Z = X - Y\ ,\ Z = X \cdot Y\ )$*, которая принимает значение* z_k *в некотором испытании, если значения* x_i *и* y_j *случайных величин X и Y в этом испытании таковы, что* $z_k = x_i + y_j$ $(z_k = x_i - y_j,\ z_k = x_i \cdot y_j)$.

Пример. Пусть заданы законы распределения независимых случайных величин *X* и *Y:*

X:

x_i	0	1
p_i	0,4	0,6

Y:

y_j	0	1
p_j	0,2	0,8

Составить закон распределения случайной величины $U = X - Y$.

Решение. Удобно использовать вспомогательную таблицу вида:

y_j \ x_i	0	1
0	0	1
1	–1	0

в каждой из центральных клеток которой записаны соответствующие произведения случайных величин *X* и *Y*. Такая таблица показывает, какие значения принимает случайная величина *U* и когда она принимает эти значения. Так $U = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$ и $Y = 0$ или $X = 1$ и $Y = 1$. Поэтому

$$P(U = 0) = P((X = 0)(Y = 0) + (X = 1)(Y = 1)).$$

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, теорему умножения вероятностей – для независимых событий (по условию, случайные величины X и Y – независимы), получаем

$$P(U = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Для наступления каждого из двух оставшихся значений случайной величины *U* (-1 и 1) имеется по одной возможности. Например, $U = 1$ тогда и только тогда, когда $X = 1$ и $Y = 0$. Тогда получаем:

$$P(U = 1) = P((X = 1)(Y = 0)) = P(X = 1)P(Y = 0) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12.$$

Аналогично,

$$P(U = -1) = P((X = 0)(Y = 1)) = P(X = 0)P(Y = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32.$$

Окончательно, закон распределения случайной величины *U* имеет вид:

U:

u_i	–1	0	1
p_i	0,32	0,56	0,12

2. Функция распределения, плотность распределения, вероятность попадания в интервал.

Функция распределения дискретной случайной величины

Определение. ***Функцией распределения*** *случайной величины X называется такая функция* $F(x)$*, значение которой в точке x численно равно вероятности того, что в произвольном испытании значение случайной величины X окажется меньше чем x, т.е.*

$$\boxed{F(x) = P(X < x).}$$

Данное определение задает функцию распределения не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин.

Пример. Пусть закон распределения случайной величины *X* имеет вид

X:	x_i	1	2
	p_i	0,3	0,7

Найти функцию распределения этой случайной величины.

Решение. Найдем сначала *F(x)* для некоторых значений переменной *x*. Например,

$$F(0) = P(X < 0) = P(\varnothing) = 0,$$

так как данная случайная величина не имеет значений меньших нуля, а потому событие (X<0) для нее является невозможным. Аналогично, при любом значении переменной *x*, которое менее или равно 1, будем иметь $F(x) = 0.$ Далее имеем:

$$F(1{,}5) = P(X < 1{,}5) = P(X = 1) = 0{,}3.$$

Аналогично, при любом значении переменной *x* таком, что $1 < x \le 2$, будем иметь $F(x) = 0{,}3.$

$$F(2{,}5) = P(X < 2{,}5) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}7 = 1.$$

(Или, другими словами, так как все значения данной случайной величины менее 2,5, то событие (X < 2,5) является достоверным, а потому его вероятность равна 1.) Аналогично, при любом значении переменной *x*, которое более или равно 2, будем иметь $F(x) = 1.$

Окончательно имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1; \\ 0{,}3 & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

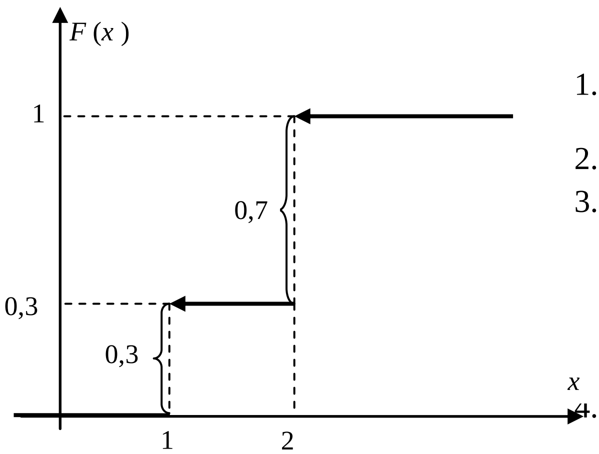


Рис. 3

График найденной функции распределения изображен на рис. 3.

Свойства функции распределения

1. Функция распределения является неубывающей функцией.
2. Область значений: $0 \le F(x) \le 1.$
3. Асимптотические свойства: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ (другими словами, прямые y =0 и y =1 являются асимптотами (левой и правой соответственно) графика $y = F(x)$).
4. Вероятность того, что в произвольном испытании значение случайной величины X будет принадлежать полуинтервалу $[\alpha, \beta)$, где α и β – произвольные числа, вычисляется по формуле

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Доказательство. Значение функции распределения равна вероятности соответствующего события, но область значений вероятности есть отрезок $[0,1]$ – тем самым доказано свойство 2.

Используя определение функции распределения, получаем $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X < x) = P(X < -\infty)$. Но произвольное значение случайной величины принадлежит числовой прямой, поэтому событие $(X < -\infty)$ является невозможным. Вероятность невозможного события равна нулю (см. § 1.3), поэтому $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

Аналогично, учитывая, что событие $(X < +\infty)$ является достоверным, а вероятность такого события равна 1, получаем $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Нетрудно видеть, что

$$(X < \beta) = (X < \alpha) + (\alpha \le X < \beta),$$

причем события правой части этого равенства несовместны. Принимая во внимание определение функции распределения и теорему сложении вероятностей для несовместных событий, получаем

$$F(\beta) = P(X < \beta) = P(X < \alpha) + P(\alpha \le X < \beta) = F(\alpha) + P(\alpha \le X < \beta),$$

что равносильно свойству 4.

Доказательство свойства 1 мы оставляем читателю в качестве упражнения (указание: используйте рассуждении от противного и свойство 4).

Неформально говоря, случайная величина непрерывна, если ее значения полностью заполняют некоторый интервал. Более точно, справедливо

Определение. *Случайная величина называется* ***непрерывной****, если ее функция распределения непрерывна на всей числовой прямой и дифференцируема при всех x за исключением, быть может, отдельных значений.*

Определение. ***Плотностью распределения*** *непрерывной случайной величины X называется такая функция $\varphi = \varphi(x)$, что вероятность того, что в произвольном испытании значение случайной величины X окажется принадлежащим некоторому отрезку $[\alpha, \beta]$, вычисляется по формуле*

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx.$$

Принимая во внимание геометрический смысл определенного интеграла, получаем

Геометрический смысл плотности распределения. *Вероятность того, что в произвольном испытании значение случайной величины X окажется принадлежащим некоторому отрезку $[\alpha, \beta]$, численно равна площади $S(\alpha, \beta)$ под кривой плотности распределения на данном отрезке* (см. рис. 4).

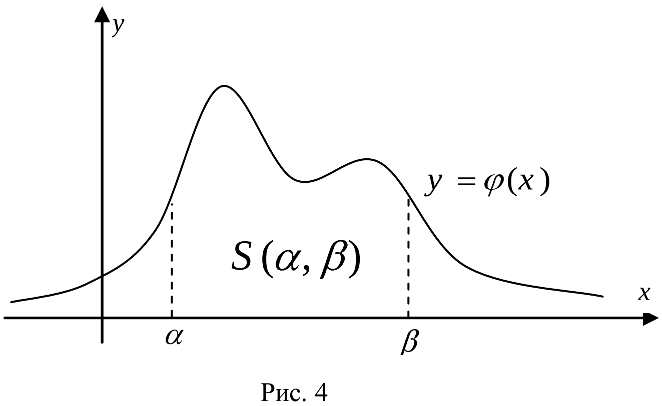


Рис. 4

Пример. Пусть плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } x \in [-1, 1]; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти вероятности:

а) $P(-2 \le X \le -0{,}4)$; б) $P(X \le -3)$; в) $P(X \ge -2)$.

Решение. а) По определению плотности распределения,

$$P(-2 \le X \le -0{,}4) = \int_{-2}^{-0{,}4} \varphi(x)\,dx.$$

Вместе с тем, данная плотность распределения задана аналитически по-разному на промежутках $[-2, -1]$ и $[-1; -0{,}4]$ отрезка интегрирования. Соответственно, используя свойства определенного интеграла, получаем

$$P(-2 \le X \le -0{,}4) = \int_{-2}^{-0{,}4} \varphi(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{-0{,}4} 1/2\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-1}^{-0{,}4} = \frac{1}{2}(-0{,}4 - (-1)) = 0{,}3.$$

По геометрическому смыслу плотности распределения, полученная вероятность численно равна площади под кривой плотности распределения (см. рис. 5) на отрезке

$[-2;-0{,}4]$, т.е. равна площади фигуры, составленной из отрезка длины 1 и прямоугольника со сторонами $1/2$ и 0,6.

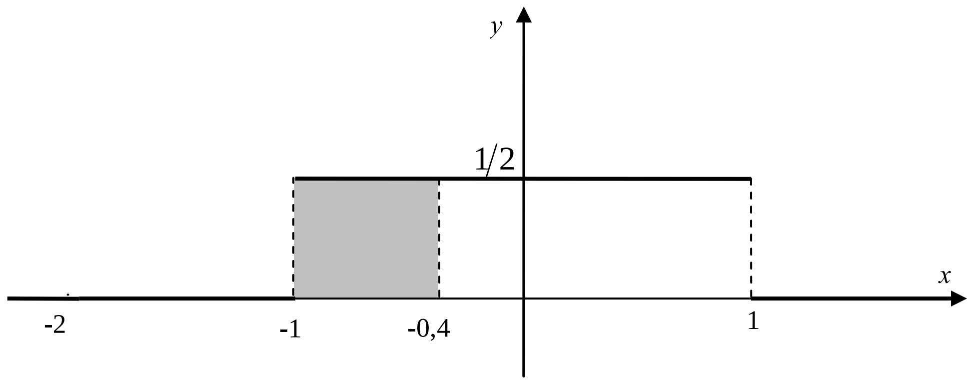


Рис. 5

б) Неравенство $(X \le -3)$ равносильно тому, что $(-\infty < X \le -3)$. Учитывая, что на промежутке $(-\infty; -3)$ данная плотность распределения равна 0, получаем

$$P(X \le -3) = P(-\infty < X \le -3) = \int_{-\infty}^{-3} 0\,dx = 0.$$

в) Аналогично предыдущим пунктам задачи, имеем

$$P(-2 \le X < +\infty) = \int_{-2}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_{-2}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{1} 1/2\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1-(-1)) = 1.$$

Рассмотрение геометрического смысла результатов последних двух пунктов данного примера мы оставляем читателю в качестве упражнения. ►

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения неотрицательна, т.е. $\varphi(x) \ge 0$ при всех *x*.
2. Интеграл от плотности распределения на всей числовой прямой равен 1, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

(Данное свойство называется *условием нормировки* плотности распределения.)

Доказательство. Предположим противное: пусть найдется такой отрезок $[\alpha, \beta]$, что плотность распределения $\varphi(x)$ отрицательна на этом отрезке. Тогда (см. свойства определенного интеграла) имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx < 0.$$

Но, по определению плотности распределения, интеграл, стоящий в левой части последнего неравенства равен $P(\alpha \le X \le \beta)$. Так как вероятность события не может быть отрицательной, приходим к противоречию, что доказывает справедливость свойства 1.

По определению плотности распределения,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = P(-\infty \le X \le +\infty).$$

Но событие $(-\infty < X < +\infty)$ является достоверным, поэтому его вероятность равна 1. Тем самым доказано свойство 2.

Парадокс нулевой вероятности

Теорема. *Для непрерывной случайной величины вероятность принять произвольное числовое значение равно нулю.*

Доказательство. Пусть α – произвольное число. События $(X = \alpha)$ и $(\alpha \le X \le \alpha)$ – равны, поэтому, по определению плотности распределения, получаем

$$P(X = \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} \varphi(x)dx = 0$$

(см. свойства определенного интеграла).

Из парадокса нулевой вероятности вытекает, что для любой непрерывной случайной величины вероятности попадания в произвольный отрезок числовой оси или в соответствующий полуинтервал (интервал) равны между собой, т.е. справедливо

Следствие. *Пусть X непрерывная случайная величина и α, β – произвольные числа. Тогда верно следующее равенство*

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha < X < \beta).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$(\alpha \le X \le \beta) = (\alpha \le X < \beta) + (X = \beta),$$

причем события $(\alpha \le X < \beta)$ и $(X = \beta)$ – несовместны. Используя последнее равенство и теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P((\alpha \le X < \beta) + (X = \beta)) = P(\alpha \le X < \beta) + P(X = \beta).$$

Но, согласно парадоксу нулевой вероятности, $P(X = \beta) = 0$. Тем самым доказано первое из трех равенств Следствия.

Доказательство оставшихся двух равенств мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Пусть X – непрерывная случайная величина и $\varphi = \varphi(x)$ – ее плотность распределения. Используя определения функции распределения (см. § 3.4) и плотности распределения, получаем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx .$$

Обратно, если задана функция распределения непрерывной случайной величины, то (см. теорему об интеграле с переменным верхним пределом) плотность распределения этой случайной величины будет определяться равенством

$$\varphi(x) = F'(x).$$

Таким образом, имеется два равноправных способа задания непрерывной случайной величины: с помощью или плотности распределения, или функции распределения.

Пример. Пусть плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } x \in [0;2], \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти функцию распределения.

Решение. Пусть $x < 0$. Тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$$

Если $x \in [0;2]$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}dx=0+\frac{1}{2}x\Big|_{0}^{x}=\frac{1}{2}x.$$

Если $x>2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{2}dx+\int_{2}^{x}0dx=0+\frac{1}{2}x\Big|_{0}^{2}+0=\frac{1}{2}(2-0)=1.$$

Таким образом, окончательно, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{2}x \text{ при } x\in[0;2],\\ 1 \text{ при } x>2\end{cases}$$

(см. рис. 6).

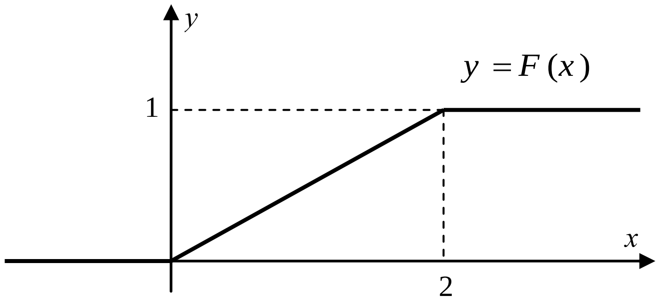


Рис. 6

3. Числовые характеристики ДСВ. Числовые характеристики НСВ.

Во многих практических случаях информация о случайной величине, которую дают закон распределения, функция распределения или плотность вероятностей, является избыточной. Часто проще и удобнее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно. К числу наиболее важных из таких числовых характеристик случайных величин относятся математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание характеризует среднее ожидаемое значение случайной величины, т.е. приближенно равно ее среднему значению (вероятностный смысл математического ожидания). Иногда знания этой характеристики достаточно для решения задачи. Например, при оценке покупательной способности населения вполне может хватить знания среднего дохода, при анализе выгодности двух видов деятельности можно ограничиться сравнением их средних прибыльностей. Знание того, что выпускники данного университета зарабатывают в среднем больше выпускников другого, может послужить основанием для принятия решения о поступлении в данный ВУЗ и т.п.

Пусть закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид

X :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_i	p_2	p_2	$\cdots$	p_k

Определение. ***Математическим ожиданием*** *дискретной случайной величины X называется число M(X), вычисляемое по формуле*

$$\boxed{M(X)=\sum_{i=1}^{k}x_i p_i=x_1p_1+x_2p_2+...+x_kp_k.}$$

Математическое ожидание случайной величины есть число около которого группируются значения этой случайной величины.

Механическим аналогом математического ожидания дискретной случайной величины является центр масс (центр тяжести) системы точечных масс: если в точках числовой оси с абсциссами $x_1, x_2, ..., x_k$ расположены точечные массы $p_1, p_2, ..., p_k$, то абсцисса их центра масс находится точно по формуле для $M(X)$, приведенной выше.

Пример. Пусть случайная величина X биномиально распределена с параметрами $n = 3$ и $p = 0{,}8$ (см. пример из § 3.1):

X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Тогда

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 0{,}096 + 2 \cdot 0{,}384 + 3 \cdot 0{,}512 = 2{,}4.$$

Свойства математического ожидания

1. *Математическое ожидание постоянной случайной величины равно самой постоянной, т.е.*

$$M(C)=C,$$

где C – некоторое число.

(*Постоянной случайной величиной C* называется такая случайная величина, которая принимает единственное значение равное C с вероятностью 1.)

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е.*

$$M(\alpha X) = \alpha M(X),$$

где α – произвольное число.

3. *Математическое ожидание суммы (разности) случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий этих случайных величин, т.е.*

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е.*

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

5. *Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – такие случайные величины, математические ожидания которых равны между собой, т.е. $M(X_i) = a$, где $i = 1, 2, ..., n$, и a – некоторое число. Тогда среднее арифметическое этих случайных величин равно их общему математическому ожиданию, т.е.*

$$M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = a.$$

Заметим, что свойства 2 – 5 математического ожидания остаются справедливыми также для непрерывных случайных величин.

Пусть закон распределения случайной величины X тот же, что и выше (см. начало параграфа).

Определение. ***Дисперсией*** *дискретной случайной величины X называется число $D(X)$, определяемое равенством*

$$\boxed{D(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M(X))^2 p_i = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + ... + + (x_k - M(X))^2 p_k.}$$

Число $D(X)$ является мерой разброса значений случайной величины X около ее математического ожидания.

Пример. Пусть случайная величина X биномиально распределена с параметрами $n = 3$ и $p = 0{,}8$. Найдем дисперсию этой случайной величины.

В предыдущем примере найдено, что *M(X)* = 2,4. Тогда

$$D(X) = (0 - 2{,}4)^2 \cdot 0{,}008 + (1 - 2{,}4)^2 \cdot 0{,}096 + (2 - 2{,}4)^2 \cdot 0{,}384 + (3 - 2{,}4)^2 \cdot 0{,}512 = 0{,}48.$$

Свойства дисперсии

1. *Дисперсия постоянной случайной величины равна нулю, т.е.*

$$D(C) = 0.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат, т.е.*

$$D(\alpha X) = \alpha^2 D(X),$$

где α – произвольное число.

3. *Справедливо равенство:*

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

4. *Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих случайных величин, т.е.*

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y),$$

где случайные величины X и Y – независимы.

5. *Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимы и $D(X_i) = \sigma^2$, где $i = 1,2,\ldots,n$. Тогда*

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Замечание. $\sqrt{D(X)}$ называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины X и обычно обозначается через σ.

Отметим также, что свойство 3 дисперсии более удобно для ее вычисления по сравнению с исходным определением дисперсии.

Пример. Пусть закон распределения случайной величины *X* имеет вид

X:

x_i	1	2
p_i	0,6	0,4

Найти $D(X)$, используя свойство 3 дисперсии.

Решение.

$$M(X) = 1\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}4 = 1{,}4, \qquad M(X^2) = 1^2\cdot 0{,}6 + 2^2\cdot 0{,}4 = 2{,}2,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2{,}2 - 1{,}4^2 = 0{,}24.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины называются *параметрами распределения* этой случайной величины.

Теорема. *Пусть случайная величина $X \equiv m$ – биномиально распределена с параметрами n и p, тогда параметры ее распределения могут быть найдены по формулам:*

$$M(m) = np, \qquad D(m) = npq.$$

Также справедливы равенства

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = p, \qquad D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}.$$

Пример. Пусть случайная величина X биномиально распределена спараметрам $n = 3$и $p = 0{,}8$. Тогда

$$M(X) = np = 3\cdot 0{,}8 = 2{,}4, \qquad D(m) = npq = 3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}48.$$

Очевидно, что использование формул последней теоремы упрощает и ускоряет вычисление математического ожидания и дисперсии биномиально распределенной случайной величины по сравнению с применением исходных определений для *M(X)* и $D(X)$.

Формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины

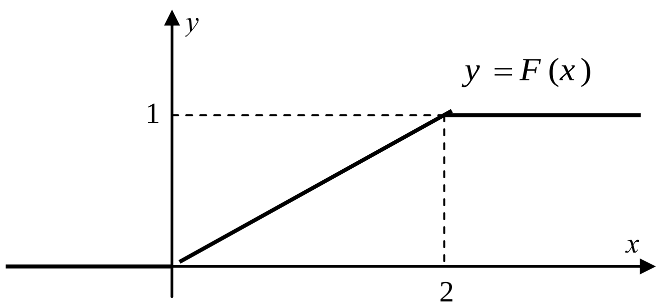


Рис. 7

аналогичны соответствующим формулам для дискретной случайной величины. Действительно, рассмотрим следующую таблицу.

	Дискретная случайная величина	Непрерывная случайная величина
Способ описания	Закон распределения	Плотность распределения
$M(X)$	$M(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i p_i$	$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx$
$D(X)$	$D(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-M(X))^2 p_i$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\varphi(x)dx$

Пример. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x^2/9 & \text{при } x\in[0,3],\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Для нахождения $M(X)$ и $D(X)$ нам потребуется плотность распределения данной случайной величины (см. приведенные выше формулы). Получаем:

$$\varphi(x)=F'(x)=\begin{cases}0'=0 & \text{при } x<0,\\ \left(x^2/9\right)'=\frac{2}{9}x & \text{при } x\in[0,3],\\ 1'=0 & \text{при } x>3,\end{cases} \quad \text{или} \quad \varphi(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & \text{при } x\in[0,3],\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Тогда имеем

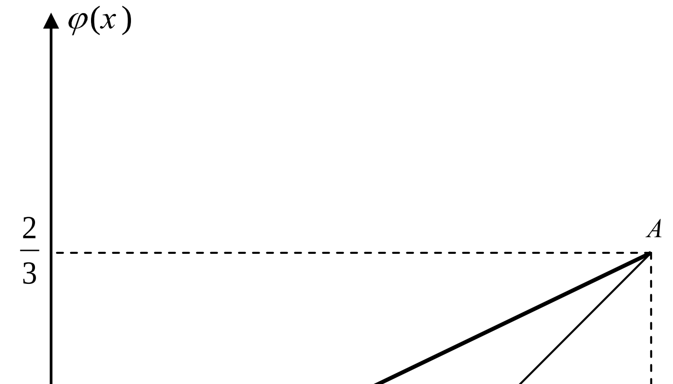
$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{3} x\cdot\frac{2}{9}x\,dx+\int_{3}^{+\infty} x\cdot 0dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=2.$$

Геометрически, полученное значение математического ожидания есть абсцисса центра тяжести фигуры под графиком плотности распределения, т.е. абсцисса прямоугольного треугольника OAB (см. рис. 8; напомним, что центр тяжести треугольника есть точка пересечения медиан этого треугольника, а медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины).

Средним квадратическим отклонением σ (или *стандартом*) случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии $D(X)$ этой величины: $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}$.

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X. В тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратичное отклонение, а не дисперсию.

Понятие дисперсии и среднего квадратического отклонения широко используется практически во всех областях человеческой деятельности, связанных с процессами измерений. Так, например, в технике, они характеризуют точность измерительной аппаратуры (чем выше среднеквадратическое отклонение (разброс) при измерениях, тем хуже качество прибора).



1.4 Лекция 5-6 (Л-5-6) (4 ч.)

Тема: Основные законы распределения случайных величин.

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Основные законы распределения ДСВ биномиальный, Пуассона.
2.Основные законы распределения НСВ: равномерный, показательный.
3. Нормальное распределение и его свойства.

1.4.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные законы распределения ДСВ биномиальный, Пуассона.

Случайную величину полностью задает закон ее распределения (в дискретном случае), а также функция распределения или плотность вероятностей (для непрерывной случайной величины).

Наиболее важными законами распределения дискретной случайной величины являются биномиальный закон, закон распределения Пуассона, геометрическое и гипергеометрическое распределение, а непрерывной – нормальное, равномерное и показательное распределения.

Закон распределения случайной величины X числа появлений события A в схеме Бернулли имеет вид $P_m(n) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m = 0,1,2,\dots,n$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

Эта формула еще называется **биномиальной**, так как её правая часть представляет собой $(m+1)$-й член бинома Ньютона: $(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$.

Очевидно, что для закона биномиального распределения вероятностей выполняется условие нормировки, т.е. сумма всех вероятностей равна единице: $\sum_{m=0}^{n} P_m(n) = (p+q)^n = 1$.

Биномиальное распределение для $n=10$ и некоторых значений p приведено ниже

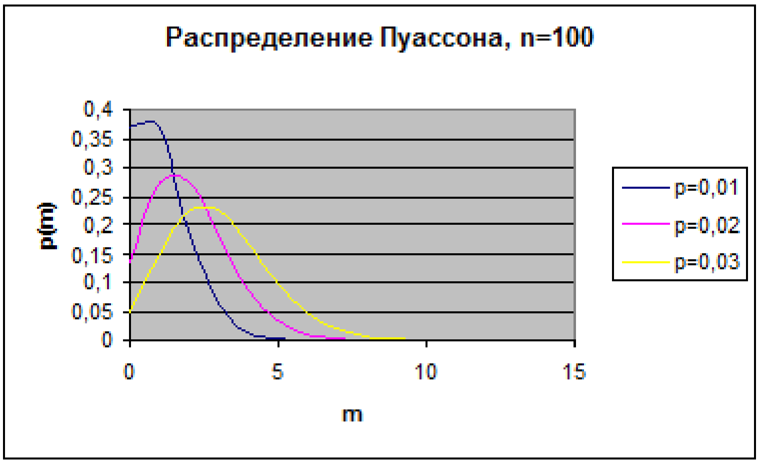
Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях для биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события A в каждом испытании (т.е. среднему числу появления события в данной серии испытаний). $M(X) = np$

***Дисперсия** и среднее квадратическое отклонения равны соответственно:* $D(X) = npq$ $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}$

Ранее отмечалось, что если при увеличении числа испытаний произведение $np = \lambda$ остается постоянным, то биномиальное распределение при больших значениях n сходится к распределению Пуассона.

Случайная величина X называется **распределенной по закону Пуассона,** если она может принимать значения $0,1,2,\ldots,n$, соответствующая вероятность которых определяется по формуле Пуассона: $P_\lambda(m) = \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $(n \to \infty)$

Распределение Пуассона для $n=100$, $\lambda=1,2,3$ приведено ниже



Для распределения Пуассона математическое ожидание и дисперсия равны соответственно:

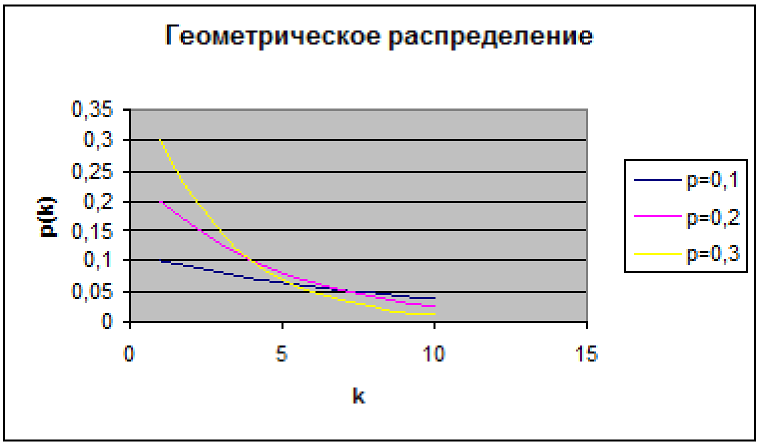
$$M(X) = \lambda \qquad D(X) = \lambda.$$

Равенство значений математического ожидания и дисперсии является уникальным свойством распределения Пуассона. Это свойство часто применяется на практике для решения вопроса, правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона. Для этого определяют из опыта статистические характеристики случайной величины – математическое ожидание и дисперсию. Если их значения близки, то это может служить доводом в пользу гипотезы о пуассоновском распределении.

Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если она принимает значения $k=1,2,3,...$ (счетное множество значений) с вероятностями

$$p_k = P(X=k)=q^{k-1}\cdot p,\ 0<p<1,\ q=1-p$$.

Случайная величина, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число испытаний в схеме Бернулли ***до первого успеха***. Геометрическое распределение для некоторых конкретных значений р приведено ниже



Можно показать, что математическое ожидание и дисперсия для геометрического распределения равны соответственно: $M(X)=\dfrac{1}{p}$ $\quad D(X)=\dfrac{q}{p^2}$

Пример. В большой партии изделий вероятность брака равна p. Контроль качества проводится до первого появления бракованного изделия. В результате серии проверок обнаружилось, что бракованное изделие впервые появлялось в среднем при десятом испытании. Оценить численное значение p.

Решение. Пусть X - число испытаний до первого появления бракованного изделия. Эта случайная величина имеет геометрическое распределение. По условию ее среднее значение равно $M(X)=10$. Таким образом $p=1/M(X)=0.1$

Гипергеометрическое распределение (урновая схема)

Дискретная случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение, если она принимает значения m с вероятностями $p_m = P(X=m)=\dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

p_m *представляет вероятность выбора m объектов, обладающих заданным свойством, из множества n объектов, случайно извлеченных (без возврата) из совокупности N объектов, среди которых M объектов обладают заданным свойством. Ниже приведен пример графика гипергеометрического распределения.*

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами n, M, N *равны:*

$$M(X)=n\cdot\frac{M}{N}; \qquad D(X)=n\cdot\frac{M}{N-1}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right)$$

Пример*. Имеется 5 фирм, у трех из которых отчетность оформлена неправильно. 2 ревизора проверяют 2 произвольно выбранные фирмы. Какова вероятность того, что при проверке будет обнаружена неправильная отчетность а) ни в одной, б) в одной, в) в двух фирмах?*

Решение. Данная задача может быть решена с помощью гипергеометрического распределения. По условию задачи общее число объектов (фирм) равно N = 10, число фирм с неправильной отчетностью M=3. Проверяется всего две фирмы (n =2). Число фирм с неправильной отчетностью среди двух выбранных – величина переменная (m=0, 1, 2). Таким образом, имеем

а) $p_0=P(X=0)=\dfrac{C_3^0\cdot C_2^2}{C_5^2}$ (ни одной неправильной отчетности)

б) $p_1=P(X=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}$ (одна неправильная отчетность)

в) $p_2=P(X=2)=\dfrac{C_3^2\cdot C_2^0}{C_5^2}$ (две неправильные отчетности).

2.Основные законы распределения НСВ: равномерный, показательный.

Непрерывная случайная величина считается **равномерно распределенной** на отрезке (a,b), если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

График плотности вероятности для равномерного распределения

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины, имеющей равномерное распределение, равны соответственно:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Пример. Интервал движения автобуса равен 15 мин. Какова вероятность того, что пассажир на остановке будет ждать автобус не более 5 минут?

Решение. Пусть случайная величина X - время ожидания автобуса. Она имеет равномерное распределение на отрезке [0,15]. Имеем

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

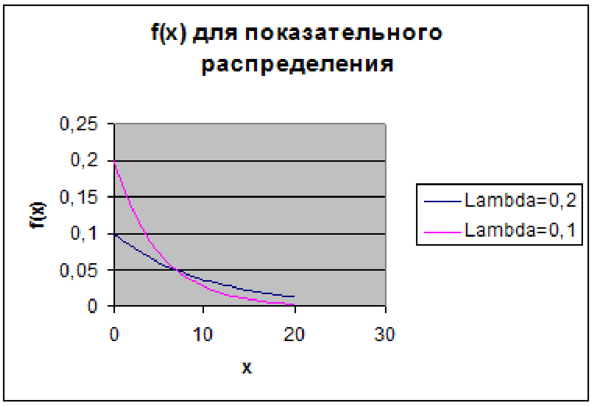
В рассматриваемом случае

$$P(0\le X\le 5)=\int_0^5\frac{1}{b-a}dx=\int_0^5\frac{1}{15-0}dx=\frac{5-0}{15-0}=\frac{1}{3}$$

Показательным (экспоненциальным) распределением непрерывной случайной величины X называется распределение, имеющее плотность вероятности вида:

$$f(x)=\begin{cases}0,(x<0)\\ \lambda e^{-\lambda x},(x\ge 0)\end{cases}$$

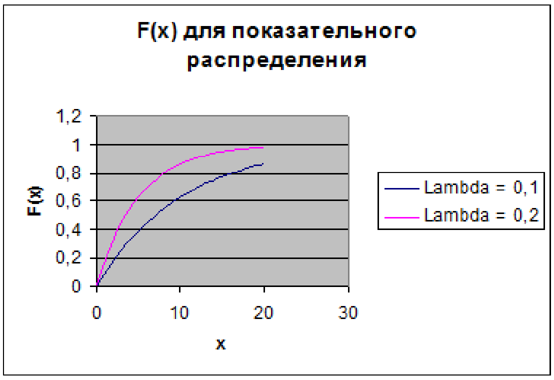
где λ – постоянная положительная величина. Плотность вероятностей для показательного распределения для $\lambda=0.1;\ 0.2$ приведена ниже



Функция распределения вероятности для показательного распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0,(x<0)\\ 1-e^{-\lambda x},(x\ge 0)\end{cases}$$

Функция распределения для $\lambda=0.1;\ 0.2$ приведена ниже



Можно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение, равны:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Пример. Установлено, что время горения электрической лампочки (Т) является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Считая, что среднее значение этой величины равно 6 месяцам, найти вероятность того, что лампочка будет исправна более года.

Решение. Так как $M(T)=1/\lambda=6$, *то* $\lambda=1/6$ и функция распределения случайной величины Т имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}1-\exp(-x/6), & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Поэтому

$$P(T>12)=P(12<T<+\infty)=F(\infty)-F(12)=1-(1-\exp(-12/6))=\exp(-2)\approx 0.135$$

3. Нормальное распределение и его свойства.

Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ, если ее плотность вероятности имеет вид функции Гаусса

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

где $\sigma>0$. С помощью непосредственного вычисления математического ожидания и дисперсии нормального распределения легко выяснить вероятностный смысл его параметров: a – есть математическое ожидание, а σ - среднее квадратическое отклонение нормального распределения. При $a=0,\ \sigma=1$ распределение называется **стандартным нормальным распределением**.

Графики $f(x)$ для ряда конкретных значений математического ожидания и среднего квадратического отклонения приведены ниже.

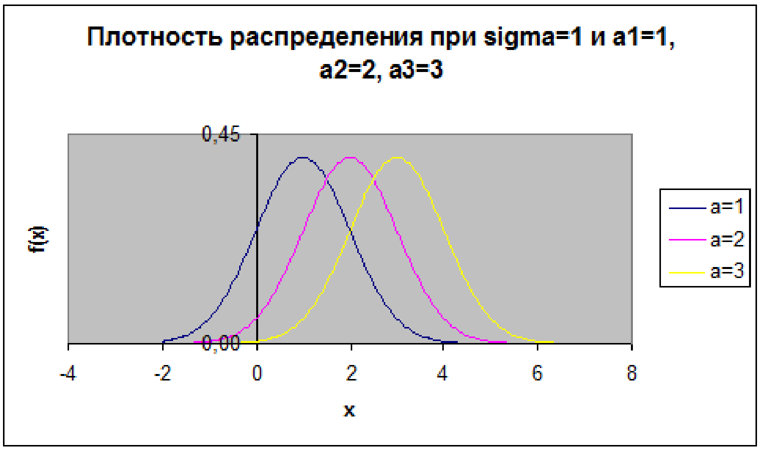


Рис. 1. Изменение вида функции $f(x)$ при изменении математического ожидания

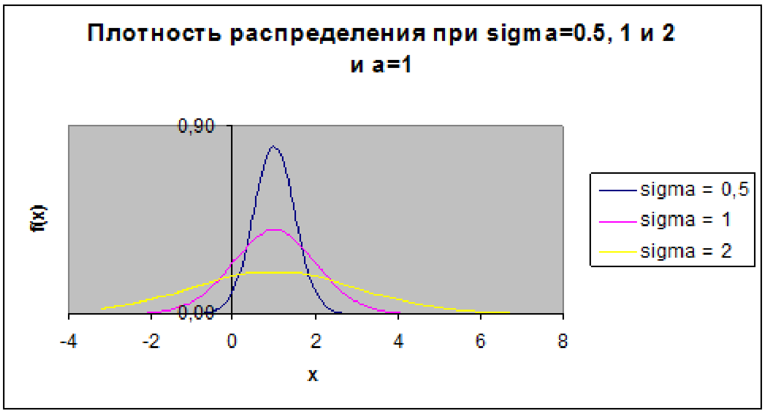


Рис. 2. Изменение $f(x)$ при изменении среднего квадратического отклонения

Функция распределения в случае нормального распределения, очевидно, равна

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt .$$

Графики функции $F(x)$ для ряда значений математического ожидания и среднего квадратического отклонения изображены на приводимых ниже рисунках

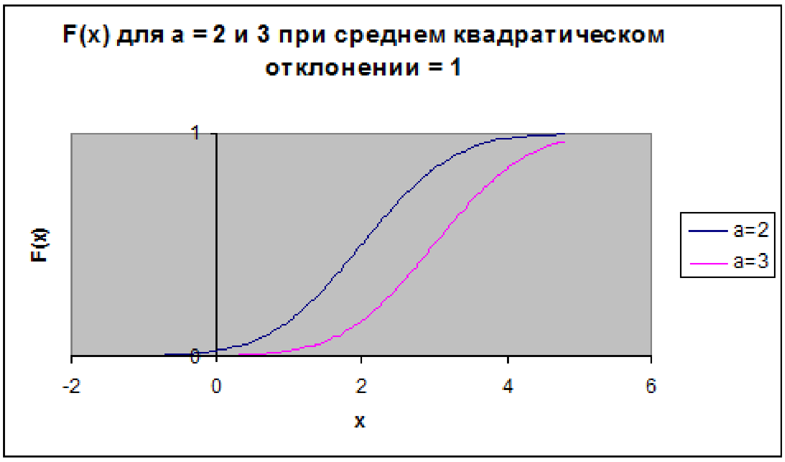


Рис. 3. Зависимость функции распределения от величины a

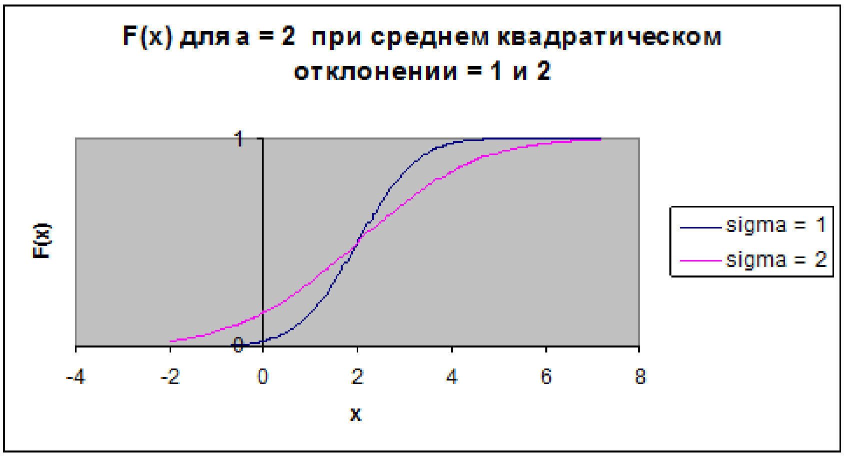


Рис. 4. Зависимость функции распределения от величины σ

Нормальное распределение имеет исключительно важное значение для практических применений, так как многие непрерывные случайные величины описываются именно этим распределением. Оказывается, что суммирование большого числа случайных величин с различными законами распределения приводит к нормальному распределению результирующей суммы. Это свойство подтверждается центральной предельной теоремой (теорема **Ляпунова**). Смысл этой теоремы состоит в следующем. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Следует иметь в виду, что при усилении влияния отдельных факторов могут появляться отклонения от нормального распределения результирующего параметра. Поэтому большое значение на практике уделяется экспериментальной проверке выдвинутых гипотез, в том числе и гипотезы о нормальном распределении.

График плотности нормального распределения называют **нормальной кривой Гаусса.**

Исследуем поведение функции плотности вероятности $f(x)$.

1. Очевидно, что функция определена на всей оси x.
2. Функция принимает лишь положительные значения, т.е. нормальная кривая расположена над осью Ox.
3. Ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика. Других асимптот у графика нет.
4. При $x = a$ функция имеет максимум, равный $\varphi(x)_{max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
5. Функция четная: ее график симметричен относительно прямой $x = a$
6. При $x = a \pm \sigma_X$ график функции имеет точки перегиба.

При любых значениях параметров a и σ, площадь, ограниченная нормальной кривой и осью x равна единице.

Часто требуется определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Эта вероятность может быть выражена в виде разности функции распределения вероятности в граничных точках этого интервала:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

В случае нормального распределения

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Используя замену переменной: $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$, $x = t\sigma + a$, $dx = \sigma dt$, получим

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $t_1 = \dfrac{x_1 - a}{\sigma}$, $t_2 = \dfrac{x_2 - a}{\sigma}$.

Разобьем полученный интеграл на два:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{t_1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{0}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)$$

Тогда искомая вероятность может быть выражена в виде:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1)$$

Функция Лапласа протабулирована, что существенно упрощает расчет попадания нормально распределенной случайной величины в любой заданный интервал.

Функция Лапласа не выражается через элементарные функции:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для ее вычисления используются специальные таблицы или методы приближенного вычисления.

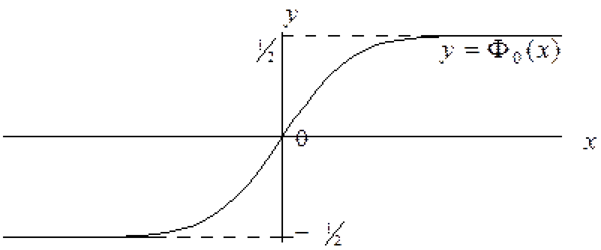
Функция $\Phi_0(x)$ *обладает следующими свойствами:*

1. $\Phi_0(0) = 0$*;*

2. $\Phi_0(+\infty) = \dfrac{1}{2}$*;*

3. функция $\Phi_0(x)$ *– нечетная, т.е.* $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ *, поэтому в таблицах обычно приводятся значения* $\Phi_0(x)$ *только для положительных* x*;*

4.



функция $\Phi_0(x)$ *– монотонно возрастающая функция (это следует из того, что* $\Phi_0'(x) = \varphi_0(x) > 0$*).* Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине от математического ожидания меньше заданного положительного числа δ , т.е. требуется найти вероятность того, что выполняется неравенство $|X - M_X| < \delta$.

Заменим это неравенство равносильным ему двойным неравенством $M_X - \delta < X < M_X + \delta$.

Воспользуемся формулой: $P(x_1 < X < x_2) = \Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1)$

Получим: $P(M_X - \delta < X < M_X + \delta) =$

$$= \Phi_0\left(\frac{(M_X + \delta) - M_X}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{(M_X - \delta) - M_X}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Если в качестве δ взять утроенное значение среднего квадратического отклонения s, то получим:

$$P(|X - M_X| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) = 0.9973,$$

Таким образом, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит (утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала 0,0027 или 0,27%). Такие события можно считать практически невозможными.

Другими словами, если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратичного отклонения. В этом и состоит сущность **правила «трех сигм»**.

На практике правило «трех сигм» применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но правило «трех сигм» выполняется, то есть основания полагать, что изучаемая величина распределена нормально, и наоборот.

Пример 1. Текущая цена ценной бумаги представляет собой нормально распределенную случайную величину X со средним 100 у.е. и дисперсией 9. Найти вероятность того, что цена актива будет находиться в пределах от 91 до 109 у.е.

Решение. Так как $a=100$, $\sigma=\sqrt{9}=3$, то

$$P(91<X<109)=\Phi_0\left(\frac{109-100}{3}\right)-\Phi_0\left(\frac{91-100}{3}\right)=\Phi_0(3)-\Phi_0(-3)=2\Phi_0(3)=0.9973$$

1.5 Лекция 7-8 (Л-7-8) (4 ч.)

Тема: Многомерные случайные величины, их числовые характеристики

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия многомерного статистического анализа
2. Условные законы распределения СВ
3. Условные числовые характеристики СВ

1.5.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия многомерного статистического анализа

До сих пор мы рассматривали случайные величины, возможные значения которых определялись одним числом (одномерные случайные величины). Например, число очков, которое может выпасть при бросании игральной кости (дискретная одномерная случайная величина) или расстояние от орудия до места падения снаряда (непрерывная одномерная случайная величина).

Часто приходится иметь дело с величинами, возможные значения которых определяются двумя или более числами. Такие величины называются n – мерными случайными величинами; n – мерную случайную величину можно рассматривать как систему n случайных величин. В данном контексте используется также термин **многомерный случайный вектор** $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, где каждая из величин $x_1,x_2,\dots,x_n$ называется составляющей (компонентой). Аналогично одномерным случайным величинам различают **дискретные** многомерные случайные величины (их составляющие дискретны) и **непрерывные** многомерные случайные величины, составляющие которых непрерывны.

Пример. Станок штампует стальные плитки. Если контролируемыми размерами являются длина X, ширина Y и высота Z плитки, то мы имеем трехмерную случайную величину (X,Y,Z).

Остановимся более подробно на двумерных случайных величинах.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины $\xi=(X,Y)$ называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел (x_i,y_i), где x_i и y_j $(i=1,2,\dots,n\,;\ j=1,2,\dots,m)$ – возможные значения величин X и Y, соответственно, и вероятностей $p_{ij}=p(x_i,y_j)$ их совместного появления $P(X=x_i,Y=y_i)$.

Двумерная дискретная случайная величина $\xi=(X,Y)$ задается в виде **таблицы распределения** вида:

$X \diagdown Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

где первая строка таблицы указывает возможные значения составляющей Y, а первый столбец – все возможные значения составляющей X.

Так как события $(X = x_i, Y = y_j)$ ($i = 1,2,\dots,n$; $j = 1,2,\dots,m$) образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, можно найти законы распределения каждой из ее составляющих. Так, например, вероятность того, что X примет значение x_k, равна $P(X = x_k) = \sum_{j=1}^{m} p_{kj}$.

Совместная функция распределения двух случайных величин

Функция $F(x, y)$, определяющая для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение меньшее x, и при этом Y примет значение меньшее y, называется **совместной функцией распределения** двух случайных величин $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x, y)$ – это вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины.

1. Значения совместной функции распределения удовлетворяют неравенству: $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $F(x, y)$ – неубывающая функция по каждому аргументу, т.е.

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, если $x_2 \ge x_1$;

$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$, если $y_2 \ge y_1$.

Совместная функция распределения имеет следующие предельные значения:

$F(-\infty, y) = 0$; $F(x, -\infty) = 0$;

$F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$.

3. При $x = \infty$ или $y = \infty$ совместная функция распределения системы становится функцией распределения одной из составляющих: $F(x, \infty) = F_1(x)$; $F(\infty, y) = F_2(y)$

Плотность совместного распределения вероятностей

Непрерывную двумерную случайную величину можно задать с помощью плотности распределения. **Плотность совместного распределения вероятностей** $f(x,y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X , Y) – это вторая смешанная частная производная от функции распределения $F(x,y)$:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Знная плотность совместного распределения $f(x,y)$, можно найти совместную функцию распределения $F(x,y)$ по формуле $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$$

следующей из определения плотности распределения двумерной непрерывной случайной величины (X , Y).

Смысл плотности совместного распределения вероятностей: вероятность попадания случайной точки в прямоугольник (с вершиной в точке (x,y) и сторонами Δx и Δy равна произведению $f(x,y)\Delta x\Delta y$, когда стороны этого прямоугольника стремятся к нулю.

В связи с этим, вероятность попадания случайной точки в ***произвольную область D*** равна двойному интегралу по области D от функции $f(x,y)$

$$P((X,Y)\subset D)=\iint_D f(x,y)dxdy$$

Свойства двумерной плотности вероятности

1. Двумерная плотность вероятности неотрицательна: $f(x,y)\geq 0$.
2. Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности вероятности равен единице: $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

Две случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Теорема. Для того чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X , Y) была равна произведению функций распределения составляющих: $F(X,Y)=F_1(X)F_2(Y)$.

Следствие. Для того чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X , Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих: $f(X,Y)=f_1(X)f_2(Y)$.

2. Условные законы распределения СВ

Пусть известна плотность распределения системы двух случайных величин. Используя свойства функций распределения, можно вывести формулы для нахождения плотности распределения одной величины, входящей в систему:

$$\boldsymbol{f_1(x)=F_1'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy;\qquad f_2(y)=F_2'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}\quad (*)$$

Перейдём теперь к решению обратной задачи: по известным законам распределения отдельных случайных величин, входящих в систему, найти закон распределения системы.

Легко увидеть, что в общем случае эта задача неразрешима. Действительно, с одной стороны, законы распределения отдельных случайных величин, входящих в систему, характеризуют каждую из случайных величин в отдельности, но ничего не говорят о том, как они взаимосвязаны. С другой стороны, искомый закон распределения системы должен содержать все сведения о случайных величинах системы, в том числе и о характере связей между ними.

Таким образом, если случайные величины X, Y взаимозависимы, то закон распределения системы не может быть выражен через законы распределения отдельных случайных величин, входящих в систему. Это приводит к необходимости введения условных законов распределения.

Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина, входящая в систему, приняла определённое значение, называется условным законом распределения.

Для дискретных случайных величин условным распределением составляющей при условии, что $Y = y_j$ называется совокупность условных вероятностей $p(x_1 \mid y_j), p(x_2 \mid y_j), \ldots, p(x_n \mid y_j)$, вычисленных в предположен, что случайная величина уже приняла значение. Для нахождения $p(x_i \mid y_j)$ пользуются формулой

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} p(x_i \mid y_j) = 1$. Аналогично находим $p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \quad j = \overline{1,m}$.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения, так и плотностью распределения. Условная функция распределения обозначается $F(x \mid y)$; условная плотность распределения обозначается $f(x \mid y)$1.

Плотностью распределения для случайной величины при условии, что случайная величина приняла определённое значение (*условной плотностью распределения*), назовём величину

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}.$$

Аналогично, плотностью распределения для случайной величины при условии, что случайная величина приняла определённое значение, назовём величину

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Отсюда получаем: $f(x,y) = f_1(x) f(y \mid x) = f_2(y) f(x \mid y)$

или, с учётом формул (*) $f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}; \qquad f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}$.

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами безусловной плотности распределения. В частности, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x \mid y)dx = 1; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y \mid x)dy = 1$.

3.Условные числовые характеристики СВ

Для описания условных законов распределения можно использовать различные характеристики подобно тому, как для одномерных распределений.

Наиболее важной характеристикой является условное математическое ожидание.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины при $Y = y$ (y – определённое возможное значение случайной величины) называется сумма произведений возможных значений на их условные вероятности:

$$M(X \mid Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i \mid y).$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M(X \mid Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x \mid y) dx,$$

где – условная плотность распределения случайной величины при .

Аналогично, условным математическим ожиданием дискретной случайной величины при $X = x$ (x – определённое возможное значение случайной величины) называется сумма произведений возможных значений на их условные вероятности:

$$M(Y \mid X) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j \mid x).$$

Для непрерывных случайных величин: $M(Y \mid X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y \mid x) dy$,

где $f(y \mid x)$ – условная плотность распределения случайной величины при.

Аналогично вводятся условные дисперсии и условные моменты более высоких порядков.

Числовые характеристики системы двух случайных величин

Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Из этого определения следует, что условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям. Укажем необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

ТЕОРЕМА 1: Для того чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

ТЕОРЕМА 2: Для того чтобы случайные величины и были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы плотность вероятности системы была равна произведению плотностей вероятностей составляющих:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Для описания системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий, составляющих используют и другие характеристики, к которым относятся корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин и называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$$\mu_{xy} = M\left((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y)) \right).$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) P(x_i, y_j),$$

а для непрерывных величин: $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))(y - M(Y)) f(x, y) dx dy$.

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами и .

ТЕОРЕМА 3: Корреляционный момент двух независимых случайных величин и равен нулю.

Замечание: из теоремы 3 следует, что если корреляционный момент двух случайных величин и не равен нулю, то и – зависимые случайные величины.

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин и называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин: $r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Очевидно, коэффициент корреляции двух независимых случайных величин равен нулю (так как $\mu_{xy} = 0$).

Коррелированность и зависимость случайных величин

Две случайные величины и называются *коррелированными*, если их корреляционный момент (или коэффициент корреляции) отличен от нуля; и называют *некоррелированными* величинами, если их корреляционный момент равен нулю.

Две коррелированные величины также и зависимы. Обратное утверждение не всегда имеет место, то есть если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Другими словами, корреляционный момент двух зависимых величин может быть не равным нулю, но может и равняться нулю.

Заметим, что для нормально распределённых составляющих двумерной случайной величины понятия независимости и некоррелированности равносильны.

Если $r_{xy} = \pm 1$, то и связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$,

Если $r_{xy} > 0$, то говорят о положительной (или прямой) корреляции между и, то есть с возрастанием одной случайной величины другая случайная величина также возрастает.

Если $r_{xy} < 0$, то говорят об отрицательной корреляции между и, то есть с возрастанием одной случайной величины другая случайная величина убывает.

Задача 1. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины задан таблицей

Y / X	– 4	– 2	0
0	0,1	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,1
4	0	0,1	0,1

Найти:

- собственные законы распределения случайных величин и;
- математические ожидания $M(X),\ M(Y)$;
- дисперсии $D(X),\ D(Y)$;
- корреляционный момент;
- коэффициент корреляции;
- закон распределения случайной величины при условии, что случайная величина принимает своё наименьшее значение.

Решение. Складывая вероятности по строкам, получим закон распределения случайной величины в виде ряда распределения

x_i	0	1	4	
$p(x_i)$	0,4	0,4	0,2	$\sum\limits_{i=1}^{3} p(x_i) = 1$

Складывая вероятности по столбцам, получим закон распределения случайной величины в виде ряда распределения

y_j	-4	-2	0
$p(y_j)$	0,2	0,4	0,4

$$\sum_{j=1}^{3} p(y_j) = 1$$

Найдём математические ожидания и дисперсии составляющих:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}2;$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j p_j = -4 \cdot 0{,}2 - 2 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}4 = -1{,}6;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = (0-1{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + (1-1{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + (4-1{,}2)^2 \cdot 0{,}2 = 2{,}16;$$

$$\sigma_x = \sqrt{2{,}16} \approx 1{,}47;$$

$$D(Y) = \sum_{j=1}^{3} (y_j - M(Y))^2 \cdot p_j = (-4+1{,}6)^2 \cdot 0{,}2 + (-2+1{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}24;$$

$$\sigma_y = \sqrt{2{,}24} \approx 1{,}5.$$

Найдём корреляционный момент и коэффициент корреляции:

$$\mu_{xy} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) P(x_i, y_j) = (-1{,}2) \cdot (-2{,}4) \cdot 0{,}1 + (-1{,}2) \cdot (-0{,}4) \cdot 0{,}1 +$$
$$+ (-1{,}2) \cdot (1{,}6) \cdot 0{,}2 + (-0{,}2) \cdot (-2{,}4) \cdot 0{,}1 + (-0{,}2) \cdot (-0{,}4) \cdot 0{,}2 + (-0{,}2) \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 2{,}8 \cdot (-2{,}4) \cdot 0 + 2{,}8 \cdot (-0{,}4) \cdot 0{,}1 + 2{,}8 \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}32;$$

$$r_{xy} \overset{def}{=} \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0{,}32}{1{,}47 \cdot 1{,}5} \approx 0{,}145.$$

Найдём закон распределения случайной величины при условии, что случайная величина принимает своё наименьшее значение, то есть при условии, что $Y = -4 \ (y_1 = -4)$. Искомый закон распределения, как ранее отмечалось, определяется совокупностью условных вероятностей $p(x_i \mid y_1),\ i = \overline{1,3}$, где

$$p(x_1 \mid y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5;$$

$$p(x_2 \mid y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5;$$

$$p(x_3 \mid y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0}{0{,}2} = 0.$$

Следовательно, искомый закон распределения имеет вид:

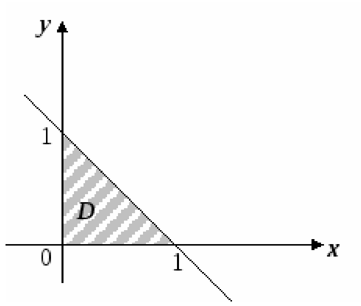
	0	1	4
$p(x_i \mid y_1)$	0,5	0,5	0

Задача 2. Вне области $D = \{(x, y) \mid x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ плотность распределения двумерной случайной величины равна 0; в области плотность распределения $f(x, y) = Axy^2$.

Найти:

- коэффициент A;
- вероятность $P((X,Y) \in G)$, где $G = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le \frac{1}{2},\ 0 \le y \le \frac{1}{2}\right\}$;

- одномерные плотности распределения $f_1(x),\ f_2(y)$;
- математические ожидания;
- дисперсии;
- корреляционный момент;
- коэффициент корреляции.



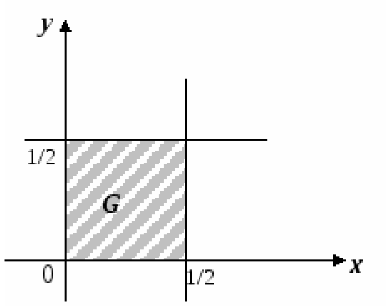
Решение. Для нахождения параметра A воспользуемся формулой

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 1.$$

Тогда

$$\iint_D Axy^2dxdy = A\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} y^2dy = \frac{A}{3}\int_0^1 x\left(y^3\Big|_0^{1-x}\right)dx =$$

$$= \frac{A}{3}\int_0^1 x(1-x)^3dx = \frac{A}{60} \Rightarrow \frac{A}{60} = 1 \Rightarrow A = 60.$$



Получим:

$$f(x,y) = \begin{cases} 60xy^2, \text{ если } (x,y)\in D; \\ 0, \text{ если } (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найдём теперь вероятность попадания двумерной случайной величины (X,Y) в плоскую область G:

$$P((X,Y)\in G) \overset{def}{=} \iint_G f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_G 60xy^2dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} 60xdx\int_0^{\frac{1}{2}} y^2dy = \frac{15}{48} \approx 0{,}3125.$$

Далее, найдём одномерные плотности распределения:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 60xy^2dy = 20x, \quad x\in[\,0;1\,];$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 60xy^2dx = 30y^2, \quad y\in[\,0;1\,].$$

Итак:

$$f_1(x) = \begin{cases} 20x, \text{ если } x\in[0;1], \\ 0, \text{ если } x\notin[0;1]. \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 30y^2, \text{ если } y\in[0;1], \\ 0, \text{ если } y\notin[0;1]. \end{cases}$$

Найдём математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y[1]:

$$M(X) = \iint_D xf(x,y)dxdy = \iint_D x60xy^2dxdy = \frac{1}{3};$$

$$M(Y) = \iint_D yf(x,y)dxdy = \iint_D y60xy^2dxdy = \frac{1}{2}.$$

Далее

$$M(X^2)=\iint_D x^2 f(x,y)dxdy=\iint_D 60x^3y^2dxdy=\frac{1}{7};$$

$$M(Y^2)=\iint_D y^2 f(x,y)dxdy=\iint_D 60xy^4dxdy=\frac{2}{7};$$

$$M(XY)=\iint_D xy\ f(x,y)dxdy=\iint_D 60x^2y^3dxdy=\frac{1}{7}.$$

Тогда

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{1}{7}-\frac{1}{9}=\frac{2}{63},$$

$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=\frac{2}{7}-\frac{1}{4}=\frac{1}{28},$$

$$\mu_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{42}.$$

Так как $\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2}{63}};\quad \sigma_y=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{\frac{1}{28}}$, то нетрудно вычислить

$$r_{xy}\overset{def}{=}\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-\frac{1}{42}}{\sqrt{\frac{2}{63}\cdot\frac{1}{28}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\approx-0{,}71$$

.

1.6 Лекция 9 (Л-9) (2 ч.)

Тема: Генеральная и выборочная совокупность.

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Статистический материал и его первичная обработка. Эмпирические законы распределения. Полигон частот, гистограмма.
2. Числовые характеристики выборки. Точечные оценки выборочных характеристик.
3. Интервальные оценки, их свойства. Метод доверительных интервалов при заданных условиях.
4. Метод моментов

1.6.2. Краткое содержание вопросов:

1. Статистический материал и его первичная обработка. Эмпирические законы распределения. Полигон частот, гистограмма.

Предметом математической статистики является изучение случайных событий и случайных величин по результатам наблюдений. Совокупность предметов или явлений, объединенных каким-либо общим признаком, называется ***статистической совокупностью***. Результатом наблюдений над статистической совокупностью являются ***статистические данные*** **–** сведения о том, какие значения принял в итоге наблюдений интересующий нас признак (случайная величина X).

Обработка статистических данных методами математической статистики приводит к установлению определенных закономерностей, присущих массовым явлениям. При этом ***точность*** статистических выводов повышается с ростом числа наблюдений.

Статистические данные, как правило, представляют собой ряд значений $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ некоторой случайной величины. Обработка этого ряда значений представляет собой первый этап исследования случайной величины.

Первая задача математической статистики – указать ***способы сбора и группировки статистических данных***, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Второй задачей математической статистики является разработка ***методов анализа*** статистических данных в зависимости от целей исследования. К этой задаче относятся:

- Оценка неизвестной ***вероятности события***; оценка неизвестной ***функции распределения***; оценка ***параметров распределения***, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и т.п.
- Проверка статистических гипотез о виде ***неизвестного*** распределения или о ***величине параметров распределения***, вид которого известен.

В современной математической статистике есть много общего с ***наукой о принятии решений в условиях неопределенности***, так как она разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в процессе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие аналогичные задачи.

Пусть требуется изучить совокупность ***однородных*** объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, для партии деталей качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали.

В принципе, возможно проведение сплошного обследования, т.е. обследование всех объектов. На практике такое обследование применяется редко, например,
- из–за большого числа объектов
- из–за дороговизны проведения операции контроля,
- из–за того, что контроль часто связан с разрушением объекта (проверка электролампы на долговечность ее работы), и т.д.

В таких случаях случайно отбирается и изучается **ограниченное** число объектов из совокупности.

Выборочной совокупностью или ***случайной выборкой*** называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отбирается для обследования 100, то объем генеральной совокупности N=1000, а объем выборки n = 100.

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и исследован, его можно возвратить или не возвращать в генеральную совокупность. В связи с этим выборки подразделяются на ***повторные*** и ***бесповторные***.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность. При ***бесповторной*** выборке отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, т.е. выборка должна быть репрезентативной (представительной). В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем выборки достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборкой стирается.

На практике применяются различные способы отбора, которые можно подразделить на два вида:
- Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся : а) простой случайный бесповторный отбор и б) простой случайный повторный отбор.
- Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся: а) ***типический отбор***, б) ***механический отбор*** и в) ***серийный отбор***.

Простым случайным называют отбор, при котором объекты извлекаются по одному из генеральной совокупности. Осуществить такой отбор для генеральной совокупности из N объектов можно, например, посредством записи на карточках номеров от 1 до N, последующем перемешиванием карточек и выниманием их наугад. При этом обследованию подлежат объекты, имеющие номера, совпадающие с номерами карточек. Если карточки возвращаются в пачку, то имеем простую случайную повторную выборку, в противном случае – простую бесповторную. При большом объеме генеральной совокупности более рациональным является использование таблиц случайных чисел. Например, чтобы выбрать 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают 50 чисел подряд; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если случайное число таблицы превосходит число N, такое число пропускают. При проведении бесповторной выборки пропускают также случайные числа, уже встречавшиеся раньше.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если детали изготовлены на нескольких станках, то отбор производят из продукции каждого станка в отдельности.

Механическим называют отбор, при котором генеральная совокупность механически делится на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы выбирается один объект. Например, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, если изделия производятся большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Этим видом отбора пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

На практике часто применяют ***комбинированный отбор***, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение исследуемого параметра x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 - n_2 раз и т.д. При этом $\sum_i n_i = n$ объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют ***вариантами***, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке – ***вариационным рядом***. Числа наблюдений называют ***частотами,*** а их отношения к объему выборки n_i/n - ***относительными частотами. Вариационный ряд*** можно представить таблицей:

X	x_1	x_2	…..	x_m
n	n_1	n_2	….	n_m

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им относительных частот. Статистическое распределение можно представить как

X	x_1	x_2	…..	x_m
w	w_1	w_2	….	w_m

где относительные частоты $w_k = \frac{n_k}{n}$.

Заметим, что в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их ***вероятностями,*** а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми ***вариантами*** и их ***частотами*** или ***относительными частотами***.

Приведенный способ представления статистических данных применяют в случае дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин удобнее разбить отрезок [a,b] возможных значений случайной величины на частичные полуинтервалы $\Delta_k = [a_{k-1}, a_k), (k = 1, \dots, m)$ (Δ_m замкнут также и справа) с помощью некоторой системы точек $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$. Часто разбиение [a,b] производят на равные части, тогда $\Delta_k = [a + (k-1)h, a + kh), k = 1, \dots, m$, где $h = \frac{b-a}{m}$

В качестве частот n_k теперь надо брать количество наблюдаемых значений, попавших на каждый из частичных интервалов Δ_k. Вариационный ряд имеет в таком случае вид

X	Δ_1	Δ_2	…..	Δ_m
n	n_1	n_2	….	n_m

а статистическое распределение –

X	Δ_1	Δ_2	…..	Δ_m
n	w_1	w_2	….	w_m

Число интервалов k часто выбирают на основании формулы Стерджерса $k = 1 + 1{,}4 \ln n$.

Графически статистическое распределение представляется в частности, с помощью ***полигона*** и ***гистограммы***.

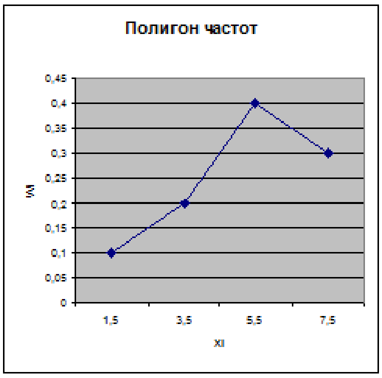
Полигоном частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i и соединяют точки $(x_i; n_i)$ отрезками прямых.

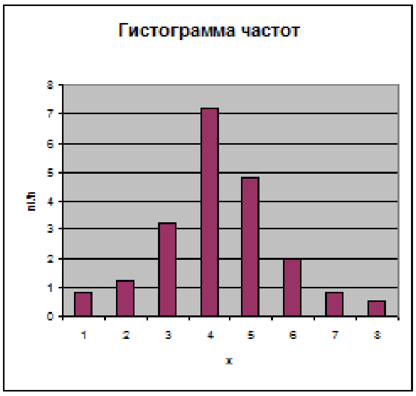
Полигон относительных частот строится аналогично, за исключением того, что на оси ординат откладываются относительные частоты w_i.

В случае непрерывного признака строится ***гистограмма***, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i - сумму частот вариант, попавших в i – й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которой служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i / h. Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии (высоте) n_i / h. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. ***объему выборки***.

В случае гистограммы ***относительных*** частот по оси ординат откладываются относительные частоты W_i, на оси абсцисс – частичные интервалы, над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на высоте W_i / h. Площадь i-го прямоугольника равна относительной частоте вариант W_i, попавших в i-й интервал. Поэтому площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть ***единице***.





2. Числовые характеристики выборки. Точечные оценки выборочных характеристик.

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X. Обозначим через n_x число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x и через n – общее число наблюдений. Очевидно, относительная частота события X < x равна n_x / n и является функцией x. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события X < x. Таким образом, по определению $F^*(x) = n_x / n$,где n_x - число вариант, меньших x, n – объем выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения выборки, функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют **теоретической функцией распределения.** Различие между этими функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет **вероятность** события X < x, тогда как эмпирическая – **относительную частоту** этого же события.

При росте n относительная частота события X < x, т.е. $F^*(x)$ стремится по вероятности к вероятности $F(x)$ этого события.

Иными словами: $\lim\limits_{n \to \infty} P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1 \qquad (\varepsilon > 0)$

Свойства эмпирической функции распределения:

1) Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0,1]

2) $F^*(x)$ - неубывающая функция

3) Если x_1- наименьшая варианта, то $F^*(x)$= 0 при $x \le x_1$, если x_k - наибольшая варианта, то $F^*(x)$=1 при $x > x_k$.

Эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Пример. Построим эмпирическую функцию по распределению выборки:

Варианты x_i	2	6	10
Частоты n_i	12	18	30

Найдем объем выборки: 12+18+30=60. Наименьшая варианта равна 2, поэтому $F^*(x)$=0 при x £ 2. Значение x<6, т.е. $x_1 = 2$, наблюдалось 12 раз, следовательно, $F^*(x)$=12/60=0,2 при 2< x £6. Аналогично, значения X < 10, т.е. $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$ наблюдались 12+18=30 раз, поэтому $F^*(x)$=30/60 =0,5 при 6< x £10. Так как x=10 – наибольшая варианта, то $F^*(x)$=1 при x> 10. таким образом, искомая эмпирическая функция имеет вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ 0{,}2 & 2 < x \le 6 \\ 0{,}5 & 6 < x \le 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

Важнейшие свойства статистических оценок

Пусть требуется изучить некоторый количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, **какое именно** распределение имеет признак и необходимо оценить параметры, которыми оно определяется. Например, если изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то нужно оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение; если признак имеет распределение Пуассона – то необходимо оценить параметр l.

Обычно имеются лишь данные выборки, например, значения количественного признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные в результате n независимых наблюдений. Рассматривая $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можно сказать, что ***найти статистическую оценку неизвестного параметра теоретического распределения – значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин, которая дает приближенное значение оцениваемого параметра.*** Например, для оценки математического ожидания нормального распределения роль функции выполняет среднее арифметическое $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$

Для того чтобы статистические оценки давали корректные приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять некоторым требованиям, среди которых важнейшими являются требования ***несмещенности*** и ***состоятельности*** оценки.

Пусть Θ^*- статистическая оценка неизвестного параметра Θ теоретического распределения. Пусть по выборке объема n найдена оценка Θ_1^*. Повторим опыт, т.е. извлечем из генеральной совокупности другую выборку того же объема и по ее данным получим другую оценку Θ_2^*. Повторяя опыт многократно, получим различные числа $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots \Theta_k^*$. Оценку Θ^* можно рассматривать как случайную величину, а числа $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots \Theta_k^*$ - как ее возможные значения.

Если оценка Θ^* дает приближенное значение Θ **с избытком**, т.е. каждое число Θ_i^* $(i = 1, \ldots, k)$ больше истинного значения Θ то, как следствие, математическое ожидание (среднее значение) случайной величины Θ^* больше, чем Θ: $M(\Theta^*) > \Theta$. Аналогично, если Θ^* дает оценку **с недостатком**, то $M(\Theta^*) < \Theta$.

Таким образом, использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, привело бы к систематическим (одного знака) ошибкам. Если, напротив, $M(\Theta^*) = \Theta$, то это гарантирует от систематических ошибок.

Несмещенной называют статистическую оценку Θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ при любом объеме выборки $M(\Theta^*) = \Theta$.

Смещенной называют оценку, не удовлетворяющую этому условию.

Несмещенность оценки еще не гарантирует получения хорошего приближения для оцениваемого параметра, так как возможные значения Θ_i^* могут быть ***сильно рассеяны*** вокруг своего среднего значения, т.е. дисперсия $D(\Theta_*)$ может быть значительной. В этом случае найденная по данным одной выборки оценка, например, Θ_1^*, может оказаться значительно удаленной от среднего значения $\overline{\Theta^*}$,а значит, и от самого оцениваемого параметра.

Эффективной называют статистическую оценку, которая, при заданном объеме выборки n, имеет ***наименьшую возможную дисперсию***.

При рассмотрении выборок большого объема к статистическим оценкам предъявляется требование ***состоятельности***.

Состоятельной называется статистическая оценка, которая при n®¥ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Например, если дисперсия несмещенной оценки при n®¥ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n.

Выборочным средним $\overline{x_B}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то $\overline{x_B} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$.

Если значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то $\overline{x_B} = (n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k)/n = (1/n)\sum_{i=1}^{k} n_ix_i$.

Выборочное среднее, найденное по данным одной выборки, равно определенному числу. При извлечении других выборок того же объема выборочное среднее будет меняться от выборки к выборке. То есть выборочное среднее можно рассматривать как случайную величину и говорить о его распределениях (теоретическом и эмпирическом) и о числовых характеристиках этого распределения (например, о математическом ожидании и дисперсии).

Для характеристики рассеяния наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг среднего значения $\overline{x_B}$ вводится ***выборочная дисперсия***. ***Выборочной дисперсией*** D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x_B}$. Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то $D_B = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^2$.

Если значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то $D_B = (1/n)\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_B})^2$.

Аналогично выборочным среднему и дисперсии определяются ***генеральные среднее и дисперсия***, характеризующие генеральную совокупность в целом. Для расчета этих характеристик достаточно в вышеприведенных соотношениях заменить объем выборки n на объем генеральной совокупности N.

Фундаментальное значение для практики имеет нахождение среднего и дисперсии признака ***генеральной совокупности*** по соответствующим известным ***выборочным*** параметрам. Можно показать, что ***выборочное среднее*** является несмещенной состоятельной оценкой генерального среднего. В то же время, несмещенной состоятельной оценкой генеральной дисперсии оказывается не выборочная дисперсия D_B, а так называемая «***исправленная» выборочная дисперсия***, равная $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$.

Таким образом, в качестве оценок генерального среднего и дисперсии в математической статистике принимают выборочное среднее и исправленную выборочную дисперсию.

3. Интервальные оценки, их свойства. Метод доверительных интервалов при заданных условиях.

До сих пор мы рассматривали ***точечные*** оценки, т.е. такие оценки, которые определяются одним числом. При выборке ***малого объема*** точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, что приводит к грубым ошибкам. В связи с этим при небольшом объеме выборки пользуются интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, определяющуюся двумя числами – концами интервала. Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика Θ^* служит оценкой неизвестного параметра Θ. Очевидно, Θ^* тем точнее определяет параметр Θ, чем меньше абсолютная величина разности $|\Theta - \Theta^*|$. Другими словами, если $\delta > 0$ и $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, то чем меньше d, тем точнее оценка. Таким образом, положительное число d характеризует ***точность оценки***.

Статистические методы ***не позволяют*** утверждать, что оценка Θ^* удовлетворяет неравенству $|\Theta - \Theta^*| < \delta$; можно говорить лишь о вероятности, с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность g, с которой осуществляется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$. Обычно надежность оценки задается заранее, причем в качестве g берут число, близкое к единице – как правило 0,95; 0,99 или 0,999.

Пусть вероятность того, что $|\Theta-\Theta^*|<\delta$ равна g: $P\left[|\Theta-\Theta^*|<\delta\right]=\gamma$.

Заменим неравенство $|\Theta-\Theta^*|<\delta$ равносильным ему двойным неравенством

$P\left[\Theta^*-\delta<\Theta<\Theta^*+\delta\right]=\gamma$.

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\Theta^*-\delta,\ \Theta^*+\delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Q, равна γ.

Таким образом, **доверительным** называют интервал $(\Theta^*-\delta,\ \Theta^*+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Величину 1 - g = a называют уровнем значимости или вероятностью ошибки.

Для построения интервальной оценки параметра необходимо знать закон его распределения как случайной величины

Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при *известной* дисперсии.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение s этого распределения ***известно***. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочному среднему $\bar{x}$. Найдем доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надежностью γ.

Будем рассматривать выборочное среднее $\bar{x}$ как случайную величину $\bar{X}$ (т.к. $\bar{x}$ меняется от выборки к выборке) и выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ - как одинаково распределенные независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_N$ (эти числа также меняются от выборки к выборке). Другими словами, математическое ожидание каждой из этих величин равно a и среднее квадратическое отклонение - s. Так как случайная величина X распределена нормально, то и выборочное среднее $\bar{X}$ также распределено нормально. Параметры распределения $\bar{X}$ равны $M(\bar{X})=a$; $\sigma(\bar{X})=\sigma/\sqrt{n}$.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение $P(|\bar{X}-a|<\delta)=\gamma$,

где γ - заданная надежность. Используем формулу $P(|X-a|<\delta)=2\,\Phi(\delta/\sigma)$.

Заменим X на $\bar{X}$ и s на $\sigma(\bar{X})=\sigma/\sqrt{n}$ и получим

$P(|\bar{X}-a|<\delta)=2\,\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma)=2\Phi(t)$

где $t=\delta\sqrt{n}/\sigma$. Выразив из последнего равенства δ, получим $P(|\bar{X}-a|<t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t)$

Так как вероятность P задана и равна γ, окончательно имеем

$P(\bar{x}-t\sigma/\sqrt{n}<a<\bar{x}+t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t)=\gamma$.

Таким образом, с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\bar{x}-t\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x}+t\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр a, причем точность оценки равна $t\sigma/\sqrt{n}$.

Число t определяется из равенства $\Phi(t)=\gamma/2$; по таблице функции Лапласа находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\gamma/2$.

Отметим два момента:

1) при возрастании **объема** выборки n число δ убывает и, следовательно, точность оценки увеличивается,

2) увеличение **надежности** оценки $\gamma/2=\Phi(t)$ приводит к увеличению t (так как функция Лапласа возрастающая функция) и, следовательно, к возрастанию δ, то есть ***увеличение надежности*** оценки влечет за собой ***уменьшение ее точности***.

Если требуется оценить математическое ожидание с наперед заданной точностью δ и надежностью γ, то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по формуле $n=t^2\sigma^2/\delta^2$, следующей из равенства $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$.

Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при *неизвестной* дисперсии

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение s этого распределения ***неизвестно***. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание с помощью доверительных интервалов.

Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину $T=\dfrac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n}}$, которая имеет распределение Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы. В последнем выражении - $\bar{X}$ - выборочное среднее, S - исправленное среднее квадратическое отклонение, n - объем выборки; возможные значения случайной величины T мы будем обозначать через t. Плотность распределения Стьюдента имеет вид

$$S(t,n)=B_n\left[1+\frac{t^2}{n-1}\right]^{-n/2}$$

, где B_n некоторая постоянная, выражающаяся через гамма – функцию.

Несколько слов о распределении Стьюдента. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ - независимые стандартные нормальные величины. Тогда случайная величина

$$t_n=\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}$$

имеет ***распределение Стьюдента*** (В. Госсет) с n степенями свободы. При росте числа степеней свободы распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению и уже при $n\geq 30$ использование нормального распределения дает хорошие результаты.

Как видно, распределение Стьюдента определяется параметром n – объемом выборки (или, что то же самое – числом степеней свободы $k=n-1$) и не зависит от неизвестных параметров a, σ. Поскольку $S(t,n)$ - четная функция от t, то вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right|<\gamma$ определяется следующим образом: $P\left(\left|\frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right|<t_\gamma\right)=2\int_0^{t_\gamma}S(t,n)dt=\gamma$.

Заменив неравенство в круглых скобках двойным неравенством, получим выражение для искомого доверительного интервала $P\left(\bar{X}-\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}<a<\bar{X}+\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$

Итак, с помощью распределения Стьюдента найден доверительный интервал $\bar{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ. По таблице распределения Стьюдента и заданным n и γ можно найти t_γ и используя найденные по выборке $\bar{x}$ и s, можно определить доверительный интервал.

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема n = 16 найдены генеральное среднее $\bar{x}=20,2$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s=0,8$. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью 0,95.

Решение. Найдем t_γ по таблице распределения Стьюдента, используя значения $\gamma=0.95;\ n=16$. Этот параметр оказывается равным 2,13. Найдем границы доверительного интервала:

$$\bar{x}-t_\gamma\ s/\sqrt{n}=20,2-2,13\cdot0,8/\sqrt{16}=19.77$$

$$\bar{x}-+t_\gamma\ s/\sqrt{n}=20,2+2,13\cdot0,8/\sqrt{16}=20.63$$

То есть с надежностью 0,95 неизвестный параметр a заключен в доверительном интервале $19,77<a<20,63$

Можно показать, что при возрастании объема выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому практически при n > 30 можно вместо него пользоваться нормальным распределением. При ***малых*** n это приводит к значительным ошибкам.

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения s нормального распределения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально и требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение s по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению s. Найдем доверительные интервалы, покрывающие параметр s с заданной надежностью γ.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$P(|\sigma-s|\ \ \delta\ )=\gamma$ или $P(s-\delta<\sigma<s+\delta)=\gamma$

Преобразуем двойное неравенство $s-\delta<\sigma<s+\delta$ в равносильное неравенство $s(1-\delta/s)<\sigma<s(1+\delta/s)$ и обозначим d / s = q. Имеем $s(1-q)<\sigma<s(1+q)$ (A)

и необходимо найти q. С этой целью введем в рассмотрение случайную величину $\chi=\frac{S}{\sigma}\sqrt{n-1}$

Оказывается, величина $\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$ распределена по закону χ^2 с n – 1 степенями свободы.

Несколько слов о распределении хи-квадрат. Если $\xi_i,\ i=1,2,\ldots,n$ - независимые стандартные нормальные величины, то говорят, что случайная величина $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ имеет распределение ***хи-квадрат*** с n степенями свободы.

Плотность распределения с имеет вид

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-1} e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Это распределение не зависит от оцениваемого параметра s, а зависит только от объема выборки n.

Преобразуем неравенство (А) так, чтобы оно приняло вид $\chi_1 < \chi < \chi_2$. Вероятность этого неравенства равна заданной вероятности γ, т.е. $\int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi, n)d\chi = \gamma$.

Предполагая, что q < 1, перепишем (А) в виде

$$\frac{1}{S(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{S(1-q)},$$

далее, умножим все члены неравенства на $S\sqrt{n-1}$:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{(1+q)} < \frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{(1-q)} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{n-1}}{(1+q)} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{(1-q)}.$$

Вероятность того, что это неравенство, а также равносильное ему неравенство (А) будет справедливо, равна

$$\int_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\sqrt{n-1}/(1-q)} R(\chi, n)d\chi = \gamma.$$

Из этого уравнения можно по заданным n и γ найти q, используя имеющиеся расчетные таблицы. Вычислив по выборке s и найдя по таблице q, получим искомый интервал (А1), покрывающий s с заданной надежностью γ.

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема n = 25 найдено исправленное среднее квадратическое отклонение s = 0.8. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение s с надежностью 0,95.

Решение. По заданным γ и σ по таблице находим значение q = 0.32. Искомый доверительный интервал есть

$$0{,}8(1-0{,}32) < \sigma < 0.8(1+0.32).$$

Мы предполагали, что q < 1. Если это не так, то мы придем к соотношениям

$$\sqrt{n-1}/(1+q) < \chi < \infty,$$

и значение q >1 может быть найдено из уравнения

$$\int\limits_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\infty} R(\chi, n)\, d\chi = \gamma$$

4. Метод моментов

Параметрическое оценивание закона распределения

Результаты предварительной обработки наблюдений случайной величины, дополненные сведениями о сущности изучаемого явления, зачастую оказываются достаточными для того, чтобы сформулировать гипотезу о модели закона распределения изучаемой случайной величины, нормальный ли этот закон, биномиальный или какой-либо другой. Используя наблюдения, можно найти оценки параметров предполагаемой модели, т.е. оценки входящих в модель числовых характеристик. Подставив в модель вместо параметров найденные оценки, получим оценку предполагаемой модели закона распределения, которая называется **параметрической**. Оценивание закона распределения, не требующее предварительного выбора его модели и оценивания входящих в неё параметров, называется **непараметрическим.** Примерами непараметрических оценок неизвестного закона распределения являются вариационный ряд, выборочная функция распределения и выборочная плотность распределения.

Пример (*). Дано случайное распределение успеваемости 100 студентов-заочников, сдававших четыре экзамена:

Число сданных экзаменов	0	1	2	3	4
Число студентов	1	1	3	35	60

Здесь случайной величиной является число сданных экзаменов среди четырёх. Обозначим её X. Установим закон распределения этой величины.

Построим сначала его непараметрическую оценку. Величина X – дискретная. Дискретный вариационный ряд, заданный столбцами 2 и 4 табл. 1, даёт непараметрическую оценку закона распределения числа сданных экзаменов среди четырёх сдаваемых.

Теперь сформулируем гипотезу о модели закона распределения случайной величины X – числе сданных экзаменов среди четырёх сдаваемых. Процесс сдачи четырёх экзаменов представим как четыре испытания, относительно которых сделаем следующие допущения:

Таблица 1.

	Число сданных экзаменов x_i	Число студентов m_i	Частость $p_i{*} = \frac{m_i}{n}$	$p_i^{теор} = \tilde{N}_4^{x_i} \cdot 0{,}88^{x_i} \cdot 0{,}12^{4-x_i}$	$m_i^{теор} = np_i^{теор}$	$(m_i - m_i^{теор})^2$	$(m_i - m_i^{теор})^2 : m_i^{теор}$
	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	0,01	0,00021	0,021		
	1	1 5	0,01	0,00608	0,608 7,32	5,382	0,735
	2	3	0,03	0,06691	6,691		
	3	35	0,35	0,32711	32,711	5,239	0,160
	4	60	0,60	0,59969	59,969	0,001	0,000
Итого		n = 100	1,00	1,00000			0,895

- эти испытания независимы, т.е. вероятность сдачи любым студентом любого экзамена не зависит от того, будет сдано или нет любое количество других экзаменов;

- вероятность сдачи студентом любого отдельно взятого экзамена одна и та же и равна p, а вероятность «несдачи» равна $(1 - p)$.

Конечно, эти допущения могут вызывать некоторые сомнения, но возможно, что они не будут противоречить результатам наблюдений. При этих допущениях мы имеем дело с испытаниями Бернулли и число сданных экзаменов среди четырёх сдаваемых будет иметь биномиальный закон распределения, т.е. вероятность того, что студент сдаст λ экзаменов, равна

$$P(X = x) = C_4^x p^x (1 - p)^{4-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4. \qquad (1)$$

Найдём оценку параметра p, входящего в модель (6). В условиях испытаний Бернулли состоятельной, несмещённой и эффективной оценкой вероятности является частость. В рассматриваемом примере p – вероятность того, что студент сдаст экзамен, поэтому частость p^* этого события, учитывая, что имеются сведения об успеваемости 100 студентов, вычисляем следующим образом:

$$p^* = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i m_i}{4\times 100} = \frac{0\times1+1\times1+2\times3+3\times35+4\times60}{100\times4} = 0{,}88.$$

Так как $\sum_{i=1}^{5} x_i m_i / 100 = \overline{X}$ - это среднее число экзаменов, сданных одним студентом, то p^* можно было бы определить и так:

$$p^* = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\overline{\tilde{O}}}{4} = 0{,}88.$$

Заметим, что если находить оценку параметра p в модели (6) методом максимального правдоподобия и при этом учесть, что число x_i наблюдалось m_i раз, то мы получили бы для p^* такую же формулу, а именно

$$p^*_{\text{мп}} = \sum_{i=1}^{5} x_i m_i /(4n).$$

Подставив в модель (1) вместо параметра p его оценку p^*, получим параметрическую оценку неизвестного закона распределения числа сданных экзаменов, построенную в предположении, что допустима биномиальная модель

$$P(X = x) = C_4^x 0{,}88^x 0{,}12^{4-x}; \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (2)$$

Теоретические вероятности $p_i^{\text{теор}}$ и частоты $m_i^{\text{теор}}$, вычисленные в предположении, что имеет место модель (2), содержатся в столбцах 5 и 6 табл. 5. Поскольку различия между соответствующими числами столбцов 4 и 5 или между числами столбцов 3 и 6 небольшие, можно сделать предварительное заключение о приемлемости биномиальной модели. Графически это заключение подтверждается рисунком, на котором кривая вероятностей $p_i^{\text{теор}}$ близка к кривой частостей p_i^*.

Метод более глубокого обоснования приемлемости той или иной модели называется **критерием согласия**.

1.7 Лекция 10 (Л-10) (2 ч.)

Тема: Оценки статистических параметров распределения

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Статистические гипотезы, ошибки первого и второго рода.
2. Статистические критерии, их виды, мощность критерия.

1.7.2. Краткое содержание вопросов:

1. Статистические гипотезы, ошибки первого и второго рода.

На прошлой лекции мы рассматривали задачу построения доверительных интервалов для неизвестных параметров генеральной совокупности. Сегодня мы продолжим изучение основных задач математической статистики и перейдем к вопросу ***проверки статистических гипотез***.

Проверка статистических гипотез представляет собой важнейший этап процесса принятия решения в управленческой деятельности, позволяя проводить подготовительный этап предстоящих действий с учетом реальных характеристик процесса производства, контроля качества продукции, коммерческой деятельности, и т.п.

Как известно, ***закон распределения*** определяет количественные характеристики генеральной совокупности.

Если закон распределения **неизвестен**, но есть основания предположить, что он имеет определенный вид (например, А), то выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону А. В этой гипотезе речь идет **о виде** предполагаемого распределения.

Часто закон распределения известен, но неизвестны его **параметры**. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр Θ равен определенному значению Θ_0, то может выдвигаться гипотеза $\Theta = \Theta_0$. В этой гипотезе речь идет о **предполагаемой величине параметра** известного распределения.

Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и т. д.

Приведем несколько задач, которые могут быть решены с помощью проверки статистических гипотез.

1. Используется два метода измерения одной и той же величины. Первый метод дает оценки $x_1, x_2, \dots, x_m$ этой величины, второй - $y_1, y_2, \dots, y_n$. Требуется определить, обеспечивают ли оба метода ***одинаковую точность измерений***.

2. Контроль точности работы некоторой производственной системы. Получаемые характеристики выпускаемой продукции характеризуются некоторым разбросом (дисперсией). Обычно величина этого разброса не должна превышать некоторого заранее заданного уровня. Требуется определить, обеспечивает ли система (например, линия сборки или отдельный станок) ***заданную точность***.

Итак**, статистической** называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Примеры статистических гипотез: генеральная совокупность распределена по закону Пуассона; дисперсии двух нормальных распределений равны между собой.

Наряду с выдвинутой гипотезой всегда рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то принимается противоречащая гипотеза.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Альтернативной (*конкурирующей*)называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой. Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание нормального распределения равно 5, то альтернативная гипотеза, например, может состоять в предположении, что $a \neq 5$. Кратко это записывают так: $H_0: a=5;\ H_1: a \neq 5$.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, если λ - параметр показательного распределения, то гипотеза $H_0: \lambda = 3$ - простая. ***Сложной*** называют гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза $H:\lambda>3$ состоит из бесконечного множества простых гипотез вида $H_i:\lambda=b_i$, где b_i - любое число, большее 3.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Так как проверку производят статистическими методами, то ее называют ***статистической***. В итоге ***статистической проверки гипотезы*** в двух случаях может быть принято неправильное решение, т.е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет ***отвергнута правильная*** гипотеза. ***Ошибка второго рода*** состоит в том, что будет ***принята неправильная*** гипотеза. Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия.

Естественно, правильное решение может быть принято также в двух случаях, когда ***принимается правильная*** гипотеза или ***отвергается неверная*** гипотеза.

Вероятность совершения ошибки ***первого рода*** называют ***уровнем значимости*** и обозначают α. Чаще всего уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Если, например, принят уровень значимости 0,05, то это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно.

2. Статистические критерии, их виды, мощность критерия.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину (K), которая служит для проверки нулевой гипотезы. Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия K принимают отношение исправленных выборочных дисперсий $F=s_1^2/s_2^2$.

Очевидно, что эта величина случайная, т.к. в различных опытах исправленные дисперсии принимают различные, заранее неизвестные значения.

Наблюдаемым значением критерия $K_{набл}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если в вышеприведенном случае $s_1^2=20,\ s_2^2=5$,то $K_{набл}$ = 20/5 = 4.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два ***непересекающихся*** подмножества, одно из которых содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза ***отвергается***, а другое – при которых она ***принимается***.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу ***отвергают***.

Соответственно, о***бластью принятия гипотезы*** (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу ***принимают***.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

Так как критерий K – одномерная случайная величина, то все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу и, соответственно, должны существовать точки, разделяющие критическую область и область принятия гипотезы. Такие точки называются ***критическими точками***.

Различают ***одностороннюю*** (***правостороннюю*** и ***левостороннюю***) и ***двустороннюю*** критические области.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ - положительное число.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ - отрицательное число.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами $K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$ или равносильным неравенством $|K| > k_{кр}$. Различия между вариантами критических областей иллюстрирует следующий рисунок.

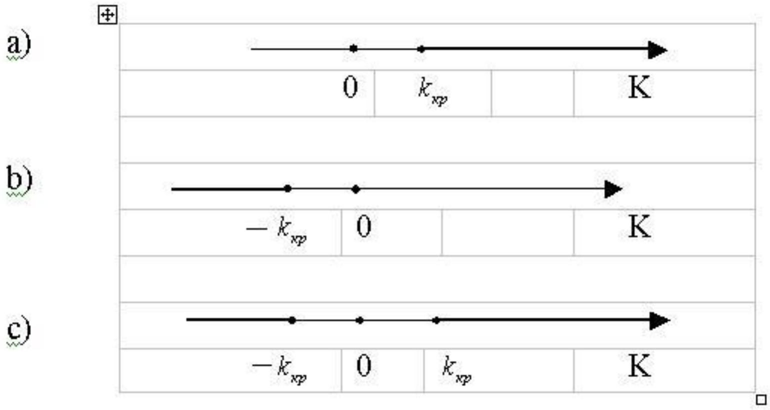


Рис. 1. Различные варианты критических областей а) правосторонняя, b) левосторонняя, с) двусторонняя

Мы подошли к вопросу об ***этапах проверки статистических гипотез***.

Выделим следующие ***этапы***:

- Формулируется нулевая гипотеза H_0
- Определяется критерий K, по значениям которого можно будет принять или отвергнуть H_0 и выбирается уровень значимости α
- По уровню значимости определяется критическая область
- По выборке вычисляется наблюдаемое значение критерия K, определяется, принадлежит ли оно критической области и на основании этого принимается гипотеза H_0 или альтернативная гипотеза H_1.

1.8 Лекция 11-12 (Л-11-12) (4 ч.)

Тема: Статистические критерии, их виды

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Критерий Пирсона.
2.Выравнивание статистических рядов.

1.8.2. Краткое содержание вопросов:

1. Критерий Пирсона.

Если закон распределения неизвестен, но есть основания предполагать, что он имеет определенный вид A, то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону A. Проверка этой гипотезы производится при помощи специально подобранной случайной величины – ***критерия согласия***.

Таким образом, к***ритерием согласия*** называют критерий проверки гипотезы о ***предполагаемом законе неизвестного распределения***.

Имеется несколько критериев согласия, причем наиболее часто используемым является критерий согласия К. Пирсона («хи квадрат»).

Пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение

Варианты…………………… x_i	x_1 x_2 …… x_s
Эмпирические частоты……. n_i	n_1 n_2 …… n_s

Для определенности рассмотрим сначала случай проверки статистической гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n_i^0. При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum_i (n_i - n_i^0)^2 / n_i^0 \qquad \text{(A)}$$

Естественно, чем меньше различаются эмпирические и теоретические частоты, тем меньше величина критерия, и, следовательно, он характеризует ***близость*** эмпирического и теоретического распределений.

Доказано, что при n больших распределения случайной величины (А) стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность. Поэтому сам критерий называют ***критерием согласия*** χ^2.

Число степеней свободы определяется из равенства $k = s - r - 1$, где s – число групп (частичных интервалов) выборки, r – число параметров предполагаемого распределения. В частности, если предполагаемое распределение – нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), поэтому число степеней свободы $k = n - 3$.

Построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α: $P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha; k)] = \alpha$.

Таким образом, правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha; k)$, а область принятия нулевой гипотезы – соответственно неравенством $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha; k)$. Обозначим значение критерия, вычисленного по данным наблюдений, через $\chi^2_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы:

Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена нормально, необходимо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \sum_i (n_i - n_i^0)^2 / n_i^0$ и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости а и числу степеней свободы k = n – 3 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha;k)$. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу. В противном случае нулевую гипотезу отвергают, считая, что генеральная совокупность не распределена по нормальному закону.

Отметим два обстоятельства.

- Объем выборки должен быть ***достаточно велик*** (не менее 50). Каждая группа должна содержать не менее 5-8 вариант, а малочисленные группы следует объединять в одну, суммируя частоты.
- Поскольку возможны ошибки первого и второго рода, следует проявлять осторожность. Например, можно повторить опыт, увеличить число наблюдений, построить предварительно график распределения и т.п.

Применение критерия согласия Пирсона не ограничивается случаем нормального распределения. Приведем примеры использования критерия Пирсона.

Пример1. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о распределении по закону Пуассона генеральной совокупности, если по данным выборки объема $n=60$ получен следующий вариационный ряд:

Варианты k		1	2	3	4	5	6	7
Частоты n_k	8	17	16	10	6	2	0	1

Решение: Для расчета теоретических частот используем формулу Пуассона $P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Для оценки параметра λ используем соотношение $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{7}k\cdot n_k=2$

Вычислим $P(0)=0.1353$ $P(1)=0.2707$ $P(2)=0.2707$ $P(3)=0.1804$ $P(4)=0.0902$ $P(5)=0.0361$ $P(6)=0.0120$ $P(7)=0.0034$.

Значение χ^2 равно

$$\chi^2=\sum_{k=0}^{7}\frac{(n_k-n\cdot p_k)^2}{n\cdot p_k}=\frac{(8-60\cdot 0.1353)^2}{60\cdot 0.1353}+\frac{(17-60\cdot 0.2707)^2}{60\cdot 0.2757}+\ldots=0.2.$$

Вычислим число степеней свободы $k=m-s-1=m-2=8-2=6$. По таблице критических точек распределения хи-квадрат при $m=6$ и $\alpha=0.05$ находим $\chi^2_{кр}=12,59$. Так как наблюдаемое значение меньше критического, то наблюдаемые значения согласуются с распределением Пуассона и нулевая гипотеза принимается.

2.Выравнивание статистических рядов.

Рассмотрим задачу «выравнивания» статистического распределения. Порядок решения этой задачи может быть следующим.

1. На основании статистических данных, оформленных в виде интервальной таблицы частот p^*, строят полигон или гистограмму и по внешнему виду этих графиков выдвигают гипотезу (делают предположение) о возможном теоретическом законе распределения случайной величины (кривой распределения).

Замечание. В некоторых случаях вид теоретической кривой распределения выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи.

2. Выясняют, от каких параметров зависит аналитическое выражение выбранной кривой распределения, и находят статистические оценки этих параметров. В этом случае задача выравнивания статистического распределения переходит в задачу рационального выбора тех значений параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями оказывается наилучшим.

Например, если выдвигается гипотеза о нормальном законе распределения $X \sim N(a;\, \sigma)$, то он зависит только от двух параметров: математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ. Их наилучшими статистическими оценками будут соответственно среднее выборочное $\overline{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\tilde{\sigma}$, т. е.

$$a \approx \overline{x},\ \sigma \approx \tilde{\sigma}.$$

3. С учетом выдвинутой гипотезы о законе распределения случайной величины находят вероятности p_i попадания случайной величины в каждый из интервалов, указанных в статистической таблице распределения; записывают их в третьей строке таблицы и сравнивают полученные значения вероятностей p_i с соответствующими заданными частотами p_i^* (для наглядности можно изобразить графически). Проводя такое сравнение, делается приблизительная оценка степени согласования статистического и теоретического распределений. На этом первый этап решения задачи по определению закона распределения случайной величины заканчивается.

Пример. Для разумного планирования и организации работы ремонтных мастерских специальной техники оказалось необходимым изучить длительность ремонтных операций, производимых мастерскими.
Результаты (сгруппированные по интервалам) соответствующего статистического обследования (фиксированы длительности операций в
100 случаях) представлены в таблице:

l_i	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120	120–140
n_i	36	24	16	10	7	4	3

Требуется выровнять это статистическое распределение с помощью показательного закона $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (при $t \geq 0$), где λ – длительность операции в единицу времени.

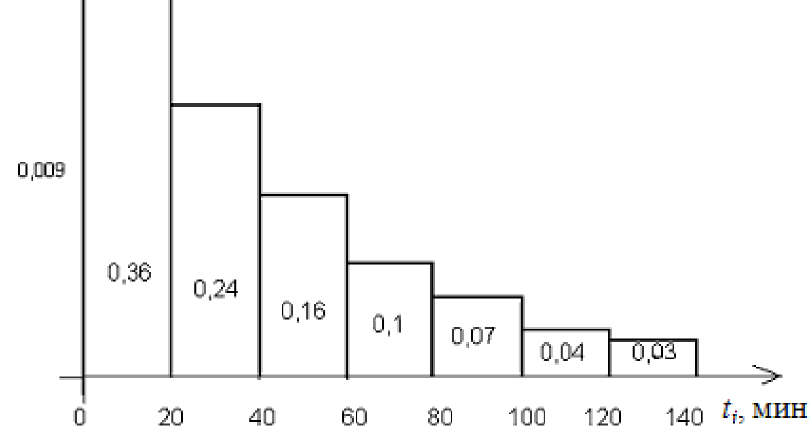
Решение

1. По данной таблице абсолютных частот построим таблицу относительных частот и соответствующую ей гистограмму:

l_i	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120	120–140
p_i^*	0,36	0,24	0,16	0,10	0,07	0,04	0,03

$\sum p_i^* = 0{,}36 + 0{,}24 + 0{,}16\cdot$

Гистограмма относительных частот имеет вид:



Высоты прямоугольников гистограммы равны:

$$\Delta_1 = \frac{0{,}36}{20} = 0{,}018;$$

$$\Delta_2 = \frac{0{,}24}{20} = 0{,}012;$$

$\Delta_3 = \frac{0,16}{20} = 0,008$; $\Delta_4 = \frac{0,10}{20} = 0,005$; $\Delta_5 = \frac{0,07}{20} = 0,0035$; $\Delta_6 = \frac{0,04}{20} = 0,002$; $\Delta_7 = \frac{0,03}{20} = 0,0015$.

2. По внешнему виду гистограммы выдвигаем гипотезу, что случайная величина T (время ремонта) подчиняется показательному закону

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

который зависит только от одного параметра λ (длительность операции в единицу времени).

Параметр $\lambda = \frac{1}{m_i}$, где m_i – математическое ожидание (среднее время ремонта) случайной величины T.

Следовательно, для выравнивания статистического распределения с помощью кривой показательного распределения найдем статистическую оценку параметра m_i:

$$m_i \approx \bar{t} = 10 \cdot 0,36 + 30 \cdot 0,24 + 50 \cdot 0,16 + 70 \cdot 0,1 + 90 \cdot 0,07 + 110 \cdot 0,04 + 130 \cdot 0,03 = 40$$

(числа 10, 30, 50, 70, 90, 110, 130 – это середины интервалов).

Тогда параметр $\lambda = \frac{1}{40}$.

3. Запишем теоретический закон распределения в виде функции плотности вероятности с учетом значения $\lambda = \frac{1}{40}$:

$$f(t) = \frac{1}{40} e^{-\frac{1}{40}t}.$$

По формуле вероятности попадания случайной величины (распределенной по показательному закону) на заданный интервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

найдем теоретические вероятности p_i, попадания случайной величины T в каждый из семи интервалов и сравним их с соответствующими статистическими частотами p_i^*:

$$p_1 = P(0 < T < 20) = e^{-\frac{0}{40}} - e^{-\frac{20}{40}} = e^0 - e^{-0,5} \approx 1 - 0,6 = 0,4;$$

$$p_2 = P(20 < T < 40) = e^{-\frac{20}{40}} - e^{-\frac{40}{40}} = e^{-0,5} - e^{-1} \approx 0,6 - 0,37 = 0,23;$$

$$p_3 = P(40 < T < 60) = e^{-\frac{40}{40}} - e^{-\frac{60}{40}} = e^{-1} - e^{-1,5} \approx 0,37 - 0,22 = 0,15;$$

$$p_5 = P(60 < T < 80) = e^{-\frac{60}{40}} - e^{-\frac{80}{40}} = e^{-1,5} - e^{-2} \approx 0,22 - 0,14 = 0,08;$$

$$p_5 = P(80 < T < 100) = e^{-\frac{80}{40}} - e^{-\frac{100}{40}} = e^{-2} - e^{-2,5} \approx 0,14 - 0,08 = 0,06;$$

$$p_5 = P(100 < T < 120) = e^{-\frac{100}{40}} - e^{-\frac{120}{40}} = e^{-2,5} - e^{-3} \approx 0,08 - 0,05 = 0,03;$$

$$p_7 = P(120 < T < 140) = e^{-\frac{120}{40}} - e^{-\frac{140}{40}} = e^{-3} - e^{-3,5} \approx 0,05 - 0,03 = 0,02.$$

Для удобства сравнения теоретических вероятностей p_i с частотами p_i^* запишем полученные вероятности p_i в третью строку таблицы:

l_i	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120	120–140
p_i^*	0,36	0,24	0,16	0,10	0,07	0,04	0,03
p_i	0,40	0,23	0,15	0,08	0,06	0,03	0,02

Замечаем, что расхождение между опытными частотами p_i^* и теоретическими вероятностями p_i незначительны. Следовательно, вполне допустима гипотеза о показательном законе распределения изучаемой случайной величины T.

4. Построим на одном графике с гистограммой выравнивающую ее кривую распределения f(t). Для этого вычислим значения

$$f(t)=\frac{1}{40}e^{-\frac{1}{40}t}$$

например, на правых концах интервалов:

$$f(20)=\frac{1}{40}e^{-\frac{1}{40}\cdot 20}=\frac{1}{40}e^{-0,5}\approx 0,015;\quad f(40)=\frac{1}{40}e^{-\frac{1}{40}\cdot 40}=\frac{1}{40}e^{-1}\approx 0,009;$$

$$f(60)=\frac{1}{40}e^{-\frac{1}{40}\cdot 60}=\frac{1}{40}e^{-1,5}\approx 0,006;\quad f(80)=\frac{1}{40}e^{-\frac{1}{40}\cdot 80}=\frac{1}{40}e^{-2}\approx 0,004;$$

$$f(100)=\frac{1}{40}e^{-\frac{1}{40}\cdot 100}=\frac{1}{40}e^{-2,5}\approx 0,002;\quad f(120)=\frac{1}{40}e^{-\frac{1}{40}\cdot 120}=\frac{1}{40}e^{-3}\approx 0,0013;$$

$$f(140)=\frac{1}{40}e^{-\frac{1}{40}\cdot 140}=\frac{1}{40}e^{-3,5}\approx 0,0008.$$

Построим график полученной кривой распределения f(t), в той же системе координат, что и гистограмма относительных частот.

Из рисунка видно, что теоретическая кривая f(t) сохраняет в основном существенные особенности статистического распределения.

1.9Лекция 13-14 (Л-13-14) (4 ч.)

Тема: Стохастическая зависимость, функция регрессии.

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Виды зависимостей между величинами. Функция регрессии.
2. Корреляционное отношение, коэффициент детерминации. Корреляционная зависимость.

1.9.2. Краткое содержание вопросов:

1. Виды зависимостей между величинами. Функция регрессии.

Две или несколько случайных величин могут быть связаны либо ***функциональной***, либо ***статистической*** (***стохастической***) зависимостью.

В экономике строгая функциональная зависимость реализуется редко, так как экономические показатели подвержены действию случайных, часто неконтролируемых факторов. Чаще имеет место так называемая ***статистическая*** зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение ***распределения*** другой. В частности, при изменении одной из величин может изменяться ***среднее значение*** другой.

Пример статистической зависимости: урожай зерна Y зависит от количества внесенных удобрений X . С одинаковых по площади участков при равных количествах внесенных удобрений снимают разные урожаи. Это связано с влиянием случайных факторов (осадки, температура воздуха и др.). Вместе с тем, средний урожай зависит от количества удобрений, т.е. Y связано с X статистической зависимостью.

При изучении статистических зависимостей различают ***корреляцию*** и ***регрессию***. Основным методом исследования статистических зависимостей выступает ***корреляционно – регрессионный*** анализ.

Корреляционный анализ состоит в определении ***степени связи*** между случайными величинами.

Регрессионный анализ устанавливает ***формы зависимости*** между случайной величиной Y (зависимой переменной) и значениями одной или нескольких переменных величин X (независимыми переменными).

Одна из наиболее распространенных задач статистического исследования состоит в изучении связи между наблюдаемыми переменными. Знание взаимосвязей отдельных признаков дает возможность прогнозировать развитие ситуации при изменении конкретных характеристик объекта исследования. Основное содержание экономической политики, в конечном счете, может быть сведено к регулированию экономических переменных, осуществляемому на базе выявленной информации об их взаимовлиянии. Поэтому проблема изучения взаимосвязей показателей является одной из важнейших в статистическом анализе экономических систем.

Корреляция в широком смысле слова означает связь, соотношение между объективно существующими явлениями. Если случайные переменные причинно обусловлены, то имеется корреляция.

Корреляция может быть:

- положительной или отрицательной;
- в зависимости от числа переменных – простой или множественной;
- в зависимости от формы связи – линейной или нелинейной.

Важнейшими задачами *корреляционного анализа* являются:

- измерение силы связи двух или более факторов;
-отбор факторов, оказывающих существенное влияние на результативный признак (зависимую переменную) на основании измерения тесноты связи между факторами.

2.Корреляционное отношение, коэффициент детерминации. Корреляционная зависимость.

В случае лишь одной независимой переменой X в качестве меры связи между ней и зависимой переменной Y служит ***коэффициент корреляции***. Он оценивается по выборке объема n связанных пар наблюдений (x_i, y_i). В случае ***нескольких*** переменных необходимо последовательно вычислять коэффициенты корреляции по нескольким рядам числовых данных. Полученные коэффициенты сводят в таблицы, называемые ***корреляционными матрицами***.

Корреляционная матрица представляет собой квадратную матрицу, на пересечении строки и столбца которой находится коэффициент корреляции между соответствующими переменными.

Если в результате n испытаний система двух случайных величин (X, Y) приняла значения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, то коэффициент корреляции равен

$$\rho_{XY} = \frac{(1/n)\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

где $\bar{x}, \bar{y}$ - средние значения, а σ_x, σ_y - средние квадратические отклонения случайных величин X, Y соответственно.

Для ***многомерной*** выборки (т. е. в случае более двух факторов) необходимо рассчитать ***корреляционную матрицу*** $\rho(X_i, X_j) = \rho(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$, которая является симметричной относительно главной диагонали.

При рассмотрении взаимосвязей, как правило, рассматривают одну из величин (X) как независимую (объясняющую), а другую (Y) как зависимую (объясняемую). При этом изменение первой из них может служить причиной изменения другой. Например, рост дохода ведет к увеличению потребления; рост цены – к снижению спроса; снижение процентной ставки увеличивает инвестиции и т.д. Эта зависимость не является однозначной в том смысле, что каждому конкретному значению объясняющей переменой X может соответствовать не одно, а ***множество*** значений Y. Другими словами, каждому конкретному значению независимой переменной соответствует некоторое ***вероятностное распределение*** зависимой переменной. Поэтому анализируют, как объясняющая переменная (или переменные) влияет (или влияют) на зависимую переменную «в среднем». Зависимость такого типа, выражаемая соотношением $M(Y|x) = f(x)$ называется ***функцией регрессии*** Y на X. При рассмотрении зависимости двух случайных величин говорят о ***парной регрессии***.

Зависимость ***нескольких*** переменных, выражаемую функцией $M(Y|x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называют ***множественной регрессией***.

Под ***регрессией*** понимается функциональная зависимость между объясняющими переменными и ***условным математическим ожиданием*** (средним значением) зависимой переменной Y, которая строится с целью предсказания (прогнозирования) среднего значения Y при некоторых значениях независимых переменных.

Установление формы зависимости и оценка параметров функции регрессии являются задачами ***регрессионного анализа***.

Так как реальные значения зависимой переменной могут быть различными при данном X (или $x_1, x_2, \ldots, x_m$), зависимость должна быть дополнена некоторым слагаемым е, которое, по существу, является ***случайной величиной***. Получающиеся в результате соотношения $Y = f(x) + \varepsilon$ или

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \varepsilon$$

называются ***регрессионными уравнениями*** (или ***моделями***).

Построение уравнения регрессии, описывающего эмпирические данные, включает три этапа:

- выбор ***формулы*** уравнения регрессии;
- определение ***параметров*** выбранного уравнения;
- анализ ***качества уравнения*** и проверка ***адекватности*** уравнения эмпирическим данным и, при необходимости, ***совершенствование уравнения***.

В случае ***парной*** регрессии выбор уравнения обычно осуществляется по графическому изображению реальных статистических данных - ***корреляционному полю.***

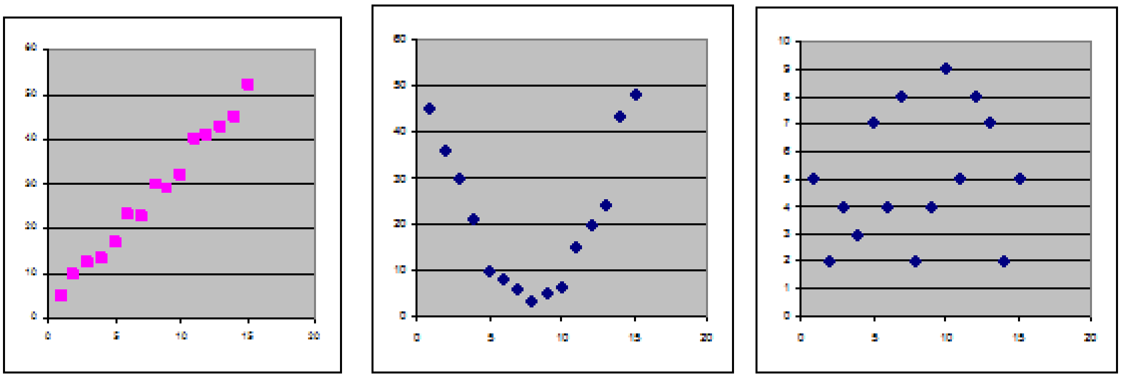


Рис.1 Корреляционные поля. А) – линейная регрессия; Б) – квадратичная регрессия; В) – отсутствие выраженной связи Y и X.

Для определения значений теоретических коэффициентов, входящих в уравнения регрессии, необходимо знать и использовать ***все*** значения переменных генеральной совокупности, что практически невозможно. В связи с этим ***по выборке ограниченного объема*** строится так называемое ***выборочное (эмпирическое) уравнение регрессии***. Из-за ***ограниченности выборки*** оценки коэффициентов, входящих в выборочное уравнение регрессии, отличаются от истинных (теоретических) значений, что приводит к несовпадению эмпирической и теоретической линий регрессии. Различные выборки из одной и той же генеральной совокупности обычно приводят к отличающимся друг от друга оценкам. Задача состоит в том, чтобы по конкретной выборке $(x_i, y_i),\ i = 1,\ldots,n$ найти оценки неизвестных параметров так, чтобы построенная линия регрессии являлась наилучшей среди всех других линий. Если функция регрессии линейна, то говорят о ***линейной регрессии***. Линейная регрессия (линейное уравнение) является распространенным (и простым) видом зависимости между экономическими переменными. Для простейшего случая ***парной линейной регрессии***

$$M(Y|X = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad \text{или} \quad y_i = M(Y|X = x_i) + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i ,$$

где β_0, β_1 *- теоретические параметры регрессии;* ε_i *- случайное отклонение.*

По выборке ограниченного объема строится ***выборочное*** *уравнение регрессии* $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ *(1)*

где b_0, b_1 *- оценки неизвестных параметров* β_0, β_1*, называемые* ***выборочными коэффициентами регрессии****,* $\hat{y}_i$ *- оценка условного математического ожидания* $M(Y|X = x_i)$*. Для величин* y_i *справедлива формула*

$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$ *(2), где* e_i *- оценка теоретического отклонения* ε_i*.*

Построенная прямая выборочной регрессии должна наилучшим образом описывать эмпирические данные, т.е. коэффициенты b_0, b_1 *должны быть такими, чтобы случайные отклонения* e_i *были минимальны. Наиболее распространенным методом нахождения коэффициентов уравнения регрессии является* ***метод наименьших квадратов (МНК)****.*

Если по выборке $(x_i, y_i),\ i = 1,\ldots,n$ *требуется определить оценки* b_0, b_1 *выборочного уравнения регрессии (2), то вводится в рассмотрение и минимизируется функция*

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 .$$

Необходимым условием существования минимума данной функции двух переменных является равенство нулю ее частных производных по неизвестным параметрам b_0, b_1*:*

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i)x_i = 0$$

.

Отсюда $nb_0 + b_1\sum x_i = \sum y_i$

$b_0\sum x_i + b_1\sum x_i^2 = \sum x_i y_i$,

и выразив из последних соотношений коэффициенты, получим

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \quad (3)$$

где введены обозначения $\bar{x} = \frac{1}{n}\cdot\sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\cdot\sum y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\cdot\sum x_i^2$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\cdot\sum x_i y_i$.

На экономический показатель чаще всего оказывает влияние не один, а несколько факторов. Например, спрос на некое благо определяется не только ценой данного блага, но и ценами на замещающие и дополняющие блага, доходом потребителей и многими другими факторами. В этом случае рассматривается множественная регрессия $M(Y|x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Теоретическое **линейное** уравнение регрессии имеет вид $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_m x_m + \varepsilon$.

Для оценки параметров уравнения множественной линейной регрессии также, как правило, используется метод наименьших квадратов.

Нелинейная регрессия

Многие экономические зависимости не являются линейными. Например, при анализе эластичности спроса по цене применяется так называемая логарифмическая модель, при анализе издержек от объема выпуска – полиномиальная (кубическая) модель. Часто применяются и другие модели – например, обратная и экспоненциальная. Кратко рассмотрим некоторые из моделей нелинейной регрессии.

Пусть некоторая экономическая зависимость моделируется формулой

$$Y = AX^{\beta}$$

где A, b - параметры модели. Эта функция может отражать зависимость спроса Y на благо от его цены X (в этом случае b < 0) или от дохода X (b>0 – функция Энгеля). Прологарифмировав обе части последнего соотношения, получим $\ln Y = \ln A + \beta\ln X$; замена переменных $Y^* = \ln Y$, $X^* = \ln X$ позволяет свести уравнение к линейному виду

$$Y^* = \beta_0 + \beta X^* + \varepsilon.$$

По МНК можно рассчитать значения параметров аналогично случаю линейной модели (при этом вместо (x_i, y_i) рассматриваются $(\ln x_i, \ln y_i)$).

Обратная модель.

Обратная модель имеет вид $Y = \beta_0 + \beta_1\cdot\frac{1}{X} + \varepsilon$.

Заменой $X^{\wedge} = \frac{1}{X}$ эта модель сводится к линейной. Обратная модель применяется, например, для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции.

Степенная функция вида $Y = \beta_0 + \beta_1 X + ... + \beta_m X^m + \varepsilon$

при m=3 (кубическая функция) в микроэкономике моделирует зависимость общих издержек от объема выпуска; квадратичная функция (m=2) отражает зависимость между объемом выпуска и средними или предельными издержками. Модель может быть сведена к ***линейной*** модели множественной регрессии с помощью замены $X \to X_1, X^2 \to X_2, ..., X^m \to X_m$. Параметры модели определяют с помощью МНК.

Показательная функция $Y = b_0 e^{\beta X} = b_0 m^X$

может использоваться при анализе изменения переменной Y с постоянным темпом прироста во времени. Примером может служить производственная функция Кобба – Дугласа с учетом научно – технического прогресса

$$Y = A K^{\alpha} L^{\beta} e^{\gamma t},$$

где K – затраты капитала, L – затраты труда, g характеризует темпы роста объема производства.

Прологарифмировав, получаем соотношение

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \gamma t,$$

которое сводится к линейному виду с помощью замен $y \to \ln Y,\ k \to \ln K,\ l \to \ln L,\ a \to \ln A$.

В заключение отметим, что построение и проверка качества уравнения регрессии требуют применения методов ***корреляционного*** анализа, позволяющих производить отбор существенных для описания регрессионной зависимости факторов.

1.10 Лекция 15 (Л-15) (2 ч.)

Тема: Основные понятия теории марковских процессов. Простейший поток. Классификация марковских процессов

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия теории марковских процессов. Поток СС, простейший поток, его свойства.
2. Классификация марковских процессов

1.10.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия теории марковских процессов. Поток СС, простейший поток, его свойства.

Поток событий. Простейший поток и его свойства

При рассмотрении процессов, протекающих в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, часто бывает удобно представить себе процесс так, как будто переходы системы из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий. Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то, вообще говоря, случайные моменты времени. (Поток вызовов на телефонной станции; поток неисправностей (сбоев) ЭВМ; поток грузовых составов, поступающих на станцию; поток посетителей; поток выстрелов, направленных на цель). Будем изображать поток событий последовательностью точек на оси времени *ot*. Положение каждой точки на оси случайно. Поток событий называется ***регулярным***, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени (редко встречается на практике). Рассмотрим специального типа потоки, для этого введем ряд определений. 1. Поток событий называется ***стационарным***, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси ot расположен этот участок (однородность по времени) – вероятностные характеристики такого потока не должны меняться от времени. В частности, так называемая интенсивность (или плотность) потока событий (среднее число событий в единицу времени) постоянна.

2. Поток событий называется **потоком без последствия**, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой (или другие, если рассматривается больше двух участков). Отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.

3. Поток событий называется ***ординарным***, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью попадания одного события (события в потоке приходят поодиночке, а не парами, тройками и т. д.).

Поток событий, обладающий всеми тремя свойствами, называется ***простейшим*** (*или стационарным пуассоновским*). Нестационарный пуассоновский поток обладает только свойствами 2 и 3. Пуассоновский поток событий (как стационарный, так и нестационарный) тесно связан с известным распределением Пуассона. А именно, число событий потока, попадающих на любой участок, распределено по закону Пуассона. Поясним это подробнее.

Рассмотрим на оси *ot*, где наблюдается поток событий, некоторый участок длины t, начинающийся в момент *t0* и заканчивающийся в момент *t0*+t. Нетрудно доказать (доказательство дается во всех курсах теории вероятности), что вероятность попадания на этот участок ровно m событий выражается формулой:

$$P_m = \frac{a^m}{m!}e^{-a} \quad (m=0,1\ldots),$$

где *a* – среднее число событий, приходящееся на участок t.

Для стационарного (простейшего) пуассоновского потока *a=lt*, т. е. не зависит от того, где на оси *ot* взят участок t. Для нестационарного пуассоновского потока величина *a* выражается формулой

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$$

и значит, зависит от того, в какой точке t_0 начинается участок t.

Рассмотрим на оси *ot* простейший поток событий с постоянной интенсивностью l. Нас будет интересовать интервал времени T между событиями в этом потоке. Пусть l - интенсивность (среднее число событий в 1 времени) потока. Плотность распределения *f(t)* случайной величины *T* (интервал времени между соседними событиями в потоке) *f(t)=le-lt (t>0)*. Закон распределения с такой плотностью называется показательным (экспоненциальным). Найдем численные значения случайной величины *T*: математическое ожидание (среднее значение) $m_t = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$

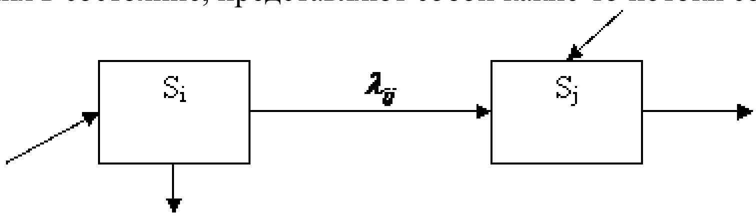
и дисперсию $D_t = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - m_t^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Промежуток времени *T* между соседними событиями в простейшем потоке распределен по показательному закону; его среднее значение и среднее квадратичное отклонение равны $\frac{1}{\lambda}$, где l - интенсивность потока. Для такого потока вероятность появления на элементарном участке времени Δt ровно одного события потока выражается как $P_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$. Эту вероятность мы будем называть «элементом вероятности появления события».

Для нестационарного пуассоновского потока закон распределения промежутка T уже не будет показательным. Вид этого закона будет зависеть, во- первых, от того, где на оси *ot* расположено первое из событий, во-вторых, от вида зависимости $\lambda(t)$. Однако, если $\lambda(t)$ меняется сравнительно медленно и его изменение за время между двумя событиями невелико, то закон распределения промежутка времени между событиями можно приближенно считать показательным, полагая в этой формуле величину λ равной среднему значению $\lambda(t)$ на том участке, который нас интересует.

Пуассоновские потоки событий и непрерывные марковские цепи

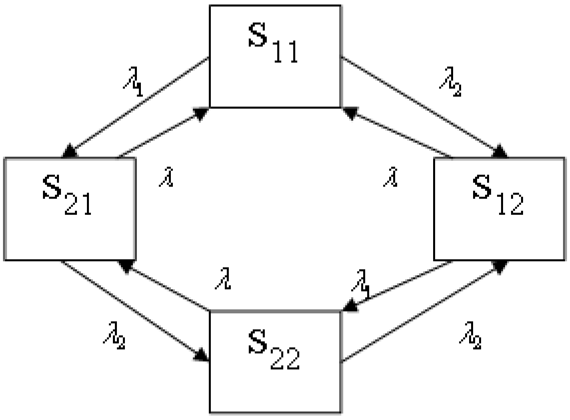
Рассмотрим некоторую физическую систему *S={S1,S2,...Sn}*, которая переходит из состояния в состояние под влиянием каких-то случайных событий (вызовы, отказы, выстрелы). Будем себе это представлять так, будто события, переводящие систему из состояния в состояние, представляют собой какие-то потоки событий.



Пусть система S в момент времени t находится в состоянии Si и может перейти из него в состояние Sj под влиянием какого-то пуассоновского потока событий с интенсивностью lij: как только появляется первое событие этого потока, система мгновенно переходит из Si в Sj . Как мы знаем, вероятность этого перехода за элементарный промежуток времени Δt (элемент вероятности перехода) равна, отсюда вытекает, что плотность вероятности перехода lij в непрерывной цепи Маркова представляет собой не что иное, как интенсивность потока событий, переводящих систему по соответствующей стрелке. Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние пуассоновские, то процесс, протекающий в системе, будет марковским.

Проставим интенсивности пуассоновских потоков (плотности вероятностей переходов) на графе состояний системы у соответствующих стрелок. Получим размеченный граф состояний. На его основе можно написать уравнения Колмогорова и вычислить вероятности состояний.

Пример. Техническая система S состоит из двух узлов I и II, каждый из которых независимо от другого может отказывать. Поток отказов первого узла пуассоновский с интенсивностью lI, второго также пуассоновский с интенсивностью lII. Каждый узел сразу после отказа начинает ремонтироваться (восстанавливаться). Поток восстановлений (окончаний ремонта узла) для обоих узлов – пуассоновский с интенсивностью l. Составить граф состояний системы и написать уравнение Колмогорова. Состояния системы: S_{11} - оба узла исправны; S_{21} – первый узел ремонтируется, второй исправен; S_{12}, S_{22}.



$$\begin{cases} \dfrac{dp_{11}}{dt} = -(\lambda_I + \lambda_{II})p_{11} + \lambda\ p_{21} + \lambda p_{12} \\ \dfrac{dp_{21}}{dt} = -(\lambda + \lambda_{II})p_{21} + \lambda_I p_{11} + \lambda\ p_{22} \\ \dfrac{dp_{12}}{dt} = -(\lambda + \lambda_I)p_{12} + \lambda_{II} p_{11} + \lambda p_{22} \\ \dfrac{dp_{22}}{dt} = -2\lambda p_{22} + \lambda_{II} p_{21} + \lambda_I p_{12} \end{cases}$$

$$t=0\ p_{11}=1\ p_{21}=p_{22}=p_{12}=0$$

$$p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=1.$$

2. Классификация марковских процессов

Аппарат теории марковских процессов с дискретными состояниями и цепей Маркова широко используют в теории систем, в исследовании операций и других прикладных дисциплинах. Это обусловлено многими причинами, среди которых отметим следующие:

1) многие реальные технические системы имеют конечные множества возможных состояний, а их поведение в процессе функционирования адекватно моделируется марковскими процессами,

2) теория марковских процессов с дискретными состояниями и цепей Маркова разработана настолько глубоко, что позволяет решать широкий класс прикладных задач.

Марковские процессы. Представление случайных процессов графом состояний

Рассмотрим физическую систему *S*, в которой протекает случайный процесс с дискретными состояниями: $s_1, s_2, \ldots, s_i$, (1) число которых конечно (или счетно). Состояния $s_1, s_2, \ldots$ могут быть качественными (т. е. описываться словами) или же каждое из них характеризуется случайной величиной (либо случайным вектором).

Прежде всего, рассмотрим множество состояний (1) с точки зрения его структуры - возможности системы *S* переходить из состояния s_j в данное состояние s_i - непосредственно или через другие состояния. Для этого удобно пользоваться наглядной схемой, так называемым графом состояний. Здесь и далее мы будем отчасти пользоваться терминологией теории графов. Имеется две основные разновидности графов: неориентированные и ориентированные.

Неориентированный граф - совокупность точек (вершин графа) с соединяющими некоторые из них отрезками (ребрами графа).

Ориентированный граф - это совокупность точек (вершин) с соединяющими некоторые из них ориентированными отрезками (стрелками).

При изложении теории случайных процессов с дискретными состояниями мы будем пользоваться только ориентированными графами. Вершины графа будут соответствовать состояниям системы. Вершину будем изображать прямоугольником, в который вписано обозначение состояния; стрелка, ведущая из вершины s_j в вершину s_i , будет обозначать возможность перехода системы *S* из состояния s_j в состояние s_i - непосредственно, минуя другие состояния. Стрелки графа могут изображаться не только прямолинейными, но и криволинейными отрезками (рис. 1). Сам граф системы *S* будем обозначать буквой *G*.

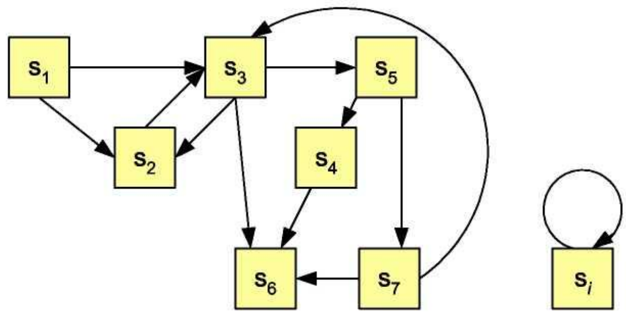


Рисунок 1 – Пример графа состояний

Переход по стрелке, ведущей из состояния s_i в него же, означает задержку системы в состоянии s_i. «Обратные стрелки» можно на графе не проставлять, так как все расчеты можно вести и без них.

Проведем некоторую необходимую для дальнейшего классификацию состояний. Состояние s_i называется источником, если система S может выйти из этого состояния, но попасть в него обратно уже не может, т. е. на графе G состояний в состояние s_i не ведет ни одна стрелка. На рисунке 1 состояние s_1 является источником.

Состояние s_i называется концевым (или поглощающим), если система S может попасть в это состояние, но выйти из него уже не может. Для графа состояний это означает, что из состояния s_i не ведет ни одна стрелка (для графа, изображенного на рисунке 1, состояние s_6 поглощающее).

Если система S может непосредственно перейти из состояния s_i в состояние s_j то состояние s_j - называется соседним по отношению к состоянию s_i.

Состояние s_i называется транзитивным, если система S может войти в это состояние и выйти из него, т. е. на графе состояний есть хотя бы одна стрелка, ведущая в s_i и хотя бы одна стрелка, ведущая из s_i. На рисунке 1 все состояния, кроме s_1 и s_6, являются транзитивными.

Для полноты картины можно рассматривать также и «изолированные» состояния. Состояние s_i называется изолированным, если из него нельзя попасть ни в одно из других состояний и в него нельзя попасть ни из какого другого состояния.

Наряду с отдельными состояниями системы S в ряде задач практически бывает нужно рассматривать подмножества ее состояний.

Обозначим W множество всех состояний системы S (конечное или бесконечное, но счетное) и рассмотрим его подмножество $V \subset W$. Подмножество V называется замкнутым (концевым), если система S, попав в одно (или находясь в одном) из состояний $s_i \in V$, не может выйти из этого подмножества состояний. Концевое подмножество состояний может включать в себя поглощающее состояние, а может и не включать.

Подмножество состояний $V \subset W$ называется связным или эргодическим, если из любого состояния, входящего в него, можно попасть в любое другое состояние, принадлежащее этому подмножеству. Эргодическим может быть и все множество W состояний системы S. В эргодическом множестве состояний нет ни источников, ни поглощающих состояний.

Подмножество состояний V называется транзитивным, если система S может войти в это подмножество и выйти из него, т. е. из любого состояния $s_i \subset V$ можно (за то или другое число перескоков) выйти из этого подмножества.

Случайный процесс, протекающий в системе S, можно трактовать как процесс блуждания системы по множеству состояний W. Если подмножество $V \subset W$ является концевым, то, попав в него, система будет продолжать блуждание уже по этому подмножеству состояний V. Если все множество эргодично, то блуждание будет происходить по всем его состояниям.

На практике очень часто встречаются системы, состояния которых образуют цепь (рисунок 2), в которой каждое состояние s_i (кроме двух крайних s_0 и s_n) связано прямой и обратной связью с двумя соседними s_{i-1}, s_{i+1}, а каждое из двух крайних связано прямой и обратной связью только с одним соседним.

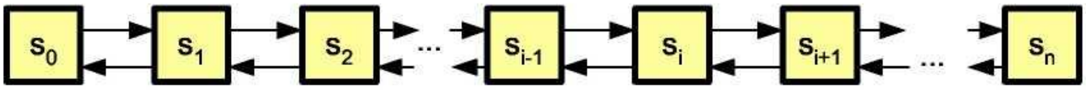


Рисунок 2 - Схема процесса гибели и размножения

Такая схема случайного процесса называется схемой гибели и размножения, а сам процесс — процессом гибели и размножения.

Если на графе состояний системы *S* стрелки, ведущие справа налево, отсутствуют, то говорят о процессе «чистого размножения», в противоположном случае — о процессе «чистой гибели».

Процесс гибели и размножения может в некоторых случаях иметь не конечное число состояний: $s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n$, а бесконечное (счетное): $s_1, s_2, ..., s_i, ...$.

При анализе случайных процессов, протекающих в системах с дискретными состояниями, важную роль играют вероятности состояний.

Обозначим *S(t)* состояние системы *S* в момент *t*. Вероятностью *i*-го состояния в момент *t* называется вероятность события, состоящего в том, что в момент *t* система *S* будет в состоянии s_i. Обозначим ее $p_i(t)$:

$$p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}, \qquad (2)$$

где *S(t)* - случайное состояние системы *S* в момент *t*. Очевидно, что для системы с дискретными состояниями $s_1, s_2, ..., s_i, ...,$ в любой момент *t* сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_i p_i(t) = 1, \qquad (3)$$

как сумма вероятностей полной группы несовместных событий.

В ряде задач практики нас интересует так называемый установившийся или стационарный режим работы системы, который в ней устанавливается, когда от начала процесса прошло достаточно большое время *t*. Например, процесс изменения напряжения в сети питания технического устройства, пройдя сразу после включения через ряд колебаний, по прошествии времени, устанавливается. Аналогично этому и в некоторых случайных процессах по прошествии достаточно большого времени *t* устанавливается стационарный режим, во время которого состояния системы хотя и меняются случайным образом, но их вероятности $p_i(t)$ $(i = 1, 2, ...)$ остаются постоянными. Обозначим эти постоянные вероятности p_i.

$$p_i = \lim p_i(t) \qquad (4)$$

Вероятности $p_i (i = 1, 2, ...)$, если они существуют, называются финальными (предельными) вероятностями состояний. Финальную вероятность p_i можно истолковать как среднюю долю времени, которую в стационарном режиме проводит система *S* в состоянии s_i. В дальнейшем будет показано, при каких условиях финальные вероятности существуют и какими они могут быть для разных состояний и подмножеств состояний.

Введем очень важное для дальнейшего понятие марковского случайного процесса.

Случайный процесс, протекающий в системе *S* с дискретными состояниями $s_1, s_2, ..., s_i, ...,$ называется марковским, если для любого момента времени t_0 вероятность каждого из состояний системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и как она пришла в это состояние; т. е. не зависит от ее поведения в прошлом (при $t < t_0$).

Не надо понимать марковское свойство случайного процесса как полную независимость «будущего» от «прошлого»; в общем случае «будущее» зависит от «настоящего», т. е. вероятности $p_i(t)$ при $t > t_0$ зависят от того, в каком состоянии s_i находится система в настоящем (при $t=t_0$); само же это «настоящее» зависит от «прошлого», от того, как вела себя система S при $t < t_0$. Это можно сформулировать следующим образом: для марковского случайного процесса «будущее» зависит от «прошлого» только через «настоящее» (рисунок 3). При фиксированном «настоящем» условные вероятности всех состояний системы в «будущем» не зависят от предыстории процесса, т. е. от того, когда и как система S к моменту t_0 пришла в состояние

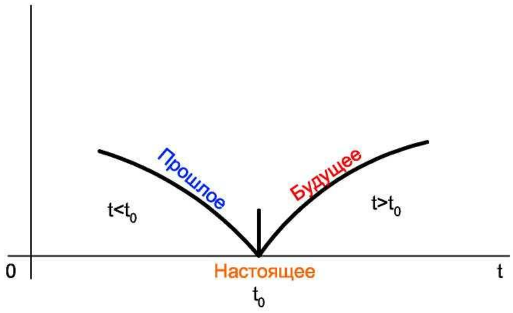


Рисунок 3 – Схема марковского свойства случайного процесса

«Настоящее» может быть задано не одним каким-то состоянием s_i, а целым подмножеством состояний $V \subset W$, где W - множество всех возможных состояний системы.

Подчеркнем также, что «настоящее» может быть задано не только одним состоянием системы S в момент t_0; в него при желании можно включить и те элементы из «прошлого», от которых, при заданном «настоящем», зависит будущее. Например, вероятности состояний в «будущем» могут зависеть не только от состояния s_i системы в настоящем, но и от того, из какого состояния s_i система перешла к моменту t_0 в состояние s_i; в этом случае настоящее характеризуется не только состоянием s_i , в которое система перешла к моменту t_0, но и состоянием s_j, из которого она перешла в s_i. Вводя в состав параметров, характеризующих настоящее состояние системы, те параметры из прошлого, от которых зависит будущее, можно, как говорится, «марковизировать» многие немарковские случайные процессы, но, как правило, это приводит к сильному усложнению математического аппарата.

Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем

Пусть имеется система S с дискретными состояниями $s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n$. Предположим, что случайные переходы («перескоки») системы из состояния в состояние могут происходить только в определенные моменты времени $t_0, t_1, t_2, ...$. Эти моменты мы будем называть шагами процесса; $t_0=0$ - его началом. Сам процесс представляет собой случайное блуждание системы S по состояниям. После первого шага система может оказаться в одном (и только в одном) из своих возможных состояний: $s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, ..., s_i^{(1)}, ..., s_n^{(1)}$; на втором шаге - $s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, ..., s_i^{(2)}, ..., s_n^{(2)}$, на k-м шаге $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, ..., s_i^{(k)}, ..., s_n^{(k)}$ (число состояний в общем случае может быть бесконечным, но счетным. Здесь же для простоты ограничимся конечным числом n состояний).

Предположим, что граф состояний системы S имеет вид, представленный на рисунке 4. Процесс блуждания системы S по состояниям можно представить как последовательность или «цепь» событий, состоящих в том, что в начальный момент $t_0=0$ система находится в одном из состояний (например, в состоянии $s_1^{(0)}$), в момент первого шага перешла из него скачком в состояние $s_5^{(1)}$, из которого на втором шаге перешла в $s_3^{(2)}$, на третьем шаге перешла в $s_2^{(3)}$ и т. д. «Траектория» системы, блуждающей по состояниям s_1, s_5, s_3, s_2 показана на рисунке 4 жирными линиями. На каких-то шагах система может задерживаться в том или другом из своих состояний, $s_i^{(k)} = s_i^{(k+1)}$ (это показано «возвратной стрелкой» на рисунке 4) или же вернуться в него после ряда шагов.

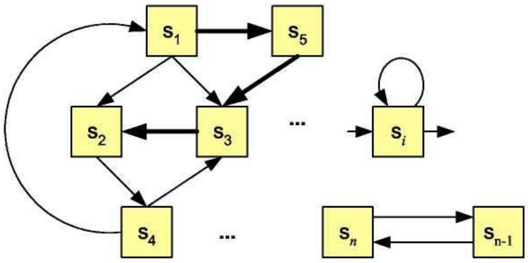


Рисунок 4 – Граф состояний системы S

«Траектория» блуждания системы по графу состояний, изображенная на рисунке 4 жирными линиями, представляет собой не что иное, как реализацию случайного процесса, полученную в результате одного опыта. При повторении опыта, естественно, реализации в общем случае не совпадают.

Рассмотрим общий случай. Пусть происходит случайный процесс в системе *S* с дискретными состояниями $s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n$, которые она может принимать в последовательности шагов с номерами *0, 1, 2, ..., k, ...*

Случайный процесс представляет собой последовательность событий вида $\{S(k) = s_i\}$ $(i = 1,2,... \ldots n;\ k = 0,1,2,...)$. Наиболее важной ее характеристикой являются вероятности состояний системы

$$\mathbf{P}\{S(k) = s_i\} \quad (i = 1,2,......n; k = 0,1,2,...), \qquad (5)$$

где $P\{S(k)=s_i\}$ - вероятность того, что на *k*-м шаге система *S* будет находиться в состоянии s_i.

Распределение вероятностей (5) представляет собой не что иное, как одномерный закон распределения случайного процесса *S(t)*, протекающего в системе *S* с «качественными» дискретными состояниями и дискретным временем $t_0, t_1, t_2, ..., t_k$.

Процесс, протекающий в такой системе *S*, называется марковским процессом с дискретными состояниями и дискретным временем (или, короче, марковской цепью), если выполняется условие: для любого фиксированного момента времени (любого шага k_0) условные вероятности состояний системы в будущем (при $k > k_0$) зависят только от состояния системы в настоящем (при $k = k_0$) и не зависят от того, когда (на каком шаге, при $k < k_0$) и откуда система пришла в это состояние. Марковская цепь представляет собой разновидность марковского процесса, в котором будущее зависит от прошлого только через настоящее.

Цепь, в которой условные вероятности состояний в будущем зависят только от состояния на данном, последнем, шаге и не зависят от предыдущих, иногда называют простой цепью Маркова, в отличие от такой, где будущее зависит от состояний системы не только в настоящем на данном шаге, но и от ее состояний на нескольких предыдущих шагах; такую цепь называют сложной цепью Маркова. Сам А. А. Марков рассматривал сложные цепи, построенные на материале буквенных последовательностей, взятых из текста пушкинского «Евгения Онегина».

Если в качестве системы, в которой происходит случайный процесс, рассмотреть букву, входящую в текст, которой могут быть: а, б, в, ... щ, ъ, ы, ь, э, ю, я, «пробел», то сразу ясно, что вероятность последующей буквы быть той или другой зависит от того, какова была предыдущая (например, последовательности букв «яы» или «эь» в русском языке исключены); не так очевидно, но все же ясно, что эта вероятность зависит не только от предыдущей буквы, но и от других, ей предшествовавших (например, последовательность букв «ттт» в русском языке если не исключена, то практически невозможна, тогда как последовательность «тт» встречается довольно часто). Мы в данном элементарном изложении будем рассматривать только простые цепи Маркова и вычислять для них вероятности состояний.

Из определения марковской цепи следует, что для нее вероятность перехода системы S в состояние s_i на $(k+1)$-м шаге зависит только от того, в каком состоянии s_i находилась система на предыдущем k-м шаге и не зависит от того, как она вела себя до этого k-го шага.

Основной задачей исследования марковской цепи является нахождение безусловных вероятностей нахождения системы S на любом k-м шаге в состоянии s_i; обозначим эту вероятность $p_i(k)$:

$$p_i(k) = P\{S(k) = s_i\} \; (i = 1,2,......n;\, k = 0,1,2,...). \qquad (6)$$

Для нахождения этих вероятностей необходимо знать условные вероятности перехода системы S на k-м шаге в состояние s_i, если известно, что на предыдущем $(k - 1)$-м шаге она была в состоянии s_i. Обозначим эту вероятность

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_i \mid S(k-1) = s_j\} \; (i, j = 1,2,......n;\, k = 0,1,2,..). \qquad (7)$$

Вероятности $p_{ij}(k)$ называются переходными вероятностями марковской цепи на k-м шаге. Вероятность $p_{ij}(k)$ есть вероятность того, что на k-м шаге система задержится (останется) в состоянии s_i.

Переходные вероятности $p_{ij}(k)$ можно записать в виде квадратной таблицы (матрицы) размерности n x n:

$$\left\| p_{ij}(k) \right\| = \left\| \begin{matrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1j}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2j}(k) & \dots & p_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1}(k) & p_{i2}(k) & \dots & p_{ij}(k) & \dots & p_{in}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \dots & p_{nj}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{matrix} \right\| \quad (k = 0,1,2,...). \qquad (8)$$

По главной диагонали матрицы (8) стоят вероятности задержки системы в данном состоянии $s_j \; (j = 1,...,n)$ на k-м шаге.

$$p_{11}(k), p_{22}(k),..., p_{ii}(k),..., p_{nn}(k). \qquad (9)$$

Так как на каждом шаге система S может находиться только в одном из взаимно исключающих состояний, то для любой k-й строки матрицы (8) сумма всех стоящих в ней вероятностей равна единице:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) = 1. \qquad (10)$$

Матрица, обладающая таким свойством, называется стохастической. Естественно, что все элементы стохастической матрицы отвечают условию $0 \le p_{ij}(k) \le 1$. В силу условия (10) можно в матрице (8) не задавать вероятности задержки, а получать их как дополнения до единицы всех остальных членов строки:

$$p_{ii}(k) = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k). \qquad (11)$$

Чтобы найти безусловные вероятности $p_i(k)$, недостаточно знать матрицу переходных вероятностей (8); нужно еще знать начальное распределение вероятностей, т. е. вероятности состояний $p_i(0)$, соответствующие началу процесса - моменту $t_0 = 0$:

$$p_1(0), p_2(0), ..., p_i(0), ..., p_n(0), \qquad (12)$$

в сумме образующие единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1 \qquad (13)$$

Если известно, что в начальный момент система S находится во вполне определенном состоянии s_i, то вероятность $p_i(0)$ этого состояния в формуле (13) равна единице, а все остальные - нулю:

$$p_i(0), p_1(0) = p_2(0) = ... = p_{i-1}(0) = p_{i+1}(0) = ... = p_i(0) = 0. \qquad (14)$$

Цепь Маркова называется однородной, если переходные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от номера шага k: $p_{ij}(k) = p_{ij}$. Матрица переходных вероятностей для однородной цепи Маркова имеет вид:

$$\|p_{ij}\| = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots p_{1j} \cdots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \cdots p_{2j} \cdots p_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{i1} & p_{i2} \cdots p_{ij} \cdots p_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots p_{nj} \cdots p_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (14)$$

При выводе формул для вероятностей состояний, в целях простоты записи, будем рассматривать только однородные цепи Маркова (в случае, когда цепь неоднородна, можно все переходные вероятности в формулах просто положить зависящими от номера шага k).

При нахождении вероятностей состояний марковской цепи на k-м шаге $p_i(k)$ $(k = 1,2,...)$ удобно бывает пользоваться так называемым размеченным графом состояний системы S, где возле каждой стрелки, ведущей из состояния s_i в состояние s_j, проставлена переходная вероятность p_{ij}; вероятности задержки на размеченном графе не проставляются, а просто получаются дополнением до единицы суммы вероятностей, стоящих у всех стрелок, ведущих из данного состояния s_i.

Теперь покажем, как найти для однородной цепи Маркова безусловную вероятность нахождения системы S на k-м шаге в состоянии s_j $(j=1, 2, ..., n)$

$$p_j(k) = \mathbf{P}\{S(k) = s_j\}, \qquad (15)$$

если задана матрица переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$ (или, что равнозначно, размеченный граф состояний) и начальное распределение вероятностей

$$p_i(0) \quad (i = 1,2,..., n).$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) = 1 \quad . \qquad (16)$$

Сделаем гипотезу, состоящую в том, что в начальный момент $(k=0)$ система находилась в состоянии s_i. Вероятность этой гипотезы известна из (16) и равна $p_i(0)=P\{S(0)=s_i\}$. В предположении, что эта гипотеза имеет место, условная вероятность того, что система S на первом шаге будет в состоянии s_j, равна переходной вероятности $p_{ij}(k) = \mathbf{P}\{S(1) = s_j \mid S(0) = s_i\}$.

По формуле полной вероятности получим:

$$p_j(1) = \sum_{i=1}^{n} P\{S(1) = s_j | S(0) = s_i\} \cdot P\{S(0) = s_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} p_i(0), \quad (j = 1,...,n) \quad (17)$$

Таким образом, мы нашли распределение вероятностей системы S на первом шаге. Теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы найти распределение вероятностей на втором шаге, которое для цепи Маркова зависит только от распределения вероятностей на первом шаге и матрицы переходных вероятностей.

Опять сделаем гипотезу, состоящую в том, что на первом шаге система находится в состоянии s_i вероятность этой гипотезы нам уже известна и равна $p_i(1) = P\{S(1) = s_i\}$. При этой гипотезе условная вероятность того, что на втором шаге система S будет в состоянии s_i, равна:

$$p_{ij}(k) = P\{S(2) = s_j | S(1) = s_i\}$$

По формуле полной вероятности находим

$$p_j(2) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1) p_{ij}, (j = 1,2,...,n) \quad (18)$$

Таким образом, мы выразили распределение вероятностей (18) на втором шаге через распределение вероятностей на первом шаге и матрицу $\|p_{ij}\|$. Переходя таким же способом от $k = 2$ к $k = 3$ и т. д., получим рекуррентную формулу:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) p_{ij}, (k = 1,2,...,n; j = 1,2,...,n) \quad (19)$$

При некоторых условиях в цепи Маркова с возрастанием k (номера шага) устанавливается стационарный режим, в котором система S продолжает блуждать по состояниям, но вероятности этих состояний уже от номера шага не зависят. Такие вероятности называются предельными (или финальными) вероятностями цепи Маркова.

Например, если рассматривать ЭВМ в двух состояниях: s_1 - исправна, s_2 - не исправна, то имеет место следующая динамика изменения вероятностей (при начальных условиях):

$$p_1(0) = 1, p_2(0) = 0: p_1(1) = 0{,}7; p_1(2) = 0{,}61; p_1(3) = 0{,}583; p_1(4) = 0{,}5749.$$

Ниже мы покажем, что в этом случае $p_1 = \lim_{k \to \infty} p_1(k) = 0{,}4/(0{,}4+0{,}3) = 0{,}5714$. Таким образом, в рассматриваемой системе стационарный режим наступит практически через четыре шага.

Можно убедиться в том, что в этом примере финальные вероятности не зависят от начальных условий.

Сформулируем условия существования стационарного режима для системы S с конечным числом состояний n, в которой протекает марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова):

1. Множество всех состояний W системы S должно быть эргодическим.
2. Цепь Маркова должна быть однородной:

$$p_{ij}(k) = p_{ij} \quad (20)$$

3. Цепь Маркова должна быть «достаточно хорошо перемешиваемой» (не должна быть «циклической»).

Цепи Маркова, отвечающие этим условиям, будем называть эргодическими цепями Маркова.

1.11 Лекция 16-17 (Л-16-17) (4 ч.)

Тема: СМО, их свойства, классификация

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Основные понятия теории систем массового обслуживания.
2. СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью).
3. Предельные вероятности состояний.
4. Модели систем массового обслуживания при пуассоновских потоках заявок.

1.11.2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия теории систем массового обслуживания.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем характерен для ***систем массового обслуживания*** (СМО).

Понятие систем массового обслуживания

При решении задач оптимизации управления производством, информационными сетями, транспортными системами часто возникает ряд однотипных задач:

- оценка пропускной способности каналов связи, системы автомобильных и железных дорог и т. п.;
- оценка эффективности работы предприятия, компьютерной сети;
- определение количества кналов связи и транспортных путей сообщения и др.

Все эти задачи однотипны в том смысле, что в них присутствует массовый спрос на обслуживание. В удовлетворении этого спроса участвует определенная совокупность элементов, образующая ***систему массового обслуживания*** **(СМО)** (рис. 1).

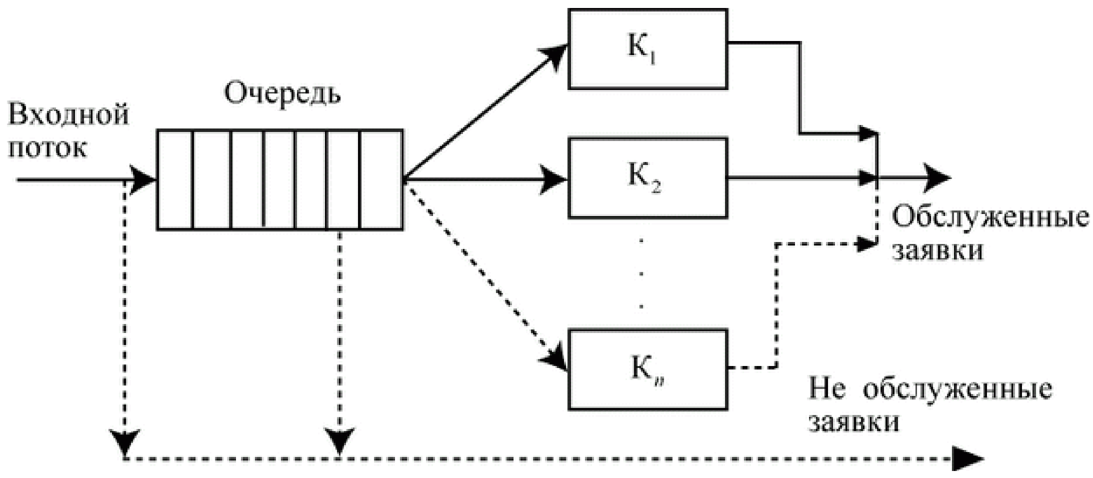


Рис. 1. Система массового обслуживания

Элементами СМО являются:

- входной (входящий) поток требований (заявок) на обслуживание;
- приборы (каналы) обслуживания;
- очередь заявок, ожидающих обслуживания;
- выходной (выходящий) поток обслуженных заявок;
- поток не обслуженных заявок;
- очередь свободных каналов (для многоканальных СМО).

Входящий поток - это совокупность заявок на обслуживание. Часто заявка отождествляется с ее носителем. Например, поток неисправной радиоаппаратуры, поступающий в мастерскую объединения, и представляет собой поток заявок - требований на обслуживание в данной СМО.

Как правило, на практике имеют дело с так называемыми рекуррентными потоками, потоками, обладающими свойствами:

- стационарности;
- ординарности;
- ограниченного последействия.

Первые два свойства мы определили ранее. Что касается ограниченного последействия, то оно заключается в том, что интервалы между поступающими заявками являются независимыми случайными величинами.

Рекуррентных потоков много. Каждый закон распределения интервалов порождает свой рекуррентный поток. Рекуррентные потоки иначе называют ***потоками Пальма***.

Простейший стационарный поток - пуассоновский поток с полным отсутствием последействия. У него случайные интервалы между заявками имеют экспоненциальное распределение:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

здесь λ - интенсивность потока.

Название потока - пуассоновский - происходит от того, что для этого потока вероятность $P_k(\Delta t)$ появления k заявок за интервал Δt определяется законом Пуассона:

$$P_k(\Delta t) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

Именно такой поток предполагают проектировщики при разработке СМО. Вызвано это тремя причинами.

Во-первых, поток этого типа в теории массового обслуживания аналогичен нормальному закону распределения в теории вероятностей в том смысле, что к простейшему потоку приводит предельный переход для потока, являющегося суммой потоков с произвольными характеристиками при бесконечном увеличении слагаемых и уменьшении их интенсивности. То есть сумма произвольных независимых (без преобладания) потоков с интенсивностями λ_i является простейшим потоком с интенсивностью $\lambda = \sum_i \lambda_i$

Во-вторых, если обслуживающие каналы (приборы) рассчитаны на простейший поток заявок, то обслуживание других типов потоков (с той же интенсивностью) будет обеспечено с не меньшей эффективностью.

В-третьих, именно такой поток определяет марковский процесс в системе и, следовательно, простоту математического анализа системы. При других потоках анализ функционирования СМО сложен.

Часто встречаются системы, у которых поток входных заявок зависит от количества заявок, находящихся в обслуживании. Такие СМО называют **замкнутыми** (иначе - **разомкнутыми**). Например, работа мастерской связи объединения может быть представлена моделью замкнутой СМО. Пусть эта мастерская предназначена для обслуживания радиостанций, которых в объединении m. Каждая из них имеет интенсивность отказов λ. Входной поток отказавшей аппаратуры будет иметь интенсивность λ_p:

$$\lambda_p = \lambda(m - n),$$

где n - количество радиостанций, уже находящихся в мастерской на ремонте.

Заявки могут иметь разные права на начало обслуживания. В этом случае говорят, что заявки **неоднородные**. Преимущества одних потоков заявок перед другими задаются шкалой приоритетов.

Важной характеристикой входного потока является **коэффициент вариации**:

$\nu = \dfrac{\sigma}{\overline{\tau}_{\text{инт}}},$ где $\overline{\tau}_{\text{инт}}$ - математическое ожидание длины интервала; σ - средне-квадратическое отклонение случайной величины (длины интервала) $\tau_{\text{инт}}$.

Для простейшего потока $\left(\sigma = \dfrac{1}{\lambda}, \tau_{\text{инт}} = \dfrac{1}{\lambda}\right) : \nu = 1$

Для большинства реальных потоков $0 \le \nu \le 1$.

При $\nu = 0$ поток регулярный, детерминированный.

Коэффициент вариации - характеристика, отражающая степень неравномерности поступления заявок.

Каналы (приборы) обслуживания. В СМО могут быть один или несколько обслуживающих приборов (каналов). Согласно с этим СМО называют одноканальными или многоканальными.

Многоканальные СМО могут состоять из однотипных или разнотипных приборов. Обслуживающими приборами могут быть:

- линии связи;
- мастера ремонтных мастерских, продавцы, кассиры;
- маршрутизаторы в компьютерных сетях;
- транспортные средства;
- платежные терминалы;
- серверы, и др.

Основная характеристика канала - время обслуживания. Как правило, время обслуживания - величина случайная.

Обычно практики полагают, что время обслуживания имеет экспоненциальный закон распределения:

$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, f(t) = e^{-\mu t}$, где μ - интенсивность обслуживания, $\mu = \dfrac{1}{\overline{\tau}_{\text{обсл}}}$; $\overline{\tau}_{\text{обсл}}$ - математическое ожидание времени обслуживания.

То есть процесс обслуживания - марковский, а это, как теперь нам известно, дает существенные удобства в численно-математическом моделировании.

Кроме экспоненциального встречаются k -распределение Эрланга, гиперэкспоненциальное, треугольное и некоторые другие. Это нас не должно смущать, так как показано, что значение критериев эффективности СМО мало зависят от вида закона распределения вероятностей времени обслуживания.

При исследовании СМО выпадает из рассмотрения сущность обслуживания, качество обслуживания.

Каналы могут быть **абсолютно надежными**, то есть не выходить из строя. Вернее, так может быть принято при исследовании. Каналы могут обладать **конечной надежностью**. В этом случае модель СМО значительно сложнее.

Очередь заявок. В силу случайного характера потоков заявок и обслуживания пришедшая заявка может застать канал (каналы) занятым обслуживанием предыдущей заявки. В этом случае она либо покинет СМО не обслуженной, либо останется в системе, ожидая начало своего обслуживания. В соответствии с этим различают:

- СМО с отказами;
- СМО с ожиданием.

СМО с ожиданием - характеризуются наличием очередей. Очередь может иметь ограниченную или неограниченную емкость: $1 \le L \prec \infty.$

Исследователя обычно интересуют такие статистические характеристики, связанные с пребыванием заявок в очереди:

- среднее количество заявок в очереди за интервал исследования;

• среднее время пребывания (ожидания) заявки в очереди. **СМО с ограниченной емкостью очереди** относят к СМО смешанного типа.

СМО смешанного типа - такие СМО, в которых заявки имеют ограниченное время пребывания в очереди независимо от ее емкости.

Выходящий поток - это поток обслуженных заявок, покидающих СМО.

Встречаются случаи, когда заявки проходят через несколько СМО: транзитная связь, производственный конвейер и т. п. В этом случае выходящий поток является входящим для следующей СМО.

Многофазные СМО, сети СМО - совокупность последовательно связанных между собой СМО

Входящий поток первой СМО, пройдя через последующие СМО, искажается и это затрудняет моделирование. Однако, следует иметь в виду, что при простейшем входном потоке и экспоненциальном обслуживании (то есть в марковских системах) выходной поток тоже простейший. Если время обслуживания имеет не экспоненциальное распределение, то выходящий поток не только не простейший, но и не рекуррентный.

Заметим, что интервалы между заявками выходящего потока, это не то же самое, что интервалы обслуживания. Ведь может оказаться, что после окончания очередного обслуживания СМО какое-то время простаивает из-за отсутствия заявок. В этом случае интервал выходящего потока состоит из времени незанятости СМО и интервала обслуживания первой, пришедшей после простоя, заявки.

В системах с отказами есть **поток необслуженных заявок**. Если в СМО с отказами поступает рекуррентный поток, а обслуживание - экспоненциальное, то и поток необслуженных заявок - рекуррентный.

Очереди свободных каналов

В многоканальных СМО могут образовываться очереди свободных каналов. Количество свободных каналов - величина случайная. Исследователя могут интересовать различные характеристики этой случайной величины. Обычно это среднее число каналов, занятых обслуживанием за интервал исследования.

Таким образом, по признакам, влияющим на функционирование, СМО может принадлежать к одному из типов в соответствии с приводимой классификацией (рис. 2).

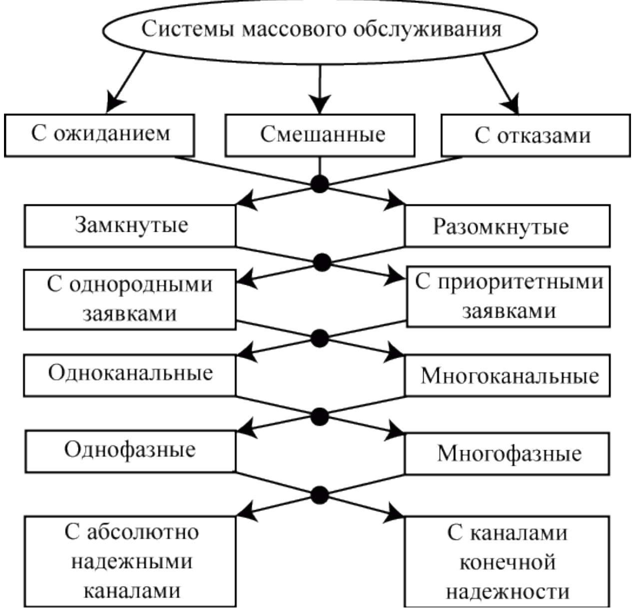


Рис. 2 Классификация СМО

Для обозначения простых (однофазных) СМО используется символика, предложенная Кендаллом:

$$A/B/n/m.$$

A - входящий поток заявок: $A = GI$ - рекуррентный поток; $A = \mathrm{M}$ - простейший поток с показательным законом распределения вероятностей; $A = D$ - регулярный или детерминированный поток (с постоянными интервалами между моментами поступления заявок).

B - случайная длительность обслуживания: $B = G$ или $B = GI$ - рекуррентное обслуживание с одной и той же функцией распределения $B(t)$ для разных каналов; $B = \mathrm{M}$ - показательное обслуживание; $B = D$ - регулярное обслуживание.

n - количество обслуживающих каналов. Если $n > 1$, то система называется многоканальной.

m - количество мест для ожидания заявок в очереди. Если $m = 0$, то СМО с потерями (без ожидания); $m = \infty$ - система с неограниченным ожиданием; $0 < m < \infty$ - система с ограниченным числом мест для ожидания.

2. СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью).

СМО с ожиданием (очередью)

В качестве показателей эффективности СМО с ожиданием, кроме уже известных показателей — абсолютной A и относительной Q пропускной способности, вероятности отказа P_{otk}, среднего числа занятых каналов к (для многоканальной системы) будем рассматривать также следующие:

1) $L_{\text{sist.}}$ — среднее число заявок в системе;
2) $T_{\text{sist.}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;
3) $L_{\text{och.}}$ — среднее число заявок в очереди (длина очереди);
4) $T_{\text{och.}}$ — среднее время пребывания заявки в очереди;
5) $P_{\text{zan.}}$ — вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

Одноканальная система с неограниченной очередью

На практике часто встречаются одноканальные СМО с неограниченной очередью (например, телефон-автомат с одной будкой). Рассмотрим задачу.

Имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложены никакие ограничения (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживании — интенсивность μ. Необходимо найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k$, по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 — канал свободен; S_1 — канал занят (обслуживает заявку), очереди нет; S_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди; $\ldots$ S_k — канал занят, $(k-1)$ заявок стоят в очереди и т.д.

Граф состояний СМО представлен на рис. 1.

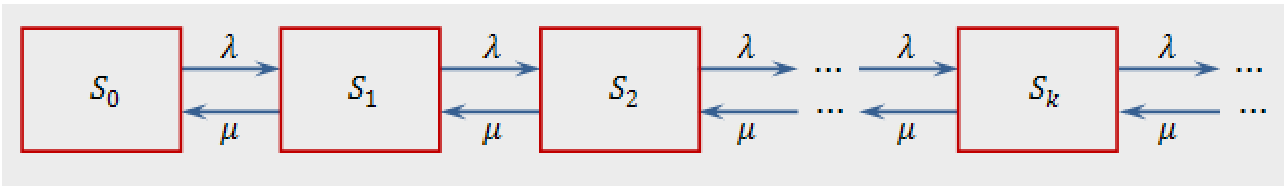


Рис. 1

Это процесс гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний, в котором интенсивность потока заявок равна λ, а интенсивность потока обслуживании μ.

Прежде чем записать формулы предельных вероятностей, необходимо быть уверенным в их существовании, ведь в случае, когда время $t \to \infty$, очередь может неограниченно возрастать. Доказано, что *если* $\rho < 1$, *т.е. среднее число приходящих заявок меньше* *среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если $\rho \geqslant 1$, очередь растет до бесконечности.*

Для определения предельных вероятностей состояний воспользуемся формулами (16), (17) для процесса гибели и размножения (здесь мы допускаем известную нестрогость, так как ранее эти формулы были получены для случая конечного числа состояний системы). Получим:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots\right]^{-1} = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots\right)^{-1}. \quad (1)$$

Так как предельные вероятности существуют лишь при $\rho < 1$, то геометрический ряд со знаменателем $\rho < 1$, записанный в скобках в формуле (1), сходится к сумме, равной $\frac{1}{1-\rho}$. Поэтому $p_0 = 1 - \rho$, (2) и с учетом

$$p_1 = \rho \cdot p_0, \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_k = \rho^k \cdot p_0, \quad \ldots$$

найдем предельные вероятности других состояний

$$p_1 = \rho(1-\rho), \quad p_2 = \rho^2(1-\rho), \quad \ldots, \quad p_k = \rho^k(1-\rho), \quad \ldots (3)$$

Предельные вероятности $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ образуют убывающую геометрическую профессию со знаменателем $\rho < 1$, следовательно, вероятность p_0 — наибольшая. Это означает, что если СМО справляется с потоком заявок (при $\rho < 1$), то наиболее вероятным будет отсутствие заявок в системе.

Среднее число заявок в системе $L_{\text{sist.}}$ определим по формуле математического ожидания, которая с учетом (34) примет вид

$$L_{\text{sist.}} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = (1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \quad (4)$$

(суммирование от 1 до ∞, так как нулевой член $0 \cdot p_0 = 0$).

Можно показать, что формула (4) преобразуется (при $\rho < 1$) к виду

$$L_{\text{sist.}} = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (5)$$

Найдем среднее число заявок в очереди $L_{\text{och.}}$. Очевидно, что

$$L_{\text{och.}} = L_{\text{sist.}} - L_{\text{ob.}}, \quad (6)$$

где $L_{\text{ob.}}$ — среднее число заявок, находящихся под обслуживанием.

Среднее число заявок под обслуживанием определим по формуле математического ожидания числа заявок под обслуживанием, принимающего значения 0 (если канал свободен) либо 1 (если канал занят): $L_{\text{ob.}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0)$,

т.е. среднее число заявок под обслуживанием равно вероятности того, что канал занят: $L_{\text{ob.}} = P_{\text{zan.}} = 1 - p_0$. (38) В силу (2) $L_{\text{ob.}} = P_{\text{zan.}} = \rho$. (7)

Теперь по формуле (6) с учетом (5) и (7)

$$L_{\text{och.}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \quad (8)$$

Доказано, что *при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе (очереди) равна среднему числу заявок в системе (в очереди), деленному на интенсивность потока заявок, т.е.*

$$T_{\text{sist.}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{sist.}}, \quad (9)$$

$$T_{\text{och.}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{och.}}. \quad (10)$$

формулы (9) и (10) называются формулами Литтла. Они вытекают из того, что *в предельном, стационарном режиме среднее число заявок, прибывающих в систему, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока заявок имеют одну и ту же интенсивность* λ.

На основании формул (9) и (10) с учетом (5) и (8) среднее время пребывания заявки в системе определится по формуле: $T_{\text{sist.}} = \dfrac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$, (11)

а среднее время пребывания заявки в очереди — $T_{\text{och.}} = \dfrac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$. (12)

Пример 8. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем 2 судна.

Решение. Имеем $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{\text{ob.}} = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$. Так как $\rho = 0{,}8 < 1$, то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Вероятность того, что причал свободен, по (2) $p_0 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность того, что он занят, $P_{\text{zan.}} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. По формуле (3) вероятности того, что у причала находятся 1, 2, 3 судна (т.е. ожидают разгрузки 0, 1, 2 судна), равны

$$p_1 = 0{,}8(1-0{,}8) = 0{,}16; \quad p_2 = 0{,}8^2(1-0{,}8) = 0{,}128; \quad p_3 = 0{,}8^3(1-0{,}8) = 0{,}1024.$$

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна, равна

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}3904.$$

По формуле (8) среднее число судов, ожидающих разгрузки, $L_{\text{och.}} = \dfrac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = 3{,}2$ среднее время ожидания разгрузки по формуле (10) $T_{\text{och.}} = \dfrac{3{,}2}{0{,}8} = 4$ (сутки).

По формуле (5) среднее число судов, находящихся у причала, $L_{\text{sist.}} = \dfrac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4$ (сутки) (или проще по (6) $L_{\text{sist.}} = 3{,}2 + 0{,}8 = 4$ (сутки), а среднее время пребывания судна у причала по формуле (9) $T_{\text{sist.}} = \dfrac{4}{0{,}8} = 5$ (сутки).

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысокая. Для ее повышения необходимо уменьшение среднего времени разгрузки судна $\bar{t}_{\text{ob.}}$ либо увеличение числа n причалов.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим задачу. Имеется n-канальная СМО с неограниченной очередью. Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживании — интенсивность μ. Необходимо найти предельные вероятности состояний СМО и показатели ее эффективности.

Система может находиться в одном из состояний $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n, \ldots$ нумеруемых по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 — в системе нет заявок (все каналы свободны); S_1 — занят один канал, остальные свободны; S_2 — заняты два канала, остальные свободны; $\cdots$ S_k — занято k каналов, остальные свободны; $\cdots$ S_n — заняты все n каналов (очереди нет); S_{n+1} — заняты все n каналов, в очереди одна заявка; $\cdots$ S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди, и т.д.

Граф состояний системы показан на рис. 2. Обратим внимание на то, что в отличие от предыдущей СМО, интенсивность потока обслуживании (переводящего систему из одного состояния в другое справа налево) не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок в СМО от 0 до n увеличивается от величины μ до $n\mu$, так как соответственно увеличивается число каналов обслуживания. При числе заявок в СМО большем, чем n, интенсивность потока обслуживании сохраняется равной $n\mu$.

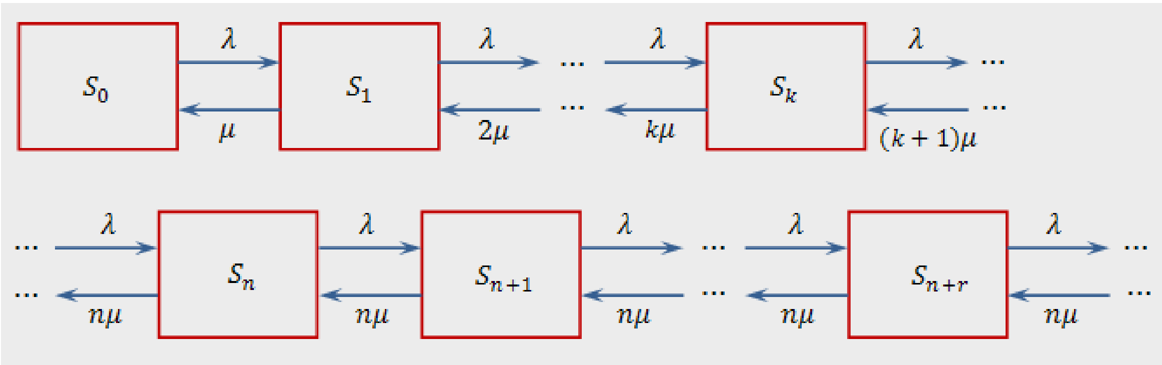


Рис. 2

Можно показать, что при $\frac{\rho}{n} < 1$ предельные вероятности существуют. Если $\frac{\rho}{n} \geqslant 1$, очередь растет до бесконечности. Используя формулы для процесса гибели и размножения, можно получить следующие формулы для предельных вероятностей состояний n-канальной СМО с неограниченной очередью

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}, \quad (13)$$

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0, \quad (14)$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0, \quad \ldots \quad (15)$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди, $P_{\text{och.}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot p_0.$ (16)

Для n-канальной СМО с неограниченной очередью, используя прежние приемы, можно найти:

среднее число занятых каналов $\overline{k} = \dfrac{\lambda}{\mu} = \rho,$ (17)

среднее число заявок в очереди $L_{\text{och.}} = \dfrac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n!} \cdot \left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^{-2}$, (18)

среднее число заявок в системе $L_{\text{sist}} = L_{\text{och.}} + \rho.$ (19)

Среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе, как и ранее, находятся по формулам Литтла (10) и (9).

Замечание. Для СМО с неограниченной очередью при $\rho < 1$ любая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, т.е. вероятность отказа $P_{\text{otk.}} = 0$, относительная пропускная способность $Q = 1$, а абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок, т.е. $A = \lambda$.

Пример 9. В универсаме к узлу расчета поступает поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 81$ чел. в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя $\overline{t}_{\text{ob.}} = 2$ мин. Определить:

а. Минимальное количество контролеров-кассиров $n_{\min}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{\min}$.

б. Оптимальное количество $n_{\text{opt.}}$ контролеров-кассиров, при котором относительная величина затрат $C_{\text{otn.}}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая, например, как $C_{\text{otn.}} = \dfrac{n}{\lambda} + 3T_{\text{och.}}$, будет минимальна, и сравнить характеристики обслуживания при $n = n_{\min}$ и $n = n_{\text{opt.}}$.

в. Вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей.

Решение. а. По условию $\lambda = 81$ (1/ч) $= \dfrac{81}{60} = 1{,}35$ (1/мин.). По формуле $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda \overline{t}_{\text{ob.}} = 1{,}35 \cdot 2 = 2{,}7$. Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\dfrac{\rho}{n} < 1$, т.е. при $n > \rho = 2{,}7$. Таким образом, минимальное количество контролеров-кассиров $n_{\min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при $n = 3$.

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, по формуле (13)

$$p_0 = \left(1 + 2{,}7 + \frac{2{,}7^2}{2!} + \frac{2{,}7^3}{3!} + \frac{2{,}7^4}{3!(3 - 2{,}7)}\right)^{-1} = 0{,}025$$

т.е. в среднем 2,5% времени контролеры-кассиры будут простаивать.

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь, по (16)

$P_{\text{och.}} = \dfrac{2{,}7^4}{3! \cdot (3 - 2{,}7)} \cdot 0{,}025 = 0{,}735.$

Среднее число покупателей, находящихся в очереди, по (18)

$L_{\text{och.}} = \dfrac{2{,}7^4}{3 \cdot 3! \cdot (1 - 2{,}7/3)^2} \cdot 0{,}025 = 7{,}35.$

Среднее время ожидания в очереди по (10) $T_{\text{och.}} = \dfrac{7{,}35}{1{,}35} = 5{,}44$ (мин).

Среднее число покупателей в узле расчета по (19) $L_{\text{sist.}} = 7{,}35 + 2{,}7 = 10{,}05$.

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета по (9) $T_{\text{sist.}} = \frac{10{,}05}{1{,}35} \approx 7{,}44$ (мин).

Среднее число контролеров-кассиров, занятых обслуживанием покупателей, по (17) $\bar{k} = 2{,}7$.

Коэффициент (доля) занятых обслуживанием контролеров-кассиров $\bar{k}_{\text{otn.}} = \frac{\rho}{n} = \frac{2{,}7}{3} = 0{,}9$.

Абсолютная пропускная способность узла расчета $A = 1{,}35$ (1/мин), или 81 (1/ч), т.е. 81 покупатель в час.

Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров-кассиров.

б. Относительная величина затрат при $n = 3$

$$C_{\text{otn.}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{och.}} = \frac{3}{1{,}35} + 3 \cdot 5{,}44 = 5{,}44.$$

Рассчитаем относительную величину затрат при других значениях n (табл. 2).

Таблица 2

Характеристика обслуживания	Число контролеров-кассиров				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя контролеров-кассиров p_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Среднее число покупателей в очереди $T_{\text{och.}}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Относительная величина затрат $C_{\text{otn.}}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Как видно из табл. 2, минимальные затраты получены при $n = n_{\text{opt.}} = 5$ контролерах-кассирах.

Определим характеристики обслуживания узла расчета при $n = n_{\text{opt.}} = 5$. Получим

$P_{\text{och.}} = 0{,}091$; $L_{\text{och.}} = 0{,}198$; $T_{\text{och.}} = 0{,}146$; $L_{\text{sist.}} = 2{,}9$; $T_{\text{sist.}} = 2{,}15$; $\bar{k} = 2{,}7$; $k_3 = 0{,}54$

Как видим, при $n = 5$ по сравнению с $n = 3$ существенно уменьшились вероятность возникновения очереди $P_{\text{och.}}$, длина очереди $L_{\text{och.}}$ и среднее время пребывания в очереди $T_{\text{och.}}$, и соответственно среднее число покупателей $L_{\text{sist.}}$ и среднее время нахождения в узле расчета $T_{\text{sist.}}$, а также доля занятых обслуживанием контролеров k_3. Но среднее число занятых обслуживанием контролеров-кассиров $\bar{k}$ и абсолютная пропускная способность узла расчета A естественно не изменились.

в. Вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей, определится как

$$P\{r \leqslant 3\} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_{5+1} + p_{5+2} + p_{5+3} = 1 - P_{\text{och.}} + p_{5+1} + p_{5+2} + p_{5+3},$$

где каждое слагаемое найдем по формулам (13)–(16). Получим при $n = 5$:

$$P\{r \leqslant 3\} = 1 - \frac{2{,}7^6}{5!(5-2{,}3)} \cdot 0{,}065 + \frac{2{,}7^6}{5 \cdot 5!} \cdot 0{,}065 + \frac{2{,}7^7}{5^2 \cdot 5!} \cdot 0{,}065 + \frac{2{,}7^8}{5^3 \cdot 5!} \cdot 0{,}065 = 0{,}986.$$

(Заметим, что в случае $n = 3$ контролеров-кассиров та же вероятность существенно меньше: $P\{r \leqslant 3\} = 0{,}464$).

Пример 10. Железнодорожная касса с двумя окошками продает билеты в два пункта A и B. Интенсивность потока пассажиров, желающих купить билеты, для обоих пунктов одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0{,}45$(пассажиров в минуту). На обслуживание пассажиров кассир тратит в среднем 2 мин. Рассматриваются два варианта продажи билетов: первый — билеты продаются в одной кассе с двумя окошками одновременно в оба пункта A и B, второй — билеты продаются в двух специализированных кассах (по одному окошку в каждой), одна только в пункт A, другая — только в пункт B. Необходимо:

а. Сравнить два варианта продажи билетов по основным характеристикам обслуживания.

б. Определить, как надо изменить среднее время обслуживания одного пассажира, чтобы по второму варианту продажи пассажиры затрачивали на приобретение билетов в среднем меньше времени, чем по первому варианту.

Решение.

а. По первому варианту имеем двухканальную СМО, на которую поступает поток заявок интенсивностью $\lambda = 0{,}45 + 0{,}45 = 0{,}9$; интенсивность потока обслуживании $\mu = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}8$. Так как $\frac{\rho}{n} = \frac{1{,}8}{2} = 0{,}9 < 1$, то предельные вероятности существуют.

Вероятность простоя двух кассиров по (13)

$$p_0 = \left(1 + \frac{1{,}8}{1!} + \frac{1{,}8^2}{2!} + \frac{1{,}8^3}{2! \cdot (2-1{,}8)}\right)^{-1} \approx 0{,}0526.$$

Среднее число пассажиров в очереди по (18)

$$L_{\text{och.}} = \frac{1{,}8^3}{2 \cdot 2! \cdot (1 - 1{,}8/2)^2} \cdot 0{,}0526 = 7{,}67.$$

Среднее число пассажиров у кассы по (19)

$$L_{\text{sist.}} = 7{,}67 + 1{,}8 = 9{,}47.$$

Среднее время на ожидание в очереди и покупку билетов равно соответственно (по формулам (10) и (9)):

$$T_{\text{och.}} = \frac{7{,}67}{0{,}9} = 8{,}52 \text{ (мин) и } T_{\text{sist.}} = \frac{9{,}47}{0{,}9} = 10{,}5 \text{ (мин).}$$

По **второму варианту** имеем две одноканальные СМО (два специализированных окошка); на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0{,}45$. По-прежнему $\mu = 0{,}5$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}9 < 1$, предельные вероятности существуют. По формулам (8), (5), (10), (9)

$$L_{\text{och.}} = \frac{0{,}9^2}{1 - 0{,}9} = 8{,}1; \; L_{\text{sist.}} = \frac{0{,}9}{1 - 0{,}9} = 9; \; T_{\text{och.}} = \frac{8{,}1}{0{,}45} = 18; \; T_{\text{sist.}} = \frac{9}{0{,}45} = 20.$$

Итак, по второму варианту увеличились и длина очереди, и среднее время ожидания в ней и в целом на покупку билетов. Такое различие объясняется тем, что в первом варианте (двухканальная СМО) меньше средняя доля времени, которую простаивает каждый из двух кассиров: если он не занят обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт A, он может заняться обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт B, и наоборот. Во втором варианте такой взаимозаменяемости нет.

Можно заметить, что среднее время на покупку билетов по второму варианту увеличилось более чем в 2 раза. Такое значительное увеличение связано с тем, что СМО работает на пределе своих возможностей $(\rho = 0{,}9)$: достаточно незначительно увеличить среднее время обслуживания $\bar{t}_{\text{ob.}}$, т.е. уменьшить μ, и ρ превзойдет 1, т.е. очередь начнет неограниченно возрастать.

б. Выше было получено, что по первому варианту продажи билетов при среднем времени обслуживания одного пассажира $\bar{t}_{\text{ob.}} = 2$ (мин) среднее время на покупку билетов составит $T_{\text{sist.1}} = 10{,}5$ (мин). По условию для второго варианта продажи $T_{\text{sist.2}} < T_{\text{sist.1}}$, или с учетом (5) и (9): $\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\rho}{1-\rho} < T_{\text{sist.1}}$.

Полагая $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda\bar{t}_{\text{ob.}}$, получим $-\dfrac{\bar{t}_{\text{ob.}}}{1-\lambda\bar{t}_{\text{ob.}}} < T_{\text{sist.1}}$, откуда найдем $\bar{t}_{\text{ob.}} < \dfrac{T_{\text{sist.1}}}{1+\lambda T_{\text{sist.1}}}$ или $\bar{t}_{\text{ob.}} < \dfrac{10{,}5}{1+0{,}45\cdot 10{,}5} = 1{,}83$ (мин).

Итак, средние затраты времени на покупку билетов по второму варианту продажи уменьшатся, если среднее время обслуживания одного пассажира уменьшится более чем на 0,17 мин, или более чем на 8,5%.

СМО с ограниченной очередью

СМО с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных выше задач лишь тем, что число заявок в очереди ограничено (не может превосходить некоторого заданного m). Если новая заявка поступает в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной, т.е. получает отказ.

Очевидно: для вычисления предельных вероятностей состояний и показателей эффективности таких СМО может быть использован тот же подход, что и выше, с той разницей, что суммировать надо не бесконечную прогрессию (как, например, мы делали при выводе формулы (2)), а конечную. Соответствующие формулы сведем в табл. 3.

Среднее время пребывания заявки в очереди и в системе, как и ранее, определяем по формулам Литтла (12) и (11).

Пример 11. По условию примера 8 найти показатели эффективности работы причала. Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.

Решение. По условию $m = 3$. Используем формулы, приведенные во второй графе табл. 3.

Вероятность того, что причал свободен:

$$p_0 = \frac{1-0{,}6}{1-0{,}8^{3+2}} = 0{,}297.$$

Вероятность того, что приходящее судно покинет причал без разгрузки:

$$P_{\text{otk.}} = 0{,}8^{3+1}\cdot 0{,}122.$$

Относительная пропускная способность причала:

$$Q = 1 - 0{,}122 = 0{,}878.$$

Абсолютная пропускная способность причала $A = 0{,}4\cdot 0{,}878 = 0{,}351$, т.е. в среднем в сутки разгружается 0,35 судна.

Среднее число судов, ожидающих разгрузку

$$L_{\text{och.}} = \frac{0{,}8^2\cdot[1-0{,}8^3\cdot(3+1-3\cdot 0{,}8)]}{(1-0{,}8^{3+2})(1-0{,}8)} = 0{,}861,$$

а среднее время ожидания разгрузки по (10)

$$T_{\text{och.}} = \frac{0{,}861}{0{,}8} = 1{,}076 \text{ (сутки)}.$$

Среднее число судов, находящихся у причала $L_{\text{sist.}} = 0{,}861 + (1 - 0{,}297) = 1{,}564$, а среднее время пребывания судна у причала по (9): $T_{\text{sist.}} = \dfrac{1{,}564}{0{,}8} = 1{,}955$ (сутки).

СМО с ограниченным временем ожидания

На практике часто встречаются СМО с так называемыми «нетерпеливыми» заявками. Такие заявки могут уйти из очереди, если время ожидания превышает некоторую величину. В частности, такого рода заявки возникают в различных технологических системах, в которых задержка с началом обслуживания может привести к потере качества продукции, в системах оперативного управления, когда срочные сообщения теряют ценность (или даже смысл), если они не поступают на обслуживание в течение определенного времени.

В простейших математических моделях таких систем предполагается, что заявка может находиться в очереди случайное время, распределенное по показательному закону с некоторым параметром ν, т.е. можно условно считать, что каждая заявка, стоящая в очереди на обслуживание, может покинуть систему с интенсивностью ν.

Соответствующие показатели эффективности СМО с ограниченным временем получаются на базе результатов, полученных для процесса гибели и размножения.

В заключение отметим, что на практике часто встречаются ***замкнутые системы обслуживания***, у которых входящий поток заявок существенным образом зависит от состояния самой СМО. В качестве примера можно привести ситуацию, когда на ремонтную базу поступают с мест эксплуатации некоторые машины: понятно, что чем больше машин находится в состоянии ремонта, тем меньше их продолжает эксплуатироваться и тем меньше интенсивность потока вновь поступающих на ремонт машин. Для замкнутых СМО характерным является ограниченное число источников заявок, причем каждый источник "блокируется" на время обслуживания его заявки (т.е. он не выдает новых заявок). В подобных системах при конечном числе состояний СМО предельные вероятности будут существовать при любых значениях интенсивностей потоков заявок и обслуживании. Они могут быть вычислены, если вновь обратиться к процессу гибели и размножения.

3. Предельные вероятности состояний.

Пусть имеется физическая система S={S1,S2,…Sn}, в которой протекает марковский случайный процесс с непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова). Предположим, что l_{ij}=const, т. е. все потоки событий простейшие (стационарные пуассоновские). Записав систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний и проинтегрировав эти уравнения при заданных начальных условиях, мы получим $p_1(t), p_2(t), \ldots p_n(t)$, при любом t. Поставим следующий вопрос, что будет происходить с системой S при t б.б. Будут ли функции $p_i(t)$ стремиться к каким-то пределам? Эти пределы, если они существуют, называются предельными вероятностями состояний. Можно доказать теорему: если число состояний S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в каждое другое, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы. Предположим, что поставленное условие выполнено и предельные вероятности существуют $\lim_{t\to\infty} p_i(t) = p_i$

(i=1,2,…n), $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Таким образом, при t б.б в системе S устанавливается некоторый предельный стационарный режим. Смысл этой вероятности: она представляет собой не что иное, как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии. Для вычисления p_i в системе уравнений Колмогорова, описывающих вероятности состояний, нужно положить все левые части (производные) равными 0. Систему получающихся линейных алгебраических уравнений надо решать совместно с уравнением.

Схема гибели и размножения

Мы знаем, что, имея в распоряжении размеченный граф состояний, можно легко написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний, а также написать и решить алгебраические уравнения для финальных вероятностей. Для некоторых случаев удается последние уравнения решить заранее, в буквенном виде. В частности, это удается сделать, если граф состояний системы представляет собой так называемую «схему гибели и размножения».

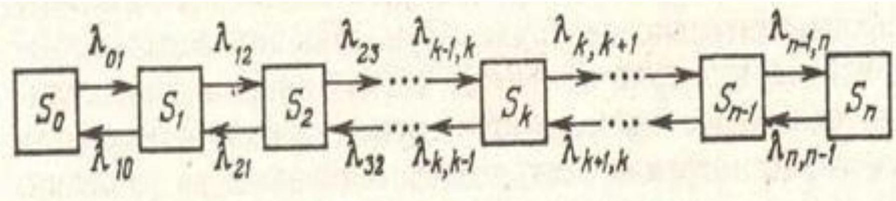


Рис. 1

Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет вид, показанный на рис. 1. Особенность этого графа в том, что все состояния системы можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний (S1, S2, ..., Sn-1) связано прямой и обратной стрелкой с каждым из соседних состояний — правым и левым, а крайние состояния (S0, Sn) — только с одним соседним состоянием. Термин «схема гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где подобной схемой описывается изменение численности популяции.

Схема гибели и размножения очень часто встречается в разных задачах практики, в частности — в теории массового обслуживания, поэтому полезно, один раз и навсегда, найти для нее финальные вероятности состояний.

Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа,— простейшие (для краткости будем называть и систему S и протекающий в ней процесс — простейшими).

Пользуясь графом рис. 1, составим и решим алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний (их существование вытекает из того, что из каждого состояния можно перейти в каждое другое, и число состояний конечно). Для первого состояния S0 имеем: $p_0\lambda_{01} = \lambda_{10}p_1$ (1)

Для второго состояния S1: $(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = p_0\lambda_{01} + \lambda_{21}p_2$

В силу (1) последнее равенство приводится к виду $p_1\lambda_{12} = \lambda_{21}p_2$

далее, совершенно аналогично $p_2\lambda_{23} = \lambda_{32}p_3$ и вообще $p_{k-1}\lambda_{k-1,k} = \lambda_{k,k-1}p_k$, где k принимает все значения от 0 до n. Итак, финальные вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{array}{l} p_0\lambda_{01} = \lambda_{10}p_1 \\ p_1\lambda_{12} = \lambda_{21}p_2 \\ \rule{3cm}{0.4pt} \\ p_{k-1}\lambda_{k-1,k} = \lambda_{k,k-1}p_k \\ \rule{4cm}{0.4pt} \\ p_{n-1}\lambda_{n-1,n} = \lambda_{n,n-1}p_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

кроме того, надо учесть нормировочное условие $p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ (3)

Решим эту систему уравнений. Из первого уравнения (2) выразим p_1 через p_0.

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0$$ (4) Из второго, с учетом (4), получим: $$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0$$ (5)

из третьего, с учетом (5), $$p_3 = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{32}} \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0$$ (6) и вообще, для любого k (от 1 до N):

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k} \dots}{\lambda_{k,k-1} \dots} \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0 \qquad (7)$$

Обратим внимание на формулу (7). В числителе стоит произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо (с начала и до данного состояния S_k), а в знаменателе — произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево (с начала и до S_k).

Таким образом, все вероятности состояний $p_1, p_2, \dots, p_n$ выражены через одну из них (p_0). Подставим эти выражения в нормировочное условие (3). Получим, вынося за скобку p_0:

$$p_0\left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots}{\lambda_{n,n-1} \dots} \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}\right) = 1$$

отсюда получим выражение для p0.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots}{\lambda_{n,n-1} \dots} \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1} \qquad (8)$$

(скобку мы возвели в степень -1, чтобы не писать двухэтажных дробей). Все остальные вероятности выражены через p_0 (см. формулы (4) — (7)). Заметим, что коэффициенты при p_0 в каждой из них представляют собой не что иное, как последовательные члены ряда, стоящего после единицы в формуле (8). Значит, вычисляя p_0, мы уже нашли все эти коэффициенты. Полученные формулы очень полезны при решении простейших задач теории массового обслуживания.

4. Модели систем массового обслуживания при пуассоновских потоках заявок.

Простейший пуассоновский поток.

Для решения большого числа прикладных задач бывает достаточным применить математические модели однородных потоков, удовлетворяющих требованиям стационарности, без последействия и ординарности.

Определение: Поток называется стационарным, если вероятность появления n событий на интервале времени (t,t+T) зависит от его расположения на временной оси t.

Определение: Поток событий называется ординарным, если вероятность появления двух или более событий в течении элементарного интервала времени D t есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале, т.е. $\lim_{\Delta t \to 0} P(n, \Delta t) = 0$ при n=2,3,…

Определение: Поток событий называется **потоком без последствия**, если для любых непересекающихся интервалов времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другой.

Определение: Если поток удовлетворяет требованиям стационарности, ординарности и без последствия он называется **простейшим, пуассоновским потоком.**

Доказано, что для простейшего потока число n событий, попадающих на любой интервал z распределено по закону Пуассона:

$$P(n,z) = \frac{(\lambda z)^n \exp(-\lambda z)}{n!}, n = 0,1,2,\dots \qquad (1)$$

Вероятность того, что на интервале времени z не появится ни одного события равна:

$$P(0,z) = e^{-\lambda z}$$
$$P(T < z) = 1 - e^{-\lambda z}$$
(2)

тогда вероятность противоположного события:

где по определению P(T<z)=F(z) это функция распределения вероятности T. Отсюда получим, что случайная величина T распределена по показательному закону:

$$f(z) = \frac{dF}{dz} = \lambda e^{-\lambda z} \quad (3)$$

параметр λ называют плотностью потока. Причем,

$$M[T] = \frac{1}{\lambda}, \quad D[T] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Впервые описание модели простейшего потока появились в работах выдающихся физиков начала века – А. Эйнштейна и Ю. Смолуховского, посвященных броуновскому движению.

Свойства простейшего пуассоновского потока.

Известны два свойства простейшего потока, которые могут быть использованы при решении практических задач.

Введем величину a= λ x. В соответствии со свойствами Пуассоновского распределения при $a \to \infty$ оно стремится к нормальному. Поэтому для больших a для вычисления P{X(a)меньше, либо равно n}, где X(a) – случайная величина распределенная по Пуассону с мат. ожиданием a можно воспользоваться следующим приближенным равенством:

$$P\{X(a) \le n\} \approx 1 \div \sqrt{2\pi a} \int_{-\infty}^{n+1/2} \exp\{-{(t-a)^2}/{2a}\}dt, \quad (\ .4)$$

$$= \Phi\left(\frac{n - a + \frac{1}{2}}{\sqrt{a}}\right), \quad где \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2} dt\right).$$

Еще одно свойство простейшего потока связано со следующей теоремой:

Теорема: При показательном распределении интервала времени между требованиями T, независимо от того, сколько он длился, оставшаяся его часть имеет тот же закон распределения.

Доказательство: пусть T распределено по показательному закону: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
Предположим, что промежуток a уже длился некоторое время a<T. Найдем условный закон распределения оставшейся части промежутка T_1=T-a

$F_a(x)$=P(T-a<x½ T>x)

По теореме умножения вероятностей:

P((T>a)(T-a<z))=P(T>z) P(T-a<z|T>a)=P(T>a) $F_a(z)$.

Отсюда,

$$F_a = \frac{R((T > a) \wedge (T - a < z))}{P(T > a)}, \quad но \quad события \quad (T > a) \wedge (T - a < z)$$

равносильно событию a<T<z+a, для которого P(a<T<z+a)=F(z+a)-F(a); с другой стороны

P(T>a)=1-F(a), таким образом

$F_a(x)$=(F(z+a)-F(a))/(1-F(a))

Отсюда, учитывая (3):

$$F_a(z) = \frac{(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda(z-a)})}{e^{-\lambda a}} = 1 - e^{-\lambda z} = F(z)., \quad ч.т.д.$$

Этим свойством обладает только один вид потоков – простейшие пуассоновские.

Исследование задач ТСМО становится намного проще в предположении, что исходный поток является простейшим пуассоновским.

Однако критическое изучение условий, которые приводят к простейшему потоку, заставляют сделать вывод, что простейшие потоки встречаются не так часто. Например, зачастую нарушается ординарность – одновременно происходят заказ одного и того же номера по телефону, необходимо ставить несколько машин под загрузку или разгрузку и т.д. Условие стационарности так же часто не выполняется, например, меняется интенсивность заказов на переговоры в течении суток. Несоблюдение условия без последствия так же является обычным. Примером этого может служить поломка машин таксопарка, которая может привести (из-за увеличения нагрузки) к поломкам других машин.

Но в действительности простейшие потоки встречаются гораздо чаще, чем это кажется после приведенных соображений. Объяснением этого занимался шведский ученый Пальма. Позднее Хинчин А.Я. доказал одну общую теорему, которая представляет исключительную теоретическую ценность.

Хинчин доказал, что если поток является суммой большого числа n независимых ординарных, стационарных потоков интенсивности которых $\lambda_i (i = \overline{1,n})$ и ни один из них не является сравнимым по мощности со всем суммарным потоком, то при некоторых аналитических ограничениях суммарный поток сходится к простейшему с интенсивностью

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Теорема Хинчина широко применяется на практике. Так под руководством Гнеденко был исследован поток судов, прибывающих в грузовой порт. Статистическая обработка позволила сделать вывод о достаточно хорошем совпадении реального потока с простейшим. На основании этого были сделаны прогнозы относительно прибытия судов на последующие месяцы.

Нестационарные пуассоновские потоки.

Теорема Хинчина была обобщена на случай, когда слагаемые потоки являются неординарными и нестационарными. При этом, если слагаемые потоки независимы и их интенсивность приблизительно одинакова, то суммарный поток близок к пуассоновскому, но с примененным параметром λ (t).

Причем λ (t) называется **мгновенной плотностью**. Она является пределом отношения среднего числа событий, приходящихся на элементарный интервал времени (t, t+x) к длине интервала, когда последний стремится к нулю.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t}$$

Здесь M(t) – мат ожидание числа событий на интервале Δ t.

Доказано, что для такого потока число событий n попадающих на временной интервал z, начинающихся в момент t_0, распределено по закону Пуассона, а именно:

$$P(t_0, n, x) = \frac{\mu^n \exp(-\mu)}{n!} \quad (*),$$

Где μ - математическое ожидание числа событий на интервале (t_0,t+x), равные:

$$\mu = \int_{t_0}^{t_0+x} \lambda(t) dt$$

Здесь μ очевидно зависит от длины интервала и от его положения на временной оси.

Аналогично тому как была выведена функция плотности распределения вероятности для простейшего пуассоновского потока (3), можно получить функцию плотности распределения вероятности T для нестационарного пуассоновского потока:

$$f(z) = \lambda(t_0 + z) \cdot \exp(-\int_{t_0}^{t_0+z} \lambda(t)dt)$$

Рассматриваемая модель принадлежит математику из Вильнюса Б.И. Григелионису. Этой математической моделью описывается огромнейшее число потоков – вызов врача к больному, поток телеграмм, поток заказов на переговоры, потоки пассажиров и т.д.

Потоки с ограниченным последствием (потоки Пальма).

Другим обобщением простейшего потока является поток Пальма:

Определение: Потоком Пальма называется поток, обладающий свойствами стационарности, ординарности и независимости интервалов времени T между событиями.

Требование независимости интервалов T является более слабым чем требование без последствия, поэтому такие потоки называют также **потоками с ограниченными последствиями**.

Теорема: пусть в систему поступает поток заявок типа Пальма. Заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ. Если при этом время обслуживания имеет показательный закон распределения, то поток не обслуженных заявок является потоком Пальма.

Простейший поток является частным случаем потока Пальма. Его независимые интервалы распределены по показательному закону.

Еще одним примером потоков Пальма являются потоки Эрланга, которые могут быть получены следующим образом:

Если из простейшего потока исключается каждое второе требование, то оставшийся поток образует поток второго порядка, если в потоке сохраняется каждое третье, то это – поток третьего порядка и т.д. Для потока к-го порядка функция плотности для интервала T имеет вид:

$$f_k(z) = \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!e^{-\lambda}}, \quad z > 0 \qquad (**)$$

С увеличением порядка k функция $f_k(x)$ убывает, но M[T] возрастает:

$$M[T] = \int_0^\infty z f_k(z)dz = k/\lambda \ ,$$

$$D[T] = \int_0^\infty \{(z - M[T])^2 f_k(z)\}dz = k/\lambda^2$$

При достаточно большом k (практически при k-5) поток Эрланга k-ого порядка можно считать нормальным с указанными M[T] и D[T]. Это следует из того, что интервал времени T между двумя последовательными событиями в потоке Эрланга k-ого порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин с одним законом распределения. Тогда на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей имеем доказательство утверждения.

Задавая различные значения k в (6) можно получить потоки, обладающие различными последействиями – от полного его отсутствия (k=1) до полной функциональной связи между моментами появления событий (регулярный поток).

На самом деле: при k=1 получаем простейший поток, а при l =const и при $k \to \infty$ поток Эрланга приближается к регулярному.

Свойства потоков Эрланга дает возможность широкого применения этой математической модели.

Потоки восстановления.

На практике нередко приходится сталкиваться с потоками, получившими название потоков восстановления. Примером образования такого потока является ситуация, когда в состоянии непрерывной работы должно находиться устройство. Как только оно перестает выполнять свои функции (старение, поломка) его заменяют на такое же, но новое. Моменты замены t_k, k=1,2, … являются случайными, так как длительность безотказной работы каждого устройства тоже величина случайная, независимая и имеет свое распределение F(z). В литературе такие потоки обозначают GI – общий входящий поток (general imput).

Для потоков восстановления существует большое число разнообразных задач; в частности, задача определения вероятности того, что в течении заданного промежутка времени T появится k событий потока. Простых формул, которые были выведены для простейшего потока, здесь уже нет.

Интересными для практики являются потоки, которые с течениями времени "редеют", проходя через последовательность приборов обслуживания. Примером этого может быть деталь, которая проходит ряд операций и на каждой операции есть вероятность обнаружения скрытого дефекта. В таких случаях деталь устраняется, а первоначальный поток редеет. Еще одним примером может служить исправление последовательно во времени текста несколькими корректорами. При этом количество незамеченных опечаток редеет. Венгерским математиком А.Реньи был получен интересный результат, который заключается в следующем. Поток восстановления подвергается операции: каждое требование остается в потоке с вероятностью q и выбрасывается из потока с вероятностью p=1-q. Одновременно производится изменение масштаба времени: за единицу масштаба считается промежуток длиной q^{-1}. Если это двойное преобразование обозначить символом R_q, то последовательное проведение преобразований R_{q1} , R_{q2} , …, R_{qn} эквивалентно одному преобразованию $R_{q1q2\ldots qn}$. Теорема Реньи состоит в том, что если длительность безотказной работы распределена по закону F(x) имеет конечное математическое ожидание M и

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} q_1 q_2 \cdots q_n = 0,$$

то последовательность редеющих потоков стремится к простейшему пуассоновскому потоку. Таким образом, в определенных условиях потоки восстановления становятся простейшими, что еще раз подтверждает справедливость теоремы Хинчина.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ (НЕ ПРЕДУСМОТРЕНЫ РПД)

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

.

3.1 Практическое занятие 1 - 2 (ПЗ-1-2)

Тема: Случайные события, их вероятность.

3.1.1 Задание для работы:

1. Элементы комбинаторики. Непосредственное вычисление вероятности случайного события. Операции над случайными событиями и их свойства.

2. Теоремы о вероятности суммы случайных событий. Теоремы о вероятности суммы произведения событий.

3. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Элементы комбинаторики. Непосредственное вычисление вероятности случайного события. Операции над случайными событиями и их свойства.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используются при непосредственном вычислении вероятностей.

Приведем некоторые сведения.

Соединениями называют различные группы предметов, составленные из каких-либо объектов.

Элементами называются объекты, из которых составлены соединения. Рассмотрим следующие три вида соединений: перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками из n элементов называют *соединения,* содержащие все n элементов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов. Число перестановок из n элементов находится по формуле $P_n = n!$,

где $n!$ - произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е. $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Например, $P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

Размещениями из n элементов по k в каждом ($n \geq k$) называются *такие соединения,* в каждый из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и отличающихся друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k находят по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \text{ или, } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Например, $A_6^4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2} = 360$

Сочетаниями из n элементов по k ($n>k$) называют *соединения,* в каждый из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов и отличающихся друг от друга, по крайней мере, одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k находят по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Для упрощения вычислений при $k > \frac{1}{2}n$ полезно использовать следующее свойство сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Замечания:

1) по определению $C_n^0 = 1$;

2) для определения числа сочетаний справедливы равенства

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1},\ C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

3) В записанных выше формулах комбинаторики предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы в соединениях повторяются, то в этом случае соединения с повторениями вычисляются по другим формулам.

Пусть среди n элементов рассматриваемого множества есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д. Число перестановок с повторениями определяется по формуле $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$, где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Число размещений по m элементов с повторениями из n элементов равно n^m, т.е. $\left(A_n^m\right)_{\text{повт.}} = n^m$.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно числу сочетаний без повторений из ($n+m-1$) элементов по m, т.е.

$$\left(C_n^m\right)_{\text{повт.}} = C_{n+m-1}^m$$

4) При решении задач комбинаторики можно использовать следующие правила:

правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $(m + n)$ способами.

правило произведения. Если объект A можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Непосредственное вычисление вероятности случайного события

Пример 1. В урне 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым?

Решение. Событие, состоящее в том, что «извлеченный шар оказался голубым», обозначим буквой А. Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 6 благоприятствуют появлению события А. По формуле классической вероятности события получим: $P(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

Пример 2. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов лотереи. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.

Решение. Пусть А - событие, состоящее в том, что среди обладателей билетов окажутся две девушки. Найдем числа m, n.

Число всех равновозможных случаев распределения 5 билетов среди 25 студентов равно числу сочетаний из 25 элементов по 5, т.е. $C_{15}^5 \cdot$ Число групп по трое юношей из 15, которые могут получить билеты, равно C_{15}^3. Каждая такая тройка может сочетаться с любой парой из десяти девушек, а число таких пар равно C_{10}^2. Следовательно, число групп по 5 студентов, образованных из групп в 25 студентов, в каждую из которых будут входить трое

юношей и две девушки, равно произведению $C_{15}^3 \cdot C_{10}^2$. Это произведение равно числу благоприятствующих случаев распределения пяти билетов среди студентов группы так, чтобы три билета получили юноши и два билета - девушки.

В соответствии с формулой $P(A) = \frac{m}{n}$ находим искомую вероятность

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{25}^5} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} : \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{20! \cdot 15! \cdot 10! \cdot 5!}{25! \cdot 12! \cdot 8! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 5}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 2} = \frac{13 \cdot 5 \cdot 3}{23 \cdot 22} = \frac{195}{506} \approx 0{,}385$$

Пример 3. В круг вписан квадрат (рис.2). В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в квадрат?

Решение. Введем обозначения: R - радиус круга, a - сторона вписанного квадрата, A - событие, состоящее в том, что точка попала в квадрат, S - площадь круга, S_1 - площадь вписанного квадрата. Известно, что площадь круга $S = \pi R^2$.

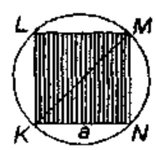


Рис. 2.

Сторона вписанного квадрата через радиус описанной окружности выражается формулой $a=\sqrt{2}R$, поэтому площадь квадрата $S_1 = 2R^2$

Полагая в формуле $P(A)=\dfrac{S_g}{S_G}$ $S_g = S_1$, $S_G = S$,

находим искомую вероятность $P(A)=\dfrac{2R^2}{\pi R^2}=\dfrac{2}{\pi}\approx 0{,}637$.

Замечание. Выражение стороны квадрата через радиус окружности можно получить следующим образом. Из треугольника ΔKMN по теореме Пифагора будем иметь: $KN^2 + NM^2 = KM^2$, т.е.

$a^2 + a^2 = (2R)^2$, $2a^2 = 4R^2$, $a^2 = 2R^2$, $a=\sqrt{2}R$.

3.1.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия комбинаторики, теории случайных событий, классификацию случайных событий;
- усвоили основные правила, применяемые в теории случайных событий;

3.2 Практическое занятие 3 (ПЗ-3)

Тема: Основные теоремы теории вероятностей.

3.2.1 Задание для работы:

1. Теоремы о вероятности суммы случайных событий. Теоремы о вероятности суммы произведения событий.

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Теоремы о вероятности суммы случайных событий. Теоремы о вероятности суммы произведения событий.

Пример 1. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события A, состоящего в том, что - «сумма выпавших очков не превосходит четырех».

Решение. Событие A - событие, состоящее в том, что есть сумма трех несовместных событий B_2, B_3, B_4. Тогда сумма очков равна соответственно 2, 3, 4. Поскольку $P(B_2)=\dfrac{1}{36}$, $P(B_3)=\dfrac{2}{36}$, $P(B_4)=\dfrac{3}{36}$, по теореме сложения вероятностей несовместных событий получим

$$P(A)=P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Замечание. Этот же результат можно было получить, используя непосредственный подсчет вероятности. Действительно, событию A благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2). Всего же элементарных исходов, образующих полную группу событий, n= 36, поэтому $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

Пример 2. Три станка работают независимо. Вероятность того, что в течение смены станок (любой) потребует наладки равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок из трех потребует внимания наладчика.

Решение. Пусть A_k - событие, заключающееся в том, что k- тый по счету станок потребует наладки в течение смены (k = 1, 2,3). Тогда событие $A_1 + A_2 + A_3$ заключается в том, что в течение смены наладки потребует хотя бы один из трех станков. Сначала вычислим вероятность противоположного события $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$, заключающегося в том, что все три станка всю смену проработают безотказно. Поскольку $\overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, причем события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ независимы, то $P(\overline{A_1 + A_2 + A_3}) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3})$ по теореме умножения вероятностей для независимых событий. По условию $P(A_k)$=0,1,тогда вероятность противоположного события $P(\overline{A_k}) = 1 - P(A_k) = 0{,}9$. Итак, $P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3})$ и искомая вероятность события будет $P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}271$.

Пример 3. Имеются две урны с шариками трех цветов. В первой находятся 2 голубых, 3 красных, 5 зеленых, а во второй - 4 голубых, 2 красных и 4 зеленых. Из каждой урны извлекают по одному шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что цвета вынутых шаров одинаковы (событие A).

Решение. Обозначим событие, состоящее в извлечении из первой урны голубого шара, через B_1, красного - C_1, зеленого - D_1 . Аналогичные события для второй урны обозначим соответственно через B_2 , C_2 , D_2 . Событие A наступает в случае B_1B_2 , C_1C_2 или D_1D_2. Они несовместны. Для вычисления искомой вероятности события A применим формулы вероятностей суммы несовместных событий и произведения независимых событий

$P(A) = P(B_1B_2+C_1C_2 + D_1D_2) = P(B_1B_2) + P(C_1C_2) + P(D_1D_2)$.

Так как независимы события: B_1 и B_2 , C_1 и C_2, D_1 и D_2, то можно пользоваться формулой $P(AB)= P(A)P(B)$ для каждой пары событий:

$P(B_1B_2) = P(B_1)P\{B_2)$,

$P(C_1C_2) = P(C_1)P(C_2)$,

$P(D_1D_2) = P(D_1)P(D_2)$.

Окончательно

$P(A) = P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) + P(D_1)P(D_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}34$

Пример4. Сколько раз нужно подбросить два игральных кубика, чтобы вероятность выпадения хотя бы один раз двух шестерок была бы больше $\frac{1}{2}$? (Эта задача впервые поставлена французским математиком и писателем де Мере (1610-1684 гг.), поэтому задача называется его именем).

Решение. Пусть событие A_i - «выпадение двух шестерок при i-м подбрасывании». Так как с каждой из шести граней первого кубика может выпасть любая из шести граней второго кубика,
то всего равновозможных попарно несовместных событий 6 · 6 = 36. Только одно из них - выпадение шестерки и на первом и на втором кубике - благоприятствуют событию A_i. Следовательно, $P(A_i) = \frac{1}{36}$, откуда $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.

Подбрасывание игральных кубиков - независимые испытания, поэтому воспользуемся формулой $P(A) = 1 - q^n$, тогда в данном случае получим: $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2}$, или $\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$
.

Решив неравенство, найдем n. Логарифмируя обе части неравенства, получим $n \ln\frac{35}{36} < \ln\frac{1}{2}$, откуда $n > \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} = \frac{0{,}6931}{0{,}0284} = 24{,}4$.

Итак, чтобы вероятность выпадения двух шестерок была больше $\frac{1}{2}$, достаточно подбросить кубик не менее 25 раз.

3.2.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- выработали навыки по вычислению вероятностей случайных событий, их суммы, произведения;

3.3 Практическое занятие 4 (ПЗ-4)

Тема: Условная вероятность. Следствия основных теорем теории вероятностей.

3.3.1 Задание для работы:

1. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3.3.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Пример 1. Слово *папаха* составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами тщательно перемешаны. Четыре карточки извлекаются по очереди и раскладываются в ряд. Какова вероятность получить при этом слово *папа?*

Решение. Обозначим через A, B, C, D соответственно события, состоящие в том, что: извлечена первая, вторая, третья и четвертая буква слова *папа* из набора в 6 букв: *а, а, а, п, п, х*. Найдем вероятности событий: A, B/A, C/AB , D/ABC.

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\quad P(B/A)=\frac{3}{5};\quad P(C/AB)=\frac{1}{4};\quad P(D/ABC)=\frac{2}{3}.$$

В соответствии с формулой вероятности произведения зависимых событий при n=4 будем иметь:

$$P(ABCD) = P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC) =\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}.$$

Пример 2. В пяти ящиках находятся одинаковые по размерам и весу шары. В двух ящиках - по 6 голубых и 4 красных шара (это ящик состава H_1). В двух других ящиках (состава H_2) - по 8 голубых и 2 красных шара. И в пятом ящике (состава H_3) - 8 красных и 2 голубых шара. Наудачу выбирается ящик, и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар оказался красным?

Решение. Событие, состоящее в том, что «извлечен красный шар» обозначим через A. Из условия задачи следует, что $P(H_1)=\frac{2}{5}=0{,}4$, $P(H_2)=\frac{2}{5}=0{,}4$, $P(H_3)=\frac{1}{5}=0{,}2$.

Вероятность вынуть красный шар, если известно, что взят ящик первого состава H_2, будет определяться так:

$$P(A/H_1)=\frac{4}{10}=0{,}4$$

Вероятность извлечь красный шар, если известно, что взят ящик второго состава H_2, будет

$P(A/H_2)=\frac{2}{10}=0{,}2$. Вероятность извлечь красный шар, если известно, что взят ящик третьего состава H_3, будет $P(A/H_3)=\frac{8}{10}=0{,}8$.

При $n = 3$ находим искомую вероятность

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) = 0{,}4\cdot 0{,}4 + 0{,}4\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}4$$

Пример 3. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30% - вторым, на 50% - третьим. Вероятность выпуска бракованных лампочек соответственно равны: $q_1 = 0{,}01$, $q_2 = 0{,}005$, $q_3 = 0{,}006$. Найти вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной.

Решение. Введем обозначения: A - событие, состоящее в том, что «из партии взята стандартная лампочка», H_1 - событие, состоящее в том, что «взятая лампочка изготовлена первым заводом», H_2 - событие, состоящее в том, что «взятая лампочка изготовлена вторым заводом», H_3 - событие, состоящее в том, что взятая лампочка изготовлена «третьим заводом». Найдем условные вероятности

$P(A/H_i)$, (i= 1,2,3) по формуле $P(A/H_i) = 1 - P(\overline{A}/H_i)$, где $\overline{A}$ - событие, противоположное событию A (взята нестандартная лампочка):

$$P(A/H_1) = 1 - P(\overline{A}/H_1) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99,$$

$$P(A/H_2) = 1 - P(\overline{A}/H_2) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995,$$

$$P(A/H_3) = 1 - P(\overline{A}/H_3) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Из условия задачи следует, что $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}3$, $P(H_3) = 0{,}5$.

Получим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}2\cdot 0{,}99 + 0{,}3\cdot 0{,}995 + 0{,}5\cdot 0{,}994 = 0{,}9935$$

Пример 4. В пяти ящиках находятся одинаковые по весу и размерам шары. В двух ящиках - по 6 зеленых и 4 красных шара (по ящик состава H_1). В двух других ящиках (состава H_2) - по 8 зеленых и 2 красных шара. В одном ящике (состава H_3) - 2 зеленых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик, и из него извлекается шар. Извлеченный шар оказался голубым. Какова вероятность того, что зеленый шар извлечен из ящика первого состава?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что и i ящика извлечен голубой шар. Из условия задачи следует, что

$$P(H_1) = \frac{2}{5} = 0{,}4;\; P(H_2) = \frac{2}{5} = 0{,}4;\; P(H_3) = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Вероятность вынуть голубой шар, если известно, что взят ящик состава $H_1, H_2, ..., H_3$ соответственно будут равны:

$$P(A/H_1) = \frac{6}{10} = 0{,}6;$$

$$P(A/H_2) = \frac{8}{10} = 0{,}8;$$

$$P(A/H_1) = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

По формуле полной вероятности находим $P(A) = 0{,}4 \bullet 0{,}6 + 0{,}4 \bullet 0{,}8 + 0{,}2 \bullet 0{,}2 = 0{,}6$.

По формуле Бейеса найдем искомую вероятность

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{0{,}6} = 0{,}4.$$

3.3.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятие условная вероятность, формулу полной вероятности, формулы Байеса;
- усвоили основные правила применения формул Байеса.

3.4 Практическое занятие 5-6 (ПЗ-5-6)

Тема: Схема повторных испытаний.

3.4.1 Задание для работы:

1. Схема повторных испытаний. Формула Бернулли. Формула Пуассона.
2. Локальная формулы Лапласа. Интегральная формула Лапласа.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Схема повторных испытаний. Формула Бернулли. Формула Пуассона.

Пример 1. Частица находится на прямой в начале координат. Под действием случайных толчков частица каждую секунду перемещается вправо (с вероятностью $\frac{1}{3}$) или влево (с вероятностью $\frac{2}{3}$) на единицу масштаба. Найти вероятность того, что через 4 секунды частица вернется в начало координат.

Решение. Через 4 секунды частица вернется в начало координат в том случае, если она переместится ровно два раза вправо (и, значит, два раза влево). По формуле Бернулли найдем вероятность того, что из четырех независимых перемещений частицы ровно два перемещения будут вправо:

$$n=4 \quad k=2 \quad p=\frac{1}{3} \quad q=\frac{2}{3}. \quad P4(2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{24}{81}\approx 0{,}296.$$

Пример 2. Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и соответствующую вероятность.

А это уже если и не Терминатор, то, как минимум, хладнокровный спортсмен =)

Решение: для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное неравенство $np-q\le m_0<np+p$. В данном случае:

$n=8$ – всего бросков;

$p=0{,}3$ – вероятность попадания в корзину при каждом броске;

$q=1-p=1-0{,}3=0{,}7$ – вероятность промаха при каждом броске.

Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в следующих пределах:

$$8\cdot 0{,}3-0{,}7\le m_0<8\cdot 0{,}3+0{,}3$$

$$2{,}4-0{,}7\le m_0<2{,}4+0{,}3$$

$$1{,}7\le m_0<2{,}7$$

Поскольку левая граница – дробное число *(пункт №1)*, то существует единственное наивероятнейшее значение, и, очевидно, что оно равно $m_0=2$.

Используя формулу Бернулли $P_n^m=C_n^m p^m q^{n-m}$, вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:

$$P_8^2=C_8^2\cdot(0{,}3)^2\cdot(0{,}7)^6=\frac{8!}{6!\cdot 2!}\cdot(0{,}3)^2\cdot(0{,}7)^6=\frac{7\cdot 8}{2}\cdot(0{,}3)^2\cdot(0{,}7)^6=0{,}29647548$$

Ответ: $m_0=2$ – наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках,

$P_8^2\approx 0{,}2965$ – соответствующая вероятность.

Пример 3. Станок изготавливает за смену 100000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали p=0,0001. Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено 5 бракованных деталей.

Решение

Обозначим n=100000, k=5, p=0,0001. События, состоящие в том, что отдельная деталь бракована, независимы, число испытаний велико, а вероятность мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона

$$P_n(k) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}; \ \lambda = np.$$

$$\lambda = np = 100\,000 \cdot 0{,}0001 = 10; \ P_{100\,000}(5) = 10^5 \cdot \frac{e^{-10}}{5!} \approx 0{,}0378.$$

Пример 4. Пусть известно, что при изготовлении некоторого препарата брак (количество упаковок, не соответствующих стандарту) составляет 0,2%. Оценить приближенно вероятность того, что серди 1000 наугад выбранных упаковок окажутся три упаковки, не соответствующие стандарту.

Решение: Выбор каждой очередной упаковки можно рассматривать как независимое испытание. Из условий задачи следует, что n=1000 (т.е. велико) а p=0.002 (т.е. мало) следовательно, А можно считать редким событием. λ=np=1000•0.002=2<10 Воспользуемся приближенной формулой Пуассона или таблицей.

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \Rightarrow \quad P_{1000}(3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} \approx 0{,}18$$

2. Локальная формулы Лапласа. Интегральная формула Лапласа.

Пример 1. К электросети подключено 36 приборов, каждый мощностью 5 киловатт и потребляет в данный момент энергию с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что потребляемая в данный момент мощность:

а) составит ровно 50 киловатт;

б) превзойдет 50 киловатт.

Решение. В случае а) надо найти вероятность того, что из 36 приборов работают ровно 10. Применим локальную теорему Лапласа: $n = 36 \quad k = 10 \quad p = 0{,}2 \quad q = 0{,}8$.

$$\sqrt{npq} = 24 \ \ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = 1{,}4. \ \ P_{36}(10) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = \frac{1}{2{,}4} \cdot \varphi(1{,}4) = 0{,}0624.$$

Значение функции локальной функции Лапласа *φ(x)* взято из таблицы приложений.

В случае б) находим вероятность $P_{36}(k \geq 10)$ того, что работают более десяти приборов. Применяем для решения этой части задачи интегральную теорему Лапласа. Находим сначала значения x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = 1{,}4, \ x_2 = \frac{n - np}{\sqrt{npq}} = 12/$$

Тогда искомая вероятность будет:

$$P_{36}(k \geq 10) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}5 - 0{,}4192 = 0{,}08808,$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$ взяты из таблицы приложений.

Пример 2. В нерестовике содержится 200 рыб - производителей вида *A*. Вероятность отдачи икры в искусственных условиях рыбы вида *A* равна $\frac{3}{4}$. Требуется найти вероятность того, что

икру отдадут 150 рыб.

Решение. Вероятность того, что ровно 150 рыб из 200 отдадут икру, найдем, используя локальную теорему Лапласа

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\ \text{где}\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значение функции *φ(x)* возьмем из таблицы. Находим:

n = 200, npq = 200 · 0,75 · 0,25 = 150 · 0,25 = 0,375 .

$m = к = np$ = 150 $\qquad \sqrt{npq}=6{,}12$.

p = 0,75 $\qquad x=\dfrac{150-150}{6{,}12}=0$.

q = 0,25.

Получим: $P_{200}(150)=\dfrac{1}{6{,}12}\cdot\varphi(0)=\dfrac{0{,}3989}{6{,}12}\approx 0{,}07$.

Пример 3. В партии из 400 деталей 80% - стандартных. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9544 заключена доля стандартных деталей.

Решение. Воспользуемся формулой, являющейся частным случаем формулы Муавра-Лапласа

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right),$$

где m/n - доля числа наступивших событий A в n испытаниях,

n - число испытаний,

p - вероятность наступления события A в одном испытании,

ε - величина отклонения доли m/n от вероятности p,

q = 1 - p - вероятность ненаступления события A в одном испытании.

Для данной задачи A - событие, состоящее в том, что деталь стандартная, n = 400; p = 0,8; q=0,2; P = 0,9544, величину ε нужно найти.

Итак: $0{,}9544=2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{400}}{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)\Leftrightarrow\Phi(\varepsilon\cdot 50)=0{,}4772.$

По таблице- приложений значений функции Лапласа *Ф(х)* находим, что ε · 50 = 2, следовательно, ε = 0,04. Таким образом, $|m/n - 0{,}8| < 0{,}04$ и $0{,}76 < m/n < 0{,}84$.

3.4.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия, связанные со схемой повторных испытаний;
- усвоили основные формулы, применяемые при решении задач по схеме повторных испытаний;
- выработали навыки по вычислению вероятностей случайных событий по формулам Бернулли, Пуассона, Лапласа;

3.5 Практическое занятие 7 (ПЗ-7)

Тема: Простейший поток событий

3.5.1 Задание для работы:

1. Простейший поток событий. Вероятность случайного события с заданной интенсивностью.

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Простейший поток событий. Вероятность случайного события с заданной интенсивностью.

Пример 1. Среднее число заявок, поступающих на предприятие бытового обслуживания за 1 час, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 часа поступит 5 заявок. Предполагается, что поток заявок - простейший.

Решение. По условию $\lambda = 3$, $t = 2$, $k = 5$. Воспользуемся формулой

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Искомая вероятность того, что за 2 часа поступит 5 заявок, равна $P_2(5) = \frac{(6)^5 \cdot 0{,}00248}{120} \approx 0{,}268$.

Пример 2. Среднее число заявок, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за четыре минуты поступит:

а) три вызова;

б) менее трех вызовов;

в) не менее трех вызовов.

Решение, а) По условию $\lambda = 3$, $t = 2$, $k=5$. Воспользуемся формулой: $P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

Подставив данные условия задачи, получим: $P_4(3) = \frac{8^3 \cdot e^{-8}}{3!} = \frac{512 \cdot 0{,}000335}{6} \approx 0{,}03$.

б) Найдем вероятность того, что за четыре минуты поступит менее трех вызовов, т.е. ни одного вызова, или один вызов, или два вызова. Поскольку эти события несовместны, применим теорему суммы несовместных событий:

$$P_4(k<3) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = e^{-8} + 8 \cdot e^{-8} \cdot \frac{8^2 \cdot e^{-8}}{2!} = 41 \cdot 0{,}000335 \approx 0{,}01.$$

в) Найдем вероятность того, что за четыре минуты поступит не менее трех вызовов: так как события «поступило менее трех вызовов» и «поступило не менее трех вызовов» - противоположные, то сумма вероятностей этих событий равна единице: $P_4(k<3) + P_4(k \geq 3) = 1$. Поэтому $P_4(k \geq 3) = 1 - P_4(k<3) = 1 - [P_4(0) + P_4(1) + P_4(2)] = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

3.5.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятие случайный поток, его свойства;
- усвоили основные правила формулы вероятности случайного события с заданной интенсивностью.

3.6 Практическое занятие 8-9 (ПЗ-8-9)

Тема: Случайные величины. Функция и плотность распределения СВ.

3.6.1 Задание для работы:

1.Случайные величины, их классификация. Закон распределения случайной величины. Ряд распределения.

2. Функция распределения . Плотность распределения.

3.6.2 Краткое описание проводимого занятия

1.Случайные величины, их классификация. Закон распределения случайной величины. Ряд распределения.

Пример1. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «орла» при двух бросаниях монеты.

Решение. Возможные значения случайной величины: 0, 1, 2. Вероятности этих значений находим по формуле Бернулли:

$$p_0 = P(X=0) = P_2(0) = C_2^0 p^0 q^2 = \frac{2!}{0!\,2!} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^2 = 0.25;$$

$$p_1 = P(X=1) = P_2(1) = C_2^1 p^1 q^1 = \frac{2!}{1!\,1!} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^1 = 0.50;$$

$$p_2 = P(X=2) = P_2(2) = C_2^2 p^2 q^0 = \frac{2!}{2!\,0!} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^0 = 0.25.$$

Записываем ряд распределения:

X	0	1	2
P	0.25	0.50	0.25

Пример 2. В лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывался один выигрыш в 50 у.е. и десять выигрышей по 10 у.е. Найти закон распределения величины X – стоимости возможного выигрыша.

Решение. Возможные значения величины X: x1 = 0; x2 = 10 и x3 = 50. Так как «пустых» билетов – 89, то p1 = 0,89, вероятность выигрыша 10 у.е. (10 билетов) – p2 = 0,10 и для выигрыша 50 у.е. – p3 = 0,01. Таким образом:

X	0	10	50
P	0,89	0,10	0,01

Легко проконтролировать: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}89 + 0{,}10 + 0{,}01 = 1$

Пример 3. Компьютер состоит из трех независимо работающих элементов: системного блока, монитора и клавиатуры. При однократном резком повышении напряжения вероятность отказа каждого элемента равна 0,1. Исходя из распределения Бернулли составить закон распределения числа отказавших элементов при скачке напряжения в сети.

Решение. Рассмотрим распределение Бернулли (или биномиальное): вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, или:

X	0	1	…	k	…	n
P	qn	pq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	pn

Вернёмся к задаче.

Возможные значения величины X (число отказов):

x0 =0 – ни один из элементов не отказал;

x1 =1 – отказ одного элемента;

x2 =2 – отказ двух элементов;

x3 =3 – отказ всех элементов.

Так как, по условию, p = 0,1, то q = 1 – p = 0,9. Используя формулу Бернулли, получим

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729$$

$$P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243,$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3p^2 q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027$$

$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Контроль: $0{,}729 + 0{,}243 + 0{,}027 + 0{,}001 = 1$.

Следовательно, искомый закон распределения:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

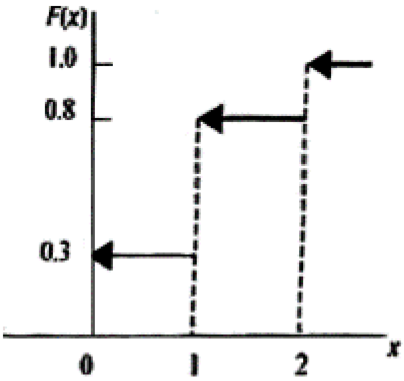
2. Функция распределения. Плотность распределения.

Функцией распределения случайной величины X Называется функция F(X), Определенная на всей числовой оси следующим образом: F(X)= P(X < x),

Т. е. F(X) есть вероятность того, что случайная величина X Примет значение меньшее, чем X.

Функцию распределения можно представить графически. Для дискретной случайной величины график имеет ступенчатый вид. Построим, например, график функции распределения случайной величины, заданной следующим рядом (рис. 1):

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0.3, & 0 < x \le 0; \\ 0.8, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Рис.1. График функции распределения дискретной случайной величины

Скачки функции происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. В точках разрыва функция F(X) непрерывна слева.

Задача 1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	5	8
P	0,6	0,1	0,3

Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

Решение. Так как функция распределения,

$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i$ для $x_k < x \le x_{k+1}$, то

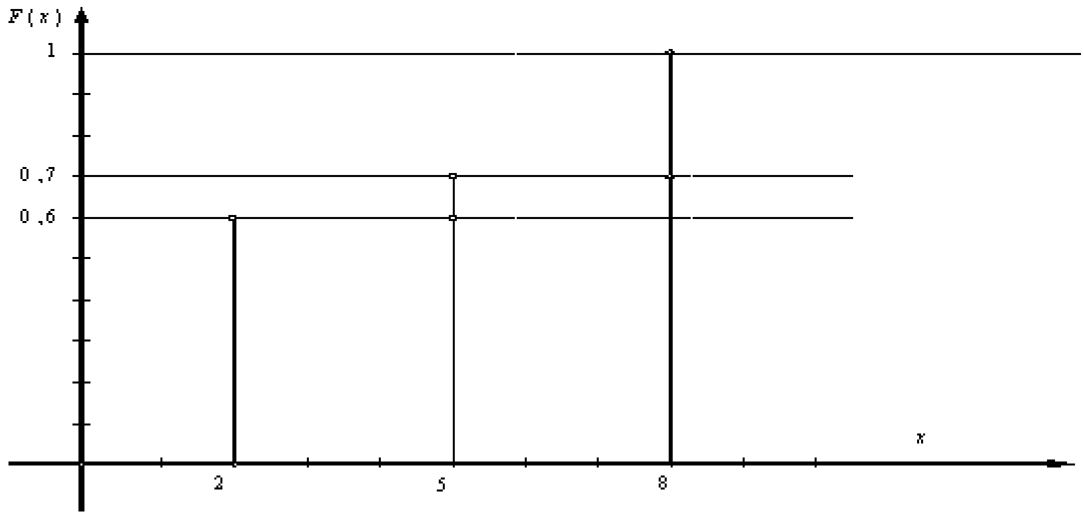
при $x \le 2$ $\quad F(x) = 0$;

при $2 < x \le 5$ $\quad F(x) = 0 + 0{,}6 = 0{,}6$;

при $5 < x \le 8$ $\quad F(x) = 0 + 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7$;

при $x > 8$ $\quad F(x) = 0 + 0{,}6 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1$;

Соответствующий график:



Задача 2. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ 2e^{-2x} & \text{при } x > 0 \end{cases}.$$

Найти вероятность попадания X в интервал

$1 < x < 2$.

Решение. Заметим, что это частный случай показательного закона распределения.

Воспользуемся формулой: $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 2e^{-2x}dx = \ldots = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^4} = \frac{e^2 - 1}{e^4} \approx 0{,}12.$$

Задача 3. Случайная величина X Задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & x < -\pi/2, \quad x > \pi/2 \end{cases}$$

Требуется:

А) найти значение коэффициента А;

Б) найти функцию распределения;

В) найти вероятность попадания случайной величины на интервал (0, $\pi/2$).

Решение:

А) Воспользуемся свойством 3:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cdot \cos x \cdot dx = a \cdot \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a \cdot (1 - (-1)) = 2a = 1.$$

Отсюда получаем: А=1/2.

Б) Если $x \le \pi/2$, То

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0;$$

Если $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 \cdot dt + \int_{-\pi/2}^{x} \frac{1}{2} \cdot \cos t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \sin t \Big|_{-\pi/2}^{x} = \frac{1}{2} \cdot (\sin x + 1);$$

Если $x > \pi/2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 \cdot dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot \cos t \cdot dt + \int_{\pi/2}^{x} 0 \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \sin t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1;$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ \frac{1}{2} \cdot (\sin x + 1), & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

В) По свойству 4:

$$P(0 < X < \pi/4) = F(\pi/4) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot (\sin(\pi/4) + 1) - \frac{1}{2} \cdot (\sin 0 + 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3.6.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия, связанные теорией случайных величин;
- усвоили классификацию СВ, алгоритм построения функции распределения ДСВ, нахождения плотности распределения НСВ;
- выработали навыки по вычислению вероятности попадания СВ в интервал;

3.7 Практическое занятие 10 (ПЗ-10)

Тема: Числовые характеристики случайной величины

3.7.1 Задание для работы:

1. Числовые характеристики ДСВ. Числовые характеристики НСВ. Свойства числовых характеристик, их интерпретация.

3.7.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Числовые характеристики ДСВ. Числовые характеристики НСВ. Свойства числовых характеристик, их интерпретация.

Пример 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной рядом распределения:

X	0	1	2	3
P	0.2	0.4	0.3	0.1

Решение.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i,$$ $=0\times0.2 + 1\times0.4 + 2\times0.3 + 3\times0.1=1.3.$

Пример 2. Найти математическое ожидание случайной величины, заданной плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x < 0, \quad x > 2 \end{cases}.$$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot x/2\cdot dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\cdot dx=\frac{x^3}{6}\Bigg|_0^2=\frac{8}{6}=1.33.$$

Решение.

Пример 3. Найти дисперсию случайной величины, заданной рядом распределения

X	0	1	2	3
P	0.2	0.4	0.3	0,1

Решение. Чтобы вычислить дисперсию, необходимо знать математическое ожидание. Для данной случайной величины выше было найдено: M=1.3. Вычисляем дисперсию по формуле (3.5):

$$D(X)=M(X^2)-m^2=\sum_{i=1}^{4}x_i^2p_i-m^2=,$$

$$=0^2\cdot 0.2\ +\ 1^2\cdot 0.4+\ 2^2\cdot 0.3\ +\ 3^2\ \cdot 0.1-1.3^2\ =0.81.$$

Пример 4. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}(1/2)\cdot\cos x, & |x|\le\pi/2,\\ 0, & |x|>\pi/2.\end{cases}$$

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Находим сначала математическое ожидание:

$$m=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cdot\cos x\cdot dx=0$$

(как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку).

Теперь вычисляем дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x^2\cdot\cos x\cdot dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}x^2\cdot\cos x\cdot dx=x^2\cdot\sin x\Bigg|_0^{\pi/2}-2\cdot\int_0^{\pi/2}x\cdot\sin x\cdot dx=$$

$$=x^2\cdot\sin x\Bigg|_0^{\pi/2}+2x\cdot\cos x\Bigg|_0^{\pi/2}-2\cdot\int_0^{\pi/2}x\cdot\cos x\cdot dx=$$

$$=x^2\cdot\sin x\Bigg|_0^{\pi/2}+2x\cdot\cos x\Bigg|_0^{\pi/2}-2\sin x\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}-2=\frac{\pi^2-8}{4};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}.$$

Пример 5. Непрерывная случайная величина задана на интервале $0 < x < 1$ плотностью распределения $f(x) = 2x$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти ее числовые характеристики.

Решение. Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсия: $$D(X) = \int_0^1 x^2f(x)dx - (M(x))^2 = \int_0^1 2x^3dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \ldots = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Среднее квадратическое отклонение: $$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = 0{,}24$$

3.7.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили понятие числовых характеристик СВ, их свойства, интерпретацию;
- выработали навыки вычисления числовых характеристик СВ.

3.8 Практическое занятие 11-12 (ПЗ-11-12)

Тема: Некоторые распределения ДСВ

3.8.1 Задание для работы:

1. Биномиальное распределение, его свойства, числовые характеристики.

2. Распределение Пуассона, его свойства, числовые характеристики. Связь распределений ДСВ с нормальным распределением.

3.8.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Биномиальное распределение, его свойства, числовые характеристики.

1. Математическое ожидание случайной величины через образующую функцию для биномиального распределения вычисляем по формуле $M(X) = np$.
2. Дисперсия $D(X) = npq$.
Имея дисперсию нетрудно установить среднее математическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.
3. Коэффициент асимметрии A(X) и эксцесс E(X) для биномиального распределения определяют по формулам $A(X) = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$; $E(X) = \frac{1-6pq}{npq}$.

Задача 1. В партии однотипных деталей стандартные составляют *97%*. Наугад из партии берут *400* деталей. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение *M(X), D(X), S(X)* для дискретной случайной величины *X* — появления числа стандартных деталей среди 400 наугад взятых.

Решение. Целочисленных случайная величина *X* имеет биномиальное закон распределения вероятностей, которая может принимать значения $X = k = 0, 1, 2, \ldots, 400$. Вероятности возможных значений для данной задачи определяются по формуле Бернулли и составляют $P_k = P(X = k) = C_{400}^k p^k q^{400-k}$, где $p = 0{,}97$ — вероятность появления стандартной детали, $q = 1 - p = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$ — вероятность появления нестандартной детали. Согласно приведенным выше формулам определяем нужные величины:

$$M(X) = np = 400 \cdot 0{,}97 = 388; \quad D(X) = npq = 400 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}03 = 11{,}64; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{11{,}64} \approx 3{,}41.$$

Задача 2. Два ювелирные заводы производят свадебные кольца в объеме *3:7*. Первый завод производит *95%* колец без дефекта, второй – *90%*. Молодая пара перед свадьбой покупает пару колец. Построить закон распределения, вычислить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

Решение. Вероятность события *A* – куплена кольцо оказалась качественной определим по формуле полной вероятности $P(A)=\frac{3}{10}0,95+\frac{7}{10}0,9=0,915.$

Случайная величина *X* – количество колец надлежащего качества среди купленных имеет биномиальное закон распределения с параметрами

$n=2;\ p=0,915;\ q=1-0,915=0,085.$

Найдем соответствующие вероятности $P(0)=q^2=0,085^2\approx 0,007;$

$P(1)=C_2^1pq^{2-1}=2\cdot 0,915\cdot 0,085\approx 0,155;\quad P(2)=p^2=0,915^2\approx 0,837;$

Запишем таблицу распределения

$X=k$	0	1	2
P_k	0,007	0,155	0,837

На основе табличных данных вычисляем математическое ожидание

$M(X)=0\cdot 0,007+1\cdot 0,155+2\cdot 0,837=1,829;$

дисперсию

$D(X)=0^2\cdot 0,007+1^2\cdot 0,155+2^2\cdot 0,837=3,503;$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{3,503}\approx 1,872.$

Как можно убедиться из примеров, биномиальний закон распределения простой как для понимания так и для вычислений.

2. Распределение Пуассона, его свойства, числовые характеристики. Связь распределений ДСВ с нормальным распределением.

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона, если вероятности ее возможных значений $P_k=P(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},k=\ 0,\ 1,\ 2\ ,3,\ \ldots,n,$ вычисляется по формуле Пуассона, где a=np<10. Как правило, Пуассоновское распределение касается вероятности появления благоприятного события в большом количестве экспериментов, если в одном - вероятность успешного завершения стремится к нулю.

1. Математическое ожидание определяется по формуле $M(X)=a=np.$

2. Дисперсия определяется по формуле $D(X)=a;$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{a}.$

Следовательно, для пуассоновского закона распределения вероятностей математическое ожидание и дисперсия равны произведению количества опытов на вероятность благоприятной события $M(X)=D(X)=a.$

На практике, если математическое ожидание и дисперсия близкие по значению то принимают гипотезу, что исследуемая величина имеет закон распределения Пуассона.

3. Асимметрия и эксцесс для пуассоновский закон также уровни и вычисляются по формулам $A(X)=\frac{1}{\sqrt{a}};E(X)=\frac{1}{\sqrt{a}}.$

Задача 1. Микропроцессор имеет 10000 транзисторов, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что транзистор выйдет из строя во время работы прибора, является величиной маловероятной и составляет 0,0007. Определить математическое ожидание M (X) и среднее квадратическое отклонение S (X) случайной величины X — числа транзисторов, выйдут из строя во время работы процессора.

Решение. Задача удовлетворяет всем законам пуассоновский распределения:
количество испытаний n=10000 велика;
вероятность p=0,0007 близка к нулю;
их произведение a=np=7<10.
На основе данных вычисляем заданные величины

$$M(X) = np = 10000 \cdot 0,0007 = 7; \quad D(X) = M(X) = np = 7; \quad \sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{7} \approx 2,64$$

Задача 2. В рыбацком городке 99,99% мужчин хотя бы раз в жизни были на рыбалке. Проводят социологические исследования среди 10000 наугад выбранных мужчин. Определить дисперсию D (X) и среднее квадратическое отклонение S (X) случайной величины X — числа мужчин, которые ни разу не были на рыбалке.

Решение. Легко убедиться, что величина X имеет пуассоновский закон распределения. С условия задачи находим $n = 10000; p = \frac{100 - 99,99}{100} = 0,0001.$

По формулам находим дисперсию и среднее квадратическое отклонение

$$D(X) = np = 1; \quad \sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{1} = 1$$

Геометрический закон распределения имеет место в таких науках как микробиология, генетика, физика. На практике эксперимент или опыт осуществляют до первого появления успешной события A. Число проведенных попыток будет целочисленной случайной величиной 1,2,.... Вероятность появления события A в каждом опыте не зависит от предыдущих и составляет p, q=1-p. Вероятности возможных значений случайной величины X определяется зависимостью

$$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

Есть во всех предыдущих опытах кроме k-го эксперимент дал плохой результат и только в k-му был успешным. Данную формулу вероятностей называют геометрическим законом распределения, поскольку правая его часть совпадает с выражением общего элемента геометрической прогрессии.

1. Математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{p}.$

2. Дисперсию и среднее квадратическое отклонение по формулам $D(X) = \frac{q}{p^2};$ $\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$

3. Коэффициент асимметрии и эксцесса для геометрического распределения определяют по формуле $A(X) = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}} = \frac{2-p}{\sqrt{q}}.$ $E(X) = 6 + \frac{p^2}{1-p} = 6 + \frac{p^2}{q}.$

Пример 1. Игральная кость подбрасывается до первого появления цифры 1. Определить все числовые характеристики M (X), D (X), S (X), A(X), E(X) для случайной величины X числа осуществляемых подбрасываний.

Решение. По условию задачи случайная величина X является целочисленной с геометрическим закон распределения вероятностей. Вероятность успешного подбрасывания величина постоянная и равна единице разделенной на количество граней кубика

$$p=\frac{1}{6};q=\frac{5}{6}.$$

Имея p,q необходимые числовые характеристики X находим по приведенным выше формулам

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6;\quad D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}}=30;\quad \sigma(X)=\sqrt{30}\approx 5,48;$$

$$A(X)=\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}=\frac{2-\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{6}}}\approx 1,67;\quad E(X)=6+\frac{p^2}{1-p}=6+\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{5}{6}}\approx 6,033.$$

Пример 2. Охотник-любитель стреляет из ружья по неподвижной мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле является величиной постоянной и равна 0,65. Стрельба по мишени ведется до первого попадания.

Определить числовые характеристики M (X), D (X), S (X), A(X), E(X) числа израсходованных охотником патронов.

Решение. Случайная величина X подчиняется геометрическому закона распределения поэтому вероятность попадания в каждой попытке постоянна и составляет p=0,65;q=1-p=0,35.

По формулам вычисляем математическое ожидание $M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0,65}\approx 1,538;$

Дисперсию $D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{0,35}{0,65^2}\approx 0,828;$

среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{0,828}\approx 0,91;$

асимметрию $A(X)=\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}=\frac{2-0,65}{\sqrt{0,35}}\approx 2,282;$

эксцесс $E(X)=6+\frac{p^2}{1-p}=6+\frac{(0,65)^2}{0,35}\approx 7,207.$

Вычисление числовых характеристик для геометрического закона распределения не так сложны, поэтому пользуйтесь приведенным формулам в подобных задачах и получайте только правильные результаты.

Гипергеометрический закон распределения вероятностей столь тяжелый при первом ознакомлении, что лучше всего его объяснять на конкретном примере.

Пусть задано некоторое множество однотипных элементов, число которых равно N; из них K элементов имеют, например, признак A (цвет, стандартность, наполнения), а остальные N-K элементов - признак B. С этого множества наугад берут n элементов. Случайная величина X – число элементов с признаком вида A, что случается среди n наугад взятых элементов. Тогда X принимает значения k=0,1,2,...,min(n,K) , а вероятность их появления определяется гипергеометрическим законом распределения

$$P_k=P(X=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{m-k}}{C_N^m}.$$

$k\le n; n\le N;$

Числовые характеристики этого закона вычисляются по приведенным ниже формулам:

1. Математическое ожидание $M(X)=\frac{1}{C_N^n}\sum_{k=0}^{m}kC_K^k C_{N-K}^{n-m}=n\frac{M}{N}.$

2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

$$D(X)=\frac{1}{C_N^n}\sum_{k=0}^{m}k^2C_K^kC_{N-K}^{n-k}-M^2(X)=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{N}\sqrt{\frac{nM(N-M)(N-n)}{(N-1)}}.$$

3. Для асимметрии

$$A(X)=\frac{(N-2M)(N-2n)\sqrt{N-1}}{nM(N-M)(N-2)\sqrt{N-n}};$$

и эксцесса

$$E(X)=\frac{N^2(N-1)(N-2n)}{n(N-2)(N-3)(N-n)}\times$$
$$\times\left(\frac{N(N+1)-6N(N-n)}{M(N-M)}+\frac{3n(N-n)(N+6)}{N^2}-6\right).$$

Рассмотрим несколько примеров на применение приведенных выше формул

Пример 1. В ящике содержится 10 однотипных деталей, из них 7 стандартных, а остальные являются бракованными. Наугад из ящика берут m деталей. Построить законы распределения целочисленной случайной величины X — появление числа стандартных деталей среди m наугад взятых и вычислить математическое ожидание M(X), дисперсию D (X), и среднее математическое отклонение S(X), если m = 3

Решение. Построим гипергеометрические законы распределения:

Имеем следующие начальные условия для случая выбора трех деталей

n = 3; N=10; K= 7; N-K= 3; k = 0, 1, 2, 3.

В табличной форме гипергеометрический закон для этих данных имеет вид

$X=x_k=k$	0	1	2	3
$P_k=\frac{C_7^kC_3^{3-k}}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^0C_3^3}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^3C_3^0}{C_{10}^3}$

или после вычисления сочетаний

$$\frac{C_7^0C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1\cdot1}{\frac{10!}{7!3!}}=\frac{3!}{10\cdot9\cdot8}=\frac{3\cdot2}{10\cdot3\cdot3\cdot4\cdot2}=\frac{1}{120};$$

$$\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7!}{6!1!}\cdot\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{7!3!}{10!}=\frac{7\cdot3\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8}=\frac{7\cdot3\cdot3\cdot2}{10\cdot3\cdot3\cdot4\cdot2}=\frac{7}{40};$$

$$\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{7!}{5!2!}\cdot\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{7!3!}{10!}=\frac{7\cdot6\cdot3\cdot3\cdot2}{2\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{7\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2}{2\cdot10\cdot3\cdot3\cdot4\cdot2}=\frac{7}{40};$$

$$\frac{C_7^3C_3^0}{C_{10}^3}=\frac{7!}{4!3!}\cdot1\cdot\frac{7!3!}{10!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{7\cdot3\cdot2\cdot5\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot3\cdot8}=\frac{7}{24};$$

в виде таблицы вероятностей

k	0	1	2	3
$P_k=\frac{C_7^kC_3^k}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

Условие нормирования

$$\sum P_k=\frac{1+21+63+35}{120}=\frac{120}{120}=1.$$

выполняется, следовательно все верно посчитано. Не ленитесь проверять его, оно намного скорее укажет Вам на присутствие ошибки при неправильной правой части. Вычисляем числовые характеристики:

Математическое ожидание

$$M(X)=\sum kp_k=0\frac{1}{120}+1\frac{21}{120}+2\frac{63}{120}+3\frac{35}{120}=\frac{21+126+105}{120}=\frac{252}{120}=2{,}1;$$

Дисперсию

$$M(X^2)=\sum k^2p_k=1\frac{21}{120}+4\frac{63}{120}+9\frac{35}{120}=\frac{21+252+315}{120}=\frac{588}{120}=4{,}9;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=4{,}9-(2{,}1)^2=4{,}9-4{,}41=0{,}49;$$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)=\sqrt{0{,}49}=0{,}7.$

3.8.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия, связанные с определением закона распределения СВ;
- усвоили способы задания СВ, распределенных биномиально, по закону Пуассона, геометрически, гипергеометрически;
- выработали навыки по вычислению числовых характеристик СВ, распределенных биномиально, по закону Пуассона, геометрически, гипергеометрически.

3.9 Практическое занятие 13-14 (ПЗ-13-14)

Тема: Некоторые распределения НСВ

3.9.1 Задание для работы:

1. Равномерное распределение. Показательное распределение.
2. Нормальное распределение, его свойства.

3.9.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Равномерное распределение. Показательное распределение.

СВ имеет равномерное распределение, если некотором интервале плотность вероятностей принимает постоянное значение

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \frac{1}{b-a}, & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Функция распределения вероятностей для равномерного закона определяется интегрированием

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ b, & x>b.\end{cases}$$

Математическое ожидание в таких случаях определяют зависимости $M(X)=\frac{a+b}{2};$

дисперсию по формуле $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$

и среднее квадратическое отклонение через корень $S(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$

Вероятность попадания случайной величины X в некоторый интервал $[\alpha;\beta]$, содержащийся внутри интервала $[\alpha;\beta]\in[a;b]$ определяется по формуле $P(\alpha\le X\le\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$

Пример 1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение M (X), D (X), S (X), Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X имеет равномерный закон распределения и возможные значения ее значение лежит в диапазоне 1..50:

$X_k = k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 50.$.

Решение. По условию задачи имеем следующие данные n = 50, p = 1/50=0,02.

Согласно формулам вычисляем математическое ожидание

$$M(X)=\frac{n+1}{2}=\frac{50+1}{2}=25{,}5$$

дисперсия

$$D(X)=\frac{n^2-1}{12}=\frac{50^2-1}{12}=208{,}25$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2499}}{2\sqrt{3}}\approx 14{,}43.$$

Пример 2. Поезда в метро прибывают на станцию каждые 10 минут. Определить вероятность того, что время ожидания состава не будет больше 4 минуты.

Решение. По условию задачи имеем два интервала

$$[\alpha;\beta]=4\ \text{хв};\ [a;b]=10\ \text{хв}.$$

Согласно формуле, искомая вероятность равна доле этих величин

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\frac{4}{10}=0{,}4.$$

Показательное распределение.

Показатель	**Показательный закон распределения**
Определение	***Показательным (экспоненциальным) называется*** распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью, имеющей вид $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$ где λ – постоянная положительная величина
Функция распределения	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$
Вероятностьпопадания в интервал	$P(a<X<b)=\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$
Математическое ожидание	$M(X)=\frac{1}{\lambda}$
Дисперсия	$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$

Пример 1. Показательное распределение задано при $x \geq 0$ плотностью $f(x) = 5e - 5x$. Требуется: а) записать выражение для функции распределения; б) найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1;4); в) найти вероятность того, что в результате испытания $X \geq 2$; г) вычислить M(X), D(X), σ(X).

Решение.

1. Поскольку по условию задано показательное распределение, то из формулы плотности распределения вероятностей случайной величины X получаем λ = 5. Тогда функция распределения будет иметь вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ 1-e^{-5x} & \text{при} \quad x\geq 0;\end{cases}$$

2. Вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1;4) будем находить по формуле: $P(a < X < b) = e{-}\lambda a - e{-}\lambda b$.

$P(1 < X < 4) = e{-}5*1 - e{-}5*4 = e{-}5 - e{-}20$.

3. Вероятность того, что в результате испытания $X \geq 2$ будем находить по фор муле: $P(a < X < b) = e{-}\lambda a - e{-}\lambda b$ при a=2, b=∞.

$P(X\geq 2) = P(1< X < 4) = e{-}\lambda*2 - e{-}\lambda*\infty = e{-}2\lambda - e{-}\infty= e{-}2\lambda - 0 = e{-}10$ (т.к. предел $e{-}x$ при

x стремящемся к ∞ равен нулю).

4. Находим для показательного распределения:

математическое ожидание по формуле $M(X) =1/\lambda = 1/5 = 0,2$;

дисперсию по формуле $D(X) = 1/ \lambda 2= 1/25 = 0,04$;

среднее квадратическое отклонение по формуле $\sigma(X) = 1/\lambda = 1/5 = 1,2$.

Пример 2 . Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$f(x)=5e^{-5x}$ При $x\geq 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Решение: По условию, $\lambda=5.$ Следовательно,

$M(X)=\sigma(X)=1/\lambda=1/5=0.2$,

$D(X)=1/\lambda^2=1/5^2=0,04$

Пример 3. Время безотказной работы устройства распределено по закону

$f(t)=0,02e^{-0,02t}, t\geq 0.$

Найти среднее время безотказной работы устройства, вероятность того, что устройство не откажет за среднее время безотказной работы. Найти вероятность отказа за время t= 100 часов.

Решение:

По условию интенсивность отказов m =0,02. Тогда среднее время между двумя отказами, т.е. математическое ожидание M(X)=1/0,02=50часов. Вероятность безотказной работы за этот промежуток времени вычислим по функции надежности:

$R(50)=e^{-0,02\cdot 50}=e^{-1}\approx 0,37.$

По функции F(t) вычислим вероятность отказа за время t =100 часов:

$F(100)=1-e^{-0,02\cdot 100}=1-e^{-2}\approx 0,86.$

2. Нормальное распределение, его свойства.

Дадим понятие нормального закона распределения, функции распределения такого закона, порядка вычисления вероятности попадания случайной величины X в определенный интервал.

№	Показатель	Нормальный закон распределения	Примечание
1	Определение	***Нормальным называется*** распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$	где m_x – математическое ожидание случайной величины X, σ_x – среднее квадратическое отклонение
2	***Функция распределения***	$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	$u = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$
3	***Вероятность*** попадания в интервал (a;b)	$P(a \le X \le b) = \Phi(\frac{b-m_x}{\sigma_x}) - \Phi(\frac{a}{}$	$\Phi(u) = F(u) - 1/2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e$ - интегральная функция Лапласа
4	***Вероятность*** того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ	$P(\lvert X - m_x \rvert < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$	при $m_x = 0$ $P(\lvert X \rvert < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Задача. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины $a = 10$, а среднее квадратическое отклонение - $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала $12 < X < 14$ и записать закон распределения.

Решение. Запишем вначале закон распределения. Общая формула имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$.

Подставляя $a = 10$ и $\sigma = 2$, получим: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-10)^2/8}$.

Вероятность того, что X примет значение из интервала $\alpha < X < \beta$ имеет вид:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

Значения этой функции находятся с помощью таблицы.

В нашем случае: $P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14 - 10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12 - 10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1)$.

По таблице находим: $\Phi(2) = 0{,}47725$; $\Phi(1) = 0{,}34134$, следовательно:

$P(12 < X < 14) = 0{,}47725 - 0{,}34134 = 0{,}13591$.

Задача. Длина X некоторой детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону распределения, и имеет среднее значение 20 мм и среднее квадратическое отклонение – 0,2 мм.

Необходимо:
а) записать выражение плотности распределения;
б) найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 19,7 и 20,3 мм;
в) найти вероятность того, что величина отклонения не превышает 0,1 мм;
г) определить, какой процент составляют детали, отклонение которых от среднего значения не превышает 0,1 мм;
д) найти, каким должно быть задано отклонение, чтобы процент деталей, отклонение которых от среднего не превышает заданного, повысился до 54%;
е) найти интервал, симметричный относительно среднего значения, в котором будет находиться X с вероятностью 0,95.

Решение. а) Плотность вероятности случайной величины X, распределенной по нормальному закону находим $f(x)=\frac{1}{0{,}2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-20)^2}{0{,}08}}$

при условии, что m_x=20, σ =0,2.

б) Для нормального распределения случайной величины вероятность попасть в интервал (19,7; 20,3) определяется

Φ((20,3-20)/0,2) – Φ((19,7-20)/0,2) = Φ(0,3/0,2) – Φ(-0,3/0,2) = 2Φ(0,3/0,2) =
2Φ(1,5) = 2*0,4332 = 0,8664.

Значение Φ(1,5) = 0,4332 мы нашли в приложениях, в таблице значений интегральной функции Лапласа Φ(x) (

в) Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа 0,1 найдем

P(|X-20| < 0,1) = 2Φ(0,1/0,2) = 2Φ(0,5) = 2*0,1915 = 0,383.

Значение Φ(0,5) = 0,1915 мы нашли в приложениях, в таблице значений интегральной функции Лапласа Φ(x)

г) Поскольку вероятность отклонения, меньшего 0,1 мм, равна 0,383, то отсюда следует, что в среднем 38,3 детали из 100 окажутся с таким отклонением, т.е. 38,3%.

д) Поскольку процент деталей, отклонение которых от среднего не превышает заданного, повысился до 54%, то P(|X-20| < δ) = 0,54. Отсюда следует, что 2Φ(δ/σ) = 0,54, а значит Φ(δ/σ) = 0,27.

Используя приложение, находим δ/σ = 0,74. Отсюда δ = 0,74*σ =
0,74*0,2 = 0,148 мм.

е) Поскольку искомый интервал симметричен относительно среднего значения m_x = 20, то его можно определить как множество значений X, удовлетворяющих неравенству

20 − δ < X < 20 + δ или |x − 20| < δ .

По условию вероятность нахождения X в искомом интервале равна 0,95, значит
P(|x − 20| < δ)= 0,95. С другой стороны P(|x − 20| < δ) = 2Φ(δ/σ), следовательно
2Φ(δ/σ) = 0,95, а значит Φ(δ/σ) = 0,475.

Используя приложение находим δ/σ = 1,96. Отсюда δ = 1,96*σ = 1,96*0,2 = 0,392.

Искомый интервал: (20 – 0,392; 20 + 0,392) или (19,608; 20,392).

Пример: Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a=15$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=5$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(10, 30)$

Решение.

Известно, что вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

По условию $a = 15,\ \sigma = 5,\ \alpha = 10,\ \beta = 30$. Следовательно,

$$P(10 < X < 30) = \Phi\left(\frac{30 - 15}{5}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 15}{5}\right) = \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) + \Phi(1) =$$

$$= 0{,}49865 + 0{,}3413 = 0{,}83995.$$

Ответ: $P(10 < X < 30) = 0{,}83995$

3.9.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия, связанные с определением закона распределения НСВ;
- усвоили способы задания СВ, распределенных равномерно, показательно, нормально;
- выработали навыки по вычислению числовых характеристик СВ, распределенных равномерно, показательно, нормально;
- усвоили основные свойства СВ, распределенных нормально, свойства кривой Гаусса, правило трех сигм.

3.10 Практическое занятие 15-18 (ПЗ-15-18)

Тема: Случайный вектор. Распределение многомерной СВ. Условные законы распределения, характеристики.

3.10.1 Задание для работы:

1.Основные понятия многомерного статистического анализа. Условные распределения многомерной СВ

2. Числовые характеристики случайного вектора. Условные числовые характеристики СВ.

3.Многомерное нормальное распределение.

3.10.2 Краткое описание проводимого занятия

1.Основные понятия многомерного статистического анализа. Условные распределения многомерной СВ

Пример 1. Дана двумерная функция распределения: $F_{X,Y}(x,y) = \sin x \sin y$, где $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$. Найти вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{3}$.

Решение. $$\mathrm{P}\left\{\frac{\pi}{6} \le X < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \le Y < \frac{\pi}{3}\right\} = \left(\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\right) -$$

$$-\left(\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $0{,}25\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Пример 2. Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора $(X;Y)$ задан таблицей:

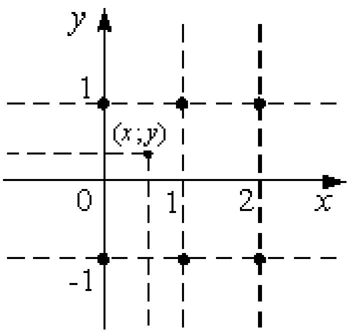
Y / X	–1	1
0	0,1	0,06
1	0,3	0,18
2	0,2	0,16

Найти: одномерные законы распределения компонент *X* и *Y*; вероятность $\mathbf{P}\{X \geq Y\}$. Составить функцию распределения $F_{X,Y}(x,y)$.

Решение. 1) Одномерные законы $p_{i\bullet}$ и $p_{\bullet j}$ распределения компонент *X* и *Y* соответственно построены в таблице:

Y / X	–1	1	$p_{i\bullet}$
0	0,1	0,06	0,16
1	0,3	0,18	0,48
2	0,2	0,16	0,36
$p_{\bullet j}$	0,6	0,4	1

2) $\mathrm{P}\{X \geq Y\} = 1 - \mathrm{P}\{X < Y\} = 1 - \mathrm{P}\{X = 0, Y = 1\} = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.



3) Согласно определению функции распределения $F_{X,Y}(x,y) = \mathrm{P}\{X < x, Y < y\}$. Напомним, что геометрически значение $F_{X,Y}(x,y)$ – это вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в бесконечный квадрант с вершиной $(x;y)$. Для вершины этого квадранта, согласно условию задачи, есть двенадцать областей, образованных тремя вертикальными прямыми $x=\mathbf{0}$, $x=\mathbf{1}$, $x=\mathbf{2}$ и двумя горизонтальными прямыми $y=-1$, $y=1$.

На рис. показан случай, когда вершина $(x;y)$ находится внутри прямоугольника $\mathbf{0}<x\leq\mathbf{1}$, $-1<y\leq 1$. При этом внутри квадранта находится только одна точка с координатами $(0;-1)$, в которой имеется ненулевая вероятность, равная 0,1. Функцию распределения $F_{X,Y}(x,y)$ удобно задавать в виде таблицы (ее значение для случая, когда вершина $(x;y)$ квадранта находится внутри прямоугольника $\mathbf{0}<x\leq\mathbf{1}$, $-1<y\leq 1$ выделено жирным шрифтом):

y / x	$y\leq -1$	$-1<y\leq 1$	$y>1$
$x\leq\mathbf{0}$	0	0	0
$\mathbf{0}<x\leq\mathbf{1}$	0	**0,1**	0,16
$\mathbf{1}<x\leq\mathbf{2}$	0	0,4	0,64
$x>\mathbf{2}$	0	0,6	1

Пример 3. Известна функция распределения $F_{X,Y}(x,y)$ двумерного дискретного случайного вектора $(X;Y)$:

y / x	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 0$	0	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,5	0,5	0,5
$1 < x \le 2$	0	0,5	0,75	0,75
$2 < x \le 3$	0	0,5	0,75	0,875
$x > 3$	0	0,5	0,75	1

Составить функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ компонент *X* и *Y*, а затем построить их законы распределения.

Решение. Учитывая, что $F_{X,Y}(x,+\infty) = F_X(x)$, $F_{X,Y}(+\infty,y) = F_Y(y)$, получим («проходя» соответственно по последнему столбцу и последней строке таблицы):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}5, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}75, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}875, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3; \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ 0{,}5, & 1 < y \le 2, \\ 0{,}75, & 2 < y \le 3, \\ 1, & y > 3. \end{cases}$$

Значит, для случайной величины *X* функция распределения испытывает «скачки» в точках $x = 0;1;2;3$, для случайной величины *Y* – в точках $y = 1;2;3$. Поэтому законы распределения компонент выглядят следующим образом:

X	0	1	2	3
$p_{i\bullet}$	0,5	0,25	0,125	0,125

Y	1	2	3
$p_{\bullet j}$	0,5	0,25	0,25

Пример 4. Известна функция плотности двумерного случайного вектора $(X;Y)$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Составить функцию распределения $F_{X,Y}(x,y)$.

Решение. По определению функции распределения

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

поэтому:

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}v\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}u\Big|_{-\infty}^{x}\cdot\operatorname{arctg}v\Big|_{-\infty}^{y} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ: $F_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}x + \dfrac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}y + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пример 5 Найти плотность распределения двумерного случайного вектора $(X;Y)$, если известна функция распределения

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1+e^{-2x-3y}-e^{-2x}-e^{-3y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$$

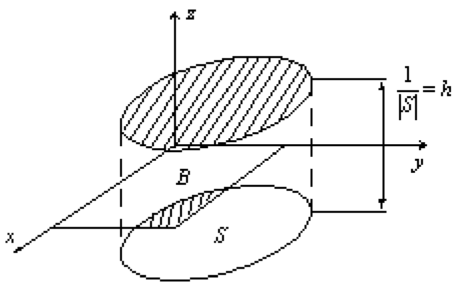
Решение. Согласно свойству 2 $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\partial y}$ во всех точках непрерывности функции $f_{X,Y}(x,y)$. Поэтому

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}6\cdot e^{-2x-3y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$$

Ответ: $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}6\cdot e^{-2x-3y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$

Пример 6 (*двумерное равномерное распределение*). Плотность $f_{X,Y}(x,y)$ равномерного распределения на области $S\subset\mathbf{R}^2$ конечной двумерной площади $|S|$:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{|S|}, & (x;y)\in S,\\ 0, & (x;y)\notin S.\end{cases}$$



Вероятность $\mathrm{P}\{(X;Y)\in B\}$ в этом случае определяется отношением площадей $B\cap S$ и S (рис.):

$$\mathrm{P}\{(X;Y)\in B\}=\frac{|B\cap S|}{|S|}.$$

Замечание. По последней формуле вычисляются так называемые геометрические вероятности.

Пример 7. Двумерный случайный вектор $(X;Y)$ подчинен закону распределения с плотностью

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}a(x+y), & (x;y)\in D;\\ 0, & (x;y)\notin D.\end{cases}$$

Область D – треугольник, ограниченный прямыми $x+y-3=0$, $x=0$, $y=0$. Найти коэффициент a.

Решение. Согласно условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$. Поскольку только в области D подынтегральная функция $f_{X,Y}(x,y)$ отлична от нуля, то имеем уравнение

$\iint\limits_D f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$, или $\int\limits_0^3 \mathrm{d}x\int\limits_0^{3-x} a(x+y)\,\mathrm{d}y=1$.

Тогда

$$\int\limits_0^3 \mathrm{d}x\int\limits_0^{3-x} a(x+y)\,\mathrm{d}y=a\int\limits_0^3 \mathrm{d}x\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3-x}=a\int\limits_0^3 (x(3-x)+0{,}5(3-x)^2)\,\mathrm{d}x=$$

$$= a\int_0^3 (3x - x^2 + 4{,}5 - 3x + 0{,}5x^2)\,\mathrm{d}x = a\left(\frac{9x}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^3 = a\left(\frac{27}{2} - \frac{9}{2}\right) = 9a$$.

Отсюда, решая уравнение $9a = 1$, получим $a = 1/9$.

Ответ: $a = 1/9$.

Пример 8. Известна функция плотности двумерного случайного вектора $(X;Y)$ (рис. 2.2.5):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi}, & \text{если } \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1, \\ 0, & \text{если } \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} > 1. \end{cases}$$

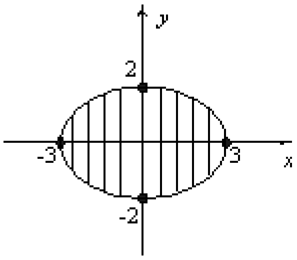


Рис. 2.2.5.

Найти плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ компонент *X* и *Y*.

Решение. Очевидно, что если $|x| > 3$, то $f_X(x) = 0$. Пусть $|x| \le 3$, тогда:

$$f_X(x) = \frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} \mathrm{d}y = \frac{2}{6\pi}\int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} \mathrm{d}y = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}$$.

Итак,
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & \text{если } |x| \le 3, \\ 0, & \text{если } |x| > 3. \end{cases}$$

Аналогично
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}, & \text{если } |y| \le 2, \\ 0, & \text{если } |y| > 2. \end{cases}$$

Ответ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & \text{если } |x| \le 3, \\ 0, & \text{если } |x| > 3; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}, & \text{если } |y| \le 2, \\ 0, & \text{если } |y| > 2. \end{cases}$$

Пример 9. Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора $(X;Y)$ задан таблицей:

Y / *X*	0	1	2	3
1	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0,05	0,05	0,05	0,05
3	0,1	0,1	0,1	0,1

Определить, зависимы или независимы компоненты *X* и *Y*.

Решение. Составим законы распределения компонент *X* и *Y*:

Y / *X*	0	1	2	3	$p_{i\bullet}$
1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4
2	0,05	0,05	0,05	0,05	0,2

3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4
$p_{\bullet j}$	0,25	0,25	0,25	0,25	1

Проверим теперь выполнение условия $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ для всех пар индексов $i = \mathbf{1, 2, 3}$, $j = \mathbf{1, 2, 3, 4}$. Очевидно, что это условие выполнено для любых i и j. Значит, компоненты X и Y независимы.

Ответ: компоненты X и Y независимы.

Замечание. В данном случае независимость компонент X и Y можно было установить, внимательно посмотрев на исходную таблицу, задающую закон распределения случайного вектора $(X; Y)$. Из этой таблицы видно, что *закон распределения каждой из компонент не зависит от того, какое значение приняла другая компонента.*

Пример 10. Система двух непрерывных случайных величин $(X; Y)$ имеет плотность распределения

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C, & -1 \le x < 2, 1 \le y < 3, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Найти константу C. Определить, зависимы или независимы X и Y. Составить функцию распределения $F_{X,Y}(x,y)$.

Решение. Из условия нормировки для функции плотности $f_{X,Y}(x,y)$ имеем:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = C\int_{-1}^{2} dx \int_{1}^{3} dy = 6C,$$

отсюда $C = \frac{1}{6}$. Таким образом,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & -1 \le x < 2, 1 \le y < 3, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Найдем функции плотности отдельных компонент:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \frac{1}{6}\int_{1}^{3} dy = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \le x < 2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \frac{1}{6}\int_{-1}^{2} dx = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \le y < 3, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Очевидно, что равенство $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ выполняется для всех точек координатной плоскости. Значит, компоненты X и Y независимы. Найдем функцию распределения системы $F_{X,Y}(x,y)$. Так как компоненты независимы, значит, $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$. Найдем вначале $F_X(x)$ и $F_Y(y)$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{x+1}{3}, & -1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ \frac{y-1}{2}, & 1 < y \le 3, \\ 1, & y > 3. \end{cases}$$

Перемножая $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ при $(x;y)\in$ «прямоугольнику» и учитывая, что $F_{X,Y}(+\infty,y)=F_Y(y)$, $F_{X,Y}(x,+\infty)=F_X(x)$, получим:

Y / X	$y\le 1$	$1<y\le 3$	$y>3$
$x\le -1$	0	0	0
$-1<x\le 2$	0	$\dfrac{(x+1)(y-1)}{6}$	$\dfrac{x+1}{3}$
$x>2$	0	$\dfrac{y-1}{2}$	1

Условные законы распределения

Если случайные величины, образующие систему, зависимы, то для нахождения закона распределения системы недостаточно знать законы распределения отдельных величин, входящих в систему. Требуется еще знать так называемый условный закон распределения одной из них.

Определение. *Условным законом распределения* одной из величин $(X;Y)$, входящих в систему, называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Начнем с наиболее простого случая. Пусть случайная величина *Y* является дискретной.

Определение. *Условной функцией распределения* $F_X(x\,|\,Y=y_j)$ случайной величины *X* при условии $Y=y_j$ называется условная вероятность события $\{X<x\}$ при условии события $\{Y=y_j\}$, т.е.

$$F_X(x|Y=y_j)=\mathrm{P}\{X<x|Y=y_j\}=\frac{\mathrm{P}\{X<x,Y=y_j\}}{\mathrm{P}\{Y=y_j\}}.$$

Аналогично определяется условная функция распределения $F_Y(y\,|X=x_i)$ случайной величины *Y* при условии $X=x_i$ (когда случайная величина *X* является дискретной):

$$F_Y(y\,|X=x_i)=\mathrm{P}\{Y<y\,|X=x_i\}=\frac{\mathrm{P}\{Y<y,X=x_i\}}{\mathrm{P}\{X=x_i\}}.$$

Замечание 1. Условная функция распределения обладает всеми свойствами, которые присущи обычной (безусловной) функции распределения.

Замечание 2. Если случайная величина *X* также *дискретная*, причем $\mathrm{P}\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, то удобно рассматривать условную вероятность случайной величине *X* принять значение x_i при условии $Y=y_j$:

$$\mathrm{P}\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{\mathrm{P}\{X=x_i,Y=y_j\}}{\mathrm{P}\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}.$$

Обычно условное распределение $\{X = x_i | Y = y_j\}$ описывают с помощью таблицы. Ясно, что элементы второй строки этой таблицы получаются по формулам $\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$.

Аналогично определяется условная вероятность случайной величине *Y* принять значение y_j при условии $X = x_i$:

$$\mathrm{P}\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{\mathrm{P}\{X = x_i, Y = y_j\}}{\mathrm{P}\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

Пример 1. Закон распределения случайного вектора $(X; Y)$ задан таблицей:

Y / *X*	1	2
–1	0,3	0,25
0	0,1	0,05
1	0,2	0,1

Описать условные законы распределения: 1) случайной величины *X* при условии $Y = 1$; 2) случайной величины *Y* при условии $X = -1$.

Решение. Найдем безусловные законы распределения компонент *X* и *Y*:

Y / *X*	1	2	$p_{i\bullet}$
–1	0,3	0,25	0,55
0	0,1	0,05	0,15
1	0,2	0,1	0,3
$p_{\bullet j}$	0,6	0,4	1

1) Условные вероятности случайной величине *X* принять значения x_i ($i = \mathbf{1, 2, 3}$) при условии $Y = 1$ вычисляются по формулам:

$$\mathrm{P}\{X = -1 | Y = 1\} = \frac{\mathrm{P}\{X = -1, Y = 1\}}{\mathrm{P}\{Y = 1\}} = \frac{p_{11}}{p_{\bullet 1}} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5,$$

$$\mathrm{P}\{X = 0 | Y = 1\} = \frac{\mathrm{P}\{X = 0, Y = 1\}}{\mathrm{P}\{Y = 1\}} = \frac{p_{21}}{p_{\bullet 1}} = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}\{X = 1 | Y = 1\} = \frac{\mathrm{P}\{X = 1, Y = 1\}}{\mathrm{P}\{Y = 1\}} = \frac{p_{31}}{p_{\bullet 1}} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}.$$

Тогда условный закон распределения случайной величины *X* при условии $Y = 1$ имеет вид:

X	–1	0	1	Контроль:
$\mathbf{P}\{X = x_i \| Y = \mathbf{1}\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$

2) Условные вероятности случайной величине *Y* принять значения y_j ($j = \mathbf{1, 2}$) при условии $X = -1$ вычисляются по формулам:

$$\mathrm{P}\{Y = 1 | X = -1\} = \frac{\mathrm{P}\{X = -1, Y = 1\}}{\mathrm{P}\{X = -1\}} = \frac{p_{11}}{p_{1\bullet}} = \frac{0{,}3}{0{,}55} = \frac{6}{11},$$

$$\mathrm{P}\{Y = 2 | X = -1\} = \frac{\mathrm{P}\{X = -1, Y = 2\}}{\mathrm{P}\{X = -1\}} = \frac{p_{12}}{p_{1\bullet}} = \frac{0{,}25}{0{,}55} = \frac{5}{11}.$$

Тогда условный закон распределения случайной величины Y при условии $X=-1$ имеет вид:

Y	1	2	Контроль:
$\mathbf{P}\{Y=y_j \mid X=-1\}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}+\frac{5}{11}=1$

В общем случае условную функцию распределения случайной величины X при условии $Y=y$ также естественно было бы определить формулой

$$F_X(x \mid Y=y)=\frac{\mathrm{P}\{X<x, Y=y\}}{\mathrm{P}\{Y=y\}}.$$

Однако это не всегда возможно (например, для непрерывной случайной величины Y событие $\{Y=y\}$ имеет нулевую вероятность). Во избежание этих неприятностей, вместо события $\{Y=y\}$ рассматривается событие $\{y\le Y<y+\Delta\}$ и D устремляется к нулю. Тогда

$$\mathbf{P}\{X<x \mid y\le Y<y+\Delta\}=\frac{\mathrm{P}\{X<x, y\le Y<y+\Delta\}}{\mathrm{P}\{y\le Y<y+\Delta\}}=\frac{F_{X,Y}(x,y+\Delta)-F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y+\Delta)-F_Y(y)}.$$

Тогда *условной функцией распределения* $F_X(x \mid Y=y)$ называется предел

$$F_X(x \mid Y=y)=\lim_{\Delta\to 0} F_X(x \mid y\le Y<y+\Delta).$$

Оказывается, такой предел всегда существует. Аналогично

$$F_Y(y \mid X=x)=\lim_{\Delta\to 0} F_Y(y \mid x\le X<x+\Delta)$$

Если случайная величина Y *непрерывна*, то условную функцию распределения можно определить следующим выражением:

$$F_X(x \mid Y=y)=\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$ Аналогично $$F_Y(y \mid X=x)=\frac{\frac{\partial}{\partial x}F_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

В наиболее важных для приложений случаях вектор $(X;Y)$ представляет собой двумерную непрерывную случайную величину с совместной плотностью $f_{X,Y}(x,y)$. Тогда

$$F_X(x \mid Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,y)\,\mathrm{d}u}{f_Y(y)}, \quad F_Y(y \mid X=x)=\frac{\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,v)\,\mathrm{d}v}{f_X(x)}.$$

Нетрудно видеть, что условная функция распределения $F_X(x \mid Y=y)$ имеет производную по x, т.е. существует *условная плотность распределения* случайной величины X при условии $Y=y$:

$$f_X(x \mid Y=y)=\frac{\partial}{\partial x}F_X(x \mid Y=y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Аналогично

$$f_Y(y \mid X=x)=\frac{\partial}{\partial y}F_Y(y \mid X=x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Пример 2. Дана функция плотности $f_{X,Y}(x,y)$:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi}, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1,\\ 0, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1;\end{cases}$$

и найдены безусловные плотности распределения компонент X и Y:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3;\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}, & |y|\le 2,\\ 0, & |y|>2.\end{cases}$$

Найти условные плотности распределения компонент X и Y.

Решение. Условные плотности распределения компонент X и Y находятся по формулам $f_X(x|Y=y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, $f_Y(y|X=x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$.

Поэтому

$$f_X(x|Y=y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{4-y^2}}, & |x|\le\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2},\\ 0, & |x|>\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2};\end{cases}$$

$$f_Y(y|X=x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\sqrt{9-x^2}}, & |y|\le\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2},\\ 0, & |y|>\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.\end{cases}$$

Таким образом, случайная величина X при условии $Y=y$ *равномерно* распределена на отрезке $\left[-\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2};\ \dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right]$, а случайная величина Y при условии $X=x$ *равномерно* распределена на отрезке $\left[-\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2};\ \dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]$. Условная плотность $f_X(x|Y=y)$ не определена при $|y|>2$, а условная плотность $f_Y(y|X=x)$ не определена при $|x|>3$.

Пример 3. Дан двумерный случайный вектор $(X;Y)$, где X – время появления в магазине первого покупателя в понедельник, а Y – время появления в магазине первого покупателя во вторник. Установлено, что $f_{X,Y}(x,y)=\mathrm{e}^{-x-y}$, если $x,y\ge 0$. Найти: $F_X(x\,|\,Y=y)$, $F_Y(y\,|\,X=x)$, $f_X(x\,|\,Y=y)$, $f_Y(y\,|\,X=x)$. Установить, зависимы или нет случайные величины X и Y.

Решение. Найдем вначале функцию распределения случайного вектора $(X;Y)$:

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_0^y\left(\int_0^x f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v=\int_0^y \mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v\int_0^x \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-y}),\quad x,y\ge 0;$$

$F_{X,Y}(x,y)=0$ в остальных случаях.

Тогда по свойству 4 совместной функции распределения $F_{X,Y}(x,y)$ получим:

$F_X(x)=F_{X,Y}(x,+\infty)=1-e^{-x}$ при $x>0$, $F_Y(y)=F_{X,Y}(+\infty,y)=1-e^{-y}$ при $y>0$.

Отсюда $f_X(x)=F_X'(x)=e^{-x}$ при $x>0$, $f_Y(y)=F_Y'(y)=e^{-y}$ при $y>0$.

Найдем теперь условные функции распределения компонент:

$$F_X(x|Y=y)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,y)\,du}{f_Y(y)}=\frac{\int\limits_{0}^{x} e^{-u-y}\,du}{f_Y(y)}=e^{y}\int\limits_{0}^{x} e^{-u}\,e^{-y}\,du=1-e^{-x}$$ при $x>0$,

аналогично $$F_Y(y|X=x)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,v)\,dv}{f_X(x)}=1-e^{-y}$$ при $y>0$.

Получим теперь условные плотности компонент:

$$f_X(x|Y=y)=\frac{\partial}{\partial x}F_X(x|Y=y)=e^{-x}$$ при $x>0$,

$$f_Y(y|X=x)=\frac{\partial}{\partial y}F_Y(y|X=x)=e^{-y}$$ при $y>0$.

Поскольку $f_X(x|Y=y)=f_X(x)=e^{-x}$, $f_Y(y|X=x)=f_Y(y)=e^{-y}$, то $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$. Поэтому случайные величины X и Y независимы. Это означает, что появление в магазине первого покупателя во вторник не зависит от того, когда в магазин пришел первый покупатель в понедельник.

Ответ: при положительных x и y $F_X(x|Y=y)=1-e^{-x}$, $F_Y(y|X=x)=1-e^{-y}$, $f_X(x|Y=y)=e^{-x}$, $f_Y(y|X=x)=e^{-y}$; случайные величины X и Y независимы.

Пример 4. Известна плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $(X;Y)$: $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi}\cdot e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}$.

Найти: 1) плотности распределения компонент X и Y; 2) условные плотности распределения компонент X и Y.

Решение. 1) Найдем вначале плотность распределения компоненты X:

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}\,dy.$$

Вынося за знак интеграла множитель $e^{-\frac{x^2}{2}}$, не зависящий от переменной интегрирования y, и дополнив оставшийся показатель степени до полного квадрата, получим:

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{10}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y\sqrt{5/2}+x\sqrt{2/5}\right)^2}\,d\left(y\sqrt{5/2}+x\sqrt{2/5}\right).$$

Учитывая, что интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}$, найдем плотность распределения компоненты X: $f_X(x)=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\cdot e^{-0,4x^2}$. Аналогично найдем плотность распределения компоненты Y: $f_Y(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{-2y^2}$.

2) Найдем условные плотности распределения компонент *X* и *Y*. Выполнив элементарные выкладки, получим:

$$f_X(x\,|\,Y=y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+y)^2}{2}},\quad f_Y(y\,|\,X=x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+5y)^2}{10}}.$$

Ответ: 1) $f_X(x)=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\cdot e^{-0,4x^2}$, $f_Y(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{-2y^2}$;

2) $f_X(x\,|\,Y=y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}$, $f_Y(y\,|\,X=x)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+5y)^2}{10}}$.

3. Числовые характеристики случайного вектора. Условные числовые характеристики СВ.

Определение. *Начальным моментом порядка* $k+s$ системы двух случайных величин $(X;Y)$ называется действительное число $\alpha_{k,s}$, определяемое по формуле:

$\alpha_{k,s}=\sum_i\sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}$, если $(X;Y)$ – система двух дискретных случайных величин;

$\alpha_{k,s}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^k y^s f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$, если $(X;Y)$ – система двух непрерывных случайных величин.

Определение. *Центральным моментом порядка* $k+s$ системы двух случайных величин $(X;Y)$ называется действительное число $\mu_{k,s}$, определяемое по формуле:

$$\mu_{k,s}=\sum_i\sum_j (x_i-m_X)^k(y_j-m_Y)^s p_{ij},$$

если $(X;Y)$ – система двух дискретных случайных величин;

$$\mu_{k,s}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^k(y-m_Y)^s f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy,$$

если $(X;Y)$ – система двух непрерывных случайных величин.

На практике чаще всего встречаются моменты первого и второго порядков. Очевидно, что начальные моменты первого порядка есть не что иное, как математические ожидания компонент *X* и *Y*:

$$\alpha_{1,0}=m_X,\quad \alpha_{0,1}=m_Y.$$

Точка с координатами $(m_X;m_Y)$ на плоскости *xOy* представляет собой характеристику положения случайной точки $(X;Y)$, а ее рассеивание (разброс) происходит вокруг $(m_X;m_Y)$.

Центральные моменты первого порядка, очевидно, равны нулю, т.е.

$$\mu_{1,0}=\mu_{0,1}=0.$$

Имеются три начальных момента второго порядка – $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{0,2}$ и $\alpha_{1,1}$. Причем первые два из них есть не что иное, как начальные моменты второго порядка компонент *X* и *Y*:

$$\alpha_{2,0}=\alpha_2[X],\quad \alpha_{0,2}=\alpha_2[Y].$$

Имеются три центральных момента второго порядка $\mu_{2,0}$, $\mu_{0,2}$ и $\mu_{1,1}$. Первые два из них представляют собой дисперсии компонент *X* и *Y* соответственно:

$\mu_{2,0} = D[X]$, $\mu_{0,2} = D[Y]$.

Рассмотрим $\mu_{1,1}$ отдельно.

Определение. Центральный момент второго порядка $\mu_{1,1}$ называется *ковариацией* случайной величины $(X;Y)$.

Для момента $\mu_{1,1}$ используется обозначение $K_{X,Y} = \mathrm{cov}(X;Y)$.

Замечание. По определению ковариации: $K_{X,Y} = K_{Y,X}$.

В механической интерпретации, когда распределение вероятностей на плоскости *xOy* трактуется как распределение единичной массы на этой плоскости, точка $(m_X; m_Y)$ есть не что иное, как *центр масс с* распределения; дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$ – *моменты инерции* распределения относительно точки $(m_X; m_Y)$ в направлении осей *Ox* и *Oy* соответственно, а ковариация – это *центробежный момент инерции* распределения масс.

Теорема. Если случайные величины *X* и *Y* независимы, то $K_{X,Y} = 0$.

Замечание. Как правило, $K_{X,Y}$ удобнее вычислять по формуле

$K_{X,Y} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1}$.

Ковариация $K_{X,Y}$ характеризует не только степень зависимости двух случайных величин $(X;Y)$, но также их рассеивание вокруг точки $(m_X; m_Y)$. Однако размерность ковариации $K_{X,Y}$ равна произведению размерностей случайных величин *X* и *Y*. Чтобы получить безразмерную величину, характеризующую только зависимость, а не разброс, ковариацию $K_{X,Y}$ делят на произведение $\sigma_X\sigma_Y$:

$$\rho_{X,Y} = \frac{K_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Определение. Величина $\rho_{X,Y}$ называется *коэффициентом корреляции* случайных величин *X* и *Y*.

Коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}$ характеризует степень зависимости случайных величин *X* и *Y*, причем не любой зависимости, а только *линейной*, проявляющейся в том, что при возрастании одной случайной величины другая проявляет тенденцию также возрастать (или убывать). В первом случае $\rho_{X,Y} > 0$ и говорят, что случайные величины *X* и *Y* *связаны положительной корреляцией*, во втором случае $\rho_{X,Y} < 0$ и говорят, что случайные величины *X* и *Y* *связаны отрицательной корреляцией*. Модуль коэффициента корреляции случайных величин *X* и *Y* характеризует *степень тесноты линейной зависимости* между ними. Если линейной зависимости нет, то $\rho_{X,Y} = 0$.

Теорема. Если случайные величины *X* и *Y* связывает линейная зависимость $Y = aX + b$, то $\rho_{X,Y} = +1$ при $a > \mathbf{0}$, $\rho_{X,Y} = -1$ при $a < \mathbf{0}$.

Пример 1. Найти коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}$ между случайными величинами: 1) *X* и $Y = \mathbf{13}X - \mathbf{2}$; 2) *X* и $Y = \mathbf{9} - \mathbf{7}X$.

Решение. Согласно теореме 3.5.2: 1) $\rho_{X,Y} = 1$, т.к. $a = \mathbf{13}$, $a > \mathbf{0}$; 2) $\rho_{X,Y} = -1$, т.к. $a = -\mathbf{7}$, $a < \mathbf{0}$.

Ответ: 1) $\rho_{X,Y} = 1$; 2) $\rho_{X,Y} = -1$.

Пример 2. Игральная кость размечена таким образом, что сумма очков на противоположных гранях равна 7 (т.е. 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4). Пусть X – число очков на верхней грани, Y – число очков на нижней грани. Построить совместный закон распределения случайных величин X и Y, найти коэффициент корреляции между ними.

Решение. По условию задачи $X + Y = \mathbf{7}$. Поэтому $\mathbf{P}\{X + Y \neq \mathbf{7}\} = \mathbf{0}$. Следовательно, для построения таблицы распределения случайного вектора $(X; Y)$ остается вычислить вероятности:

$$\mathrm{P}\{X = 1, Y = 6\} = \mathrm{P}(\{X = 1\} \cdot \{Y = 6\}) = \mathrm{P}(\{X = 1\} \cdot \{7 - X = 6\}) = \mathrm{P}\{X = 1\} = 1/6,$$

$$\mathrm{P}\{X = 6, Y = 1\} = \mathrm{P}(\{X = 6\} \cdot \{Y = 1\}) = \mathrm{P}(\{X = 6\} \cdot \{7 - X = 1\}) = \mathrm{P}\{X = 6\} = 1/6.$$

Аналогично можно показать, что

$$\mathrm{P}\{X = 2, Y = 5\} = \mathrm{P}\{X = 5, Y = 2\} = 1/6, \ \mathrm{P}\{X = 3, Y = 4\} = \mathrm{P}\{X = 4, Y = 3\} = 1/6.$$

Тогда закон распределения случайного вектора $(X; Y)$ задается следующей таблицей:

Y / *X*	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	1/6
2	0	0	0	0	1/6	0
3	0	0	0	1/6	0	0
4	0	0	1/6	0	0	0
5	0	1/6	0	0	0	0
6	1/6	0	0	0	0	0

Поскольку между случайными величинами X и Y имеется линейная связь $Y = \mathbf{7} - X$, то $\rho_{X,Y} = -1$.

Ответ: $\rho_{X,Y} = -1$.

Теорема. Для любых случайных величин X и Y: $|\rho_{X,Y}| \leq \mathbf{1}$.

Определение. Случайные величины X и Y называются *некоррелированными*, если $\rho_{X,Y} = 0$ (или $K_{X,Y} = 0$), иначе X и Y называются *коррелированными*.

Замечание. *Из независимости случайных величин следует их некоррелированность. Но из некоррелированности* ($\rho_{X,Y} = 0$) *не вытекает их независимость.* Действительно, если $\rho_{X,Y} = 0$, то это означает только отсутствие линейной связи между случайными величинами, однако любой другой вид связи может при этом присутствовать.

Пример 3. Закон распределения случайного вектора $(X; Y)$ задан таблицей:

Y / *X*	0	2	5
1	0,1	0	0,2
2	0	0,3	0

4	0,1	0,3	0

Выяснить, зависимы или нет случайные величии-
ны X и Y. Найти: $m_X, m_Y, D_X, D_Y, \sigma_X, \sigma_Y, K_{X,Y}, \rho_{X,Y}$.

Решение. Найдем законы распределения компонент X и Y:

Y / X	0	2	5	$p_{i\bullet}$
1	0,1	0	0,2	0,3
2	0	0,3	0	0,3
4	0,1	0,3	0	0,4
$p_{\bullet j}$	0,2	0,6	0,2	

Очевидно, что компоненты X и Y являются зависимыми, т.к.

$p_{11} = 0{,}1 \neq p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1} = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$.

$m_X = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 = 2{,}5$; $m_Y = 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}2$;

$D_X = 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}4 - 2{,}5^2 = 1{,}65$, $\sigma_X = \sqrt{1{,}65} \approx 1{,}285$;

$D_Y = 0^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}6 + 5^2 \cdot 0{,}2 - 2{,}2^2 = 2{,}56$, $\sigma_Y = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6$;

$$K_{X,Y} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1} = 1 \cdot 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot 0{,}2 +$$
$$+ 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 5 \cdot 0 - 2{,}5 \cdot 2{,}2 = -0{,}9;$$

$$\rho_{X,Y} \approx \frac{-0{,}9}{1{,}285 \cdot 1{,}6} \approx -0{,}438.$$

Так как $\rho_{X,Y} < 0$, то это показывает, что между случайными величинами X и Y существует отрицательная линейная зависимость, т.е. при увеличении одной из них другая имеет тенденцию уменьшаться.

Пример 4. Закон распределения случайного вектора $(X;Y)$ задан таблицей:

Y / X	1	2
–1	0,15	0,05
0	0,3	0,05
1	0,35	0,1

Выяснить, являются ли случайные величины X и Y: 1) зависимыми; 2) коррелированными.

Решение. Найдем законы распределения компонент X и Y:

Y / X	1	2	$p_{i\bullet}$
–1	0,15	0,05	0,2
0	0,3	0,05	0,35
1	0,35	0,1	0,45
$p_{\bullet j}$	0,8	0,2	

Очевидно, что компоненты X и Y являются зависимыми, т.к.

$p_{11} = 0{,}15 \neq p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1} = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$.

$m_X = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}45 = 0{,}25$; $m_Y = 1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}2$;

$D_X = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}35 + 1^2 \cdot 0{,}45 - 0{,}25^2 = 0{,}5875$, $\sigma_X = \sqrt{0{,}5875} \approx 0{,}766$;

$$D_Y = 1^2 \cdot 0{,}8 + 2^2 \cdot 0{,}2 - 1{,}2^2 = 0{,}16, \quad \sigma_Y = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4;$$

$$K_{X,Y} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1} = -1 \cdot 1 \cdot 0{,}15 + (-1) \cdot 2 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}3 +$$

$$+ 0 \cdot 2 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}1 - 0{,}25 \cdot 1{,}2 = 0; \quad \rho_{X,Y} = 0.$$

Этот пример показывает, что случайные величины X и Y могут быть некоррелированными, но при этом являться зависимыми.

Пример 5. Двумерный случайный вектор $(X;Y)$ подчинен закону распределения с плотностью

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} axy, & (x;y) \in D; \\ 0, & (x;y) \notin D. \end{cases}$$

Область D – треугольник, ограниченный прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Найти: коэффициент a, $m_X, m_Y, D_X, D_Y, \sigma_X, \sigma_Y, K_{X,Y}, \rho_{X,Y}$. Выяснить, зависимы или нет случайные величины X и Y.

Решение. Коэффициент a находится из уравнения

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y.$$

Опуская промежуточные выкладки (в этом примере будем делать так и в дальнейшем), получаем $a = 24$. Далее:

$$m_X = \alpha_{1,0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 24\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2 y\,\mathrm{d}y = 0{,}4,$$

$$D_X = \mu_{2,0} = \alpha_{2,0} - \alpha_{1,0}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 0{,}4^2 = 24\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^3 y\,\mathrm{d}y - 0{,}4^2 = 0{,}04.$$

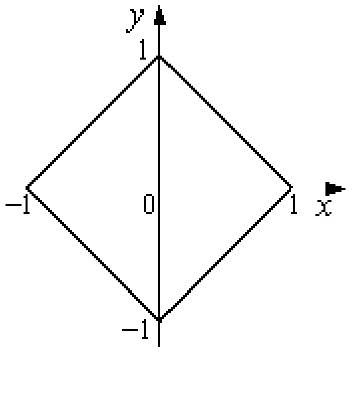
Заметим, что в силу симметрии по переменным x и y, можно не вычислять математическое ожидание и дисперсию компоненты Y, т.е. $m_Y = m_X = 0{,}4$, $D_Y = D_X = 0{,}04$. Тогда $\sigma_X = \sigma_Y = 0{,}2$.

Вычислим ковариацию и коэффициент корреляции:

$$K_{X,Y} = \mu_{1,1} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 0{,}4 \cdot 0{,}4 =$$

$$= 24\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2 y^2 \mathrm{d}y - 0{,}16 = -\frac{2}{75}; \quad \rho_{X,Y} = \frac{-2/75}{0{,}2 \cdot 0{,}2} = -\frac{2}{3}.$$

Поскольку компоненты X и Y коррелированны, следовательно, они зависимы.



Ответ: $a = 24$, $m_Y = m_X = 0{,}4$, $D_Y = D_X = 0{,}04$, $\sigma_X = \sigma_Y = 0{,}2$, $K_{X,Y} = -2/75$, $\rho_{X,Y} = -2/3$. Компоненты X и Y зависимы.

Пример 6. Двумерный случайный вектор $(X;Y)$ равномерно распределен на множестве случайных точек Q, задаваемых неравенством $|x| + |y| \le 1$. Выяснить, являются ли случайные величины X и Y: 1) зависимыми; 2) коррелированными.

Решение. Множество точек Q, задаваемых неравенством $|x|+|y|\le 1$, является квадратом. Поскольку двумерный случайный вектор $(X;Y)$ равномерно распределен на множестве Q, его плотность имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} C, & (x;y)\in Q;\\ 0, & (x;y)\notin Q.\end{cases}$$

Из условия нормировки найдем константу C:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_Q C\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=C\cdot|Q|=2C,$$

где $|Q|$ – площадь квадрата Q, равная 2. Отсюда $C=0{,}5$, а значит,

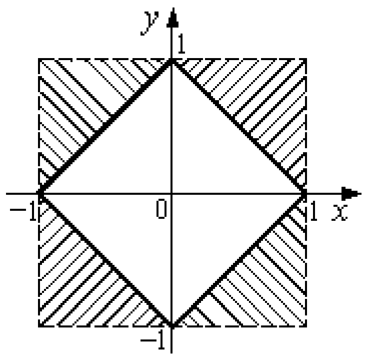
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 0{,}5, & (x;y)\in Q;\\ 0, & (x;y)\notin Q.\end{cases}$$

1) Найдем вначале плотность распределения компоненты X.

Если $|x|>1$, то, очевидно, $f_{X,Y}(x,y)=0$ для всех $y\in\mathbf{R}$.

Если $|x|\le 1$, то

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{|x|-1}^{1-|x|}0{,}5\,\mathrm{d}y=1-|x|,$$



т.е. $f_X(x)=\begin{cases} 1-|x|, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

Аналогично находится плотность распределения компоненты Y:

$$f_Y(y)=\begin{cases} 1-|y|, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|>1.\end{cases}$$

Равенство $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ не выполняется для точек координатной плоскости, принадлежащих заштрихованным областям (рис.), поскольку в этих точках $f_{X,Y}(x,y)=0$, а $f_X(x)\ne 0$ и $f_Y(y)\ne 0$. Суммарная площадь заштрихованных областей равна 2, значит, компоненты X и Y зависимы.

2) Вычислим математические ожидания компонент X и Y:

$$m_X=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,\mathrm{d}x=0,$$

т.к. интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю. Аналогично $m_Y=0$.

Определим начальный момент $\alpha_{1,1}$:

$$\alpha_{1,1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0{,}5\cdot\iint_Q xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0{,}5\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{|x|-1}^{1-|x|} y\,\mathrm{d}y=0.$$

Таким образом, ковариация $K_{X,Y}=\mu_{1,1}=\alpha_{1,1}-\alpha_{1,0}\cdot\alpha_{0,1}=0$.

Значит, компоненты X и Y некоррелированные.

Ответ: компоненты X и Y зависимы, но некоррелированны.

Определение. *Условным математическим ожиданием* одной из случайных величин, входящих в двумерный случайный вектор $(X;Y)$, называется ее математическое ожидание, вычисленное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Если случайные величины *X* и *Y* *дискретны*, то условные математические ожидания вычисляются по формулам:

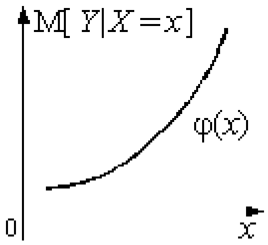
$$\mathrm{M}\left[Y \mid X = x_i\right] = \sum_j y_j \mathrm{P}\left\{Y = y_j \mid X = x_i\right\}, \quad \mathrm{M}\left[X \mid Y = y_j\right] = \sum_i x_i \mathrm{P}\left\{X = x_i \mid Y = y_j\right\}.$$

Если случайные величины *X* и *Y* *непрерывны*, то условные математические ожидания вычисляются по формулам:

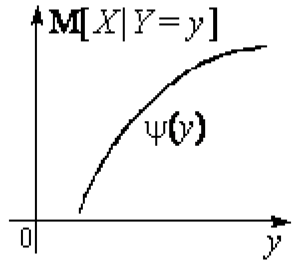
$$\mathrm{M}\left[Y \mid X = x\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y\left(y \mid X = x\right) \mathrm{d}y, \quad \mathrm{M}\left[X \mid Y = y\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X\left(x \mid Y = y\right) \mathrm{d}x.$$

Определение. Условное математическое ожидание случайной величины *Y* при заданном значении $X = x$, т.е. $\mathbf{M}\left[Y \mid X = x\right] = \varphi(x)$, называется *регрессией Y на x.* Условное математическое ожидание случайной величины *X* при заданном значении $Y = y$, т.е. $\mathbf{M}\left[X \mid Y = y\right] = \psi(y)$, называется *регрессией X на y.*

Графики этих зависимостей от *x* и *y* называются *линиями регрессии Y* на *x* (рис. *а*) и *X* на *y* (рис. *б*) соответственно.



а



б

Пример 7. Закон распределения случайного вектора $(X;Y)$ задан таблицей:

Y / *X*	0	2	5
1	0,1	0	0,2
2	0	0,3	0
4	0,1	0,3	0

Построить регрессии *Y* на *x* и *X* на *y*.

Решение. Найдем законы распределения компонент *X* и *Y*:

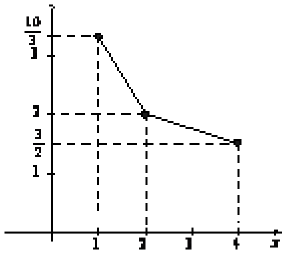
Y / *X*	0	2	5	$p_{i\bullet}$
1	0,1	0	0,2	0,3
2	0	0,3	0	0,3
4	0,1	0,3	0	0,4
$p_{\bullet j}$	0,2	0,6	0,2	□

Построим вначале регрессию *Y* на *x*.

1) $P\{Y=0|X=1\}=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3}$, $P\{Y=2|X=1\}=\frac{0}{0{,}3}=0$, $P\{Y=5|X=1\}=\frac{0{,}2}{0{,}3}=\frac{2}{3}$,

отсюда $M[Y|X=1]=0\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 0+5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$.

2) $P\{Y=0|X=2\}=\frac{0}{0{,}3}=0$, $P\{Y=2|X=2\}=\frac{0{,}3}{0{,}3}=1$, $P\{Y=5|X=2\}=\frac{0}{0{,}3}=0$, отсюда $\mathbf{M}[Y|X=\mathbf{2}]=\mathbf{0\cdot 0+2\cdot 1+5\cdot 0=2}$.



3) $P\{Y=0|X=4\}=\frac{0{,}1}{0{,}4}=\frac{1}{4}$, $P\{Y=2|X=4\}=\frac{0{,}3}{0{,}4}=\frac{3}{4}$, $P\{Y=5|X=4\}=\frac{0}{0{,}4}=0$,

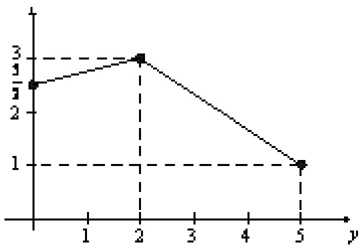
отсюда $M[Y|X=4]=0\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}+5\cdot 0=\frac{3}{2}$.

Графическое изображение регрессии *Y* на *x* показано на рисунке

Построим теперь регрессию *X* на *y*.

1) $P\{X=1|Y=0\}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=\frac{1}{2}$, $P\{X=2|Y=0\}=\frac{0}{0{,}2}=0$, $P\{X=4|Y=0\}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=\frac{1}{2}$, отсюда $M[X|Y=0]=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 0+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

2) $P\{X=1|Y=2\}=\frac{0}{0{,}6}=0$, $P\{X=2|Y=2\}=\frac{0{,}3}{0{,}6}=\frac{1}{2}$, $P\{X=4|Y=2\}=\frac{0{,}3}{0{,}6}=\frac{1}{2}$, отсюда $M[X|Y=2]=1\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=3$.



3) $P\{X=1|Y=5\}=\frac{0{,}2}{0{,}2}=1$, $P\{X=2|Y=5\}=\frac{0}{0{,}2}=0$, $P\{X=4|Y=5\}=\frac{0}{0{,}2}=0$, отсюда $\mathbf{M}[X|Y=\mathbf{5}]=\mathbf{1\cdot 1+2\cdot 0+4\cdot 0=1}$.

Графическое изображение регрессии *X* на *y* показано на рисунке.

Для наглядности значения условного математического ожидания на соединены отрезками прямых.

Замечание 1. Для *независимых* случайных величин линии регрессии *Y* на *x* и *X* на *y* параллельны координатным осям, т.к. математическое ожидание каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая случайная величина. Линии регрессии могут быть параллельны координатным осям и для *зависимых* случайных величин, если только математическое ожидание каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая случайная величина.

Замечание 2. По аналогии с условными математическими ожиданиями можно рассматривать условные моменты. Например, условные дисперсии $\mathbf{D}[Y|X=x]$, $\mathbf{D}[X|Y=y]$ и т.д.

Пример 8. Ранее была дана функция плотности $f_{X,Y}(x,y)$:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi}, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1,\\ 0, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1;\end{cases}$$

и найдены условные плотности распределения компонент *X* и *Y* (пример 2.2.21):

$$f_X(x|Y=y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{4-y^2}}, & |x|\le\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2},\\ 0, & |x|>\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2};\end{cases}$$

$$f_Y(y|X=x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\sqrt{9-x^2}}, & |y|\le\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2},\\ 0, & |y|>\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.\end{cases}$$

Найти регрессии *Y* на *x* и *X* на *y*, а также условные дисперсии компонент *X* и *Y*.

Решение. Условные математические ожидания вычисляются по формулам: $\mathrm{M}[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_X(x|Y=y)\mathrm{d}x$, $\mathrm{M}[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f_Y(y|X=x)\mathrm{d}y$. Поэтому

$$\mathrm{M}[X|Y=y]=\int_{-1{,}5\sqrt{4-y^2}}^{1{,}5\sqrt{4-y^2}}\frac{x}{3\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}x=\left\|\begin{array}{c}\text{нечетная по } x \text{ функция}\\ \text{в симметричных}\\ \text{пределах}\end{array}\right\|=0,$$

$$\mathrm{M}[Y|X=x]=\int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}\frac{3y}{4\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}y=\left\|\begin{array}{c}\text{нечетная по } y \text{ функция}\\ \text{в симметричных}\\ \text{пределах}\end{array}\right\|=0.$$

Заметим, что при вычислении условных математических ожиданий можно было воспользоваться тем, что случайная величина *X* при условии $Y=y$ равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2};\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right]$, а случайная величина *Y* при условии $X=x$ равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2};\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]$.

Действительно, для равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$ случайной величины математическое ожидание равно $\dfrac{a+b}{2}$, а дисперсия равна $\dfrac{(b-a)^2}{12}$. Отсюда, очевидно, $\mathbf{M}[X|Y=y]=\mathbf{0}$ при $|y|\le 2$, $\mathbf{M}[Y|X=x]=\mathbf{0}$ при $|x|\le 3$. Тогда условные дисперсии равны:

$$\mathrm{D}[X|Y=y]=\frac{\left(1{,}5\sqrt{4-y^2}-\left(-1{,}5\sqrt{4-y^2}\right)\right)^2}{12}=\frac{3(4-y^2)}{4}\ \text{при } |y|\le 2,$$

$$\mathrm{D}[\,Y \mid X = x] = \frac{4(9 - x^2)}{27} \text{ при } |x| \le 3.$$

Ответ: $\mathbf{M}[X \mid Y = y] = 0$, $\mathrm{D}[\,X \mid Y = y] = \dfrac{3(4 - y^2)}{4}$ при $|y| \le 2$;

$\mathbf{M}[Y \mid X = x] = 0$, $\mathrm{D}[\,Y \mid X = x] = \dfrac{4(9 - x^2)}{27}$ при $|x| \le 3$.

4.Многомерное нормальное распределение.

На практике часто встречаются двумерные случайные величины, распределение которых нормально.

Определение. *Нормальным законом распределения на плоскости* называется распределение вероятностей двумерной случайной величины $(X; Y)$, функция плотности которой имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1 - \rho_{X,Y}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho_{X,Y}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}.$$

Итак, нормальный закон на плоскости определяется пятью параметрами: $m_X; m_Y; \sigma_X; \sigma_Y; \rho_{X,Y}$. Смысл этих параметров: математические ожидания и средние квадратические отклонения компонент, а также коэффициент корреляции.

Пример 1. Доказать, что *для нормально распределенных компонент двумерной случайной величины* $(X; Y)$ *понятия независимости и некоррелированности равносильны*.

Решение. Действительно, пусть компоненты X и Y некоррелированны ($\rho_{X,Y} = 0$), тогда плотность $f_{X,Y}(x, y)$ принимает вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}.$$

Отсюда очевидно, что

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} = f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

Значит, компоненты X и Y независимы.

Обратное утверждение также выполняется (из независимости компонент X и Y всегда следует их некоррелированность).

Условные законы распределения случайных величин X и Y:

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X\sqrt{1 - \rho_{X,Y}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X} - \rho_{X,Y}\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2},$$

$$f_Y(y \mid X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y\sqrt{1 - \rho_{X,Y}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} - \rho_{X,Y}\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2}.$$

Нетрудно видеть, что каждый из условных законов распределения также является нормальным с условным математическим ожиданием и условной дисперсией, вычисляемыми по формулам:

$$\mathrm{M}[X|Y=y]=m_X+\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y),\quad \mathrm{D}[X|Y=y]=\sigma_X^2(1-\rho_{X,Y}^2);$$

$$\mathrm{M}[Y|X=x]=m_Y+\rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X),\quad \mathrm{D}[Y|X=x]=\sigma_Y^2(1-\rho_{X,Y}^2).$$

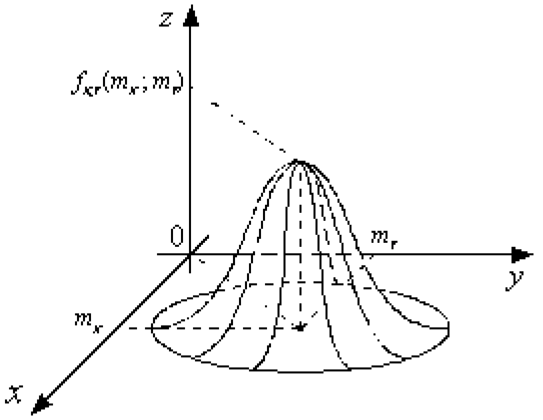


Рис. 2.2.11.

Замечание. Из формул для условных математических ожиданий видно, что *для системы нормально распределенных случайных величин X и Y линии регрессии Y на x и X на y представляют собой прямые линии*, т.е. в данном случае регрессия *всегда линейна*.

В геометрической интерпретации график $f_{X,Y}(x,y)$ двумерного нормального распределения представляет собой холмообразную поверхность, вершина которой находится в точке $(m_X;m_Y)$. Аппликата этой вершины равна $f_{X,Y}(m_X,m_Y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}$ (рис. 2.2.11). Сечения поверхности $f_{X,Y}(x,y)$ плоскостями, параллельными плоскости *xOy*, представляют собой эллипсы.

Определение. Нормальное распределение называется *круговым* с центром в точке $(m_X;m_Y)$, если случайные величины *X* и *Y* некоррелированны ($\rho_{X,Y}=0$) и $\sigma_X=\sigma_Y=\sigma$.

Пример 2. Случайная точка $(X;Y)$ на плоскости *xOy* распределена по двумерному нормальному закону с центром рассеивания $(m_X;m_Y)=(1;0)$, средними квадратическими отклонениями $\sigma_X=2$, $\sigma_Y=1$ и коэффициентом корреляции $\rho_{X,Y}=0$. Вычислить вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в прямоугольник с вершинами $A(1;-1)$, $B(1;2)$, $C(3;2)$, $D(3;-1)$.

Решение. Поскольку коэффициент корреляции $\rho_{X,Y}=0$, то плотность $f_{X,Y}(x,y)$ представляется в виде

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}.$$

С учетом того, что $m_X=1$, $m_Y=0$, $\sigma_X=2$, $\sigma_Y=1$, получим:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Поэтому $\mathrm{P}\{(X;Y)\in ABCD\}=\iint\limits_{ABCD}f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_1^3 f_X(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int\limits_{-1}^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y$, или

$$\mathrm{P}\{(X;Y)\in ABCD\}=\left(\Phi\left(\frac{3-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-1}{2}\right)\right)\cdot\left(\Phi\left(\frac{2-0}{1}\right)-\Phi\left(\frac{-1-0}{1}\right)\right)=$$

$$= (\Phi(1)-\Phi(0))\cdot(\Phi(2)-\Phi(-1)) = (\Phi(1)-0{,}5)\cdot(\Phi(2)-1+\Phi(1)) \approx 0{,}2794.$$

Ответ: $\approx 0{,}2794$.

Пример 3. Случайные величины *X* и *Y* независимы и распределены по нормальному закону. Известно, что $m_X = a$, $m_Y = b$, $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$. Найти радиус *R* круга с центром в точке $(a;b)$, вероятность попадания в который случайной точки $(X;Y)$ равна 0,997.

Решение. Поскольку случайные величины *X* и *Y* независимы, то

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma^2}}.$$

Вероятность $\mathbf{P}(D)$ попадания случайной точки $(X;Y)$ в круг *D* с центром в точке $(a;b)$ и радиусом *R* вычисляется следующим образом:

$$\mathrm{P}(D) = \iint_D f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{(u-a)^2+(v-b)^2\le R^2} f_X(u)\cdot f_Y(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{(u-a)^2+(v-b)^2\le R^2}\mathbf{e}^{-\frac{(u-a)^2+(v-b)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left\|\begin{matrix} t = \dfrac{u-a}{\sigma}, \\ \tau = \dfrac{v-b}{\sigma}\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2\pi}\iint_{t^2+\tau^2\le\left(\frac{R}{\sigma}\right)^2}\mathbf{e}^{-\frac{t^2+\tau^2}{2}}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \left\|\begin{matrix} t = r\cos\varphi, \\ \tau = r\sin\varphi\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{R}{\sigma}}\left(\int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{R}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{r^2}{2}\right) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.$$

Теперь, решая уравнение $1-\mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} = 0{,}997$, получим $R^2 = -2\sigma^2\ln 0{,}003 \approx 11{,}6\sigma^2$. Отсюда $R \approx 3{,}41\sigma$.

Ответ: $R \approx 3{,}41\sigma$.

Пример 4. Заданы следующие характеристики двумерного нормального вектора $(X;Y)$: $m_X = 3$, $m_Y = -2$, $\sigma_X = 5$, $\sigma_Y = 4$, $\rho_{X,Y} = 0{,}6$. 1) Записать выражения для плотности распределения вероятностей $f_{X,Y}(x,y)$ и условных плотностей компонент $f_X(x\,|\,Y=y)$, $f_Y(y\,|\,X=x)$. 2) Составить уравнения регрессий *Y* на *x* и *X* на *y*. 3) Найти условные дисперсии компонент *X* и *Y*.

Решение. 1) По определению двумерного нормального вектора:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}\cdot\mathbf{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{X,Y}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}.$$

С учетом того, что $m_X = 3$, $m_Y = -2$, $\sigma_X = 5$, $\sigma_Y = 4$, $\rho_{X,Y} = 0{,}6$, выражение для $f_{X,Y}(x,y)$ примет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{32\pi}\cdot\mathbf{e}^{-\frac{25}{32}\left[\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{3(x-3)(y+2)}{50}+\frac{(y+2)^2}{16}\right]}.$$

Условные законы распределения случайных величин *X* и *Y*:

$$f_X(x|Y=y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot\mathbf{e}^{-\frac{25}{32}\cdot\left(\frac{x-3}{5}-0{,}6\cdot\frac{y+2}{4}\right)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot\mathbf{e}^{-\frac{1}{32}\cdot(x-0{,}75y-4{,}5)^2},$$

$$f_Y(y|X=x)=\frac{5}{16\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{25}{32}\cdot\left(\frac{y+2}{4}-0,6\cdot\frac{x-3}{5}\right)^2}=\frac{5}{16\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{25}{32}\cdot(0,25y-0,12x+0,74)^2}.$$

2) Условные математические ожидания равны:

$$\mathrm{M}[X|Y=y]=m_X+\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y)=3+0,6\cdot\frac{5}{4}\cdot(y+2)=4,5+0,75y,$$

$$\mathrm{M}[Y|X=x]=m_Y+\rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)=-2+0,6\cdot\frac{4}{5}\cdot(x-3)=-3,44+0,48x.$$

Таким образом, уравнение регрессии X на y имеет вид $x=4,5+0,75y$, а уравнение регрессии Y на x имеет вид $y=-3,44+0,48x$.

3) Условные дисперсии равны:

$$\mathrm{D}[X|Y=y]=\sigma_X^2(1-\rho_{X,Y}^2)=25\cdot 0,64=16,$$

$$\mathrm{D}[Y|X=x]=\sigma_Y^2(1-\rho_{X,Y}^2)=16\cdot 0,64=10,24.$$

Ответ: 1) $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{32\pi}\cdot e^{-\frac{25}{32}\cdot\left[\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{3(x-3)(y+2)}{50}+\frac{(y+2)^2}{16}\right]}$,

$f_X(x|Y=y)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{32}\cdot(x-0,75y-4,5)^2}$, $f_Y(y|X=x)=\frac{5}{16\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{25}{32}\cdot(0,25y-0,12x+0,74)^2}$.

2) Уравнение регрессии X на y: $x=4,5+0,75y$, уравнение регрессии Y на x: $y=-3,44+0,48x$. 3) $\mathbf{D}[X|Y=y]=\mathbf{16}$, $\mathbf{D}[Y|X=x]=\mathbf{10{,}24}$.

3.10.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия многомерного статистического анализа;
- усвоили способы задания многомерной СВ, определение общего и частных законов распределения;
- выработали навыки по вычислению числовых характеристик МСВ, условных числовых характеристик МСВ;
- усвоили основные свойства МСВ, распределенных нормально.

3.11 Практическое занятие 19 -20 (ПЗ-19-20)

Тема: Статистическое распределение

3.11.1 Задание для работы:

1.Первичная обработка статистических данных. Графическое представление статистических рядов. Эмпирическая функция распределения статистических рядов.

2. Числовые характеристики статистического ряда, их свойства. Точечные оценки параметров статистического распределения.

3. Оценки параметров генеральной совокупности. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия.

4.Метод доверительных интервалов.

3.11.2 Краткое описание проводимого занятия

1.Первичная обработка статистических данных. Графическое представление статистических рядов. Эмпирическая функция распределения статистических рядов.

Пример 1. Имеется распределение 80 предприятий по числу работающих на них (чел.):

	150	250	350	450	550	650	750
m_i	1	3	7	30	19	15	5

Построить полигон распределения частот.

Решение. Признак *X*- число работающих (чел.) на предприятии. В данной задаче признак *X* является дискретным. Поскольку различных значений признака сравнительно немного -k= 7, применять интервальный ряд для представления статистического распределения нецелесообразно (в прикладной статистике в подобных задачах часто используют именно интервальный ряд). Ряд распределения - дискретный. Построим полигон распределения частот (рис. 1).

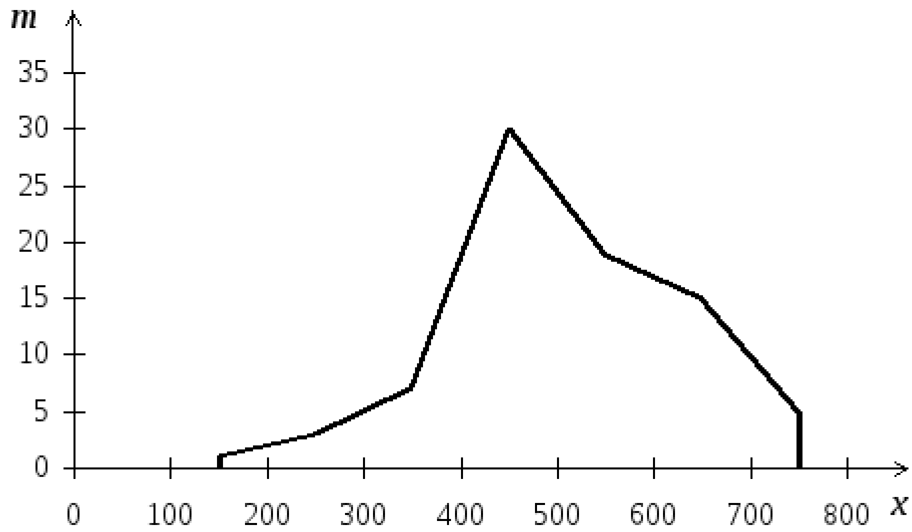


Рис. 1

Пример 2. Дано распределение 100 рабочих по затратам времени на обработку одной детали (мин):

x_{i-1}-x_i	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	32-34	
	2	12	34	40	10	2	.

Построить гистограмму частот.

Решение. Признак X - затраты времени на обработку одной детали (мин). Признак X -непрерывный, ряд распределения - интервальный. Построим гистограмму частот (рис. 2), предварительно определив $h=(x_k-x_0)/k=(34-22)/6=2$ (k= 6) и плотность частоты m_i/h.

x_{i-1}-x_i	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32	32-34
m_i/h	1	6	17	20	5	1

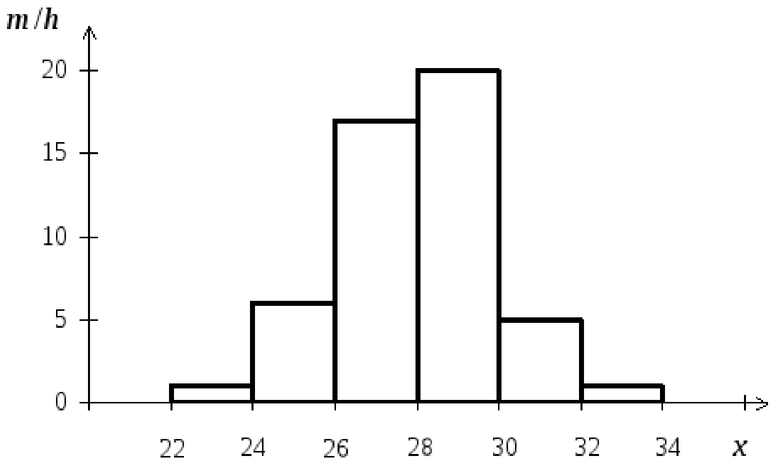


Рис. 2

Построение интервального вариационного ряда рассмотрим на примере.

При измерении диаметра валиков после шлифовки получены следующие результаты:

6,75; 6,77; 6,77; 6,73; 6,76; 6,74; 6,70; 6,75; 6,71; 6,72; 6,77; 6,79; 6,71; 6,78;

6,73; 6,70; 6,73; 6,77; 6,75; 6,74; 6,71; 6,70; 6,78; 6,76; 6,81; 6,69; 6,80; 6,80;

6,77; 6,68; 6,74; 6,70; 6,70; 6,74; 6,77; 6,83; 6,76; 6,76; 6,82; 6,77; 6,71; 6,74;

6,77; 6,75; 6,74; 6,75; 6,77; 6,72; 6,74; 6,80; 6,75; 6,80; 6,72; 6,78; 6,70; 6,75;

6,78; 6,78; 6,76; 6,77; 6,74; 6,74; 6,77; 6,73; 6,74; 6,77; 6.74; 6,75; 6,74; 6,76;

6,76; 6,74; 6,74; 6,74; 6,74; 6,76; 6,74; 6,72; 6,80; 6,76; 6,78; 6,73; 6,70; 6,76;

6,76; 6,77; 6,75; 6,78; 6,72; 6,76; 6,78; 6,68; 6,75; 6,73; 6,82; 6,73; 6,80; 6,81;

6,71; 6,82; 6,77; 6,80; 6,80; 6,70; 6,70; 6,82; 6,72; 6,69; 6,73; 6,76; 6,74; 6,77;

6,72; 6,76; 6,78; 6,78; 6,73; 6,76; 6,80; 6,76; 6,72; 6,76; 6,76; 6,70; 6,73; 6,75;

6,77; 6,77; 6,70; 6,81; 6,74; 6,73; 6,77; 6,74; 6,78; 6,69; 6,74; 6,71; 6,76; 6,76;

6,77; 6,70; 6,81; 6,74; 6,74; 6,77; 6,75; 6,80; 6,74; 6,76; 6,77; 6,77; 6,81; 6,75;

6,78; 6,73; 6,76; 6,76; 6,76; 6,77; 6,76; 6,80; 6,77; 6,74; 6,77; 6,72; 6,75; 6,76;

6,77; 6,81; 6,76; 6,76; 6,76; 6,80; 6,74; 6,80; 6,74; 6,73; 6,75; 6,77; 6,74; 6,76;

6,77; 6,77; 6,75; 6,76; 6,74; 6,82; 6,76; 6,73; 6,74; 6,75; 6,76; 6,72; 6,78; 6,72;

6,76; 6,77; 6,75; 6,78.

Для построения интервального ряда необходимо определить величину частичных интервалов. Считая, что все частичные интервалы имеют одну и ту же длину, для каждого интервала следует установить его верхнюю и нижнюю границы, а затем в соответствии с полученной упорядоченной совокупностью частичных интервалов сгруппировать результаты наблюдении. Длину частичного интервала *h* следует выбрать так, чтобы построенный ряд не был громоздким и в то же время позволял выявить характерные черты изменения значений случайной величины.

Просматривая результаты наблюдений, находим, что наибольшим значением случайной величины $x_{наиб}$ является 6,83, а наименьшим $x_{наим}$ - 6,68. Найдем размах варьирования *R*. :

$$R=6{,}83-6{,}68=0{,}15.$$

Выберем число интервалов. Для того чтобы вариационный ряд не был слишком громоздким, обычно число интервалов берут от 7 до 11. Положим предварительно v=7, тогда длина частичного интервала $h = \frac{R}{v} = \frac{0{,}15}{7} \approx 0{,}0214 \approx 0{,}02.$

За начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{наим} - 0{,}5h$.

В данном случае $x_{нач} = 6{,}67$. Конец последнего интервала должен удовлетворять условию

$$x_{кон} - h \le x_{наиб} < x_{кон}.$$

Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала *h* (в рассматриваемом случае h=0,02).

Теперь, просматривая результаты наблюдений, определяем, сколько значений признака попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают значения случайной величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы.

В таблице частота m_i , показывает, в скольких наблюдениях случайная величина приняла значения, принадлежащие тому или иному интервалу, причем нижний конец интервала входит в него, а верхний—нет. Такие частоты обычно называют интервальными, а их отношение к общему числу наблюдений—интервальными частостями.

При вычислении интервальных частостей округление результатов следует проводить таким образом, чтобы общая сумма частостей была равна 1:

$$\sum \hat{p}_i = 1.$$

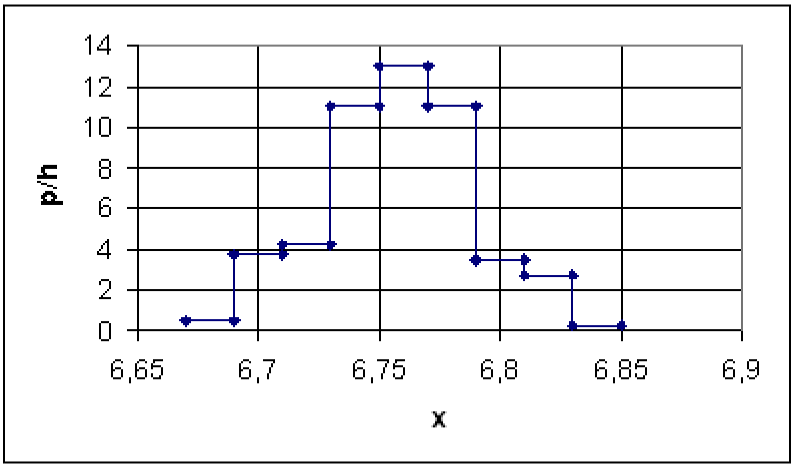
Для данного примера интервальный вариационный ряд имеет вид:

№	x_i - x_{i+1}	m_i	$\hat{p}_i$	m_i/h	$\hat{p}_i$ /h
1	6,67-6,69	2	0,01	100	0,5
2	6,69-6,71	15	0,075	750	3,75

3	6,71-6,73	17	0,085	850	4,25
4	6,73-6,75	44	0,22	2200	11
5	6,75-6,77	52	0,26	2600	13
6	6,77-6,79	44	0,22	2200	11
7	6,79-6,81	14	0,07	700	3,5
8	6,81-6,83	11	0,055	550	2,75
9	6,83-6,85	1	0,005	50	0,25
	$\sum$	200	1		

По данным интервального ряда строят гистограмму частот или гистограмму относительных частот:

Ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых- частичные интервалы, высоты равны отношению частоты к длине частичного интервала(плотность частоты) (частости к длине частичного интервала (плотность частости)).Гистограмма частостей имеет вид:



Для гистограммы частот: площадь каждого прямоугольника равна частоте интервала, сумма площадей всех прямоугольников равна объему выборки.

Для гистограммы частостей: площадь каждого прямоугольника равна частости интервала, сумма площадей всех прямоугольников равна 1.

Пример. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	6	10
m_i	12	18	30

Объем выборки n = 12+ 18+ 30 =60. $X_{наим}$= 2, значит при X £ 2,

$$\hat{F}(x) = 12/60$$

X<6 наблюдалось 12 раз, следовательно, при X< 6

$$\hat{F}(x) = 12/60$$.

Значение X<10 наблюдалось 12+18= 30 раз, значит при X<10

$$\hat{F}(x) = 30/60$$

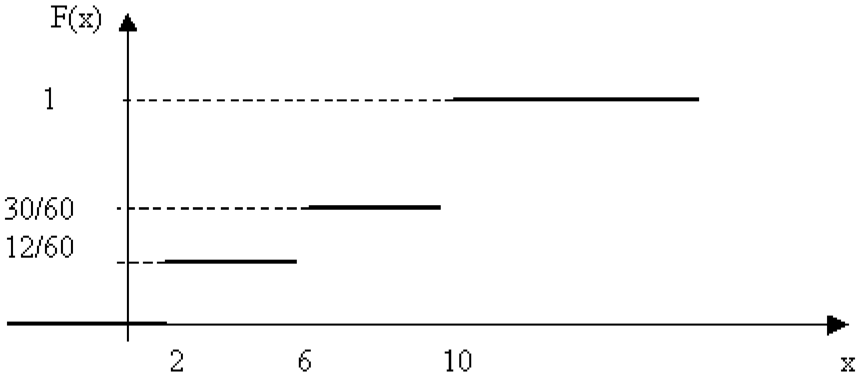
Так как $x_{наиб}$ =10, то при X ³□10

$$\hat{F}(x) = 1$$

Искомая эмпирическая функция имеет вид:

$$\hat{F}(x)=\begin{cases}0, x\le 2;\\ 12/60, x<6;\\ 30/60, x<10;\\ 1, x\ge 10.\end{cases}$$

График строится так же, как и график интегральной функции распределения.

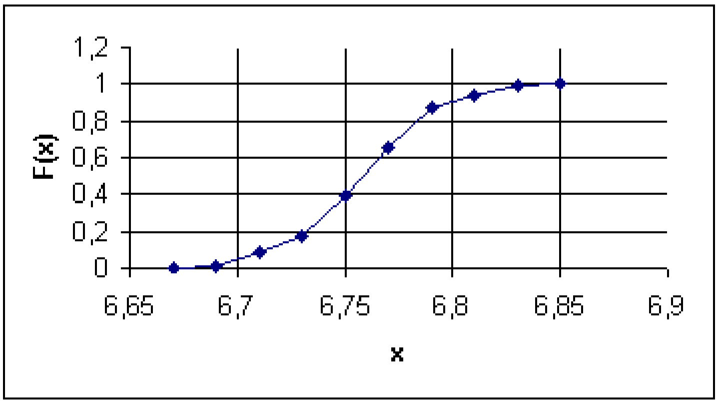


Если результаты наблюдений представлены в виде интервального вариационного ряда, то в качестве x принимают концы частичных интервалов и , пользуясь данным выше определением вычисляют значения эмпирической функции.

Для рассмотренного примера получим таблицу:

x	6,67	6,69	6,71	6,73	6,75	6,77	6,79	6,81	6,83	6,85
$\hat{F}(x)$	0	0,01	0,085	0,17	0,39	0,65	0,87	0,94	0,995	1

Так как таблица определяет функцию не полностью, то при изображении графика доопределяем функцию, соединяя точки графика, соответствующие концам интервалов, отрезками. График эмпирической функции для интервального вариационного ряда есть непрерывная линия.



2. Числовые характеристики статистического ряда, их свойства. Точечные оценки параметров статистического распределения.

Каждой числовой характеристике случайной величины X соответствует ее статистическая аналогия.

Для основной характеристики положения математического ожидания случайной величины – такой является среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины: $M^*|X| = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, (1) где x_i — случайной величины, наблюденное i -м опыте, n - число опытов.

Эту характеристику мы будем в дальнейшем называть статистическим средним случайной величины.

Согласно закону больших чисел, при ограниченном увеличении числа опытов статистическое среднее приближается (сходится по вероятности) математическому ожиданию.

При ограниченном числе опытов статистическое среднее является случайной величиной, которая, тем не менее, связана с математическим ожиданием и может дать о нем известное представление.

Подобные статистические аналогии существуют для всех числовых характеристик. Условимся в дальнейшем эти статистические аналогии обозначать теми же буквами, что и соответствующие числовые характеристики, но и снабжать их значком *.

Рассмотрим, например, дисперсию случайной величины. Она представляет собой математическое ожидание случайной величины $\overset{o}{X}{}^2 = (X - m_x)^2$:

$$D[X] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = M\left[(X - m_x)^2\right]. \qquad (2)$$

Если в этом выражении заменить математическое ожидание его статистической аналогией – средним арифметическим, мы получим статистическую дисперсию случайной величины X :

$$D^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x^*\right)^2}{n} \qquad (3)$$

где $m_x^* = M^*[X]$ - статистическое среднее.

Аналогично определяются статистические начальные и центральные моменты любых порядков:

$$\alpha_s^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^s}{n} \quad (4), \qquad \mu_s^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x^*\right)^s}{n} \quad (5)$$

Все эти определения полностью аналогичны данным в главе 5 определениям числовых характеристики случайной величины, с той разницей, что в них везде вместо математического ожидания фигурирует среднее арифметическое. При увеличении числа наблюдений, очевидно, все статистические характеристики будут сходиться по вероятности к соответствующим математическим характеристикам и при достаточном n могут быть приняты приближенно равными им.

Нетрудно доказать, что для статистических начальных и центральных моментов справедливы те же свойства, которые были введены в главе 5 для математических моментов. В частности, статистический первый центральный момент всегда равен нулю:

$$\mu_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x^*\right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - m_x^* = m_x^* - m_x = 0 .$$

Соотношения между центральными и начальными моментами также сохраняются:

$$\mu_2^* = D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x^*\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2m_x^* \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \left(m_x^*\right)^2 = \alpha_2^* - \left(m_x^*\right)^2 \qquad (7.4.6)$$

и т.д.

При очень большом количестве опытов вычисление характеристик по формулам (1) - (5) становится чрезмерно громоздким и можно применить следующий прием: воспользоваться теми же разрядами, на которые был расклассифицирован статистический материал для построения статистического ряда или гистограммы, и считать приближенно значение случайной величины в каждом разряде постоянным и равным среднему значению, которое выступает в роли «представителя» разряда. Тогда статистические числовые характеристики будут выражаться приближенными формулами:

$$m_x^* = M^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^* , \qquad (7)$$

$$D_x^* = D^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^2 p_i^* , \qquad (8)$$

$$\alpha_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^s p_i^* , \qquad (9)$$

$$\mu_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^s p_i^* , \qquad (10)$$

где $\tilde{x}_i$ — «представитель» i-го разряда, p_i^* - частота i-го разряда, k - число разрядов.

Точечная оценка математического ожидания

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ выборка из генеральной совокупности, соответствующей случайной величине x с неизвестным математическим ожиданием Mx =q и известной дисперсией $D\xi = \sigma^2$.

Рассмотрим оценку неизвестного математического ожидания

$$\hat{\theta}_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Оценка несмещённая, поскольку её математическое ожидание равно Mx =q:

$$M\theta_n = M\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(Mx_1 + Mx_2 + \ldots + Mx_n\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \theta = \theta ,$$

Оценка состоятельная, поскольку при n- б.б. $D\theta_n = \frac{1}{n}\sigma^2 \to 0$:

$$D\theta_n = D\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(Dx_1 + Dx_2 + \ldots + Dx_n\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 \to 0.$$

Итак, для оценки неизвестного математического ожидания случайной величины будем использовать выборочное среднее: $\theta_n = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

Точечная оценка дисперсии

Для дисперсии σ^2 случайной величины ξ можно предложить следующую оценку:

$\overline{DX} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, где $\bar{x}$ — выборочное среднее.

Доказано, что эта оценка состоятельная, но смещенная.

В качестве состоятельной несмещенной оценки дисперсии используют величину

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n(\bar{x})^2\right).$$

Именно несмещенностью оценки s^2 объясняется ее более частое использование в качестве оценки дисперсии.

3. Оценки параметров генеральной совокупности. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия.

Задача 1. Путем опроса получены следующие данные (N=80):

2 4 2 4 1 1 1 2 0 61 2 1 2 2 4 1 1 5 10 2 4 1 2 2 1 1 1 1
1 1 1 1 2 1 1 4 1 17 4 1 4 2 1 2 1 1 14 1 1 4 5 1 4 2 4 5
1 6 4 1 1 2 4 1 1 10 0 4 6 4 7 4 1 1 5

Выполнить задания:

А) получить дискретный вариационный ряд и статистическое распределение выборки;

Б) построить полигон частот;

В) составить ряд распределения относительных частот;

Г) составить эмпирическую функцию распределения;

Д) построить график эмпирической функции распределения;

Е) найти основные числовые характеристики вариационного ряда (по возможности использовать упрощающие формулы для их нахождения):

1) выборочное среднее $\bar{x}_B$;

2) выборочную дисперсию D(X);

1) выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$;

4) коэффициент вариации V;

5) интерпретировать полученные результаты.

Решение.

А) Для составления дискретного вариационного ряда отсортируем данные опроса по величине и расположим их в порядке возрастания:

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7.

Статистическое распределение выборки представлено в таблице1, в которой первая строка – варианты (наблюдаемые значение), вторая строка – Частоты появления этих вариант).

Таблица1. Варианты и их частоты

Xi	0	1	2	1	4	5	6	7
Ni	4	11	14	24	16	4	1	2

Б) Для построения полигона частот найдем относительные частоты ($w_i = n_i / n$,

где $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, где M – число различных значений признака X ($m \le n$) и в данном примере M=8), которые будем вычислять с одинаковой точностью. Полигон частот – ломаная линия, соединяющая точки с координатами (x_i, w_i) (Рис.1). Расчеты запишем в табл.2.

Таблица 2. Относительные частоты и накопленные частоты

Xi	Ni	Относительные частоты w_i	Накопленные частоты
0	4	0.050	0.050
1	11	0.161	0.211
2	14	0.175	0.188
1	24	0.100	0.688
4	16	0.200	0.888
5	4	0.050	0.918
6	1	0.018	0.975
7	2	0.025	1.000
Сумма	80	1	

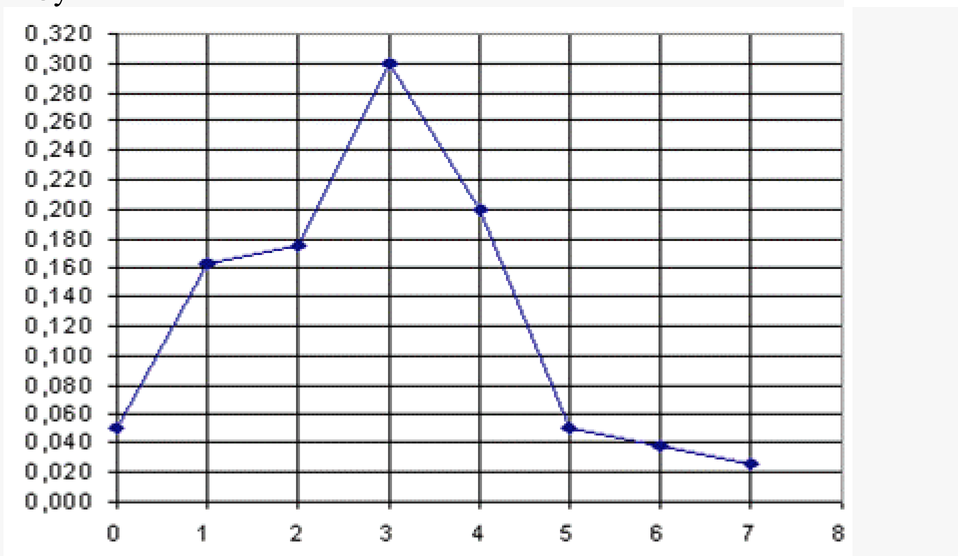


Рис.1. Полигон частот вариационного ряда

В) Запишем ряд распределения (табл. 1) относительных частот в виде таблицы 1, в которой первая строка – варианты (изучаемый признак), вторая строка – относительные частоты (Частости).

Таблица 1. Распределение относительных частот появления признака

Xi	0	1	2	1	4	5	6	7
Ni	0.05	0.161	0.175	0.1	0.2	0.05	0.018	0.025

Г) Эмпирическую функцию распределения найдем, используя накопленные частоты (табл. 1, столбик 4):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0.05, & 0 < x \le 1, \\ 0.213, & 1 < x \le 2, \\ 0.388, & 2 < x \le 3, \\ 0.688, & 3 < x \le 4, \\ 0.888, & 4 < x \le 5, \\ 0.938, & 5 < x \le 6, \\ 0.975, & 6 < x \le 7, \\ 1 & x > 7. \end{cases}$$

Д) Построим график эмпирической функции распределения (рис. 2), используя значения, полученные в пункте г).

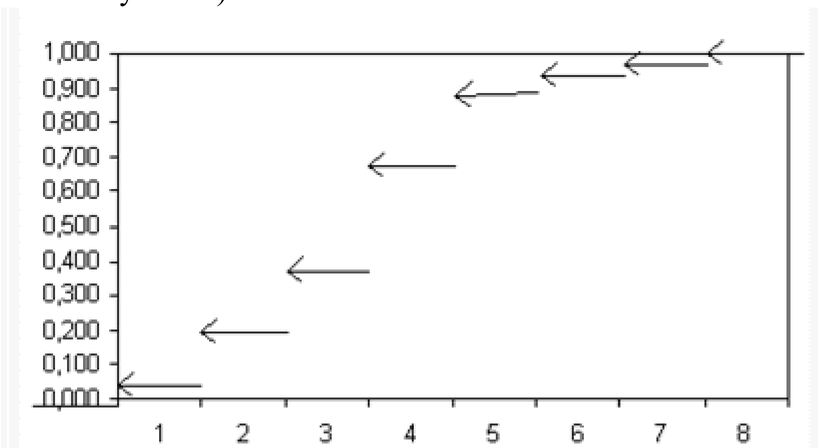


Рис. 2. График эмпирической функции распределения

Е) Для вычисления выборочного среднего $\bar{x}_B$ и выборочной дисперсии D_B с использованием приведенных выше формул, удобно составлять расчетную таблицу 2:

Таблица.2. Расчетная таблица для вычисления выборочных величин

Xi	Ni	Xi×Ni	$(x_i - \bar{x}_B)^2$	$(x_i - \bar{x}_B)^2$ ×Ni
0	4	0	8.1796	12.7184
1	11	11	1.4596	44.9748
2	14	28	0.7196	10.1544
1	24	72	0.0196	0.4704
4	16	64	1.2996	20.7916
5	4	20	4.5796	18.1184
6	1	18	9.8596	29.5788
7	2	14	17.1196	14.2792
Сумма	80	229		191.488

Используя суммы, полученные в табл. 2, определим искомые величины.

1) Выборочную среднюю $\bar{x}_B = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n} = \dfrac{229}{80} \approx 2.86.$

2) Выборочную дисперсию $D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 \cdot n_i}{n} = \dfrac{191.488}{80} \approx 2.39.$

1) Выборочное среднее квадратическое отклонение

$\sigma_B(X) = \sqrt{D_B} = \sqrt{2.39} \approx 1.55.$

4) Коэффициент вариации $V = \dfrac{\sigma_B(X)}{\overline{x}_B} \cdot 100\% = \dfrac{1.55}{2.86} \cdot 100\% \approx 54.2\%.$

5) Интерпретация полученных результатов:

- величина $\overline{x}_B \approx 2.86$ характеризует среднее значение признака X;

- среднее квадратическое отклонение $\sigma_B(X)$ описывает абсолютный разброс значений показателя X относительно среднего значения и в данном случае составляет $\sigma_B(X) \approx 1.55$;

- коэффициент вариации V характеризует относительную изменчивость показателя X, то есть относительный разброс вокруг его среднего значения $\overline{x}_B$, и в данном случае составляет $V \approx 54.2\%$.

Ответ: $\overline{x}_B \approx 2.86$; $D_B \approx 2.39$; $\sigma_B(X) \approx 1.55$; $V \approx 54.2\%$.

4.Метод доверительных интервалов.

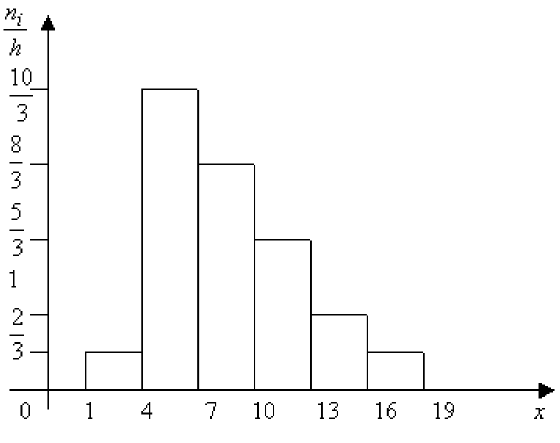
Задача: Выборочно обследование 30 предприятий машиностроительной промышленности по валовой продукции и получены следующие данные, в млн. руб.:

18,0; 12,0; 11,9; 1,9; 5,5; 14,6; 4,8; 5,6; 4,8; 10,9; 9,7; 7,2; 12,4; 7,6;
9,7; 11,2; 4,2; 4,9; 9,6; 3,2; 8,6; 4,6; 6,7; 8,4; 6,8; 6,9; 17,9; 9,6;
14,8; 15,8.

Составить интервальное распределение выборки с началом $x_0 = 1$ и длиной частичного интервала $h = 3$. Построить гистограмму частот .Решение. Для составления интервального распределения составим таблицу, в первой строке которой расположим в порядке возрастания интервалы, длина каждого из которых $h = 3$. Во второй строке запишем количество значений признака в выборке, попавших в этот интервал (т.е. сумму частот вариант, попавших в соответствующий интервал):

$(x_i; x_{i+1})$	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
n_i	2	10	8	5	3	2

Объем выборки n = 2 + 10 + 8 + 5 + 3 + 2 = 30.



Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладываем частичные интервалы, на каждом из них строим прямоугольники высотой $\frac{n_i}{h}$, где n_i - частота i-го частичного интервала, h – шаг (длина интервала), таким образом, гистограмма примет вид:

Указание. Для построения эмпирической функции распределения и нахождения точечных оценок ряда необходимо преобразовать его к дискретному виду по формуле

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Получим

x_i^*	2,5	5,5	8,5	11,5	14,5	17,5
n_i	2	10	8	5	3	2

Задача: Из большой партии электроламп случайным образом отобрано 100. Средняя продолжительность горения ламп в выборке оказалась равной 1000 ч. Найти с надежностью $\gamma = 0{,}95$ доверительный интервал для средней продолжительности горения ламп во всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ ч и продолжительность горения ламп распределена по нормальному закону. Решение. По условию $\bar{x}_B = 1000,\ \gamma = 0{,}95,\ \sigma = 40.$ Для решения воспользуемся формулой

$$\bar{x}_B - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$$

По приложению 3 находим t из условия: $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475; \Rightarrow t = 1{,}96.$

Тогда доверительный интервал:

$$1000 - \frac{1{,}96 \cdot 40}{\sqrt{100}} < a < 1000 + \frac{1{,}96 \cdot 40}{\sqrt{100}}$$

$$992{,}16 < a < 1007{,}84.$$

Задача: По результатам наблюдений была найдена оценка неизвестного математического ожидания М случайной величины $\xi \sim N(m, \sigma^2)$, если точечная оценка $\overline{m}$ =10.2, а дисперсия оценки σ_X =4. Требуется оценить доверительный интервал для оценки математического ожидания по 36-ти наблюдениям с заданной надежностью ¡=0.99.

Решение. Из (4.1) следует, что $\Phi_{0,1}(t_\gamma) = \frac{0.99}{2} = 0.495$. Отсюда получаем, что $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_X}$ =2.58 и половина искомого интервала $\delta = \frac{2.58 \cdot 4}{\sqrt{36}} = 1.89$. Так как $\overline{m} - \delta < m < \overline{m} + \delta$, то с вероятностью 0.99 доверительный интервал для оценки математического ожидания: $8.31 < m < 12.09$.

Со случаем, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна, можно ознакомится в [3, 4, 6].

3.11.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия математической статистики;
- усвоили алгоритмы первичной обработки статистических данных;
- выработали навыки по вычислению точечных и интервальных оценок параметров генеральной совокупности;
- усвоили основные методы исследования параметров генеральной совокупности.

3.12 Практическое занятие 21 (ПЗ-21)

Тема: Оценки статистических параметров распределения

3.12.1 Задание для работы:

1. Статистические гипотезы и их виды. Критерии согласия.

.

3.12.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Статистические гипотезы и их виды. Критерии согласия.

Пример. Для подготовки к зачету преподаватель сформулировал 100 вопросов (генеральная совокупность) и считает, что студенту можно поставить «зачтено», если тот знает 60 % вопросов (критерий). Преподаватель задает студенту 5 вопросов (выборка из генеральной совокупности) и ставит «зачтено», если правильных ответов не меньше трех. Гипотеза H_0: «студент курс усвоил», а множество $\{3, 4, 5\}$ — область принятия этой гипотезы. Критической областью является множество $\{0, 1, 2\}$ — правильных ответов меньше трех, в этом случае основная гипотеза отвергается в пользу альтернативной H_1 «студент курс не усвоил, знает меньше 60 % вопросов».

Студент А выучил 70 вопросов из 100, но ответил правильно только на два из пяти, предложенных преподавателем, — зачет не сдан. В этом случае преподаватель совершает ошибку первого рода.

Студент Б выучил 50 вопросов из 100, но ему повезло, и он ответил правильно на 3 вопроса — зачет сдан, но совершена ошибка второго рода.

Преподаватель может уменьшить вероятность этих ошибок, увеличив количество задаваемых на зачете вопросов.

Алгоритм проверки статистических гипотез сводится к следующему:

1) сформулировать основную H_0 и альтернативную H_1 гипотезы;

2) выбрать уровень значимости α;

3) в соответствии с видом гипотезы H_0 выбрать статистический критерий для ее проверки, т. е. случайную величину K, распределение которой известно;

4) по таблицам распределения случайной величины K найти границу критической области $K_{кр}$ (вид критической области определить по виду альтернативной гипотезы H_1);

5) по выборочным данным вычислить наблюдаемое значение критерия $K_{набл}$;

6) принять статистическое решение: если $K_{набл}$ попадает в критическую область — отклонить гипотезу H_0 в пользу альтернативной H_1; если $K_{набл}$ попадает в область допустимых значений, то нет оснований отклонять основную гипотезу.

3.12.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия теории проверки статистических гипотез;

3.13 Практическое занятие 22-23 (ПЗ-22-23)

Тема: Статистические критерии, их виды

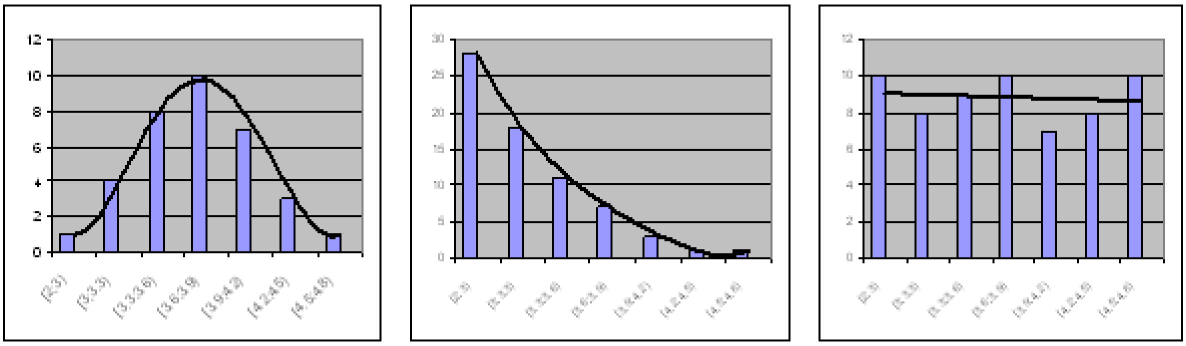
3.13.1 Задание для работы:

1. Критерии согласия. Критерии однородности.
2. Оценка параметров неизвестного распределения. Выравнивание рядов.

3.13.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Критерии согласия. Критерии однородности.

Одной из важных задач математической статистики является установление теоретического закона распределения случайной величины, характеризующей изучаемый признак по эмпирическому распределению, представляющему вариационный ряд. Предположение о виде закона распределения можно сделать по гистограмме или полигону (Рис. 1)



A) B) C)

Рис.1. Возможные виды гистограмм:
а) нормального, б) показательного, в) равномерного распределений

Например, по гистограмме (рис. 1, а)) можно сделать предположение о том, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Для проверки гипотез о виде распределения служат специальные критерии — *Критерии согласия*. Они отвечают на вопрос: согласуются ли результаты экспериментов с предположением о том, что генеральная совокупность имеет заданное распределение.

Проверим это предположение с помощью ***Критерия согласия Пирсона***. В этом критерии мерой расхождения между гипотетическим (предполагаемым) и эмпирическим распределением служит статистика

$$K=\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_j-np_j)^2}{np_j}.$$

Где N — объем выборки; K — количество интервалов (групп наблюдений); n_j — количество наблюдений, попавших в J-й интервал; p_j — вероятность попадания в J-й интервал случайной величины, распределенной по гипотетическому закону.

Если предположение о виде закона распределения справедливо, то статистика Пирсона распределена по закону «хи-квадрат» с числом степеней свободы $k-r-1$ (R — число параметров распределения, оцениваемых по выборке): $K \sim \chi^2_{(k-r-1)}$.

Оцениваются неизвестные параметры с использованием теории точечных оценок, некоторые оценки приведены в табл. 1.

Таблица 1. Оцениваемые параметры и их точечные оценки

Вид распределения	Оцениваемые параметры	Точечные оценки параметров
$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$	$\lambda>0$	$\overline{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{x}_в}$
$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<\alpha\\ 1/(\beta-\alpha), & x\in[\alpha,\beta]\\ 0, & x>\beta\end{cases}$	$\alpha,\ \beta$	$\alpha=\overline{x}_в-\sqrt{3}\cdot\sqrt{D_в}$ $\beta=\overline{x}_в+\sqrt{3}\cdot\sqrt{D_в}$
$f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$m,\ \sigma^2$	$m=\overline{x}_в,\quad \sigma^2=\sqrt{D_в}$

Здесь $\overline{x}_в=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot n_i}{n}$, $D_в=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}_в\right)^2\cdot n_i}{n}$

Количество интервалов K рекомендуется рассчитывать по формуле Стерджеса [redacted] где N — объем выборки. Длину I-го интервала принимают равной $h=\dfrac{x_{(n)}-x_{(1)}}{k}$, где $x_{(n)}$—наибольшее, а $x_{(1)}$ — наименьшее значение в вариационном ряду.

Пример 1. Для среднего балла среди 30-ти групп (с точностью до сотых долей балла) получили выборку x_i:

3.7, 3.85, 3.7, 3.78, 3.6, 4.45, 4.2, 3.87, 3.33, 3.76, 3.75, 4.03, 3.8, 4.75, 3.25, 4.1, 3.55, 3.35, 3.38, 3.05, 3.56, 4.05, 3.24, 4.08, 3.58, 3.98, 3.4, 3.8, 3.06, 4.38. Проверить гипотезу о нормальном распределении среднего балла на уровне значимости $\alpha=0.025$.

Решение. Сгруппируем эту выборку. Наименьший средний балл равен 3.05, наибольший — 4.75. Интервал [3; 4.8] разобьем на 6 частей длиной $h=0.3$, применяя формулу

Стерджеса ($k = 5.875 \approx 6$). Подсчитаем частоту n_i (относительную частоту $\frac{n_i}{n}$) для каждого интервала и получим сгруппированный статистический ряд (табл. 2).

Таблица 2. Статистический ряд

Интервалы	[3;3.3)	[3.3;3.6)	[3.6;3.9)	[3.9;4.2)	[4.2;4.5)	[4.5;4.8)
Частоты n_i	4	7	10	5	3	1
Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$	0.133	0.233	0.3	0.167	0.1	0.033

Сформулируем основную и альтернативную гипотезы.

$H_0: X \sim N(\overline{a}, \overline{\sigma})$ — случайная величина *X* (средний балл) подчиняется нормальному закону с параметрами $\overline{a}, \overline{\sigma}$. Так как истинных значений параметров a, σ мы не знаем, возьмем их оценки, рассчитанные по выборке: $\overline{a} = 3.746, \ \overline{\sigma} = 0.399.$

$H_1:$ случайная величина *X* не подчиняется нормальному закону с данными параметрами.

Рассчитаем наблюдаемое значение $K_{набл}$ статистики Пирсона. Эмпирические частоты n_j уже известны (табл. 2), а для вычисления вероятностей p_j (в предположении, что гипотеза H_0 справедлива) применим уже известную формулу (свойство **В**):

И таблицу функции Лапласа. Полученные результаты сведем в таблицу (табл. 3). Наблюдаемое значение статистики Пирсона равно $K_{набл} = 0.978.$

Определим границу критической области. Так как статистика Пирсона измеряет разницу между эмпирическим и теоретическим распределениями, то чем больше ее наблюдаемое значение $K_{набл}$, тем сильнее довод против основной гипотезы. Поэтому критическая область для этой статистики всегда правосторонняя: $[K_{кр}; \ +\infty).$ Её границу $K_{кр} = \chi^2_{(k-r-1;\, \alpha)}$ находим по таблицам распределения «хи-квадрат» и заданным значениям $\alpha = 0.025, \ k = 6$ (число интервалов), $r = 2$ (параметры a и σ оценены по выборке): $K_{кр} = \chi^2(6-2-1;\ 0.025) = \chi^2(3;\ 0.025) = 9.4.$

Наблюдаемое значение статистики Пирсона не попадает в критическую область: $K_{набл} < K_{кр}$, поэтому н*ет оснований отвергать основную гипотезу*.

Вывод: на уровне значимости 0.025 справедливо предположение о том, что средний балл имеет нормальное распределение

Таблица 3. Сравнение наблюдаемых и ожидаемых частот

№ п/п	Интервалы группировки $[a_j; a_{j+1})$	Наблюдаемая частота n_j	Вероятность p_j попадания в *J*-й интервал	Ожидаемая частота $n \cdot p_j$	Слагаемые статистики Пирсона $\frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$

1.	[3; 3.3)	4	0.101	3.032	0.309
2.	[3.3; 3.6)	7	0.225	6.761	0.008
3.	[3.6; 3.9)	10	0.295	8.79	0.166
4.	[3.9; 4.2)	5	0.222	6.665	0.416
5.	[4.2; 4.5)	3	0.098	2.946	0.001
6.	[4.5; 4.8)	1	0.025	0.758	0.077
$\sum$	—	30	0.965	28.95	$K_{набл} = 0.978.$

Пример 2. Проверить с помощью критерия χ2 при уровне значимости 0,05 гипотезу о том, что выборка объема $n = 50$, представленная интервальным вариационным рядом в таблице 4, извлечена из нормальной генеральной совокупности.

Таблица 4

Номер интервала I	Границы интервала	Частота m_i
1	0 – 2	5
2	2 – 4	11
3	4 –6	17
4	6 – 8	10
5	8 – 10	7

Решение.

1. Сформулируем нулевую и альтернативную гипотезы: H_0 – эмпирическое распределение соответствует нормальному; H_1 - эмпирическое распределение не соответствует нормальному.

Для проверки нулевой гипотезы необходимо рассчитать наблюдаемое значение критерия χ2набл по формуле и сравнить его с критическим значением χ2кр.

2. Определим параметры предполагаемого (теоретического) нормального закона распределения.

Найдем середины интервалов $\overline{x_i} = \dfrac{z_{i-1} + z_i}{2}$ и относительные частоты $p_i{}^* = \dfrac{m_i}{n}$.

Получим следующие значения:

$\overline{x_i}$	1	3	5	6	7
p_i^*	$\frac{5}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{7}{50}$

Найдем оценку математического ожидания:

$$m^* = \left(1 \cdot \frac{5}{50} + 3 \cdot \frac{11}{50} + 5 \cdot \frac{17}{50} + 7 \cdot \frac{10}{50} + 9 \cdot \frac{7}{50}\right) =$$

$$= \frac{1}{50}(5 + 33 + 85 + 70 + 63) = \frac{256}{50} = 5{,}12.$$

Вычислим оценки дисперсии и стандартного отклонения по формулам:

$$s^2 = \left((1 - 5{,}12)^2 \cdot 5 + (3 - 5{,}12)^2 \cdot 11 + (5 - 5{,}12)^2 \cdot 17 + \right.$$

$$\left. + (7 - 5{,}12)^2 \cdot 10 + (9 - 5{,}12)^2 \cdot 7\right) \cdot \frac{1}{49} = \frac{1}{49} \cdot 275{,}27 = 5{,}62;$$

$$s = \sqrt{5{,}62} = 2{,}37.$$

3. Выполним расчет теоретических частот m_i^T .

$$p_1 = \Phi\left(\frac{2-5{,}12}{2{,}37}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(-1{,}3) - 0 = 1 - \Phi(1{,}3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

и $m_1^T = 50 \cdot 0{,}1 = 5$;

Для интервала $(2,4)$ находим

$$p_2 = \Phi\left(\frac{4-5{,}12}{2{,}37}\right) - \Phi\left(\frac{2-5{,}12}{2{,}37}\right) = \Phi(-0{,}5) - \Phi(-1{,}3) = 0{,}90 - 0{,}69 = 0{,}21$$

и $m_2^T = 50 \cdot 0{,}21 = 10{,}5$;

Для интервала (4,6) соответственно:

$$p_3 = \Phi\left(\frac{6-5{,}12}{2{,}37}\right) - \Phi\left(\frac{4-5{,}12}{2{,}37}\right) = \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}5) = 0{,}66 - 0{,}31 = 0{,}35;$$

$m_3^T = 50 \cdot 0{,}35 = 17{,}5$;

Для интервала (6,8):

$$p_4 = \Phi\left(\frac{8-5{,}12}{2{,}37}\right) - \Phi\left(\frac{6-5{,}12}{2{,}37}\right) = \Phi(1{,}2) - \Phi(0{,}4) = 0{,}88 - 0{,}66 = 0{,}22$$

И $m_4^T = 50 \cdot 0{,}22 = 11$;

Для интервала $(8,\infty)$ вычислим

$$p_5 = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{8-5{,}12}{2{,}37}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(1{,}2) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12;$$

$m_5^T = 50 \cdot 0{,}12 = 6$.

4. По формуле (4.8) найдем значение $\chi^2_{набл}$:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(m_i - m_i^T)^2}{m_i^T} = \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(11-10{,}5)^2}{10{,}5} +$$

$$+ \frac{(17-17{,}5)^2}{17{,}5} + \frac{(10-11)^2}{11} + \frac{(7-6)^2}{6} = 0{,}29.$$

5. По таблице квантилей распределения χ2 с числом степеней свободы $r = k - 3 = 5 - 3 = 2$ находим, что χ2кр = 6,0 для $\alpha = 0{,}05$.

Поскольку $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ ($0{,}29 < 6{,}0$), то можно считать, что гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности не противоречит опытным данным.

Пример 3: Используя критерий Пирсона, при уровне значимости a = 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема n = 200.

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Решение.

1. Вычислим $\overline{x}_B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = 12{,}63$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_B = \sqrt{\overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2} = 4{,}695$.

2. Вычислим теоретические частоты учитывая, что n = 200, h = 2, σ_B = 4,695, по формуле

$$n_i = \frac{200 \cdot 2}{4{,}695} \cdot \varphi\left(\frac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}\right) = 85{,}2 \cdot \varphi\left(\frac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}\right).$$

Составим расчетную таблицу

i	x_i	$u_i = \frac{\left(x_i - \overline{x}_B\right)}{\sigma_B}$	$\varphi(u_i)$	$n_i = \frac{n \cdot h}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i)$
1	5	-1,62	0,1074	9,1
2	7	-1,20	0,1942	16,5
3	9	-0,77	0,2966	25,3
4	11	-0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Сравним эмпирические и теоретические частоты. Составим расчетную таблицу, из которой найдем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \sum\limits_{i=1}^{s} \frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}}$:

i	n_i	n_i	$\left\|n_i - n_i^{'}\right\|$	$\left(n_i - n_i^{'}\right)^2$	$\frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i^{'}}$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	2,0	4,0	0,1
5	26	33,9	7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,0	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,0	5,1
Сумма	200				$\chi^2_{набл}$ =22,2

По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 6), по уровню значимости a = 0,05 и числу степеней свободы k = s – 3 = 9 – 3 = 6 находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}$ (0,05; 6) = 12,6.

Так как $\chi^2_{набл}$ =22,2 > $\chi^2_{кр}$ = 12,6, гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Пример 4: Представлены статистические данные.
Результаты измерений диаметров n = 200 валков после шлифовки обобщены в табл. (мм):
Таблица Частотный вариационный ряд диаметров валков

i	1	2	3	4	5	6	7	8
xi, мм	6,68	6,69	6,7	6,71	6,72	6,73	6,74	6,75
ni	2	3	12	6	11	14	30	25

i	9	10	11	12	13	14	15	16
xi, мм	6,76	6,77	6,78	6,79	6,8	6,81	6,82	6,83
ni	27	31	14	8	5	6	5	1

Требуется:
1) составить дискретный вариационный ряд, при необходимости упорядочив его;
2) определить основные числовые характеристики ряда;
3) дать графическое представление ряда в виде полигона (гистограммы) распределения;
4) построить теоретическую кривую нормального распределения и проверить соответствие эмпирического и теоретического распределений по критерию Пирсона. При проверке статистической гипотезы о виде распределения принять уровень значимости a = 0,05

Решение: Основные числовые характеристики данного вариационного ряда найдем по определению. Средний диаметр валков равен (мм):

$x_{ср} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{16} n_i \cdot x_k$ = 6,753; исправленная дисперсия (мм2): D = $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{16} n_i \cdot (x_k - x_{ср})^2$ = 0,0009166;

исправленное среднее квадратическое (стандартное) отклонение (мм):s = $\sqrt{D}$ = 0,03028.

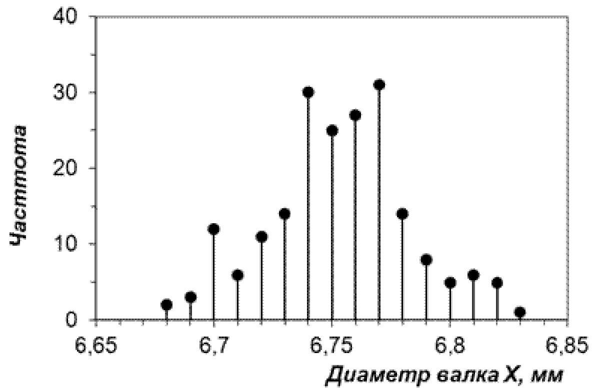


Рис. Частотное распределение диаметров валков

Исходное («сырое») частотное распределение вариационного ряда, т.е. соответствие ni(xi), отличается довольное большим разбросом значений ni относительно некоторой гипотетической «усредняющей» кривой (рис.). В этом случае предпочтительно построить и анализировать интервальный вариационный ряд, объединяя частоты для диаметров, попадающих в соответствующие интервалы.

Число интервальных групп K определим по формуле Стерджесса:
K = 1 + log2n = 1 + 3,322lgn, где n = 200 – объем выборки. В нашем случае
K = 1 + 3,322×lg200 = 1 + 3,322×2,301 = 8,644 » 8.
Ширина интервала равна (6,83 – 6,68)/8 = 0,01875 » 0,02 мм.
Интервальный вариационный ряд представлен в табл.

Таблица Частотный интервальный вариационный ряд диаметров валков.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
xk, мм	6,68 – 6,70	6,70 – 6,72	6,72 – 6,74	6,74 – 6,76	6,76 – 6,78	6,78 – 6,80	6,80 – 6,82	6,82 – 6,84
nk	5	18	25	55	58	22	11	6

Интервальный ряд может быть наглядно представлен в виде гистограммы частотного распределения.

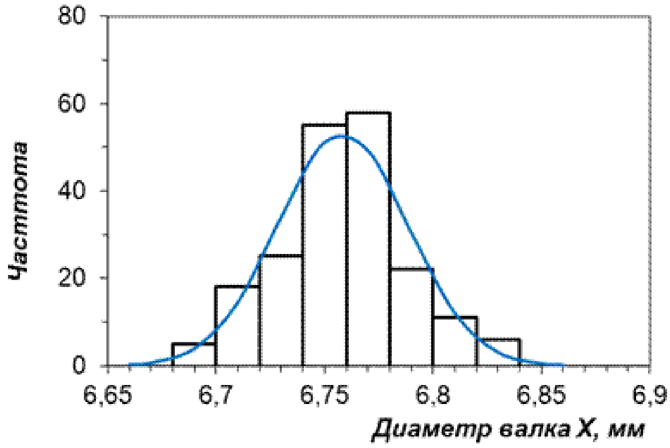


Рис. Частотное распределение диаметров валков. Сплошная линия – сглаживающая нормальная кривая.

Вид гистограммы позволяет сделать предположение о том, что распределение диаметров валков подчиняется нормальному закону, согласно которому теоретические частоты могут быть найдены как
nk, теор = n×N(a; s; x_k)×D_{xk}, где, в свою очередь, сглаживающая гауссова кривая нормального распределения определяется выражением: N(a; s; xk) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_k-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$.
В этих выражениях xk – центры интервалов в частотном интервальном вариационном ряде.

Например, x1 = (6,68 + 6,70)/2 = 6,69. В качестве оценок центра a и параметра s гауссовой кривой можно принять: a = $x_{ср}$.
Из рис. видно, что гауссова кривая нормального распределения в целом соответствует эмпирическому интервальному распределению. Однако следует удостовериться в статистической значимости этого соответствия. Используем для проверки соответствия эмпирического распределения эмпирическому критерий согласия Пирсона. Для этого следует вычислить эмпирическое значение критерия как сумму $\chi^2 = \sum_{k=1}^{8}\frac{(n_k - n_{k,теор})^2}{n_{k,теор}}$,
где n_k и n_k,теор – эмпирические и теоретические (нормальные) частоты, соответственно.

Результаты расчетов удобно представить в табличном виде:

Таблица Вычисления критерия Пирсона

$[x_k, x_{k+1})$, мм	x_k, мм	n_k	n_k,теор	$\frac{(n_k - n_{k,теор})^2}{n_{k,теор}}$
6,68 – 6,70	6,69	5	4,00	0,25
6,70 – 6,72	6,71	18	14,57	0,81
6,72 – 6,74	6,73	25	34,09	2,42
6,74 – 6,76	6,75	55	51,15	0,29
6,76 – 6,78	6,77	58	49,26	1,55
6,78 – 6,80	6,79	22	30,44	2,34
6,80 – 6,82	6,81	11	12,07	0,09
6,82 – 6,84	6,83	6	3,07	2,80
			с2эмп	10,55

Критическое значение критерия найдем по таблице Пирсона [2, 3] для уровня значимости a = 0,05 и числа степеней свободы d.f. = K – 1 – r, где K = 8 – число интервалов интервального вариационного ряда; r = 2 – число параметров теоретического распределения, оцененных на основании данных выборки (в данном случае, – параметры a и s). Таким образом, d.f. = 5. Критическое значение критерия Пирсона есть χ^2 крит(a; d.f.) = 11,1. Так как с2эмп < с2крит, заключаем, что согласие между эмпирическим и теоретическим нормальным распределением является статистическим значимым. Иными словами, теоретическое нормальное распределение удовлетворительно описывает эмпирические данные.

Пример5: Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки взято 130 из 2000 упаковок, содержащихся в партии, и получены следующие данные об их весе:

Вес упаковки (гр.)	Менее 975	975-1000	1000-1025	1025-1050	Более 1050	Всего
Число упаковок	6	38	44	34	8	130

Требуется используя критерий $\chi^2 -$ Пирсона при уровне значимости a=0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – вес упаковок – распределена по нормальному закону. Построить на одном графике гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

Решение

$\bar{x} =$ 1012,5 s^2 = 615,3846

Примечание:

В принципе в качестве дисперсии нормального закона распределения следует взять исправленную выборочную дисперсию. Но т.к. количество наблюдений – 130 достаточно велико, то подойдет и «обычная» s^2.

Таким образом, теоретическое нормальное распределение имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

подставляем a = 1012,5 σ^2 = 615,3846 $\sigma =$ 24,8069

$$f(x) = 0{,}0160819 \cdot e^{-0{,}000812(x-1012{,}5)^2}$$

Для расчета вероятностей p_i попадания случайной величины в интервал $[x_i ; x_{i+1}]$ используем функцию Лапласа:

$$p_i(x_i \le X \le x_{i+1}) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_{i+1}-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_i-a}{\sigma}\right)\right]$$

$$p_i(x_i \le X \le x_{i+1}) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_{i+1}-1012{,}5}{24{,}8069}\right)-\Phi\left(\frac{x_i-1012{,}5}{24{,}8069}\right)\right]$$

в нашем случае получаем:

$$p_i(950 \le X \le 975) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(-1{,}51)-\Phi(-2{,}52)\right] = \frac{1}{2}\left[0{,}9883-0{,}869\right] = 0{,}0597$$

$$p_i(975 \le X \le 1000) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(-0{,}5)-\Phi(-1{,}51)\right] = \frac{1}{2}\left[0{,}869-0{,}3829\right] = 0{,}2431$$

$$p_i(1000 \le X \le 1025) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}5)-\Phi(-0{,}5)\right] = \frac{1}{2}\left[0{,}3829+0{,}3829\right] = 0{,}3829$$

$$p_i(1025 \le X \le 1050) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(1{,}51)-\Phi(0{,}5)\right] = \frac{1}{2}\left[0{,}869-0{,}3829\right] = 0{,}2431$$

$$p_i(1050 \le X \le 1075) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(2{,}52)-\Phi(1{,}51)\right] = \frac{1}{2}\left[0{,}9883-0{,}869\right] = 0{,}0597$$

Примечание: Такие симметричные вероятности получились из-за того, что по нашим начальным условиям выборочная средняя попала точно в середину среднего интервала выборки.
Составим таблицу:

i	Интервал [xi ; xi+1]	Эмпирические частоты ni	Вероятности pi	Теоретические частоты npi	(ni-npi)2	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	Менее 975	6	0,0597	7,761	3,101	0,3996
2	975-1000	38	0,2431	31,603	40,922	1,2949
3	1000-1025	44	0,3829	49,777	33,374	0,6705
4	1025-1050	34	0,2431	31,603	5,746	0,1818
5	Более 1050	8	0,0597	7,761	0,057	0,0073
$\sum$		130	0,9885	128,5		$\chi^2 = 2{,}55$

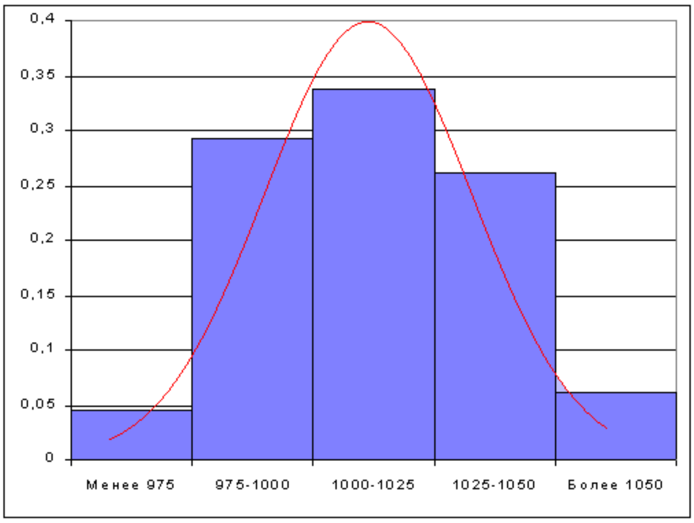
Итого, значение статистики $\chi^2 = 2{,}55$.
Определим количество степеней свободы по формуле: $k = m - r - 1$.
m – число интервалов (m = 5), r– число параметров закона распределения (в нормальном распределении r = 2) Т.е. k = 2.

Соответствующее критическое значение статистики

$\chi^2_{0,05;2} = 5{,}99$

Поскольку $\chi^2_{0,05;2} > \chi^2$, гипотеза о нормальном распределении с параметрами N(1012,5; 615,3846) согласуется с опытными данными.

Ниже показана гистограмма эмпирического распределения и соответствующая нормальная кривая.



2. Оценка параметров неизвестного распределения. Выравнивание рядов.

Пример. С целью исследования закона распределения ошибки измерения дальности с помощью радиодальномера произведено 400 измерений дальности. Результаты опытов представлены в виде статистического ряда:

I_i (м)	20; 30	30; 40	40; 50	50; 60	60; 70	70;80	80; 90	90; 100
m_i	21	72	66	38	51	56	64	32
p_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

Выровнять статистический ряд с помощью закона равномерной плотности.

Решение. Закон равномерной плотности выражается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{при } x < \alpha \text{ или } x > \beta \end{cases}$$

и зависит от двух параметров α и β. Эти параметры следует выбрать так, чтобы сохранить первые два момента статистического распределения – математическое ожидание m_x^* и дисперсию D_x^*. Имеем выражения математического ожидания и дисперсии для закона равномерной плотности:

$$m_x = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$D_x = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

Для того, чтобы упростить вычисления, связанные с определением статистических моментов, перенесем начало отсчета в точку $x_0 = 60$ и примем за представителя его разряда его середину. Ряд распределения имеет вид:

$\tilde{x}_i'$	−35	−25	−15	−5	5	15	25	35

p_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

где $\tilde{x}_i'$ - среднее для разряда значение ошибки радиодальномера X' при новом начале отсчета.

Приближенное значение статистического среднего ошибки X' равно:

$$m_{x'}^* = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i' p_i^* = 0,26$$

Второй статистический момент величины X' равен: $\alpha_2^* = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i'\right)^2 p_i^* = 447,8$,

откуда статистическая дисперсия:

$$D_{x'}^* = \alpha_2^* - \left(m_{x'}^*\right)^2 = 447,7.$$

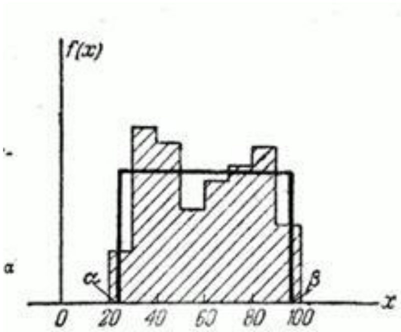


Рис. 1

Переходя к прежнему началу отсчета, получим новое статистическое среднее:

$m_x^* = m_{x'}^* + 60 = 60,26$ в ту же статистическую дисперсию:

$$D_x^* = D_{x'}^* = 447,7.$$

Параметры закона равномерной плотности определяются уравнениями:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 60,26; \quad \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} = 447,7.$$

Решая эти уравнения относительно α и β, имеем: $\alpha \approx 23,6; \quad \beta \approx 96,9$,

откуда

$$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{73,3} \approx 0,0136.$$

На рис. 1. показаны гистограмма и выравнивающий ее закон равномерной плотности $f(x)$.

3.13.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- усвоили алгоритмы применения статистических критериев;
- выработали навыки по применению критерия Пирсона;
- усвоили основные методы и алгоритмы выравнивания статистических рядов.

3.14 Практическое занятие 24 (ПЗ-24)

Тема: Выравнивание рядов.

3.14.1 Задание для работы:

1. Виды зависимостей между величинами.

3.14.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Виды зависимостей между величинами.

Сущность корреляционно-регрессионного анализа и его задачи. Экономические явления, будучи весьма разнообразными, характеризуются множеством признаков, отражающих определенные свойства этих процессов и явлений и подверженных взаимообусловленным изменениям. В одних случаях зависимость между признаками оказывается очень тесной (например, часовая выработка работника и его заработная плата), а в других случаях такая связь не выражена вовсе или крайне слаба (например, пол студентов и их успеваемость). Чем теснее связь между этими признаками, тем точнее принимаемые решения.

Различают два типа зависимостей между явлениями и их признаками:

• ***функциональная (детерминированная, причинная) зависимость***. Задается в виде формулы, которая каждому значению одной переменной ставит в соответствие строго определенное значение другой переменной (воздействием случайных факторов при этом пренебрегают). Иными словами, ***функциональная зависимость***– это связь, при которой каждому значению независимой переменной x соответствует точно определенное значение зависимой переменной y. В экономике функциональные связи между переменными являются исключениями из общего правила;

• ***статистическая (стохастическая, недетерминированная) зависимость***– это связь переменных, на которую накладывается воздействие случайных факторов, т.е. это связь, при которой каждому значению независимой переменной x соответствует множество значений зависимой переменной y, причем заранее неизвестно, какое именно значение примет y.

Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость.

Корреляционная зависимость– это связь, при которой каждому значению независимой переменной x соответствует определенное математическое ожидание (среднее значение) зависимой переменной y.

Корреляционная зависимость является «неполной» зависимостью, которая проявляется не в каждом отдельном случае, а только в средних величинах при достаточно большом числе случаев. Например, известно, что повышение квалификации работника ведет к росту производительности труда. Это утверждение часто подтверждается на практике, но не означает, что у двух и более работников одного разряда / уровня, занятых аналогичным процессом, будет одинаковая производительность труда.

Корреляционная зависимость исследуется с помощью методы корреляционного и регрессионного анализа.

Корреляционно-регрессионный анализ позволяет установить тесноту, направление связи и форму этой связи между переменными, т.е. ее аналитическое выражение.

Основная задача корреляционного анализа состоит в количественном определении тесноты связи между двумя признаками при парной связи и между результативными и несколькими факторными признаками при многофакторной связи и статистической оценке надежности установленной связи.

3.15 Практическое занятие 25 (ПЗ-25)

Тема: Стохастическая зависимость межу величинами.

3.15.1 Задание для работы:

1. Функция регрессии. Корреляционное отношение. Коэффициент детерминации. Значимость выборочных коэффициентов.

3.15.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Функция регрессии. Корреляционное отношение. Коэффициент детерминации. Значимость выборочных коэффициентов.

Данные наблюдений над двумерной случайной величиной (X, Y) представлены в корреляционной таблице. Найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}).$$

y \ x	5	6	7	8	9	10	ny
2	-	-	-	-	6	4	10
4	-	-	-	6	6	8	20
6	-	3	4	14	3	-	24
8	2	5	18	2	-	-	27
10	-	7	10	2	-	-	19
nx	2	15	32	24	15	12	100

Решение:

Предварительно вычислим суммы

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 15 + 7 \cdot 32 + 8 \cdot 24 + 9 \cdot 15 + 10 \cdot 12 = 771.$$

$$\sum_{i=1}^{100} y_i = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 24 + 8 \cdot 27 + 10 \cdot 19 = 650.$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 15 + 7^2 \cdot 32 + 8^2 \cdot 24 + 9^2 \cdot 15 + 10^2 \cdot 12 = 6109.$$

$$\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 2^2 \cdot 10 + 4^2 \cdot 20 + 6^2 \cdot 24 + 8^2 \cdot 27 + 10^2 \cdot 19 = 4852.$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 2 \cdot (9 \cdot 6 + 10 \cdot 4) + 4 \cdot (8 \cdot 6 + 9 \cdot 6 + 10 \cdot 8) + 6 \cdot (6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 14 + 9 \cdot 3) +$$

$$+ 8 \cdot (5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 18 + 8 \cdot 2) + 10 \cdot (6 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 2) = 4762.$$

Средние арифметические значения

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{771}{100} = 7{,}71.\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i = \frac{650}{100} = 6{,}5.$$

Дисперсии и средние квадратические отклонения

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{100}\cdot 6109 - 7{,}71^2 = 1{,}6459.$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum y_i^2 - (\bar{y})^2 = \frac{1}{100}\cdot 4852 - 6{,}5^2 = 6{,}27.$$

$$\sigma_x = \sqrt{1{,}6459} = 1{,}28.\ \sigma_y = \sqrt{6{,}27} = 2{,}5.$$

Найдем корреляционный момент

$$C_{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\cdot\bar{y} = \frac{1}{100}\cdot 4762 - 7{,}71\cdot 6{,}5 = -2{,}5.$$

Находим коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-2{,}5}{1{,}28\cdot 2{,}5} = -0{,}78$$

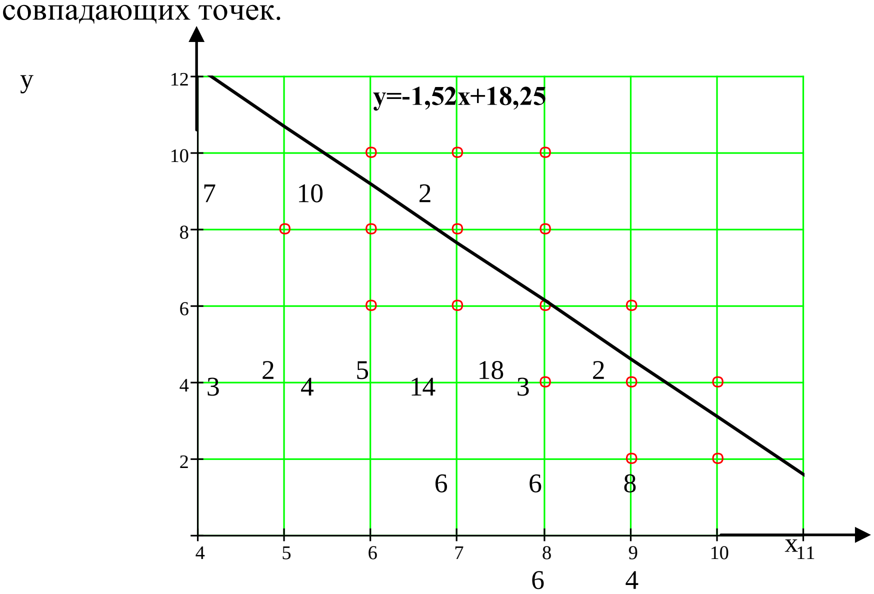
Находим уравнение линии эмпирической регрессии

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}).\ \text{Или}$$

$$\bar{y}_x - 6{,}5 = -0{,}78\frac{2{,}5}{1{,}28}(x - 7{,}71).\ \text{Окончательно}$$

$$\bar{y}_x = -1{,}52x + 18{,}25.$$

В системе координат x и y, используя корреляционную таблицу, соответствующими точками изображаем корреляционное поле и наносим прямую выборочной регрессии согласно полученного уравнения. На корреляционном поле цифрами показано количество совпадающих точек.



Коэффициент детерминации характеризует долю вариации (дисперсии) результативного признака *y*, объясняемую регрессией, в общей вариации (дисперсии) *y*.

Коэффициент детерминации рассчитывается для оценки качества подбора уравнения регрессии. Для приемлемых моделей предполагается, что коэффициент детерминации должен быть хотя бы не меньше 50%. Модели с коэффициентом детерминации выше 80% можно признать достаточно хорошими. Значение коэффициента детерминации $R^2 = 1$ означает функциональную зависимость между переменными.

3.15.2 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия корреляционно-регрессионного анализа;
- усвоили формулы для вычисления коэффициента корреляции, корреляционного отношения, коэффициента детерминации;
- выработали навыки по интерпретации полученных результатов.

3.16 Практическое занятие 26 (ПЗ-26)

Тема: Показатели стохастической зависимости.

3.16.1 Задание для работы:

1. Линейная парная регрессия.

3.16.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Линейная парная регрессия.

Парная линейная регрессия $\tilde{y}_x = a + bx$

Предварительные расчеты:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$; $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$; $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2$; $\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y_i^2$; $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i$;

$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$; $\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}$.

Построение таблицы вида

	x	y	xy	x^2	y^2
…………	……….	………	……..	………	………
Среднее значение					

Формулы для расчетов параметров:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad b = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}.$$

При компьютерном подборе использовать встроенную функцию Линейн

Оценка тесноты связи:

а) коэффициент корреляции $r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, или $r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$;

При компьютерном подборе использовать встроенную функцию Коррел

б) коэффициент эластичности $Э_{xy} = b\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$;

в) коэффициент детерминации r_{xy}^2.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом:

Предварительные расчеты с построением таблицы вида

	x	y	$\tilde{y}$	$y-\tilde{y}$	$(y-\tilde{y})^2$	$\left\|\frac{y-\tilde{y}}{y}\right\| \cdot 100\%$
…………	……….	………	……..	………	………	

а) F-критерий Фишера при числе степеней свободы $k_1 = 1$ и $k_2 = n-2$ и уровне значимости 0,05 смотреть в таблице. Расчетное значение критерия:

$$F = \frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}(n-2).$$

Если расчетное значение F- критерия больше табличного, нулевая гипотеза об отсутствии значимой связи признаков x и y отклоняется, и делается вывод о существенности этой связи.

б) Средняя ошибка аппроксимации

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \tilde{y}_i}{y_i}\right| \cdot 100\%.$$

Оценка значимости параметров регрессии:

а) Стандартная ошибка параметра a рассчитывается по формуле

$$m_a = S\frac{\sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x}, \text{ где } S^2 = D_{ост} = \frac{\sum(y-\tilde{y})^2}{n-2}.$$

б) Стандартная ошибка коэффициента регрессии b рассчитывается по формуле

$$m_b = \frac{S}{\sigma_x\sqrt{n}}.$$

в) Стандартная ошибка коэффициента корреляции r_{xy} рассчитывается по формуле

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}}.$$

t-критерий Стъюдента при числе степеней свободы $n-2$ и уровне значимости 0,05 смотреть в таблице.

Фактические значения t-статистики: $t_a = \frac{a}{m_a}$, $t_b = \frac{b}{m_b}$, $t_r = \frac{r}{m_r}$.

Если фактическое значение по абсолютной величине превышает табличное, гипотезу о несущественности параметра регрессии можно отклонить, параметр признается значимым.

Связь между F-критерием Фишераи t-критерием Стъюдента выражается равенством

$$t_b^2 = t_r^2 = F.$$

Расчет доверительных интервалов для параметров регрессии:

Доверительный интервал для параметра a определяется как $a \pm t_{табл} \cdot m_a$;

доверительный интервал для коэффициента регрессии определяется как $b \pm t_{табл} \cdot m_b$.

При компьютерном анализе использовать в ExcelСервис/Анализ данных/Регрессия.

Интервальный прогноз на основе линейного уравнения регрессии:

Пусть x_p – прогнозное значение факторного признака; $\tilde{y}_{x_p}$ – точечный прогноз результативного признака. Тогда

а) средняя ошибка прогноза $m_{\tilde{y}}$: $m_{\tilde{y}} = S \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{n\sigma_x^2}}$;

б) доверительный интервал прогноза $\tilde{y}_{x_p} - t_\alpha \cdot m_{\tilde{y}} \le \tilde{y}_p \le \tilde{y}_{x_p} + t_\alpha \cdot m_{\tilde{y}}$.

Задача:
Имеется связанная выборка из 26 пар значений (x_k,y_k):

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	25.20000	26.40000	26.00000	25.80000	24.90000	25.70000	25.70000	25.70000	26.10000	25.80000
y_k	30.80000	29.40000	30.20000	30.50000	31.40000	30.30000	30.40000	30.50000	29.90000	30.40000

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_k	25.90000	26.20000	25.60000	25.40000	26.60000	26.20000	26.00000	22.10000	25.90000	25.80000
y_k	30.30000	30.50000	30.60000	31.00000	29.60000	30.40000	30.70000	31.60000	30.50000	30.60000

k	21	22	23	24	25	26
x_k	25.90000	26.30000	26.10000	26.00000	26.40000	25.80000
y_k	30.70000	30.10000	30.60000	30.50000	30.70000	30.80000

Требуется вычислить/построить:

- коэффициент корреляции;
- проверить гипотезу зависимости случайных величин X и Y, при уровне значимости $\alpha = 0.05$;
- коэффициенты уравнения линейной регрессии;
- диаграмму рассеяния (корреляционное поле) и график линии регрессии;

Коэффициент корреляции — это показатель взаимного вероятностного влияния двух случайных величин. Коэффициент корреляции **R** может принимать значения от **-1** до **+1**. Если абсолютное значение находится ближе к **1**, то это свидетельство сильной связи между величинами, а если ближе к **0** — то, это говорит о слабой связи или ее отсутствии. Если абсолютное значение **R** равно единице, то можно говорить о функциональной связи между величинами, то есть одну величину можно выразить через другую посредством математической функции.

Вычислить коэффициент корреляции можно по следующим формулам:
cov(X,Y) - ковариация случайных величин X и Y

$$R_{x,y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (1),$$ где:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-M_x)^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-M_y)^2 \qquad (2),$$ - оценки дисперсий случайных величин X и Y соответственно.

$$M_x = \frac{1}{n}\sum^{n} x_k, \quad M_y = \frac{1}{n}\sum^{n} y_k \qquad (3),$$ - оценки математического ожидания случайных

$n \sum_{k=1}$ $n \sum_{k=1}$ величин X и Y соответственно.

или по формуле

$$R_{x,y} = \frac{M_{xy} - M_x M_y}{S_x S_y} \quad (4), \quad \text{где:}$$

$$M_x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad M_y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k, \quad M_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad (5)$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - M_x^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - M_y^2 \quad (6)$$

На практике, для вычисления коэффициента корреляции чаще используется формула (4) т.к. она требует меньше вычислений. Однако если предварительно была вычислена ковариация **cov(X,Y)**, то выгоднее использовать формулу (1), т.к. кроме собственно значения ковариации можно воспользоваться и результатами промежуточных вычислений.

1.1 Вычислим коэффициент корреляции по формуле (4), для этого вычислим значения x_k^2, y_k^2 и $x_k y_k$ и занесем их в таблицу 1.

Таблица 1

k	x_k	y_k	x_k^2	y_k^2	$x_k y_k$
1	2	3	4	5	6
1	25.2	30.8	635.04000	948.64000	**776.16000**
2	26.4	29.4	696.96000	864.36000	**776.16000**
3	26.0	30.2	676.00000	912.04000	**785.20000**
4	25.8	30.5	665.64000	930.25000	**786.90000**
5	24.9	31.4	620.01000	985.96000	**781.86000**
6	25.7	30.3	660.49000	918.09000	**778.71000**
7	25.7	30.4	660.49000	924.16000	**781.28000**
8	25.7	30.5	660.49000	930.25000	**783.85000**
9	26.1	29.9	681.21000	894.01000	**780.39000**
10	25.8	30.4	665.64000	924.16000	**784.32000**
11	25.9	30.3	670.81000	918.09000	**784.77000**
12	26.2	30.5	686.44000	930.25000	**799.10000**
13	25.6	30.6	655.36000	936.36000	**783.36000**
14	25.4	31	645.16000	961.00000	**787.40000**
15	26.6	29.6	707.56000	876.16000	**787.36000**
16	26.2	30.4	686.44000	924.16000	**796.48000**
17	26	30.7	676.00000	942.49000	**798.20000**
18	22.1	31.6	488.41000	998.56000	**698.36000**
19	25.9	30.5	670.81000	930.25000	**789.95000**
20	25.8	30.6	665.64000	936.36000	**789.48000**

21	25.9	30.7	670.81000	942.49000	**795.13000**
22	26.3	30.1	691.69000	906.01000	**791.63000**
23	26.1	30.6	681.21000	936.36000	**798.66000**
24	26	30.5	676.00000	930.25000	**793.00000**
25	26.4	30.7	696.96000	942.49000	**810.48000**
26	25.8	30.8	665.64000	948.64000	**794.64000**

1.2. Вычислим M_x по формуле (5).

1.2.1. Сложим последовательно все элементы x_k

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{26} =$ 25.20000 + 26.40000 + ... + 25.80000 = 669.500000

1.2.2. Разделим полученную сумму на число элементов

669.50000 / 26 = 25.75000

M_x = 25.750000

1.3. Аналогичным образом вычислим M_y.

1.3.1. Сложим последовательно все элементы y_k

$y_1 + y_2 + \ldots + y_{26} =$ 30.80000 + 29.40000 + ... + 30.80000 = 793.000000

1.3.2. Разделим полученную сумму на число элементов выборки

793.00000 / 26 = 30.50000

M_y = 30.500000

1.4. Аналогичным образом вычислим M_{xy}.

1.4.1. Сложим последовательно все элементы 6-го столбца таблицы 1

776.16000 + 776.16000 + ... + 794.64000 = 20412.830000

1.4.2. Разделим полученную сумму на число элементов

20412.83000 / 26 = 785.10885

M_{xy} = 785.108846

1.5. Вычислим значение S_x^2 по формуле (1.6.).

1.5.1. Сложим последовательно все элементы 4-го столбца таблицы 1

635.04000 + 696.96000 + ... + 665.64000 = 17256.910000

1.5.2. Разделим полученную сумму на число элементов

17256.91000 / 26 = 663.72731

1.5.3. Вычтем из последнего числа квадрат величины M_x получим значение для S_x^2

S_x^2 = 663.72731 - 25.75000^2 = 663.72731 - 663.06250 = **0.66481**

1.6. Вычислим значение S_y^2 по формуле (1.6.).

1.6.1. Сложим последовательно все элементы 5-го столбца таблицы 1

948.64000 + 864.36000 + ... + 948.64000 = 24191.840000

1.6.2. Разделим полученную сумму на число элементов

24191.84000 / 26 = 930.45538

1.6.3. Вычтем из последнего числа квадрат величины M_y получим значение для S_y^2

S_y^2 = 930.45538 - 30.50000^2 = 930.45538 - 930.25000 = **0.20538**

1.7. Вычислим произведение величин S_x^2 и S_y^2.

$S_x^2 S_y^2$ = 0.66481 • 0.20538 = 0.136541

1.8. Извлечем и последнего числа квадратный корень, получим значение $S_x S_y$. $S_x S_y$ = 0.36951

1.9. Вычислим значение коэффициента корреляции по формуле (1.4.). R = (785.10885 - 25.75000 • 30.50000) / 0.36951 = (785.10885 - 785.37500) / 0.36951 = -0.72028

ОТВЕТ: $R_{x,y}$ = -0.720279

2. Проверяем значимость коэффициента корреляции (проверяем гипотезу зависимости).

Поскольку оценка коэффициента корреляции вычислена на конечной выборке, и поэтому может отклоняться от своего генерального значения, необходимо проверить значимость коэффициента корреляции. Проверка производится с помощью t-критерия:

Случайная величина **t** следует t-распределению Стьюдента и по таблице t-распределения необходимо найти критическое значение критерия ($t_{кр.\alpha}$) при заданном уровне значимости α. Если вычисленное t по модулю окажется меньше чем $t_{кр.\alpha}$, то зависимости между случайными величинами X и Y нет. В противном случае, экспериментальные данные не противоречат гипотезе о зависимости случайных величин.

2.1. Вычислим значение t-критерия)

2.2. Определим по таблице t-распределения критическое значение параметра $t_{кр.\alpha}$ Искомое значение $t_{кр.\alpha}$ располагается на пересечении строки соответствующей числу степеней свободы и столбца соответствующего заданному уровню значимости α. В нашем случае число степеней свободы есть n - 2 = 26 - 2 = **24** и α = **0.05** , что соответствует критическому значению критерия $t_{кр.\alpha}$ = **2.064**

2.2. Сравним абсолютное значение t-критерия и $t_{кр.\alpha}$

Абсолютное значение t-критерия не меньше критического t = 5.08680, $t_{кр.\alpha}$ = 2.064, следовательно **экспериментальные данные, с вероятностью 0.95** (1 - α), **не противоречат гипотезе** о зависимости случайных величин X и Y.

3. Вычисляем коэффициенты уравнения линейной регрессии.

Уравнение линейной регрессии представляет собой уравнение прямой, аппроксимирующей (приблизительно описывающей) зависимость между случайными величинами X и Y. Если считать, что величина X свободная, а Y зависимая от X, то уравнение регрессии запишется следующим образом

$$Y = a + b \bullet X \qquad (1), \quad \text{где:}$$

$$b = R_{x,y}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = R_{x,y}\frac{S_y}{S_x} \qquad (2),$$

$$a = M_y - b \bullet M_x \qquad (3)$$

Рассчитанный по формуле (2) коэффициент **b** называют коэффициентом линейной регрессии. В некоторых источниках **a** называют постоянным коэффициентом регрессии и **b** соответственно переменным.

Погрешности предсказания Y по заданному значению X вычисляются по формулам :

$\sigma_{y/x} = \sigma_y\sqrt{1-R^2_{x,y}} = S_y\sqrt{1-R^2_{x,y}}$ (4) - абсолютная погрешность,

$\delta_{y/x} = \dfrac{\sigma_{y/x}}{M_y}100\%$ (5) - относительная погрешность

Величину $\sigma_{y/x}$ (формула 4) еще называют **остаточным средним квадратическим отклонением**, оно характеризует уход величины Y от линии регрессии, описываемой уравнением (1), при фиксированном (заданном) значении X.

3.1. Вычислим отношение $\dfrac{S_y^2}{S_x^2}$.

S_y^2 / S_x^2 = 0.20538 / 0.66481 = 0.30894

3.2. Вычислим отношение $\dfrac{S_y}{S_x}$.

Извлечем из последнего числа квадратный корень - получим:
S_y / S_x = 0.55582

3.3 Вычислим коэффициент b по формуле (2)

b = -0.72028 • 0.55582 = **-0.40035**

3.4 Вычислим коэффициент a по формуле (3)

a = 30.50000 - (-0.40035 • 25.75000) = **40.80894**

3.5 Оценим погрешности уравнения регрессии.

3.5.1 Извлечем из S_y^2 квадратный корень получим:

$S_y = \sqrt{0.20538} = 0.45319$;

3.5.2 Возведем в квадрат $R_{x,y}$ получим:

$R^2_{x,y} = -0.72028^2 = 0.51880$

3.5.3 Вычислим абсолютную погрешность (остаточное среднее квадратическое отклонение) по формуле (4)

$\sigma_{y/x} = 0.45319\sqrt{1 - 0.51880} = 0.31437$

3.5.4 Вычислим относительную погрешность по формуле (5)

$\delta_{y/x}$ = (0.31437 / 30.50000)100% = 1.03073%

ОТВЕТ: Уравнение линейной регрессии имеет вид: **Y = 40.80894 -0.40035 X** (6)

Погрешности уравнения: $\sigma_{y/x}$ = 0.31437 ; $\delta_{y/x}$ = 1.03073**%**

3.17 Практическое занятие 28 (ПЗ-28)

Тема: Показатели стохастической зависимости. Линейная парная регрессия

3.17.1 Задание для работы:

1. Коэффициент корреляции, его свойства, значимость.

3.17.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Коэффициент корреляции, его свойства, значимость

Выборочным коэффициентом корреляции принято называть отношение выборочного корреляционного момента к произведению выборочных средних квадратических отклонений этих величин:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_в})(y_i - \overline{y_в})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_в})}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y_в})}}$$

Коэффициент корреляции показывает тесноту и направление связи.

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1. значения коэффициента корреляции изменяются на множестве $r \in [-1;1]$;

2. чем больше абсолютное значение коэффициента корреляции, тем теснее связь между изученными признаками;

3. если коэффициент корреляции равен 0 (k=0), то между изученными признаками нет линейной корреляционной зависимости,

если |k|=1, то связь полная;

если 0,7<|k|<0,99, то связь сильная;

если 0,3<|k|<0,7, то связь средняя;

если |k|<0,3, то связь слабая.

В случае если r $\in$ [-1;0), то связь обратная;

если r $\in$ (0;1] – зависимость прямая.

Проверка гипотезы для коэффициента корреляции

Пусть *r* обозначает выборочный коэффициент корреляции, полученный по извлеченным из двумерного нормального распределения пар наблюдений $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Коэффициент корреляции ρ в популяции неизвестен, но может быть оценен по выборке с помощью выборочного коэффициента корреляции *r*:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} \qquad (1)$$

где оценки среднего равны:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Проверим значимость коэффициента корреляции.

Нулевая гипотеза состоит в том, что коэффициент корреляции равен нулю, альтернативная - не равен нулю:

$H_0:\ \rho = 0$

$H_1:\ \rho \neq 0$

Очевидно, достаточно большое по *абсолютной* величине значение величины *r* будет стремиться опровергнуть нулевую гипотезу.

Возникает вопрос.

Насколько большое должно быть абсолютное значение величины *r*?

Для того чтобы проверить гипотезу, мы должны знать распределение величины *r*.

Собственное распределение величины *r* довольно сложное, поэтому мы применим преобразование:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \sim t_{n-2} \qquad (2)$$

Итак, выборочное распределение этой статистики есть распределение Стьюдента с *n-2* степенями свободы.

При заданном уровне значимости (α) определяем критическое значение $t_{кр}$.

Принимаем решение об отклонении или не отклонении нулевой гипотезы:

$|t| > t_{кр}$ - отклоняем H_0

$|t| < t_{кр}$ - не отклоняем H_0

3.17.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные термины и формулы, необходимые для построения парной линейной регрессии;
- усвоили формулы для вычисления коэффициента корреляции, его интерпретацию;
- выработали навыки по проверки значимости выборочных коэффициентов.

3.18 Практическое занятие 29-30 (ПЗ-29-30)

Тема: Основные понятия теории марковских процессов. Простейший поток. Классификация марковских процессов

3.18.1 Задание для работы:

1. Основные понятия теории марковских процессов.
2. Поток СС, простейший поток, его свойства.
3. Классификация марковских процессов

3.18.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Основные понятия теории марковских процессов.

Функция X(t) называется случайной, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной. Случайная функция X(t), аргументом которой является время, называется случайным процессом.

Марковские процессы являются частным видом случайных процессов. Особое место марковских процессов обусловлено следующими обстоятельствами:

· эти процессы имеют развитый и проверенный математический аппарат, позволяющий решать многочисленные практические задачи;

· с помощью аппарата марковских процессов можно описать (точно или приближенно) поведение систем практически любой сложности.

Марковский процесс. Случайный процесс, протекающий в какой либо системе S, называется марковским (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t 0 вероятность любого состояния системы в будущем (при t>t 0) зависит только от ее состояния в настоящем (при t = t 0) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

2. Поток СС, простейший поток, его свойства.

Задача. Радиоустройство содержит 500 элементов. Вероятность отказа любого из них в течение срока службы равна 0,006. Найти вероятность того, что в течение срока службы устройства откажут ровно 2 элемента.

Решение: Число элементов велико (n=500), а вероятность отказа в течение срока службы мала (p=0,006), следовательно, искомую вероятность находим по формуле Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \text{где } \lambda = np$$

Найдем $\lambda = 500 \cdot 0{,}006 = 3$ $k = 2$ $P_{500}(2) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = 4{,}5 \cdot 0{,}4979 \approx 0{,}184$.

Задача. Среднее число заказов такси, поступающее на диспетчерский пункт за 1 минуту равно трем. Найти вероятность того, что за две минуты поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в)не менее четырех вызовов.

Решение: Из условия задачи известно число вызовов, поступающих за одну минуту, следовательно, задана интенсивность потока событий.

Для решения задачи воспользуемся формулой Пуассона для простейшего потока событий.

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!},$$ в нашем случае l =3, t=2.

а) Число вызовов, поступающих за две минуты k=4, тогда искомая вероятность равна:

$$P_2(4) = \frac{(3\cdot 2)^4 \cdot e^{-6}}{4!} = \frac{1296 \cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135$$

б) Событие «поступило менее четырех вызовов» будет суммой несовместных событий: «поступило три вызова», «поступило два вызова», «поступил один вызов» и «не поступило вызовов».

По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P_2(k<4) = P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) = \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} +$$

$$+ \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6 \cdot e^{-6}}{1!} + e^{-6} = e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) = 0{,}0025 \cdot 61 = 0{,}1525$$

в) События «поступило менее четырех вызовов» и «поступило не менее четырех вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за две минуты поступит не менее четырех вызовов равна: $P_2(k \geq 4) = 1 - P_2(k<4) = 1 - 0{,}1525 = 0{,}8475$

Основная задача теории простейшего потока состоит в определении закона распределения числа событий за период времени t, рассматриваемый в качестве случайной величины. Это соответствует задачи отыскания функции $p_k(t)$.

Однако сначала определим ее с фиксированным t. Возьмем интервал (0,1) и разобьем его произвольно на n равных частей. Длина каждой i-й части равна $1 / n$. Так как поток обладает свойством отсутствия последействия, а, следовательно, события и их вероятности являются несовместными, то вероятность того, что за весь период t не поступит ни один клиент, определяется как

$$p_0(1) = \prod_{i=1}^{n} p_0\left(\frac{1}{i}\right) = p_0\left(\frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

Предположим $p_k(t) = \theta$, тогда $p_0\left(\frac{1}{n}\right)^n = \boldsymbol{\theta}$, (2)

откуда выразим вероятность того, что за промежуток времени дины $1 / n$ не поступит ни один клиент:

$$p_0\left(\frac{1}{n}\right) = \boldsymbol{\theta}^{\frac{1}{n}}. \qquad (3)$$

Если период времени, равный k / n, где k – целое положительное число ($k = \overline{1,\infty}$), разбить на k частей, (длина каждой части равна $1/n$), то, учитывая (3), получим

$$p_0\left(\frac{k}{n}\right) = p_0\left(\frac{1}{n}\right)^k = \boldsymbol{\theta}^{\frac{k}{n}}. \qquad (4)$$

Пусть $\forall t > 0 \ \exists k \in N$ (натуральное число):

$$\frac{k-1}{n} < t \le \frac{k}{n}, \qquad (5)$$

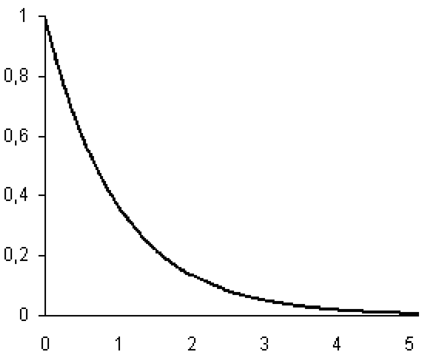
и из предположения, что $p_0(t)$ является невозрастающей функцией, поскольку, чем больше промежуток времени, тем меньше вероятность отсутствия клиентов, имеем

$$p_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \ge p_0(t) \ge p_0\left(\frac{k}{n}\right). \qquad (6)$$

В соответствии с (6) $\theta^{\frac{k-1}{n}} \ge p_0(t) = \theta^{\frac{k}{n}}$. (7)

Так как $\frac{k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} t$, то $\theta^{\frac{k-1}{n}} \to \theta^t$ и $\theta^{\frac{k}{n}} \to \theta^t$. Таким образом, $p_0(t) = \theta^t \ \forall t > 0$

Из равенства $p_0(1) = \theta$ следует $0 \le \theta \le 1$. Случаи, когда $\theta = 0$, не рассматриваются, поскольку означают достоверное прибытие клиентов и достоверное отсутствие какого бы то ни было потока клиентов соответственно в любом промежутке времени. Поэтому для нас представляет интерес случай, когда $0 < \theta < 1$. Исходя из данных жестких ограничений, положим $\theta = e^{-\lambda}$ (рис.). $\theta = e^{-\lambda}$



Следовательно, для любого стационарного потока без последействия функцию $p_0(t)$можно выразить через $e^{-\lambda t}$: $p_0(t) = e^{-\lambda t}$. (8)

Перейдем к определению функции $p_k(t)$ при $k>0$.

Разобьем период времени $(0,t)$ на произвольное число $n>k$ равных частей длины $\frac{t}{n} = \delta$. Относительно расположения поступления клиентов в этих частях возможны две гипотезы:

H_1 – ни в одном из n промежутков не поступит более одного клиента;

H_2 – хотя бы в одном из n промежутков поступит более одного клиента.

Тогда вероятность $p_k(t)$ равна сумме вероятностей двойного события:

$$p_k(t) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i, k) \qquad (9)$$

Двойная вероятность $P(H_i, k)$ включает вероятность реализации гипотезы H_i и одновременно вероятность того, что за период $(0,t)$ поступает k клиентов. Таким образом $P(H_1, k)$ – вероятность того, что во всех частях n периода $(0,t)$ не поступит более одного клиента, при этом общее количество клиентов за данный период составит k. Следовательно, насчитывается k из n частей, которые содержат по одному поступлению клиента, а в оставшихся $(n-k)$ временных промежутках клиенты не поступают.

Чтобы определить вероятность появления по одному клиенту в k из n промежутках времени, необходимо воспользоваться биномиальным законом распределения:

$$P(H_1, k) = C_n^k (p_0(\delta))^k (p_0(\delta))^{n-k}. \qquad (10)$$

В силу формулы (10) и однородности данного потока получаем, что при $n \to \infty$ $(\delta \to 0)$ и $k=const$

$$(p_0(\delta))^{n-k} = e^{-\lambda\delta(n-k)} = e^{-\lambda\frac{t}{n}(n-k)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda\frac{tk}{n}} = e^{-\lambda t}\left[1 + o(1)\right] \qquad (11)$$

и

$$\left(p_1(\delta)\right)^k = \left[1 - e^{-\lambda\delta} - \psi(\delta)\right]^k, \quad (12)$$

где $\psi(\delta)$ – вероятность того, что за промежуток времени длины δ поступит по меньшей мере два клиента:

$$\psi(\delta) = 1 - p_0(\delta) - p_1(\delta) \quad (13)$$

$$\psi(\delta) = o(\delta) \text{ при } \delta \to 0 \ (n \to \infty). \quad (14)$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$\left(p_1(\delta)\right)^k = \left[1 - e^{-\lambda\delta} - o(\delta)\right]^k = (\lambda\delta)^k\left[1 + o(1)\right] = \frac{(\lambda t)^k}{n^k}\left[1 + o(1)\right]. \quad (15)$$

Подставим (11) и (15) в (10) и упростим его:

$$P(H_1,k) = C_n^k e^{-\lambda t}\frac{\lambda t}{n^k}\left[1 + o(1)\right] = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k}e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\left[1 + o(1)\right] =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)(n-k-1)\ldots1}{k!(n-k)(n-k-1)\ldots1}\cdot\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\left[1 + o(1)\right]}{n^k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\left[1 + o(1)\right]}{k!} = \frac{n^k\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{n^k}\times \quad (16)$$

$$\times\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\left[1 + o(1)\right]}{k!}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Так как для отдельного промежутка времени вероятность появления более одного клиента есть $\psi(\delta)$, то вероятность того, что по меньшей мере один из nпромежутков содержит более одного клиента (то есть выполняется гипотеза H_2составит $n\psi(\delta)$. Очевидно

$$P(H_2,k) \le n\psi(\delta) = \frac{t}{\delta}\psi(\delta)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad (17)$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2} P(H_i,k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (18)$$

Так как $p_k(t)$ не зависит от n, то, исходя из равенства (9), получаем

$$p_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (19)$$

Вывод: для простейшего потока число поступлений клиентов в промежутке времени длины t распределено по закону Пуассона с параметром λt.

Различие двух простейших потоков заключается только в разных значениях параметра λ.

Пусть $w(t)$ – вероятность того, что за промежуток времени t поступит по меньшей мере одна заявка:

$$w(t) = 1 - p_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) = p_1(t) + \psi(t), \quad (20)$$

где $\psi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k(t)$ – вероятность поступления по меньшей мере двух заявок за промежуток времени t.

Мы знаем, что для простейшего потока с параметром λ

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что $w(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. (22)

Параметр потока вычисляется по формуле

$$\lim_{t \to 0} \frac{w(t)}{t} \to \lambda. \quad (23)$$

Подобный предел существует у любого стационарного потока и λ является важнейшей характеристикой этого потока.

Из теории вероятности известно, что математическое ожидание случайной величины, распределенной по Пуассоновскому закону, равно параметру этого закона, и в нашем случае – λt. Тем не менее, в этом можно убедиться, рассчитав математическое ожидание количества заявок, поступающих за промежуток времени t:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} (\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t, \quad (24)$$

поскольку, из математического анализа известно, что сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \ldots, \quad (25)$$

является разложением функции $e^{\lambda t}$ по степеням (k-1).

Определение. Математическое ожидание числа заявок в единицу времени называется *интенсивностью данного потока*.

Если поток не является стационарным, то рассматривается вероятность $p_k(\tau, t)$. Это та же вероятность поступления k заявок за промежуток времени длины τ, но уже зависящая от начального момента t. Тогда по аналогии со стационарным потоком вероятность того, что за интервал $(t, t+\tau)$ поступит по меньшей мере одна заявка

$$w(\tau, t) = 1 - p_0(\tau, t), \quad (26)$$

Для нестационарного ординарного потока

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{w(\tau, t)}{\tau} = \lambda(t) \quad (27)$$

(мгновенное значение параметра).

Пусть $\mu(t)$ – мгновенная интенсивность в момент времени t, тогда для простейшего потока с переменным параметром имеет место $\mu(t) = \lambda(t)$.

Вероятность того, что за промежуток времени t подчиненного распределению $B(t)$, поступит k заявок, равна

$$p_k(t) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t), \ (k = 0,1,2,...)$$. (28)

3. Классификация марковских процессов

Классификация марковских процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции X(t) и параметра t. Различают следующие виды марковских процессов:

· с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);

· с непрерывными состояниями и дискретным временем (марковские последовательности);

· с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);

· с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Граф состояний. Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью графа состояний (рис. 1), где окружностями обозначены состояния (вершины графа) S1,S2,… системы S, а стрелками (дуги графа) - возможные переходы из состояния в состояние. На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», то есть стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным).

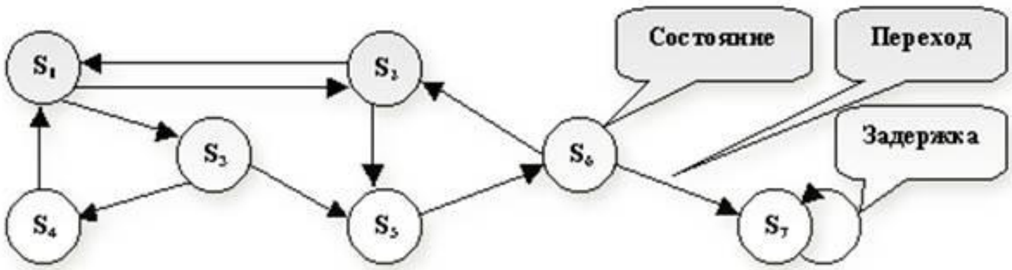


Рис. 1. Граф состояний системы S

Итак, моделирование на основе дискретных марковских процессов.

Рассмотрим ситуацию, когда моделируемый процесс обладает следующими особенностями.

Система S имеет n возможных состояний: S_1, S_2, ..., S_n. Вообще говоря, число состояний может быть бесконечным. Однако модель, как правило, строится для конечного числа состояний.

Смена состояний происходит, будем считать, мгновенно и в строго определенные моменты времени $t_l, l = 1, 2, \ldots$ В дальнейшем будем называть временные точки t_l шагами.

Известны вероятности перехода p_{ij} системы за один шаг из состояния S_i в состояние S_j.

Цель моделирования: определить вероятности состояний системы после k -го шага. Обозначим эти вероятности $p_j(k), j = \overline{1, n}$ (не путать с вероятностями p_{ij}).

Если в системе отсутствует последействие, то есть вероятности p_{ij} не зависят от предыстории нахождения системы в состоянии S_i, а определяются только этим состоянием, то описанная ситуация соответствует модели дискретной марковской цепи.

Марковская цепь называется однородной, если переходные вероятности p_{ij} от времени не зависят, то есть от шага к шагу не меняются. В противном случае, то есть если переходные вероятности $p_{ij}(t)$ зависят от времени, марковская цепь называется неоднородной.

Значения p_{ij} обычно сводятся в матрицу переходных вероятностей:

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Значения p_{ij} могут также указываться на графе состояний системы. На рис. 2 показан размеченный граф для четырех состояний системы. Обычно вероятности переходов «в себя» - p_{11}, p_{22} и т. д. на графе состояний можно не проставлять, так как их значения дополняют до 1 сумму переходных вероятностей, указанных на ребрах (стрелках), выходящих из данного состояния.

Не указываются также нулевые вероятности переходов. Например, на рис. 2. это вероятности p_{21}, p_{43} и др.

Математической моделью нахождения вероятностей состояний однородной марковской цепи является рекуррентная зависимость

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)p_{ij},$$

(1), где $p_j(k)$ - вероятность j -го состояния системы после k -го шага, $j = \overline{1,n}$; $p_i(k-1)$ - вероятность i -го состояния системы после $(k-1)$ -го шага, $i = \overline{1,n}$; n - число состояний системы; p_{ij} - переходные вероятности.

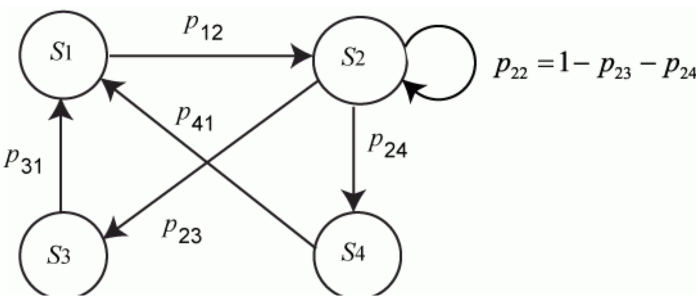


Рис. 2. Размеченный граф состояний системы

Для неоднородной марковской цепи вероятности состояний системы находятся по формуле:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)p_{ij}^{(k)},$$

где $p_{ij}^{(k)}$ - значения переходных вероятностей для k -го шага.

Пример. По группе из четырех объектов производится три последовательных выстрела. Найти вероятности состояний группы объектов после третьего выстрела.

Матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 & 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0 & 0,35 & 0,3 & 0,25 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,45 & 0,4 & 0,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Размеченный граф состояний приведен на рис. 3.

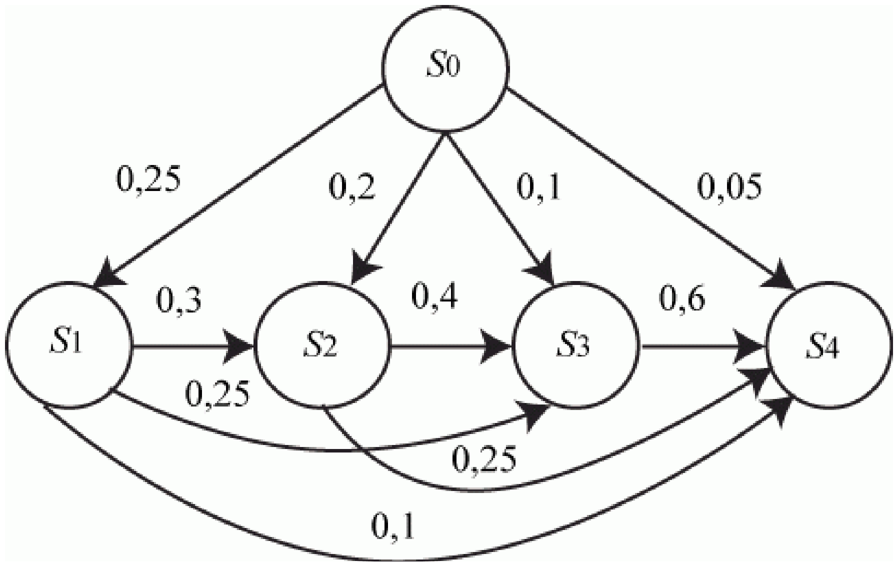


Рис. 3. Размеченный граф состояний четырех объектов

Прежде чем приступить к вычислениям, необходимо ответить на следующие вопросы.

Является ли рассматриваемый процесс поражения целей марковским? Да, так как степень поражения объекта (смена его состояния) не зависит от того - когда и каким образом объект был приведен в настоящее состояние, а зависит только от его текущего состояния.

Подходит ли рассматриваемая задача под схему марковской цепи? Да, так как время представляет собой дискретные отрезки - время между выстрелами (шаги).

Процесс однородный или неоднородный? Есть основания полагать, что процесс однородный, так как переходные вероятности не зависят от времени. Кроме этого, мы полагаем, что объекты - неподвижные и во времени обстрела менять свое положение не могут (что привело бы к изменениям p_{ij} после каждого выстрела).

И, наконец, надо правильно определить начальное состояние системы, так как от этого могут существенно зависеть результаты моделирования. В нашем случае вполне естественно считать начальным состояние S_0 - все объекты целы.

Следовательно, есть все основания для применения ранее введенного рекуррентного выражения (1).

Решение. Так как до первого выстрела все объекты целы, то $p_1(0) = 1$.

После первого выстрела все значения вероятностей $p_j(1)$ соответствуют первой строке матрицы переходных вероятностей. Рассчитаем вероятности остальных состояний.

$P_1(2) = P_1(1) * p_{11} + P_2(1) * p_{21} + P_3(1) * p_{31} + P_4(1) * p_{41} + P_5(1) * p_{51} = 0,16;$
$P_2(2) = P_1(1) * p_{12} + P_2(1) * p_{22} + P_3(1) * p_{32} + P_4(1) * p_{42} + P_5(1) * p_{52} = 0,19;$
$P_3(2) = P_1(1) * p_{13} + P_2(1) * p_{23} + P_3(1) * p_{33} + P_4(1) * p_{43} + P_5(1) * p_{53} = 0,245;$
$P_4(2) = P_1(1) * p_{14} + P_2(1) * p_{24} + P_3(1) * p_{34} + P_4(1) * p_{44} + P_5(1) * p_{54} = 0,22;$
$P_5(2) = P_1(1) * p_{15} + P_2(1) * p_{25} + P_3(1) * p_{35} + P_4(1) * p_{45} + P_5(1) * p_{55} = 0,185;$
$P = 0,16 + 0,19 + 0,245 + 0,22 + 0,185 = 1.$
$P_1(3) = P_1(2) * p_{11} = 0,16 * 0,4 = 0,064;$
$P_2(3) = P_1(2) * p_{12} + P_2(2) * p_{22} = 0,16 * 0,25 + 0,19 * 0,35 = 0,11;$
$P_3(3) = P_1(2) * p_{13} + P_2(2) * p_{23} + P_3(2) * p_{33} = 0,16 * 0,2 + 0,19 * 0,3 + 0,245 * 0,45 = 0,2;$
$P_4(3) = P_1(2) * p_{14} + P_2(2) * p_{24} + P_3(2) * p_{34} + P_4(2) * p_{44} = 0,25;$
$P_5(3) = P_1(2) * p_{15} + P_2(2) * p_{25} + P_3(2) * p_{35} + P_4(2) * p_{45} + P_5(2) * p_{55} = 0,38;$
$P = 0,064 + 0,11 + 0,2 + 0,25 + 0,38 = 1.$

Сформулируем методику моделирования по схеме дискретных марковских процессов (марковских цепей).

Зафиксировать исследуемое свойство системы.

Определение свойства зависит от цели исследования. Например, если исследуется объект с целью получения характеристик надежности, то в качестве свойства следует выбрать исправность. Если исследуется загрузка системы, то - занятость. Если, как в примере, состояния объектов, то - поражен или непоражен.

Определить конечное число возможных состояний системы и убедиться в правомерности моделирования по схеме дискретных марковских процессов.

Составить и разметить граф состояний.

Определить начальное состояние.

По рекуррентной зависимости (1) определить искомые вероятности.

В рамках изложенной методики моделирования исчерпывающей характеристикой поведения системы является совокупность вероятностей $p_j(k)$.

При неоднородном марковском процессе переходная вероятность p_{ij} представляет собой условную вероятность перехода

$p_{ij}^{(k)} = p\left(S_j^{(k)} \Big/ S_i^{(k)}\right)$, зависящую от k - очередного временного шага. В этом случае должны быть указаны более одной матрицы значений p_{ij} (для некоторых шагов матрицы могут быть одинаковыми).

Например, при нанесении ударов по объектам, которые могут перемещаться (танковая группировка, корабли и т. п.), последние будут принимать меры по рассредоточению средств или другому защитному маневру, вплоть до активного противодействия атакующей стороне. Очевидно, все эти меры приведут к уменьшению поражающих возможностей стороны, наносящей удары, т. е. к соответствующему изменению переходных вероятностей. Процесс становится неоднородным.

Моделирование по схеме непрерывных марковских процессов

Существует широкий класс систем, которые меняют свои состояния в случайные моменты времени t. Как и в предыдущем случае, в этих системах рассматривается процесс с дискретными состояниями $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Например, переход объекта от исправного состояния к неисправному, соотношение сил сторон в ходе боя и т. п. Оценка эффективности таких систем определяется с помощью вероятностей каждого состояния $p_i(t)$ на любой момент времени t, $i = \overline{1, n}$.

Чтобы определить вероятности состояния системы $p_i(t)$ для любого момента времени t необходимо воспользоваться математическими моделями марковских процессов с непрерывным временем (непрерывных марковских процессов).

При моделировании состояния систем с непрерывными марковскими процессами мы уже не можем воспользоваться переходными вероятностями p_i, так как вероятность «перескока» системы из одного состояния в другое точно в момент времени t равна нулю (как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины).

Поэтому вместо переходных вероятностей вводятся в рассмотрение плотности вероятностей переходов λ_{ij}: $\lambda_{ij} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$,

где $p_{ij}(\Delta t)$ - вероятность того, что система, находившаяся в момент времени t в состоянии S_i за время Δt перейдет в состояние S_j.

С точностью до бесконечно малых второго порядка из приведенной формулы можно представить: $p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t$

Непрерывный марковский процесс называется однородным, если плотности вероятностей переходов λ_{ij} не зависят от времени t (от момента начала промежутка Δt). В противном случае непрерывный марковский процесс называется неоднородным.

Целью моделирования, как и в случае дискретных процессов, является определение вероятностей состояний системы $p_i(t)$. Эти вероятности находятся интегрированием системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Сформулируем методику моделирования по схеме непрерывных марковских процессов.

Определить состояния системы и плотности вероятностей переходов λ_{ij}.

Составить и разметить граф состояний.

Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Число уравнений в системе равно числу состояний. Каждое уравнение формируется следующим образом.

В левой части уравнения записывается производная вероятности i -го состояния $\frac{dp_i(t)}{dt}$.

В правой части записывается алгебраическая сумма произведений $\lambda_{ij}p_j(t)$ и $-\lambda_{ij}p_i(t)$. Число произведений столько, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка графа направлена в данное состояние, то соответствующее произведение имеет знак плюс, если из данного состояния - минус.

Определить начальные условия и решить систему дифференциальных уравнений.

Пример. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для нахождения вероятностей состояний системы, размеченный граф состояний которой представлен на рис. 4.

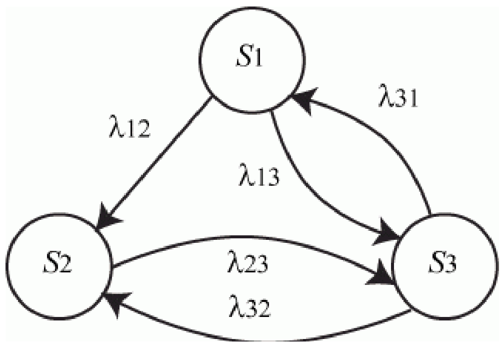


Рис. 4 Размеченный граф состояний

Решение

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{31}p_3(t) - \lambda_{13}p_1(t) - \lambda_{12}p_1(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{32}p_3(t) - \lambda_{23}p_2(t) \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13}p_1(t) + \lambda_{23}p_2(t) - \lambda_{31}p_3(t) - \lambda_{32}p_3(t) \end{cases}$$

Очевидно, $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$.

Поэтому любое из первых трех уравнений можно исключить, как линейно зависимое.

Для решения уравнений Колмогорова необходимо задать начальные условия. Для рассмотренного примера, можно задать такие начальные условия: $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = p_3(0) = 0$.

Однородный марковский процесс с непрерывным временем можно трактовать как процесс смены состояний под влиянием некоторого потока событий. То есть плотность вероятности перехода можно трактовать как интенсивность потока событий, переводящих систему из i -го состояния в j -е. Такими потоками событий являются отказы техники, вызовы на телефонной станции, рождение и т. п.

При исследовании сложных объектов всегда интересует: возможен ли в исследуемой системе установившейся (стационарный) режим? То есть, как ведет себя система при $k \to \infty (t \to \infty)$? Существуют ли предельные значения $p_j(k), p_i(t)$? Как правило, именно эти предельные значения интересуют исследователя.

Ответ на данный вопрос дает теорема Маркова.

Если для однородного дискретного марковского процесса с конечным или счетным числом состояний все $p_{ij} \succ 0$, то предельные значения $p_j(k)$ существуют и их значения не зависят от выбранного начального состояния системы.

Применительно к непрерывным марковским процессам теорема Маркова трактуется так: если процесс однородный и из каждого состояния возможен переход за конечное время в любое другое состояние и число состояний счетно или конечно, то предельные значения $p_i(t)$ существуют и их значения не зависят от выбранного начального состояния.

Например (рис. 5), в системе А стационарный режим есть, а в системе В стационарного режима нет: если система окажется в состоянии S_4 она не сможет перейти ни в какое другое состояние.

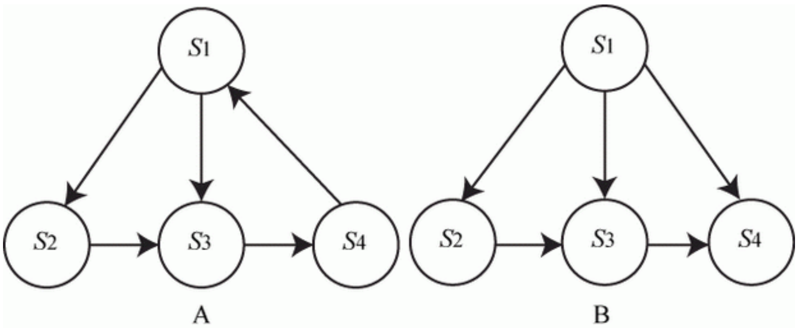


Рис. 5. Примеры графов состояний систем с различными режимами

Схема гибели и размножения

Часто в системах самого различного назначения протекают процессы, которые можно представить в виде модели «гибели и размножения».

Граф состояний такого процесса показан на рис. 6.

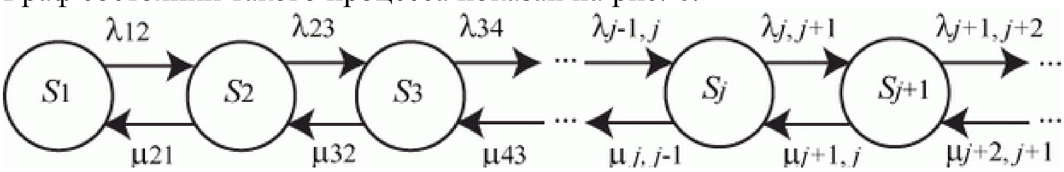


Рис. 6. Схема "гибели и размножения"

Особенностью модели является наличие прямой и обратной связей с каждым соседним состоянием для всех средних состояний; первое и последнее (крайние) состояния связаны только с одним «соседом» (с последующим и предыдущим состояниями соответственно).

Название модели – «гибель и размножение» - связано с представлением, что стрелки вправо означают переход к состояниям, связанным с ростом номера состояния («рождение»), а стрелки влево - с убыванием номера состояний («гибель»).

Очевидно, стационарное состояние в этом процессе существует. Составлять уравнения Колмогорова нет необходимости, так как структура регулярна, необходимые формулы приводятся в справочниках, а также в рекомендованной литературе.

Для приведенных на рис.6 обозначений формулы имеют вид:

$$P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{\mu_{21}\mu_{32}\mu_{43}} + \ldots + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{n-1,n}}{\mu_{21}\mu_{32}\ldots\mu_{n,n-1}}};$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}} * P_1; \ldots ; P_n = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{n-1,n}}{\mu_{21}\mu_{32}\ldots\mu_{n,n-1}} * P_1. \qquad (*)$$

Пример. Имеется система из двух одинаковых и работающих параллельно компьютеров.

Требуется определить надежностные характеристики этой системы.

Решение

В этой системе возможны три состояния:

S_1 - оба компьютера исправны;

S_2 - один компьютер исправен, другой ремонтируется;

S_3 - оба компьютера неисправны и ремонтируются. Будем полагать, что процессы отказов и восстановлений - однородные марковские, одновременный выход из строя обоих компьютеров, как и одновременное восстановление двух отказавших компьютеров практически невозможно.

Поскольку компьютеры одинаковые, то с точки зрения надежности, неважно, какой именно компьютер неисправен в состоянии S_2, важно, что один.

С учетом сказанного, ситуация моделируется схемой «гибели и размножения» (рис. 7).

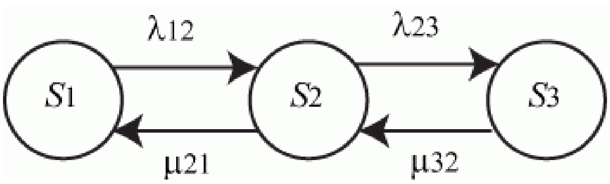


Рис. 7

На рис. 7:

λ_{12}, λ_{23} - интенсивности потоков отказов;

μ_{21}, μ_{32} - интенсивности потоков восстановлений.

Пусть среднее время безотказной работы каждого компьютера $\bar{t} = 10$ сут, а среднее время восстановления одного компьютера $\bar{t}_в = 0,1$ сут.

Тогда интенсивность отказов одного компьютера будет равна $\lambda = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{10 \text{ сут}} = 0,1 \frac{1}{\text{сут}}$, а интенсивность восстановления одного компьютера - $\mu = \frac{1}{\bar{t}_в} = \frac{1}{0,1 \text{ сут}} = 10 \frac{1}{\text{сут}}$.

В состоянии S_1 работают оба компьютера, следовательно:

$$\lambda_{12} = 2\lambda = 2 * 0,1 = 0,2 \frac{1}{\text{сут}}.$$

В состоянии S_2 работает один компьютер, значит:
$\lambda_{23} = \lambda = 0,1\ \frac{1}{\text{сут}}$.
В состоянии S_2 восстанавливается один компьютер, тогда:
$\mu_{21} = \mu = 10\ \frac{1}{\text{сут}}$.
В состоянии S_3 восстанавливаются оба компьютера:
$\mu_{32} = 2\mu = 20\ \frac{1}{\text{сут}}$.
Используем зависимости (*). Вероятность состояния, когда обе машины исправны:
$$P_1 = \frac{1}{1+\frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}}} = \frac{1}{1+\frac{0,2}{10}+\frac{0,2*0,1}{10*20}} = \frac{1}{1+0,02+0,0004} = 0,98.$$
Вероятность второго состояния S_2 (работает один компьютер):
$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} * P_1 = 0,02 * 0,98 = 0,0196.$$
Аналогично вычисляется и P_3. Хотя найти P_3 можно и так:
$$P_3 = 1-(P_1+P_2) = 1-(0,98+0,0196) = 1-0,9996 = 0,0004.$$
Непрерывный марковский процесс полностью определяется значениями плотностей вероятностей переходов λ_{ij}, μ_{ji}. Ранее был установлен их физический смысл как интенсивности потоков событий, переводящих систему из одного состояния в другое. Поток событий в однородных непрерывных марковских процессах характеризуется экспоненциальным законом распределения случайных интервалов времени между событиями. Такой поток называют простейшим или стационарным пуассоновским.

3.18.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия и теоремы теории марковских процессов, их классификацию;
- усвоили навыки работы с моделями простейшего потока СС;
- выработали навыки моделирования по схеме дискретных и непрерывных марковских процессов;
- усвоили навыки работы по схеме гибели и размножения;
- выработали навыки определения надежностных характеристик системы, путем обсчета соответствующей модели марковских процессов.

3.18 Практическое занятие 31-32 (ПЗ-31-32)

Тема: Основные понятия теории систем массового обслуживания. СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью).

3.18.1 Задание для работы:

1. Дискретные марковские процессы. Классификация ДМП. Методика моделирования по схеме дискретных марковских процессов (марковских цепей).
2. СМО, их классификация, свойства. Многоканальная СМО с неограниченной очередью. СМО с ограниченной очередью. СМО с ограниченным временем ожидания

3.18.2 Краткое описание проводимого занятия

1. Дискретные марковские процессы. Классификация ДМП. Методику моделирования по схеме дискретных марковских процессов (марковских цепей).

Задача 1. Задана матрица $P_1 = \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{Vmatrix}$ вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из i-го состояния в j-ое за один шаг (i, j=1, 2). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент t=0 определяется вектором $\vec{q}$ =(0,1; 0,9). Найти:

1. матрицу P2 перехода цепи из состояния i в состояние j за два шага;
2. распределение вероятностей по состояниям в момент t=2;
3. вероятность того, что в момент t=1 состоянием цепи будет A2;
4. стационарное распределение.

Решение. Для дискретной цепи Маркова в случае ее однородности справедливо соотношение

$$P_n = P_1^n \qquad (1)$$

где P1 – матрица переходных вероятностей за один шаг;
Pn - матрица переходных вероятностей за n шагов;

1. Найдем матрицу P2 перехода за два шага

$$P_2 = P_1^2 = \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{Vmatrix}$$

Пусть распределение вероятностей по состояниям на S-ом шаге определяется вектором

$$\vec{p}(s) = (p_1(s), p_2(s), \dots, p_k(s)), \ 0 \le p_j(s) \le 1, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i(s) = 1.$$

Зная матрицу Pn перехода за n шагов, можно определить распределение вероятностей по состояниям на (S+n) –ом шаге $\vec{p}(s+n) = \vec{p}(s) \cdot P_n$. (2)

2. Найдем распределение вероятностей по состояниям системы в момент t=2.

Положим в (5) S=0 иn=2. Тогда $\vec{p}(0) = \vec{q} = (0,1;\ 0,9)$.

Получим $\vec{p}(2) = \vec{q} \cdot P_2 = (0,1;\ 0,9) \cdot \begin{Vmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{Vmatrix} = (0,331 \quad 0,669)$.

3. Найдем распределение вероятностей по состояниям системы в момент t=1.

Положим в (2) s=0 и n=1, тогда $\vec{p}(1) = \vec{q} \cdot P_1 = (0,1;\ 0,9) \cdot \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{Vmatrix} = (0,31; \quad 0,69)$.

Откуда видно, что вероятность того, что в момент t=1 состоянием цепи будет A_2 ,равна $p_2(1)$=0,69.

Распределение вероятностей по состояниям называется стационарным, если оно не меняется от шага к шагу, то есть $\vec{p}(s) = \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k), \quad p_j = const, \quad j = 1, \dots, k$

Тогда из соотношения (2) при n=1 получим $\vec{p}(s) = \vec{p}; \quad \vec{p}(s+1) = \vec{p}; \quad P_n = P_1$.

или $\vec{p} = \vec{p} \cdot P_1, \quad 0 \le p_j \le 1, \quad j = 1, \dots, k, \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. (3)

4. Найдем стационарное распределение. Так как k =2 имеем $\vec{p}$ =(p_1; p_2). Запишем систему линейных уравнений (3) в координатной форме

$$\begin{cases} p_1 = 0{,}4p_1 + 0{,}3p_2; \\ \\ p_2 = 0{,}6p_1 + 0{,}7p_2; \end{cases} \qquad p_1 + p_2 = 1.$$

Последнее условие называется нормировочным. В системе (3) всегда одно уравнение является линейной комбинацией других. Следовательно, его можно вычеркнуть. Решим совместно первое уравнение системы и нормировочное. Имеем $0{,}6p_1=0{,}3p_2$, то есть $p_2=2p_1$. Тогда $p_1+2\,p_1=1$ или $p_1 = \frac{1}{3}$, то есть $p_2 = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\vec{p} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Ответ:

1) матрица перехода за два шага для данной цепи Маркова имеет вид $P_2 = \begin{Vmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{Vmatrix}$;

2) распределение вероятностей по состояниям в момент t=2 равно $\vec{p}(2) = (0{,}331; 0{,}669)$;

3) вероятность того, что в момент t=1 состоянием цепи будет A2 , равна p2(t)=0,69;

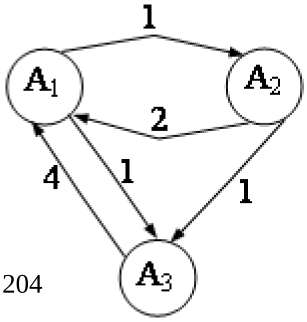
4) стационарное распределение имеет вид $\vec{p} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Задача 2. Задана матрица $\Lambda = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{Vmatrix}$ интенсивностей переходов непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице Λ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

Решение. Однородная цепь Маркова с конечным числом состояний A1, A2,…Ak характеризуется матрицей интенсивностей переходов $\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \cdots & \lambda_{kk} \end{Vmatrix}$,

где $\lambda_{ij} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$ - интенсивность перехода цепи Маркова из состояния Ai в состояние A_j;$p_{ij}(\Delta t)$-вероятность перехода Ai→Aj за интервал времени Δt.

Переходы системы из состояния в состояние удобно задавать с помощью размеченного графа состояний, на котором отмечаются дуги, соответствующие интенсивностям λij>0. Составим размеченный граф состояний для заданной матрицы интенсивностей переходов



Пусть $\vec{p}(t) = (p_1(t), \quad p_2(t),\ldots,p_k(t))$ - вектор вероятностей pj(t),
j=1, 2,…, k , нахождения системы в состоянии Aj в момент t.

Очевидно, что 0≤pj(t)≤1 и $\sum_{j=1}^{k} p_j(t)=1$. Тогда по правилу дифференцирования векторной функции скалярного аргумента получим $\vec{p}\,'(t)=\left(p_1'(t),\quad p_2'(t),\ldots,p_k'(t)\right)$.

Рис. 1

Вероятности pj(t)удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Колмогорова (СДУК), которая в матричной форме имеет вид $\vec{p}\,'(t)=\vec{p}(t)\cdot\Lambda$. (4)

Если в начальный момент система находилась в состоянии Aj, то СДУК следует решать при начальных условиях pi(0)=1, pj(0)=0, j≠i, j=1, 2,…, k. (5)

Совокупность СДУК (4) и начальных условий (5) однозначно описывает однородную цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний.

Составим СДУК для заданной цепи Маркова. Поскольку k =3, то j=1, 2, 3.

Из соотношения (1) получим

$$\left(p_1'(t),\quad p_2'(t),\quad p_3'(t)\right)=(p_1(t),\quad p_2(t),\quad p_3(t))\cdot\begin{Vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & 0 & -4\end{Vmatrix}.$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{cases} p_1'(t)=-2p_1(t)+2p_2(t)+4p_3(t);\\ p_2'(t)=\quad p_1(t)-3p_2(t);\\ p_3'(t)=\quad p_1(t)+p_2(t)-4p_3(t);\\ \qquad\quad p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=1. \end{cases}$$

Последнее условие называется нормировочным.

Распределение $\vec{p}(t)$ вероятностей по состояниям называется стационарным, если оно не меняется с течением времени, то есть $\vec{p}(t)=\vec{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_k)$, где pj=const, j=1,2,…, k.

Отсюда $\vec{p}\,'(t)=\vec{p}\,'=\vec{0}$.

Тогда из СДУК (4) получаем систему для нахождения стационарного распределения

$$\vec{p}\cdot\Lambda=\vec{0},\quad \text{где}\quad \sum_{j=1}^{k}p_j=1,\quad 0\le p_j\le 1 \qquad (6)$$

Для данной задачи из СДУК будем иметь

$$\begin{cases} -2p_1+2p_2+4p_3=0\\ p_1-3p_2 \qquad\quad =0\\ p_1+p_2-4p_3 \quad =0\\ p_1+p_2+p_3 \quad\ =1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1=3p_2,\\ p_2=p_3. \end{cases}$$

Из нормировочного условия получим 3p2+p2+p2=1 или $p_2=\dfrac{1}{5};\quad p_1=\dfrac{3}{5};\quad p_3=\dfrac{1}{5}$.

Следовательно, предельное распределение имеет вид $\vec{p}=\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. Заметим, что этот результат можно получить непосредственно по размеченному графу состояний, если воспользоваться правилом: для стационарного распределения сумма произведений λjipi, j≠i, для стрелок, выходящих из i-го состояния, равна сумме произведений $\lambda j i p i$, $j \neq i$, для стрелок, входящих в i-ое состояние. Действительно,

$$\begin{cases} A_1: 2p_2 + 4p_3 = p_1 + p_1 & p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ A_2: \ p_1 = 2p_2 + p_2 & 0 \le p_j \le 1 \\ A_3: \ \ p_1 + p_2 = 4p_3 & \forall j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Очевидно, что полученная система эквивалентна той, которая составлена по СДУК. Следовательно, она имеет то же решение.

Ответ: стационарное распределение имеет вид $\vec{p} = \left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

2. СМО, их классификация, свойства. Многоканальная СМО с неограниченной очередью. СМО с ограниченной очередью. СМО с ограниченным временем ожидания

Системой массового обслуживания (СМО)называется комплекс взаимосвязанных элементов, состоящий из некоторого числа обслуживающих единиц (каналов), в котором происходит удовлетворение массовых запросов (требований), поступающих в систему в случайные моменты времени. Обслуживание каждой заявки длится в течение некоторого случайного времени и зависит от показателей эффективности системы. После того, как заявка обслужена, она покидает канал, и система готова к приему очередной заявки. Примеры СМО - телефонная станция, автостоянка, кассир магазина, служба занятости.

Основные элементы СМО - *источник требований, входящий поток заявок, каналы обслуживания, выходящий поток заявок.*

Предметом теории СМО является построение математических моделей (т. е. образов реального экономического объекта, описанных с помощью уравнений, формул, графиков, схем и т. д.) для теоретического анализа и практического использования свойств СМО.

Показатели эффективности СМО - характеристики работы системы, описывающие ее способность справляться с потоком заявок. Эффективность функционирования СМО описывается такими показателями:

1) *Эффективность использования СМО* - абсолютная или относительная пропускные способности системы, среднее число занятых каналов (коэффициент использования СМО), средняя продолжительность использования СМО, интенсивность нагрузки канала;

2) *Качество обслуживания заявок* - среднее число заявок, обслуженных СМО в единицу времени, вероятность простоя системы, вероятность отказа в обслуживании, среднёе число заявок в очереди, среднее число заявок в системе и др.

Поток заявок, поступающих в систему, характеризуется *интенсивностью* λ, то есть частотой появления заявок в системе, или средним числом заявок, поступающих в систему в единицу времени.

Интенсивность μ потока обслуживаний,- это величина, обратная среднему времени обслуживания, или число заявок, обслуженных системой в единицу времени.

Интенсивность нагрузки канала обслуживания ρ, - это величина, показывающая среднее число заявок, поступающее в систему за среднее время обслуживания одной заявки: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (1). При этом его экономический смысл заключается в том, что показатель ρ, - это среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие в систему требования. Условие $\frac{\rho}{n} < 1$, (2)

где n - число каналов обслуживания, означает, что необходимое число каналов обслуживания должно быть больше ρ.

Классификация СМО:

По дисциплине обслуживания:

— СМО *с отказами,* когда заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, остается необслуженной;

— СМО *с ожиданием (очередью),* в которых заявка в случае занятости всех каналов становится в очередь и ожидает обслуживания;

— Системы с ограничением *длины очереди;*

— Системы с ограниченным *временем ожидания;*

По месту нахождения источника требований:

— *Замкнутые* СМО, когда источник требований находится в самой системе;

— *Открытые* СМО, когда источник требований находится вне системы;

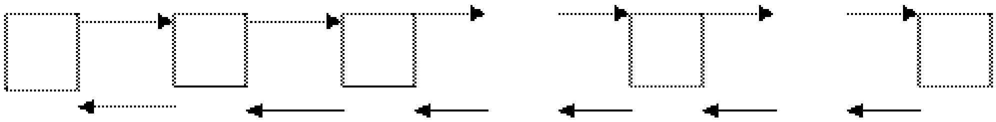
По числу обслуживающих каналов: о*дноканальные; многоканальные.*


СМО
ПО ЧИСЛУ ФАЗ
ОДНОФАЗНЫЕ
МНОГОФАЗНЫЕ
ПО НАЛИЧИЮ ОЧЕРЕДИ
СИСТЕМЫ БЕЗ ОЧЕРЕДЕЙ (с потерями заявок)
С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОЖИДАНИЕМ (с потерями заявок)
С ОГРАНИЧЕННЫМ ОЖИДАНИЕМ
ПО ЧИСЛУ КАНАЛОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ
ОДНОКАНАЛЬНЫЕ
МНОГОКАНАЛЬНЫЕ
ПО ПРИНЦИПУ ФОРМИРОВАНИЯ ОЧЕРЕДЕЙ
СИСТЕМЫ С ОБЩЕЙ ОЧЕРЕДЬЮ
СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ОЧЕРЕДЯМИ
ПО НАЛИЧИЮ ОТКАЗОВ
С ОТКАЗАМИ
БЕЗ ОТКАЗОВ
ПО НАЛИЧИЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ
РАЗОМКНУТЫЕ (с бесконечным числом заявок)
ЗАМКНУТЫЕ (с конечным числом заявок)
ПО ВИДУ ПРИОРЕТЕТА
СТАТИЧЕСКИЙ ПРИОРИТЕТ (обслуживание в порядке поступления заявок)
ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРИОРИТЕТ
Относительный (заявка высокого приоритета ожидает окончания обслуживания заявки с более низким приоритетом)
Абсолютный (заявка высокого приоритета при поступлении немедленно вытесняет заявку с более низким приоритетом)
Смешанный (если заявка с низшим приоритетом обслуживалась в течение времени, меньше критического, то используется абсолютный приоритет, в противном случае используется относительный приоритет)

Одноканальная СМО с отказами

Рассмотрим упорядоченное множество состояний некоторой системы $S: S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots;$ предположим, что все потоки, переводящие систему из состояния в состояние, - простейшие. Пусть для любого состояния S_k переходы возможны только в соседние состояния: либо в S_{k-1},либо в S_{k+1}.Граф состояний такой системы изображен на рисунке номер 2:

λ_{01} λ_{12} λ_{23} $\lambda_{k-1,k}$ $\lambda_{k,k+1}$ $\lambda_{n-1,n}$



…... ……

S_0 S_1 S_2 S_k S_n

…… ……

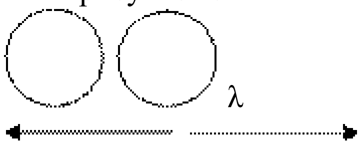
λ_{10} λ_{21} λ_{-32} $\lambda_{k,k-1}$ $\lambda_{k+1,k}$ $\lambda_{n,n-1}$

Рис. 1: Граф состояний одноканальной СМО с отказами.

Случайные процессы, происходящие в таких системах, имеют специальное название, традиционно происходящее из биологии: *схема гибели и размножения* (состояние S_k соответствует некоторой популяции численностью k, смена состояния происходит при рождении либо гибели одного члена популяции).

Рассмотрим систему с одним каналом обслуживания, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент поступления очередной заявки канал занят, то заявка покидает систему необслуженной. Такие системы называются *системами без ожидания, или с отказами в обслуживании*.

Пусть поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Граф состояний такой системы показан на рисунке 2:



λ

S_0 S_1

μ

Рис. 2: Система без ожидания.

Система имеет два состояния:

S_0 – канал свободен и готов к приему очередной заявки;

S_1 – канал занят.

Эти величины можно интерпретировать как *вероятности того, что заявка будет обслужена либо получит отказ*:

$$P_{об} = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$P_{отк} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Относительная пропускная способность системы, то есть доля всех обслуженных заявок из числа всех поступивших в систему, равна вероятности обслуживания:

$$Q = P_{об} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Абсолютная пропускная способность системы, то есть число обслуженных заявок в единицу времени, - это произведение интенсивности потока заявок на долю всех обслуженных заявок:

$$A = \lambda \cdot Q = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}$$

Интенсивность μ потока обслуживаний $П_{об}$ есть *производительность канала.* Имеет место равенство $\mu = \frac{1}{\overline{T}_{об}}$, где $T_{об}$ - среднее время обслуживания одной заявки, относящееся только к обслуженным заявкам, т.е. математическое ожидание М [$T_{об}$] случайной величины $T_{об}$.

Стационарность потока означает, что его вероятностные характеристики не зависят от времени.

Пример. Пусть **одноканальная СМО с отказами** представляет собой один пост ежедневного обслуживания (ЕО) для мойки автомобилей. Заявка - автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ = 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживании являются простейшими.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

- относительной пропускной способности q;
- абсолютной пропускной способности A;
- вероятности отказа $P_{отк}$;

Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение

1. Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555$$

.

2. Вычислим относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0{,}555}{1 + 0{,}555} = 0{,}356$$

.

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост ЕО автомобилей.

3. Абсолютную пропускную способность определим по формуле:

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0{,}356 = 0{,}356$$

.

Это означает, что система (пост ЕО) способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

4. Вероятность отказа:

$$P_{отк} = 1 - q = 1 - 0{,}356 = 0{,}644$$

.

Это означает, что около 65% прибывших автомобилей на пост ЕО получат отказ в обслуживании.

5. Определим номинальную пропускную способность системы:

$$A_{ном} = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{0{,}8} = 0{,}555$$

(автомобилей в час).

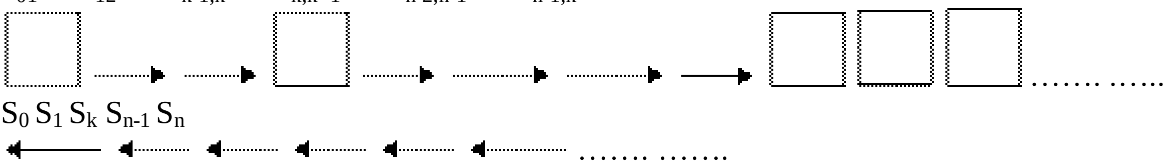
Оказывается, что $A_{ном}$ в 1,5 раза $\left(\frac{0{,}555}{0{,}356} \approx 1{,}5\right)$ больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

Многоканальная СМО с отказами

Задача исследования таких СМО впервые возникла в области телефонии и была решена в 1909 г. А.К. Эрлангом.

Состояния системы занумеруем по числу занятых каналов. Для СМО с отказами это означает, что мы нумеруем состояния по числу заявок, находящихся в системе, т.е. под обслуживанием, поскольку каждый канал в любой момент времени либо свободен, либо обслуживает только одну заявку. Таким образом, СМО может находиться только в одном из ледующих *n* + 1 состояний:

$\lambda_{01}=\lambda$ $\lambda_{12}=\lambda$ $\lambda_{k-1,k}=\lambda$ $\lambda_{k,k+1}=\lambda$ $\lambda_{n-2,n-1}=\lambda$ $\lambda_{n-1,k}=\lambda$



S_0 S_1 S_k S_{n-1} S_n

$\lambda_{10}=\mu$ $\lambda_{21}=2\mu$ $\lambda_{k,k-1}=k\mu$ $\lambda_{k+1,k}=$ $\lambda_{n-1,n-2}=$ $\lambda_{n,n-1}=n\mu$

$=(k+1)\mu$ $=(n-1)\mu$

Рис. 3: функционирование системы S.

Если СМО находится в состоянии S_k (k=0,1,…,n-1), т. е. когда k каналов заняты обслуживанием заявок, а остальные n-k каналов свободны, то перескок ее в состояние S_{k+1}происходит при поступлении на вход новой заявки. Таким образом, по стрелкам слева направо из любого состояния в соседнее состояние справа систему переводит один и тот же входящий поток заявок $П_{вх}$ с интенсивностью λ. Следовательно, плотность вероятности перехода $\lambda_{k,k+1}$ (k = 0, 1, ..., n-1) из любого k-*го* состояния в (k+1)-е состояние равна λ:

$\lambda_{01} = \lambda_{12} = \ldots = \lambda_{n-1,n} = \lambda$ (15)

что и проставлено над стрелками, слева направо.

Т.к. входящий поток $П_{вх}$ простейший, то он является ординарным, т.е. заявки поступают по одной. Поэтому СМО, меняя свои состояния слева направо, не может перескочить через состояние, а переходит только в соседнее справа состояние. По этой причине на графе (рис. 3) отсутствуют стрелки, перескакивающие через состояния слева направо.

Вероятность того, что одновременно, точно в один и тот же момент, освободятся более одного канала, пренебрежимо мала, т.е. такие события практически невозможны. Поэтому на графе нет стрелок, «перескакивающих» через состояния справа налево.

На переход занятого канала в состояние свободного действует простейший поток обслуживания $П_{об}$ с интенсивностью μ. Но тогда переход СМО в целом из состояния S_k (в котором k каналов заняты, а n-k свободны) в состояние S_{k-1} (в котором по сравнению с предыдущим освободился один из k занятых каналов) происходит под воздействием суммарного потока обслуживаний $П^k_{об,}$ представляющего собой результат наложения k потоков обслуживаний $П_{об}$, действующих на каждый из k занятых каналов. При этом интенсивность суммарного потока равна сумме интенсивностей слагаемых потоков.

p_0,:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}$$

или, с учетом формулы $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ получим *формулы Эрланга:*

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$$

где ρ - показатель нагрузки канала обслуживания.

Формулы для вероятностей предельных состояний буду иметь вид:

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!}\cdot p_0, \ \ldots\ldots, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!}\cdot p_0, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0 \qquad (1)$$

Приведем формулы для расчета основных показателей эффективности работы системы.

Число каналов, которые *необходимо* иметь, чтобы система справлялась с потоком заявок, определим из условия

$$n > \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2)$$

В этом случае выполняется соотношение

$$\frac{\lambda}{\mu n} < 1, \quad (3)$$

которое означает, что число заявок, поступивших в систему за единицу времени, не превосходит числа заявок, обслуженных системой за это же время.

Вероятность отказа в обслуживании заявки определим как вероятность того, что при поступлении заявки в систему все *n* ее каналов будут заняты:

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (4)$$

Отсюда *вероятность обслуживания* (а также и *относительная пропускная способность* системы) равны вероятности противоположного события:

$$P_{об} = Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 = 1 - P_{отк} = 1 - p_n \quad (5)$$

Абсолютная пропускная способность - число заявок, обслуженных системой в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right) = (1 - p_n) \quad (6)$$

Так как каждый канал обслуживает μ заявок в единицу времени, то *среднее число занятых каналов* можно вычислить:

$$\overline{K} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right) = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0\right) = \overline{N}_{об} = \rho(1 - p_n) \quad (7)$$

$$T_{об}^{-} = \frac{1}{\lambda}\overline{K} = \frac{1}{\lambda}\overline{N}_{об} \quad (8)$$

или

$$\overline{T}_{сис} = \frac{1}{\lambda}\overline{N}_{сис} \quad (9)$$

Формула Литтла показывает, что среднее время $T_{сис}$ пребывания заявки в СМО равно среднему числу заявок в системе Nсис, деленному на интенсивность λ входящего потока заявок, или, другими словами, среднее время $T_{сис}$ пребывания заявки в СМО прямо пропорционально среднему числу заявок в системе $T_{сис}$ с коэффициентом прямой пропорциональности, равным обратной величине интенсивности λ входящего потока заявок.

Среднее время обслуживания каналом одной заявки:

$$T_{об} = \frac{1}{\mu} \quad (10)$$

Поток обслуживания $П_{об}$ каждым каналом будет простейшим с интенсивностью

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{об}} \quad (11)$$

Где $\overline{T}_{об}$ - среднее время обслуживания одной заявки.

Пример: Заявки на телефонные переговоры в переговорный пункт поступают с интенсивностью 90 заявок в час. Считая среднюю продолжительность разговора равной 3 минутам, определить оптимальное число телефонных номеров, чтобы 90% всех заявок на переговоры были удовлетворены.

Одноканальная СМО с ожиданием

Рассмотрим функционирование одноканальной системы S, в которую поступает простейший поток требований интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ.

По числу заявок, находящихся в системе, обозначим состояния системы: $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots S_n$, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок (одна обслуживается, остальные k-1 стоят в очереди). Никаких ограничений на длину очереди нет. Примерами таких систем может служить телефон-автомат, кассир в магазине, железнодорожная касса и т.д. Так как поток заявок и обслуживания ординарен, и число состояний системы бесконечно, граф состояний такой системы изображается в виде схемы гибели и размножения на рис.4:

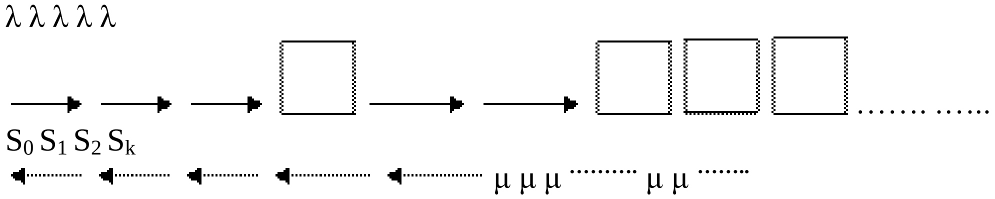


Рис. 4: Одноканальная СМО с ожиданием.

Интенсивность μ, потока обслуживаний не меняется при переходе из состояния S_k в состояние S_{k-1} и обратна по величине среднему времени обслуживания заявки:

$$\mu = \frac{1}{T_{об}} \quad (12)$$

Финальные вероятности состояний такой системы существуют только в случае**,** если выполнено условие ρ < 1 , так как в этом случае очередь не будет расти до бесконечности.

Уравнение для нахождения p_0 получим аналогично тому как это было сделано для одноканальной системы с отказами:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n} + \ldots\right)^{-1} \quad (13)$$

С учетом формулы

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (14)$$

получим

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n + \ldots\right)^{-1} \quad (15)$$

где ρ – показатель нагрузки канала обслуживания.

Так как при ρ < 1 предельные вероятности существуют, то выражении ев скобках представляет собой сумму бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии, предел которого равен:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n + \ldots\right) = \frac{1}{1 - \rho} \quad (16)$$

откуда

$$p_0 = 1 - \rho \quad (17)$$

Формула для вероятностей предельных состояний будут иметь вид:

$$p_1 = \rho p_0\ ,\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0\ , \ldots\ldots ,\ p_k = \rho^k \cdot p_0\ ,\ p_n = \rho^n \cdot p_0 \ \ldots \quad (18)$$

Предельные вероятности состояний S_k также образуют убывающую геометрическую прогрессию, поэтому наиболее высокой будет вероятность p_0, то есть вероятность простоя системы и готовности принять заявку к обслуживанию.

Формулы для расчета основных показателей эффективности работы системы.

Вероятность отказа в обслуживании заявки при условии неограниченности очереди равна нулю, так как все заявки в конце концов будут обслужены. Отсюда *вероятность обслуживания* (а также и *относительная пропускная способность* системы) равна единице:

$$Q = P_{об} = 1 . \quad (190)$$

Абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока, так как обслуживаются все заявки: $A = \lambda Q = \lambda$ (20)

Среднее время обслуживания каналом одной заявки: $T_{об} = \dfrac{1}{\mu}$ (21)

Так как вероятность того, что в системе находится k заявок, равна p_k, *среднее число заявок в системе* определим как математическое ожидание числа заявок в системе (под обслуживанием и в очереди): $L_{сист} = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ (22)

Подставив в формулу выражение для p_k , получим: $L_{сист} = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k$ (23)

При $\rho < 1$ такой ряд сходится, что можно проверить, воспользовавшись каким-либо признаком сходимости числовых рядов.

Заметим, что $k\rho^k$ - это производная по ρ функции ρ^k .

Применив правило вычисления производной суммы, поменяем местами знак суммы и знаки дифференцирования:

$$L_{сист} = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d(\rho^k)}{dk} = (1-\rho)\frac{d}{dk}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \quad (24)$$

Но теперь под знаком суммы находится убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы. Поэтому

$$L_{сист} = (1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) = (1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{1-\rho} \quad (25)$$

Среднее число заявок под обслуживанием $L_{об}$ найдем как математическое ожидание числа обслуживаемых заявок. Это либо 0 заявок, когда канал свободен, либо 1 заявка, когда канал занят: $L_{об} = 0p_0 + 1(1-p_0) = 1 - p_0$ (26)

Отсюда видно, что *среднее число заявок под обслуживанием* равно вероятности того, что канал занят: $L_{об} = P_{зан} = 1 - p_0 = 1-(1-\rho) = \rho$ (27)

Очевидно, *среднее число заявок в очереди* равно разности между числом заявок в системе и числом обслуживаемых заявок: $L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \dfrac{\rho}{1-\rho} - \rho = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$ (28)

Среднее время пребывания заявки в системе (или *в очереди)* можно найти по *формулам Литтла,* разделив среднее число заявок в системе (в очереди) на интенсивность потока заявок:

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda}L_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \quad (29) \qquad T_{оч} = \frac{1}{\lambda}L_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} \quad (30)$$

Формулы Литтла основаны на том, что если система справляется с потоком заявок, то интенсивности входящего и выходящего потока заявок равны, то есть обслуживаются все заявки, поступающие в систему.

Пример:

Железнодорожная касса обслуживает по одному человеку. Интенсивность потока пассажиров 0,45. Среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты. Найти все предельные характеристики эффективности функционирования одноканальной СМО с ожиданиями.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$n := 1$

$\lambda := 0.45$

$T_{об} := 2$

$\mu := \dfrac{1}{T_{об}} \qquad \mu = 0.5$

$\rho := \dfrac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 0.9$

Среднее число заявок в очереди

$N_{оч} := \dfrac{\rho^2}{(1-\rho)} \qquad N_{оч} = 8.1$

Среднеечисло заявок под обслуживанием

$N_{об} := \rho \qquad N_{об} = 0.9$

Среднее число заявок в системе

$N_{сис} := N_{оч} + N_{об} \qquad N_{сис} = 9$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$T_{оч} := \dfrac{N_{оч}}{\lambda} \qquad T_{оч} = 18$

Среднее время пребывания заявки в системе (как в очереди, так и под обслуживанием)

$T_{сис} := T_{оч} + T_{об} \qquad T_{сис} = 20$

Одноканальная СМО с ограниченной очередью

В систему поступает пуассоновский поток требований интенсивностью λ, поток обслуживания имеет интенсивность μ, максимальное число мест в очереди – *m* . Если заявка поступает в систему, когда все места в очереди заняты, она покидает систему необслуженной.

Финальные вероятности состояний такой системы всегда существуют, так как число состояний конечно:

S_0 – система свободна и находится в состоянии простоя;

S_1 – обслуживается одна заявка, канал занят, очереди нет;

S_2 – одна заявка обслуживается, одна в очереди;

…

S_{m+1}- одна заявка обслуживается, *m* в очереди.

Граф состояний такой системы показан на рис. 5:

λ λ λ λ λ

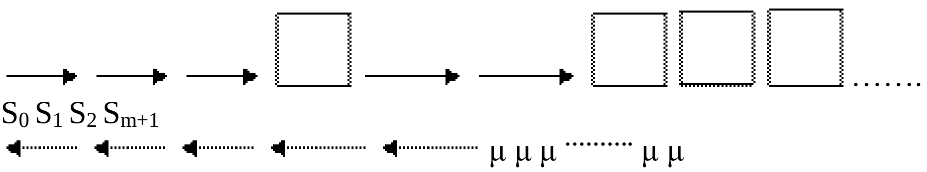


Рис. 5: Одноканальная СМО с ограниченной очередью.

В формуле для p_0 найдем сумму конечного числа членов геометрической прогрессии:

$$p_0 = \left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu^2}+...+\frac{\lambda^{m+1}}{\mu^{m+1}}\right)^{-1} \quad (31)$$

С учетом формулы для ρ получим выражение:

$$p_0 = (1+\rho+\rho^2+...+\rho^{m+1})^{-1} \quad (32)$$

В скобках находится (m+2) элементов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем ρ. По формуле суммы (m+2) членов прогрессии:

$$1+\rho+\rho^2+...+\rho^{m+1} = \frac{1-\rho^{m+2}}{1-\rho} \quad (33)$$

Отсюда $$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \quad (34)$$

Формулы для вероятностей предельных состояний будут иметь вид:

$$p_1 = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, p_2 = \frac{\rho^2(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, ..., p_k = \frac{\rho^k(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, ..., p_{m+1} = \frac{\rho m+1(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \quad (35)$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки определим как вероятность того, что при поступлении заявки в систему ее канал будет занят и все места в очереди также заняты:

$$P_{отк} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \quad (36)$$

Отсюда вероятность обслуживания (а также и от*носительная пропускная способность*) равны вероятности противоположного события:

$$P_{об} = Q = 1-p_{m+1} = 1-\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}} \quad (37)$$

Абсолютная пропускная способность – число заявок, обслуженных системой в единицу времени:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(\frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}\right) \quad (38)$$

Среднее число заявок под обслуживанием:

$$L_{об} = 1-p_0 = 1-\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{\rho(1-\rho^{m+1})}{1-\rho^{m+2}} \quad (39)$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \rho^2\frac{[1-\rho^m(m+1-mp)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)} \quad (40)$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{сист} = L_{об}+L_{оч} \quad (41)$$

Одноканальную СМО с ограниченной очередью можно рассмотреть в Mathcad.

Пример:

На стоянке обслуживается 3 машины с интенсивностью потока 0,5 и средним временем обслуживания 2,5 минуты. Определить все показатели системы.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$m := 3$
$\lambda := 0.5$
$T\text{об} := 2.5$

$$\mu := \frac{1}{T\text{об}} \qquad \mu = 0.4$$

$$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 1.25$$

$$P\text{отк} := \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \qquad P\text{отк} = 0.297$$

$$Q := 1 - P\text{отк} \qquad Q = 0.703$$

$$A := \lambda \cdot Q \qquad A = 0.351$$

$$N\text{оч} := \frac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\cdot\rho)\right]}{\left(1-\rho^{m+2}\right)(1-\rho)} \qquad N\text{оч} = 1.559$$

$$N\text{об} := \frac{\rho\cdot\left(1-\rho^{m+1}\right)}{1-\rho^{m+2}} \qquad N\text{об} = 0.878$$

$$T\text{оч} := \frac{1}{\lambda}\cdot N\text{оч} \qquad T\text{оч} = 3.118$$

$$N\text{сис} := N\text{оч} + N\text{об} \qquad N\text{сис} = 2.437$$

$$T\text{сис} := \frac{1}{\lambda}\cdot N\text{сис} \qquad T\text{сис} = 4.874$$

$$T\text{об} := \frac{1}{\lambda}\cdot N\text{об} \qquad T\text{об} = 1.756$$

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Пусть дана система S, имеющая *n* каналов обслуживания, на которые поступает простейший поток требований интенсивностью λ. Пусть поток обслуживания также простейший и имеет интенсивность μ. Очередь на обслуживание не ограничена.

По числу заявок, находящихся в системе, обозначим состояния системы: $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots S_n$, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок (максимальное число заявок под обслуживанием - n). Граф состояний такой системы изображается в виде схемы на рис. 6:

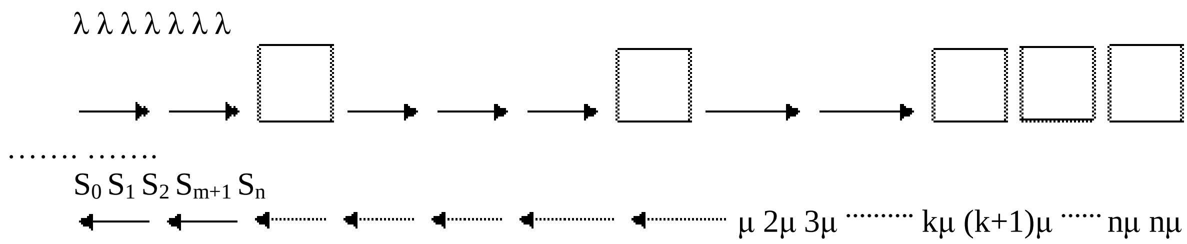


Рис. 6: Многоканальная СМО с неограниченной очередью.

Интенсивность потока обслуживаний меняется в зависимости от состояния системы: kμ при переходе из состояния S_k в состояние S_{k-1} так как может освободиться любой из k каналов; после того, как все каналы заняты обслуживанием, интенсивность потока обслуживаний остается равной *nμ,* при поступлении в систему следующих заявок.

Для нахождения финальных вероятностей состояний получим формулы аналогично тому, как это было сделано для одноканальной системы.

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = 2\mu p_2 \\ \dots\dots \\ \lambda p_{n-1} = n\mu p_n \\ \lambda p_n = n\mu p_{n+1} \\ \dots\dots \\ p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1 \end{cases} \quad (42)$$

Отсюда формулы для финальных вероятностей выражаются через

$$p_0 : p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n n!} p0, \dots, p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p0, \dots \quad (43)$$

Для нахождения p_0 получим уравнение:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} + \dots\right)^{-1} \quad (44)$$

Для слагаемых в скобках, начиная с (n + 2)-го, можно применить формулу нахождения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{\rho^{n+1}}{n n!}$ и знаменателем ρ/n:

$$S = \frac{\rho^{n+1}}{n n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho}{n}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{n - \rho} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n - \rho)} \quad (45)$$

Окончательно получим формулу Эрланга для нахождения вероятности простоя системы:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n + \rho)}\right)^{-1} \quad (46)$$

Приведем формулы для расчета основных показателей эффективности работы системы.

Система будет справляться с потоком заявок, если выполнено условие $\frac{\rho}{n} < 1$, (47) которое означает, что число заявок, поступивших в систему за единицу времени, не превосходит числа заявок, обслуженных системой за это же время. При этом *вероятность отказа в обслуживании* равна нулю.

Отсюда *вероятность обслуживания* (а также и *относительная пропускная способность* системы) равны вероятности противоположного события, то есть единице:

$$P_{об} = Q = 1 \quad (48)$$

Абсолютная пропускная способность - число заявок, обслуженных системой в единицу времени: $A = \lambda \cdot Q = \lambda$ (49)

Если система справляется с потоком заявок, то в стационарном режиме *интенсивность выходящего потока* равна интенсивности потока поступающих в систему заявок, так как обслуживаются все заявки: $\nu=\lambda$. (50)

Так как каждый канал обслуживает μ заявок в единицу времени, то *среднее число занятых каналов* можно вычислить:

$$K = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad (51)$$

Среднее время обслуживания каналом одной заявки $T_{об} = \frac{1}{\mu}$. (52)

Вероятность того, что при поступлении в систему заявка окажется в очереди, равна вероятности того, что в системе находится более чем *n* заявок:

$$P_{оч} = p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots + p_{n+m} + \ldots = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \quad (53)$$

Число заявок, находящихся под обслуживанием, равно числу занятых каналов:

$$L_{об} = K = \rho \quad (54)$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \quad (55)$$

Тогда *среднее число заявок в системе:*

$$L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} + \rho \quad (56)$$

Среднее время пребывания заявки в системе (в очереди):

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист} \quad (57)$$

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч} \quad (58)$$

Многоканальную СМО с неограниченной очередью можно рассмотреть в системе Mathcad.

Пример 1:

Салон-парикмахерская имеет 5 мастеров. В час пик интенсивность потока клиентов равна 6 человек. В час. Обслуживание одного клиента длится в среднем 40 минут. Определить среднюю длину очереди, считая ее неограниченной.

$n := 5 \qquad \lambda := 6 \qquad \mu := 1.5$

$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 4$

Очередь не будет возрастать до бесконечности, так как

$\frac{\rho}{n} = 0.8$ меньше1

Найдем вероятность простоя:

$$p0 := \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{5!(n-\rho)}\right]^{-1} \qquad p0 = 0.013$$

Найдем среднюю длину очереди:

$$Lоч := \frac{\rho^{n+1} \cdot p0}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \qquad Lоч = 2.216$$

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

Пример:

В железнодорожной кассе имеются 2 окна. Время на обслуживания одного пассажира 0,5 минут. Пассажиры подходят к кассе по 3 человека. Определить все характеристики системы.

Продолжение решения задачи в Mathcad.

$n := 2$

$m := 3$

$\lambda := 0.5$

$\mu := 0.4$

$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 1.25$

Коэффициент нагрузки

$\psi := \frac{\rho}{n} \qquad \psi = 0.625$

Вероятность того, что все каналы свободны (вероятность простаивания всей системы)

$$P(\psi) := \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot \psi^k + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\psi^{n+1}\left(1 - \psi^m\right)}{1 - \psi} \right]^{-1} \qquad P(\psi) = 0.249$$

Вероятность состояний

$k := 1$

$$p(k) := \left(\frac{n^k}{k!}\right) \cdot \psi^k \cdot P(\psi) \qquad p(k) = 0.311$$

$k := 2$

$$p(k) := \left(\frac{n^k}{k!}\right) \cdot \psi^k \cdot P(\psi) \qquad p(k) = 0.195$$

Вероятность отказа заявке

$$Pотк := \frac{n^n}{n!} \cdot \psi^{n+m} \cdot P(\psi) \qquad Pотк = 0.048$$

Вероятность того, что заявка будет принята и СМО

$Pсис := 1 - Pотк \qquad Pсис = 0.952$

Относительная пропускная способность СМО

$Q := Pсис \qquad Q = 0.952$

Абсолютная пропускная способность СМО

$A := \lambda \cdot Q \qquad A = 0.476$

Среднее число занятых каналов

$$Nоб := \frac{A}{m} \qquad Nоб = 0.159$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди

$$Nоч := \frac{n^n}{n!} \cdot \psi^{n+1} \cdot \frac{1-(m+1)\cdot\psi^m + m\cdot\psi^{m+1}}{(1-\psi)^2} \cdot P(\psi)$$

$Nоч = 0.416$

Среднее число заявок,находящихся в СМО

$Nсис := Nоб + Nоч \qquad Nсис = 0.575$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$Tоч := \frac{1}{\lambda} \cdot Nоч \qquad Tоч = 0.832$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$Tсис := \frac{1}{\lambda} \cdot Nсис \qquad Tсис = 1.15$$

Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся ко всем заявкам - как обслуженным, так и получившим отказ

$$Tоб := \frac{Q}{\mu} \qquad Tоб = 2.381$$

Многоканальная СМО с ограниченной очередью

Расчеты основных показателей функционирования системы, имеющей n каналов обслуживания, с ограничением мест в очереди, проводятся аналогично тем, которые были сделаны для системы с неограниченной очередью. Особенностью функционирования систем с ограничением длины очереди является конечное число состояний системы.

Пусть на каналы обслуживания поступает простейший поток требований интенсивностью λ.Поток обслуживания, поступающий с одного канала, также простейший и имеет интенсивность μ. Число мест в очереди ограничено и равно *m.*

По числу заявок, находящихся в системе, обозначим состояния системы:

S_0 - состояние простоя;

……….

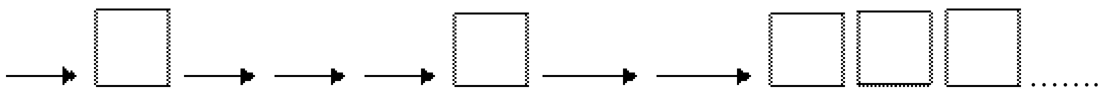
S_n - состояние системы, когда все каналы заняты обслуживанием;

S_{n+1} - все каналы заняты, одна заявка находится в очереди;

S_{n+m} - в очереди *m* заявок.

Так как потоки заявок и обслуживания ординарны, граф состояний изображается в виде схемы гибели и размножения. Отличие от подобной схемы для неограниченной очереди состоит только в том, что число состояний конечно. Граф состояний такой системы изображается в виде схемы на рис.7:

λ λ λ λ λ λ



…….

S_0 S_1 S_2 S_n S_{n+m}

μ 2μ 3μ ……… nμ nμ …… nμ

Рис. 7: Многоканальная СМО с ограниченной очередью.

Составим систему алгебраических уравнений для нахождения финальных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = 2\mu p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda p_{n-1} = n\mu p_n \\ \lambda p_n = n\mu p_{n+1} \\ \dots\dots\dots \\ \lambda p_{n+m-1} = n\mu p_{n+m} = 1 \\ p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n+m} = 1 \end{cases} \quad (59)$$

Откуда получим *формулы Эрланга* для многоканальной системы с ограниченной очередью:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!n} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}\right)^{-1} \quad (60)$$

Последние *m* слагаемых в скобках представляют собой сумму *m* первых членов геометрической прогрессии со знаменателем ρ/n которая равна:

$$\frac{\rho^{n+1}}{nn!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots + \frac{\rho^{m+1}}{n^{m-1}}\right) = \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{(n-\rho)n!} \quad (61)$$

Таким образом, для вычисления p_0 получим формулу:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{(n-\rho)n!}\right)^{-1} \quad (62)$$

Формулы для вероятностей предельных состояний будут иметь вид:

$$p_1 = \rho \cdot p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!}p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0, p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!}p_0, \dots, p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}p_0 \quad (63)$$

Приведем формулы для расчета основных показателей эффективности работы системы.

Число каналов, которые *необходимо* иметь, чтобы система справлялась с потоком заявок, определим из условия $n < \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (64)

В этом случае выполняется соотношение ρ < 1.

Вероятность отказа в обслуживании заявки определим как вероятность того, что при поступлении заявки в систему все n каналов будут заняты, и в очереди заняты все m мест: $P_{отк} = p_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m n!}p_0$ (65)

Отсюда *вероятность обслуживания* (а также и *относительная пропускная способность* системы) равны вероятности противоположного события:

$$P_{об} = Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho}{n^m n!}p_0 \quad (66)$$

Абсолютная пропускная способность - число заявок, обслуженных системой в единицу времени:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho}{n^m n!} p_0\right) \quad (67)$$

Так как каждый канал обслуживает μ заявок в единицу времени, то *среднее число занятых каналов* можно вычислить:

$$K = \frac{A}{\mu} = \rho\left(1 - \frac{\rho}{n^m n!} p_0\right) \quad (68)$$

Среднее время обслуживания каналом одной заявки**:**

$$T_{об} = \frac{1}{\mu} \quad (69)$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left[1 - \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \quad (70)$$

Среднее число заявок под обслуживанием равно среднему числу занятых каналов:

$$L_{об} = K = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0\right) \quad (71)$$

Среднее число заявок в системе (под обслуживанием и в очереди) равно:

$$L_{сист} = L_{об} + L_{оч} \quad (72)$$

Многоканальную СМО с ограниченной очередью можно рассмотреть в Mathcad.

Пример:

Площадка АЗС вмещает не более 3-х машин одновременно, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится. Интенсивность потока обслуживания λ=0,5 машин в минуту. Интенсивность потока обслуживания μ=0,4 машины в минуту. Определить все характеристики СМО.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$n := 2$

$m := 3$

$\lambda := 0.5$

$\mu := 0.4$

$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 1.25$

Коэффициент нагрузки

$\psi := \frac{\rho}{n} \qquad \psi = 0.625$

Вероятность того, что все каналы свободны (вероятность простаивания всей системы)

$$P(\psi) := \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot \psi^k + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\psi^{n+1}(1 - \psi^m)}{1 - \psi}\right]^{-1} \qquad P(\psi) = 0.249$$

Вероятность состояний

$k := 1$

$p(k) := \left(\frac{n^k}{k!}\right) \cdot \psi^k \cdot P(\psi) \qquad p(k) = 0.311$

$k := 2$

$p(k) := \left(\frac{n^k}{k!}\right) \cdot \psi^k \cdot P(\psi) \qquad p(k) = 0.195$

Вероятность отказа заявке

$Pотк := \frac{n^n}{n!} \cdot \psi^{n+m} \cdot P(\psi) \qquad Pотк = 0.048$

Вероятность того, что заявка будет принята в СМО

$Pсис := 1 - Pотк \qquad Pсис = 0.952$

Относительная пропускная способность СМО

$Q := Pсис \qquad Q = 0.952$

Продолжение задачи в Mathcad .

Абсолютная пропускная способность СМО

$A := \lambda \cdot Q \qquad A = 0.476$

Среднее число занятых каналов

$$Nоб := \frac{A}{m} \qquad Nоб = 0.159$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди

$$Nоч := \frac{n^n}{n!} \cdot \psi^{n+1} \cdot \frac{1 - (m+1) \cdot \psi^m + m \cdot \psi^{m+1}}{(1-\psi)^2} \cdot P(\psi)$$

$Nоч = 0.416$

Среднее число заявок, находящихся в СМО

$Nсис := Nоб + Nоч \qquad Nсис = 0.575$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$Tоч := \frac{1}{\lambda} \cdot Nоч \qquad Tоч = 0.832$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$Tсис := \frac{1}{\lambda} \cdot Nсис \qquad Tсис = 1.15$$

Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся ко всем заявкам - как обслуженным, так и получившим отказ

$$Tоб := \frac{Q}{\mu} \qquad Tоб = 2.381$$

Многие экономические задачи связаны с *системами массового обслуживания* (СМО), т. е. такими системами, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой — происходит удовлетворение этих запросов. СМО включает в себя следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающие устройства (каналы обслуживания), выходящий поток требований. Исследованием таких систем занимается *теория массового обслуживания.*

Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике. Так, в организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры. Другим характерным примером систем массового обслуживания могут служить склады или базы снабженческо-сбытовых организаций, и задача теории массового обслуживания в данном случае сводится к тому, чтобы установить оптимальное соотношение между числом поступающих на базу требований на обслуживание и числом обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными. Теория массового обслуживания может найти применение и при расчете площади складских помещений, при этом складская площадь рассматривается как обслуживающее устройство, а прибытие транспортных средств под выгрузку — как требование. Модели теории массового обслуживания применяются также при решении ряда задач организации и нормирования труда, других социально-экономических проблем.

В работе рассматривались такие СМО, как:

- Одноканальная СМО с отказами;
- Многоканальная СМО с отказами;
- Одноканальная СМО с ожиданием;
- Одноканальная СМО с ограниченной очередью;

- Многоканальная СМО с неограниченной очередью;
- Многоканальная СМО с ограниченной очередью.

Предметом теории СМО является построение математических моделей (т. е. образов реального экономического объекта, описанных с помощью уравнений, формул, графиков, схем и т. д.) для теоретического анализа и практического использования свойств СМО.

Эффективность функционирования СМО описывается такими показателями:

1) *Эффективность использования СМО*;
2) *Качество обслуживания*.

По дисциплине обслуживания:

— СМО *с отказами*;
— СМО *с ожиданием (очередью)*;
— Системы с ограничением *длины очереди;*
— Системы с ограниченным *временем ожидания;*

По месту нахождения источника требований:

— *Замкнутые* СМО;
— *Открытые* СМО;

По числу обслуживающих каналов:

— *Одноканальные;*
— *Многоканальные.*

3.19 Практическое занятие 33-34 (ПЗ-33-34)

Тема: Предельные вероятности состояний. Модели систем массового обслуживания при пуассоновских потоках заявок.

3.19.1 Задание для работы:

1. Правила составления уравнений Колмогорова по размеченному графу состояний непрерывной марковской цепи. Теорема Маркова. Модели систем массового обслуживания при пуассоновских потоках заявок.

1. Правила составления уравнений Колмогорова по размеченному графу состояний непрерывной марковской цепи. Теорема Маркова. Модели систем массового обслуживания при пуассоновских потоках заявок.

Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

Рассмотрим математическое описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем на примере случайного процесса из примера 1, граф которого изображен на рис. 1. Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями $\lambda_{ij}\ (i,j=0,1,2,3)$; так, переход системы из состояния S_0 в S_1 будет происходить под воздействием потока отказов первого узла, а обратный переход из состояния S_1 в S_0 — под воздействием потока "окончаний ремонтов" первого узла и т.п.

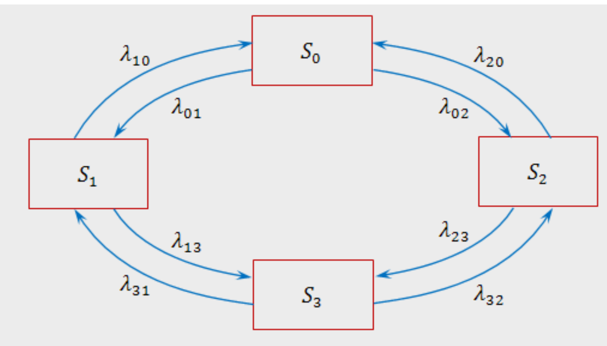


Рис. 1. Граф системы состояний случайного процесса

Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями будем называть размеченным (см. рис. 1). Рассматриваемая система S имеет четыре возможных состояния: S_0, S_1, S_2, S_3.

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = p_0(y) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1. \qquad (*)$$

Рассмотрим систему в момент t и, задав малый промежуток Δt, найдем вероятность $p_0(t + \Delta t)$ того, что система в момент $t + \Delta t$ будет находиться в состоянии S_0. Это достигается разными способами.

1. Система в момент t с вероятностью $p_0(t)$ находилась в состоянии S_0, а за время Δt не вышла из него.

Вывести систему из этого состояния (см. граф на рис. 1) можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{01} + \lambda_{02})$, т.е. с вероятностью, приближенно равной $(\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t$. А вероятность того, что система не выйдет из состояния S_0, равна $[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t]$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по первому способу (т.е. того, что находилась в состоянии S_0 и не выйдет из него за время Δt), равна по теореме умножения вероятностей:

$$p_0(t)[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t].$$

2. Система в момент t с вероятностями $p_1(t)$ (или $p_2(t)$) находилась в состоянии S_1 или S_2 и за время Δt перешла в состояние S_0.

Потоком интенсивностью λ_{10} (или λ_{20} — с- рис. 1) система перейдет в состояние S_0 с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{10}\Delta t$ (или $\lambda_{20}\Delta t$). Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по этому способу, равна $_1(t)\lambda_{10}\Delta t$ (или $_2(t)\lambda_{20}\Delta t$).

Применяя теорему сложения вероятностей, получим

$$p_0(t + \Delta t) = p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t + p_0(t)[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t],$$

откуда

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = p_1(t)\lambda_{10} + p_2(t)\lambda_{20} - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0(t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ (приближенные равенства, связанные с применением формулы (7), перейдут в точные), получим в левой части уравнения производную $p_0'(t)$ (обозначим ее для простоты p_0'):

$$p_0' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, т.е. уравнение, содержащее как саму неизвестную функцию, так и ее производную первого порядка.

Рассуждая аналогично для других состояний системы S, можно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1, \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3. \end{cases} (**)$$

Сформулируем правило составления уравнений Колмогорова. В левой части каждого из них стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части — сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния).

В системе (**) независимых уравнений на единицу меньше общего числа уравнений. Поэтому для решения системы необходимо добавить уравнение (*).

Особенность решения дифференциальных уравнений вообще состоит в том, что требуется задать так называемые начальные условия, т.е. в данном случае вероятности состояний системы в начальный момент $t = 0$. Так, например, систему уравнений (**) естественно решать при условии, что в начальный момент оба узла исправны и система находилась в состоянии S_0, т.е. при начальных условиях $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$.

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени. Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в предельном стационарном режиме, т.е. при $t \to \infty$, которые называются предельными (или финальными) вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Например, если предельная вероятность состояния S_0, т.е. $p_0 = 0{,}5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_0.

Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим. Для системы S с графом состояний, изображенном на рис. 1), такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 \end{cases} (***)$$

Систему (***) можно составить непосредственно по размеченному графу состояний, если руководствоваться правилом, согласно которому слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа — сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Пример 2. Найти предельные вероятности для системы S из примера 1, граф состояний которой приведен на рис. 1, при

$$\lambda_{01} = 1, \quad \lambda_{02} = 2, \quad \lambda_{10} = 2, \quad \lambda_{13} = 2, \quad \lambda_{20} = 3, \quad \lambda_{23} = 1, \quad \lambda_{31} = 3, \quad \lambda_{32} = 2.$$

Решение. Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы, имеет вид (***) или

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2, \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \quad (****)$$

(Здесь мы вместо одного «лишнего» уравнения системы (***) записали нормировочное условие (*)).

Решив систему (****), получим $p_0 = 0{,}4,\ p_1 = 0,\ 2,\ p_2 = 0{,}27,\ p_3 = 0{,}13$, т.е. в предельном, стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет находиться в состоянии S_0 (оба узла исправны), 20% — в состоянии S_1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% — в состоянии S_2 (второй узел ремонтируется, первый работает) и 13% времени — в состоянии S_3 (оба узла ремонтируются)

Пример 3. Найти средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы S в условиях примеров 1 и 2, если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго узлов приносит доход соответственно в 10 и 6 ден.ед., а их ремонт требует затрат соответственно в 4 и 2 ден.ед. Оценить экономическую эффективность имеющейся возможности уменьшения вдвое среднего времени ремонта каждого из двух узлов, если при этом придется вдвое увеличить затраты на ремонт каждого узла (в единицу времени).

Решение. Из примера 2 следует, что в среднем первый узел исправно работает долю времени, равную $p_0 + p_3 = 0{,}4 + 0{,}27 = 0{,}67$, а второй узел — $p_0 + p_1 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$. В то же время первый узел находится в ремонте в среднем долю времени, равную $p_1 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}13 = 0{,}33$, а второй узел — $p_2 + p_3 = 0{,}27 + 0{,}13 = 0{,}4$. Поэтому средний чистый доход $\overline{D}$ в единицу времени от эксплуатации системы, т.е. разность между доходами и затратами, равен

$\overline{D} = 0{,}67 \cdot 10 + 0{,}6 \cdot 6 - 0{,}33 \cdot 4 - 0{,}4 \cdot 2 = 8{,}18$ ден. ед.

Уменьшение вдвое среднего времени ремонта каждого из узлов в соответствии с 'будет означать увеличение вдвое интенсивностей потока «окончаний ремонтов» каждого узла, т.е. теперь $\lambda_{10} = 4,\ \lambda_{20} = 6,\ \lambda_{31} = 6,\ \lambda_{32} = 4$ и система линейных алгебраических уравнений (***), описывающая стационарный режим системы S, вместе с нормировочным условием (*) примет вид:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3, \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Решив систему, получим $p_0 = 0{,}6,\ p_1 = 0{,}15,\ p_2 = 0{,}2,\ p_3 = 0{,}05$.

Учитывая, что $p_0 + p_2 = 0{,}8,\ p_0 + p_1 = 0{,}75,\ p_1 + p_3 = 0,!2,\ p_2 + p_3 = 0{,}25$, а затраты на ремонт первого и второго узла составляют теперь соответственно 8 и 4 ден.ед., вычислим средний чистый доход $\overline{D_1}$ в единицу времени:

$\overline{D_1} = 0{,}8 \cdot 10 + 0{,}75 \cdot 6 - 0{,}2 \cdot 8 - 0{,}25 \cdot 4 = 9{,}9$ ден.ед.

Так как $\overline{D}_1$ больше $\overline{D}$ (примерно на 20%), то экономическая целесообразность ускорения ремонтов узлов очевидна.

3.19.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные термины и формулы, необходимые для работы с марковскими цепями, СМО, их классификацию;
- усвоили методы моделирования по схеме марковских цепей, применение теории СМО к решению инженерных задач;
- выработали навыки по составлению уравнений Колмогорова по размеченному графу непрерывной марковской цепи;
- усвоили основные методы моделирования СМО при пуассоновском потоке заявок.