ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.06 Алгебра и геометрия

Направление подготовки 10.03.01 Информационная безопасность

Профиль подготовки Безопасность автоматизированных систем

Квалификация выпускника бакалавр

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Алгебраические структуры	-	-	-	-	-
2	Элементы теории матриц	-	-	-	-	-
3	Элементы теории определителей.	-	-	-	-	-
4	Системы линейных уравнений	-	-	-	-	2
5	Действительное линейное арифметическое пространство	-	-	-	-	-
6	Линейные преобразования линейных пространств, операторы		-	-	6	2
7	Вектора, их свойства, классификация, арифметические действия. Векторное пространство. Линейная зависимость векторов, базис. ПДСК.	-	-	-	1	-
8	Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов, их свойства и вычисление, приложения.	-	-	-	1	2
9	Алгебраические линии. Прямая на плоскости и в пространстве. Метрическая теория прямых.	-	-	-	-	-
10	Плоскость. Способы задания. Метрическая теория плоскостей. Кривые второго порядка, их свойства и уравнения.	-	-	-	2	-
11	Поверхности вращения.	-	-	-	-	-
Итого в соответствии с РПД		-	-	-	**10**	**6**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

5.2.2 Линейные пространства и операторы линейных пространств

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Линейные пространства

Пусть V - непустое множество (его элементы будем называть векторами и обозначать $\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},$ ...), в котором установлены правила:

1) любым двум элементам $\bar{x},\ \bar{y}\in V$ соответствует третий элемент $\bar{x}+\bar{y}\in V,$ называемый суммой элементов $\bar{x},\ \bar{y}$ (внутренняя операция);

2) каждому $\bar{x}\in V$ и каждому $\alpha\in R$ отвечает определенный элемент $\alpha\bar{x}$ (внешняя операция).

Множество V называется действительным линейным (векторным) пространством, если выполняются аксиомы:

I. $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}\quad \forall\bar{x},\bar{y}\in V.$

II. $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}=\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})\quad \forall\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in V.$

III. $\exists\ \bar{0}\in V$ (нулевой элемент, такой, что $\bar{x}+\bar{0}=\bar{x},\quad \forall\bar{x}\in V$).

IV. $\forall\bar{x}\in V\quad \exists\,(-\bar{x})\in V$ (элемент, противоположный элементу $\bar{x}$), такой, что $\bar{x}+(-\bar{x})=\bar{0}.$

V. $1\cdot\bar{x}=\bar{x}\quad \forall\bar{x}\in V.$

VI. $\alpha(\beta\bar{x})=(\alpha\beta)\bar{x}\quad \forall\bar{x}\in V,\ \forall\alpha,\ \beta\in R.$

VII. $\alpha(\bar{x}+\bar{y})=\alpha\bar{x}+\alpha\bar{y}\quad \forall\bar{x},\ \bar{y}\in V,\ \forall\alpha\in R.$

VIII. $(\alpha+\beta)\bar{x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}\quad \forall\bar{x}\in V,\ \forall\alpha,\ \beta\in R.$

Аналогично определяется комплексное линейное пространство (вместо R рассматривается C).

Подпространство линейного пространства

Множество $V'\in V$ называется подпространством линейного пространства V, если:

1) $\forall \bar{x},\ \bar{y} \in V' \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in V';$

2) $\forall x \in V',\ \forall \alpha \in R(C) \Rightarrow \alpha \bar{x} \in V'.$

Линейная комбинация векторов

Линейной комбинацией векторов $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \dots,\ \bar{x}_r$ называют вектор

$$\bar{y} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_r \bar{x}_r = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \bar{x}_k,$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_r \in R(C)$ - коэффициенты линейной комбинации. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0,$ комбинация называется тривиальной, если $\exists \alpha_i \neq 0,$ - нетривиальной.

Линейная зависимость и независимость векторов

Система $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \dots,\ \bar{x}_r \in V$ линейно зависима $\Leftrightarrow \exists \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_r \in R(C),$ $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 > 0,$ что $\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_r \bar{x}_r = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \bar{x}_k = 0.$

Система $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \dots,\ \bar{x}_r \in V$ линейно независима $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \bar{x}_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0 \right).$

Критерий линейной зависимости векторов

Для того чтобы векторы $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \dots,\ \bar{x}_r$ ($r > 1$) были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Размерность линейного пространства

Линейное пространство V называется n-мерным (имеет размерность n), если в нем:

1) существует n линейно независимых векторов;

2) любая система $n + 1$ векторов линейно зависима.

Обозначения : $n = \dim V$;.

Линейные операторы.

Будем говорить, что в n-мерном линейном векторном пространстве R^n задан **оператор** $\bar{A}$ (преобразование , отображение), если каждому вектору $\vec{x} \in R^n$ по некоторому правилу поставлен в соответствие единственный вектор $\bar{A}\vec{x} \in R^n$:

$\bar{A}\vec{x}$ - образ вектора $\vec{x}$

Оператор называется **линейным**, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ и для любого действительного числа α выполняется:

1. $\bar{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \bar{A}\vec{x} + \bar{A}\vec{y}$

2. $\widetilde{A}(\alpha\vec{x})=\alpha(\widetilde{A}\vec{x})$

Оператор $\widetilde{E}$ называется **тождественным**, если для любого вектора его образ $\widetilde{E}\vec{x}$ совпадает с самим вектором : $\widetilde{E}\vec{x}=\vec{x}$.

Оператор $\widetilde{O}$ называется **нулевым**, если для любого вектора его образом является нулевой вектор: $\widetilde{O}\vec{x}=\vec{0}$.

Пусть в пространстве задан базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ и задан линейный оператор . Тогда образы базисных векторов $\overrightarrow{\widetilde{A}e_1},\widetilde{A}\vec{e}_2,\ldots,\widetilde{A}\vec{e}_n » R^n$ и их также можно разложить по заданному базису:

$$\begin{cases}\widetilde{A}\vec{e}_1=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\ldots+a_{n1}\vec{e}_n\\ \widetilde{A}\vec{e}_2=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{n2}\vec{e}_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \widetilde{A}\vec{e}_n=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\,a_{n2}\ldots a_{nn}\end{pmatrix}$$

–**матрица линейного оператора** в базисе .

Рассмотрим произвольный вектор пространства :

$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$

Его образ , следовательно, его также можно разложить по заданному базису:

$\widetilde{A}\vec{x}=x_1^{¿}\vec{e}_1+x_2^{¿}\vec{e}_2+\ldots+x_n^{¿}\vec{e}_n$

Обозначим:

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}$ - матрица-столбец координат , $X^{¿}=\begin{pmatrix}x_1^{¿}\\x_2^{¿}\\\ldots\\x_n^{¿}\end{pmatrix}$ - матрица-столбец координат образа $\widetilde{A}\vec{x}$.

Тогда, в силу линейности оператора :

$X^{¿}=A\cdot X$ - **связь между координатами вектора и его образа.**

<u>Пример:</u>

Линейный оператор в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix}3\,2\\-1\,5\end{pmatrix}$.

Найти образ вектора $\vec{x}=4\vec{e}_1-3\vec{e}_2$.

По условию $X=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, тогда

$X^{¿}=\begin{pmatrix}3\,2\\-1\,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-19\end{pmatrix}$, следовательно, $\widetilde{A}\vec{x}=6\vec{e}_1-19\vec{e}_2$

Пусть в пространстве задан линейный оператор . Ненулевой вектор называется **собственным вектором** линейного оператора , если найдется такое число λ, что

$$\widetilde{A}\vec{x}=\lambda\vec{x} .$$

λ – **собственное значение** оператора , соответствующее вектору .

, с другой стороны $X^{¿}=\lambda\cdot X$, поэтому $A\cdot X=\lambda\cdot X$, или $(A-\lambda E)\cdot X=O$.

Этому матричному уравнению соответствует система линейных однородных уравнений, которая всегда имеет нулевое решение. Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю $|A-\lambda E|=0$, или:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda\,a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\,a_{22}-\lambda\ldots a_{2n}\\ a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

- это **характеристическое уравнение** оператора .

$|A-\lambda E|$ - **характеристический многочлен** оператора .

Пример:

Найти собственные значения и собственные вектора оператора , заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}14\\91\end{pmatrix}$.

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda\, 4\\ 9\, 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-35=0\ \lambda_1=-5,\ \lambda_2=7$

$\lambda_1=-5\ (A-\lambda E)\cdot X=O\quad \lambda_1=7\ (A-\lambda E)\cdot X=O$

$\begin{cases}6x_1+4x_2=0\\9x_1+6x_2=0\end{cases}\quad x_1=\dfrac{-2}{3}x_2\quad X=\begin{pmatrix}\dfrac{-2}{3}\\c\end{pmatrix}\ \begin{cases}-6x_1+4x_2=0\\9x_1-6x_2=0\end{cases}\quad x_1=\dfrac{2}{3}x_2\quad X=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\\d\end{pmatrix}$

Квадратичные формы.

Квадратичной формой $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ от n-переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

где a_{ij} - действительные числа, причем $a_{ij}=a_{ji}$.

Матрица А, составленная из коэффициентов называется **матрицей квадратичной формы.**

Квадратичную форму можно записать в матричном виде:

$$L=(x_1x_2\ldots x_n)\cdot\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\\a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\\\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}$$

Пример:

Записать квадратичную форму $L=2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+10x_2x_3$ в матричном виде.

$$L=(x_1x_2x_3)\cdot\begin{pmatrix}22-3\\235\\-35-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Квадратичная форма называется **канонической**, если все ее коэффициенты $a_{ij}=0$ ¶ $i\neq j$:

$L=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2$

В этом случае матрица квадратичной формы будет диагональной.

Можно показать, что любая квадратичная форма с помощью линейного оператора может быть приведена к каноническому виду, причем не единственным образом. Полученные различными способами канонические виды квадратичной формы обладают рядом общих свойств.

Теорема: (закон инерции квадратичных форм) Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду (без доказательства).

Квадратичная форма называется **положительно (отрицательно) определенной**, если при всех значениях переменных квадратичная форма положительна (отрицательна).

Существуют критерии установления знакоопределенности квадратичной формы:

1. Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы квадратичной формы были положительны (отрицательны).

2. Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры (миноры, содержащие главные диагональные элементы) матрицы этой формы были положительны. Для отрицательно определенной квадратичной формы знаки главных миноров чередуются, начиная со знака «минус» для минора первого порядка.

   <u>Пример:</u>

   $L=13x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2$

1. $A=\begin{pmatrix}13 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

   $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}13-\lambda & -3\\ -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-18\lambda-56=0\ \lambda_1=4,\ \lambda_2=14$

   Следовательно, заданная форма положительно определенная.

2. $|a_{11}|=13>0$

   $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13 & -3\\ -3 & 5\end{vmatrix}=65-9=56>0$

   Следовательно, заданная форма положительно определенная.

Матрица перехода от базиса к базису

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Пусть в пространстве R^n имеется два базиса: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ и $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$.
Первый условимся называть **старым** базисом, второй – **новым**. Каждый из векторов нового базиса, можно линейно выразить через векторы старого базиса:

$$\bar{e}_1' = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \ldots + a_{n1}\bar{e}_n,$$

$$\bar{e}_2' = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \ldots + a_{n2}\bar{e}_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{e}_n' = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \ldots + a_{nn}\bar{e}_n.$$

Новые базисные векторы получаются из старых с помощью матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

При этом коэффициенты их разложений по старым базисным векторам образуют столбцы этой матрицы. Матрица $\mathbf{A}$ называется **матрицей перехода** от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ к базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$.

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ не равен нулю, так как в противном случае ее столбцы, а следовательно и векторы $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$, были бы линейно зависимы.

Обратно, если $\Delta(\mathbf{A})\neq \mathbf{0}$, то столбцы матрицы линейно независимы, и следовательно векторы $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$, получающиеся из базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ с помощью матрицы $\mathbf{A}$, линейно независимы и значит образуют некоторый базис. Таким образом,

матрицей перехода может служить любая квадратная матрица порядка n с отличным от нуля определителем.
Рассмотрим теперь, как связаны между собой координаты одного и того же вектора в старом и новом базисах. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$ в старом базисе и $\bar{x} = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' + ... + x_n'\bar{e}_n'$ - в новом. Подставляя в последнее равенство вместо $\bar{e}_1', \bar{e}_2', ..., \bar{e}_n'$ их выражение получим, что

$$x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \cdots + a_{1n}x_n',$$
$$x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \cdots + a_{2n}x_n',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \cdots + a_{nn}x_n'.$$

Таким образом, старые координаты вектора $\bar{x}$ получатся из новых его координат с помощью той же матрицы $\mathbf{A}$, только коэффициенты соответствующих разложений образуют строки этой матрицы.

5.2.3.1 Линейная зависимость и независимость векторов

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

Элементы пространства R^n называют векторами.
Система векторов $X_1, X_2, ..., X_m$ называется линейно зависимой, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ одновременно не равные нулю такие что $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0$, где 0 – это вектор с нулевыми координатами.

Сумму $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i$ называем линейной комбинацией векторов $X_1, X_2, ..., X_m$.
Пример 1. В пространстве R^3 рассмотрим систему векторов $X = (1,0,1), Y = (0,1,0), Z = (1,1,1).$ Система X, Y, Z линейно зависима.
Действительно $X + Y - Z = 0$.

Система векторов называется линейно независимой, ***если из*** $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0$ ***следует, что*** $a_1 = a_\alpha = ... = a_m = 0$

Пример 2. Система векторов X, Y из примера 1 линейно независима.
Действительно из $\alpha X + \beta Y = (\alpha, \beta, \alpha) = (0,0,0)$ следует, что $\alpha = \beta = 0$.

Линейная оболочка системы векторов. Подпространство. Базис подпространства

Пусть $M_X = (X_1, X_2, ..., X_p)$ – система векторов из R^n. **Линейной оболочкой** $L(X_1, X_2, ..., X_p)$ **системы векторов** $M_X = (X_1, X_2, ..., X_p)$ называется множество всех линейных комбинаций векторов данной системы, т.е

$$L(X_1, X_2, ..., X_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i \mid \lambda_i \in R, i = 1,2,..., p \right\}$$

Свойства линейной оболочки: Если $X, Y \in L(X_1, X_2, ..., X_p)$, то для $\alpha \in R$ $\alpha X \in L(X_1, X_2, ..., X_p)$ и $X + Y \in L(X_1, X_2, ..., X_p)$.

Линейная оболочка обладает свойством замкнутости по отношению к линейным операциям (операции сложения и умножения на число).

Подмножество пространства R^n, обладающее свойством замкнутости по отношению к операциям сложения и умножения на числа, называется **линейным подпространством пространства R^n.**

Линейная оболочка $L(X_1, X_2, ..., X_p)$ системы векторов $M_X = (X_1, X_2, ..., X_p)$ – линейное подпространство пространства R^n.

Система векторов $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ из $L(X_1, X_2, ..., X_p)$ называется базисом $L(X_1, X_2, ..., X_p)$,если

Любой вектор $X \in L(X_1, X_2, ..., X_p)$ можно выразить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$X = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_m Y_m.$$

2. Система векторов $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ линейно независима.

Лемма Коэффициенты $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$разложения вектора $X \in L(X_1, X_2, ..., X_p)$ по базису $Y_1, Y_2, ..., Y_r$ определены однозначно.

Вектор $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \in R^m$, составленный из коэффициентов разложения вектора $X \in L(X_1, X_2, ..., X_p)$ по базису $Y_1, Y_2, ..., Y_r$ называется координатным вектором вектора X **в базисе** $E = \langle Y_1, Y_2, ..., Y_m \rangle$.

Обозначение $[X]_E = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$. Данная запись подчеркивает, что координаты вектора зависят от базиса.

Элементарные преобразования системы векторов

Пусть $X_1, X_2, ..., X_m$ – система m векторов из R^n. Основными элементарными преобразованиями системы векторов $X_1, X_2, ..., X_m$ являются

1. $(X_1, X_2, ..., X_s, ..., X_m) \to (X_1, X_2, ..., X_s + \sum_{i \neq s} \alpha_i X_i, ..., X_m)$ - добавление к одному из векторов (вектору X_s) линейной комбинации остальных.

2. $(X_1, X_2, ..., X_s, ..., X_m) \to (X_1, X_2, ..., \alpha X_s, ..., X_m)$ - умножение одного из векторов (вектора X_s) на число α не равное нулю.

3. $(X_1, X_2, ..., X_s, ..., X_p, ..., X_m) \to (X_1, X_2, ..., X_p, ..., X_s, ..., X_m)$ перестановка двух векторов (X_s, X_p) местами.

Системы векторов $M_X = (X_1, X_2, ..., X_m)$, $M_Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ будем называть эквивалентными (обозначение $M_X \approx M_Y$), если существует цепочка элементарных преобразований переводящая первую систему во вторую.

Отметим свойства введенного понятия эквивалентности векторов

$M_X \approx M_X$ (рефлексивность)

Из $M_X \approx M_Y$ следует, что $M_Y \approx M_X$ (симметричность)
Если $M_X \approx M_Y$ и $M_Y \approx M_Z$, то $M_X \approx M_Z$ (транзитивность)

Теорема. Если система векторов $M_X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ линейно независима, а $M_Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ей эквивалентна, то система $M_Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ – линейно независима.

Доказательство. Очевидно, что теорему достаточно доказать для системы $M_Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ полученной из $M_X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ с помощью одного элементарного преобразования.. Предположим что система векторов $M_X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ линейно независима. Тогда из $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i = 0$ вытекает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. Пусть система $M_Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ получена из $M_X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ с помощью одного элементарного преобразования. Очевидно, что перестановка векторов или умножение одного из векторов на число не равное нулю не меняет линейной независимости системы векторов. Допустим теперь, что система векторов $M_Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ получена из системы $M_X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ прибавлением к вектору X_s линейной комбинации остальных, $M_Y = (X_1, X_2, \dots, X_s + \sum_{i \neq s} \alpha_i X_i, \dots, X_m)$. Нужно установить, что из

$$\sum_{i \neq s}^{m} \mu_i X_i + \mu_s (X_s + \sum_{i \neq s} \alpha_i X_i) = 0 \qquad (1)$$

вытекает что $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 0.$

Поскольку $\sum_{i \neq s}^{m} \mu_i X_i + \mu_s (X_s + \sum_{i \neq s} \alpha_i X_i) = \mu_s X_s + \sum_{i \neq s} (\mu_i + \mu_s \alpha_i) X_i$, то из (1) получаем

$$\mu_s X_s + \sum_{i \neq s} (\mu_i + \mu_s \alpha_i) X_i = 0 \qquad (2)$$

Т.к. система $M_X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ – линейно независима, то из (2) следует, что $\mu_s = 0, \quad \mu_i + \mu_s \alpha_i = 0$ для всех $i \neq s$.

Отсюда получаем $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 0$. Что и требовалось доказать.

Изоморфизм линейных пространств

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Определение 7.13 Линейные пространства над числовым полем P называются изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие между векторами этих пространств, сохраняющее операции сложения векторов и умножения на скаляр.

Для доказательства изоморфизма линейных пространств V и W требуется построить взаимно однозначное отображение $\varphi: \quad V \xrightarrow{\varphi} W$, обладающее свойствами сохранения операции:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad x, y \in V$
2. $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x), \quad \alpha \in P, x \in V$

Следствие 7.10. При изоморфизме нулевой вектор переходит в нулевой вектор.

Доказательство. Действительно, $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot \varphi(\mathbf{0}) = \theta$.

Лемма 7.3 Пусть V, W, U линейные пространства над полем P. Пусть W изоморфно V, а V изоморфно U, тогда W изоморфно U.

Доказательство. По условию существуют взаимно однозначные соответствия $\varphi_1 : W \xrightarrow{\varphi_1} V$ и $\varphi_2 : V \xrightarrow{\varphi_2} U$, обладающие свойствами сохранения операции, то есть

1. $\varphi_1(x+y) = \varphi_1(x) + \varphi_1(y)$, $x, y \in W$
2. $\varphi_1(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi_1(x)$, $\alpha \in P, x \in W$
3. $\varphi_2(x+y) = \varphi_2(x) + \varphi_2(y)$, $x, y \in V$
4. $\varphi_2(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi_2(x)$, $\alpha \in P, x \in V$

Отображение φ_3, получаемое последовательным применением φ_1 и φ_2, является взаимно однозначным соответствием между пространством W и пространством U. Далее, имеем

1. $\varphi_3(x+y) = \varphi_2(\varphi_1(x+y)) = \varphi_2(\varphi_1(x) + \varphi_1(y)) = \varphi_3(x) + \varphi_3(y)$, где $x, y \in W$.
2. $\varphi_3(\alpha x) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha x)) = \varphi_2(\alpha \varphi_1(x)) = \alpha \varphi_2(\varphi_1(x)) = \alpha \varphi_3(x)$, $\alpha \in P, x \in W$.

Тем самым изоморфизм установлен.

Лемма 7.4 Пространство *V* над числовым полем *P* размерности *n* изоморфно арифметическому пространству P^n.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ - базис V. Каждому вектору x из V поставим в соответствие его координаты. Данное соответствие является взаимно однозначным (Теорема 7.4) и сохраняет операции. Тем самым изоморфизм установлен.

Лемма 7.5. При изоморфизме базис переходит в базис.

Доказательство. Пусть φ - изоморфизм пространства V на W, $a_1, \ldots, a_n$ - базис V. Разложим произвольный вектор x из V по базису $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. По определению изоморфизма $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(a_i)$, и значит, в силу взаимно однозначности отображения, через систему векторов $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$ линейно выражается любой вектор пространства W. Методом от противного покажем линейную независимость системы векторов $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$. Пусть не так, тогда найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(a_i) = \theta$. Последнее равенство, используя свойства изоморфизма, запишем в виде $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = \varphi(\mathbf{0})$. В силу взаимно однозначности изоморфизма выводим $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \mathbf{0}$, т.е. система векторов $a_1, \ldots, a_n$ - линейно зависима. К полученному противоречию с условиями нас привело допущение о линейной зависимости системы векторов $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$. Таким образом, система векторов $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$ является полной линейно независимой системой, т.е. базисом линейного пространства W.

Теорема 7.10. Линейные пространства V и W над полем P изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Доказательство. Если размерности пространств V и W совпадают и равны n, то оба пространства изоморфны P^n (Лемма 7.4), а, значит и между собой (Лемма 7.3). Обратно, если пространства изоморфны, то при изоморфизме базис переходит в базис (Лемма 7.5), и, значит, размерности пространств равны.

Изоморфизм пространств позволяет переносить терминологию, принятую в одном пространстве на изоморфные пространства.

5.2.3.2 Свойства векторного и смешанного произведения, приложения

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Некоторые приложения векторного произведения
Установление коллинеарности векторов

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (и наоборот), т. е.

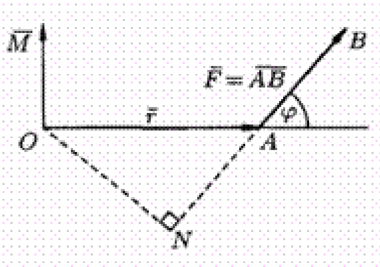
$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов *a* и b |*a xb* | = |a| * |b |sing , т. е. S $_{пар}$ = |a x b |. И, значит, DS =1/2|a x b |.

Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке A приложена сила *F =AB* и пусть *O* — некоторая точка пространства (см. рис.).



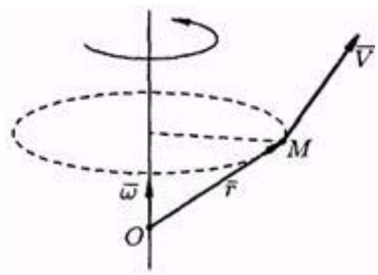
Из физики известно, что *моментом си лы F* относительно точки *O* называется вектор *M,* который проходит через точку *O* и:
1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки *O, A, B;*
2) численно равен произведению силы на плечо

$$|\bar{M}| = |\bar{F}| \cdot ON = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin\varphi = |\bar{F}| \cdot |\bar{OA}| \sin(\widehat{\bar{F}, \bar{OA}});$$

3) образует правую тройку с векторами OA и A B.
Стало быть, M=OA x F .

Нахождение линейной скорости вращения

Скорость v точки M твердого тела, вращающегося с угловой скоростью w вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера v =w xr , где r =OM, где O—некоторая неподвижная точка оси (см. рис).



Некоторые приложения смешанного произведения

Определение взаимной ориентации векторов в пространстве
Определение взаимной ориентации векторов a, b и c основано на следующих соображениях. Если abc > 0 , то a , b , c — правая тройка; если abc <0 , то a, b , c - левая тройка.
Установление компланарности векторов

Векторы a, b и c компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю
$(\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{c} \neq \bar{0})$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \iff \text{векторы } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарны.}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды
Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах a, b и c вычисляется как V =|abc|, а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен V =1/6*|abc |.

Деление отрезка в заданном отношении

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Если точка М(х; у) лежит на прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, и дано отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, в котором точка М делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, то координаты точки М определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

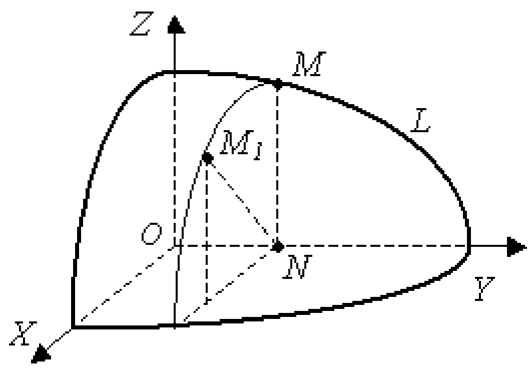
Если точка М является серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$, то ее координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

5.2.4 Поверхности вращения

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Определение. Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением какой-либо плоской линии вокруг прямой, лежащей в плоскости этой линии.
Для вывода уравнения поверхности вращения необходимо выбрать систему координат. Чтобы уравнение поверхности вращения выглядело проще, ось вращения принимают за одну из координатных осей.



Пусть в координатной плоскости Oyz задана кривая L уравнением F(Y, Z)=0 (рис. 24). Вращаем кривую L вокруг оси Oy. Получим некоторую поверхность. Пусть M(x, y, z) - произвольная точка получившейся поверхности. Тогда $|\overline{MN}| = \sqrt{x^2 + z^2}$,
$|MN| = |M_1N|$, но $|M_1N| = \pm Z$ т.к. если взять точку M_1 с отрицательной аппликатой, то

$|M_1N| = -Z$

Следовательно, имеем Y = y, $Z = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$ и координаты точки M(x, y, z) удовлетворяют уравнению

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0. \qquad (*)$$

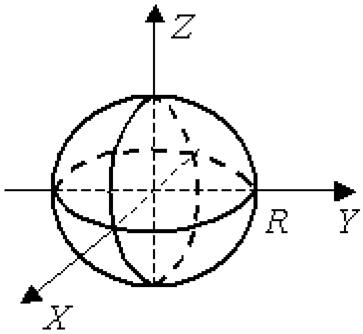
Уравнение (62) и есть искомое уравнение поверхности вращения.

Т. о., чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости Oyz, вокруг оси Oy, нужно в уравнении этой линии заменить z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

Аналогичные правила будут иметь место и по отношению к уравнениям поверхностей, полученных вращением плоских линий вокруг других координатных осей.

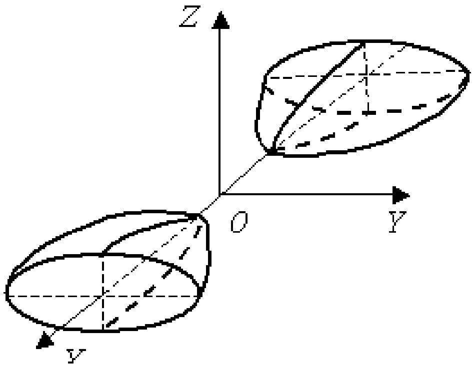
Пример 1. Найти уравнение поверхности вращения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ около оси Ox.

Решение. Согласно уравнению (*), следует в уравнении окружности заменить y на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Получим уравнение поверхности вращения $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, т.е. получим уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом, равным R.



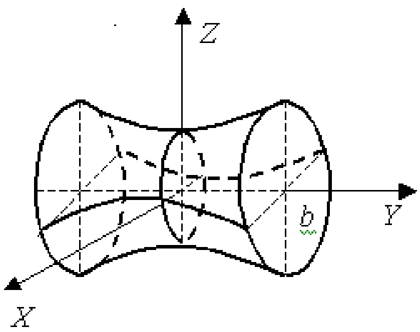
Пример 2. Найти уравнение поверхности вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг действительной оси.

Решение. Вращение происходит вокруг оси Ox, следовательно, уравнение поверхности вращения будет $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$ Такая поверхность носит название двуполостного гиперболоида вращения .



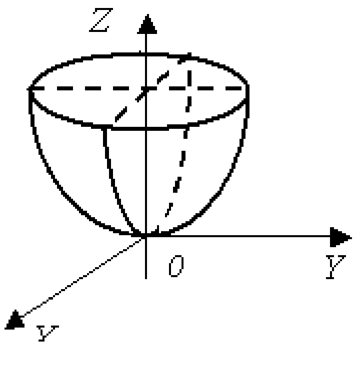
Пример 3. Найти уравнение поверхности вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг мнимой оси.

Решение. Вращение происходит вокруг оси Oy, следовательно, уравнение поверхности вращения будет $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$



Такая поверхность называется однополостным гиперболоидом вращения.

Пример 4. Найти уравнение поверхности вращения гиперболы $z = y^2$ вокруг оси Oz.



Решение. Поверхность $z = x^2 + y^2$, получаемая в результате вращения, называется параболоидом вращения.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие 1 (ПЗ-1) Алгебраические структуры.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- определение понятий бинарного отношения, операции, алгебры, модели, группоида, полугруппы, группы, кольца, поля;
- построение алгебраических структур и доказательство их принадлежности к тому или иному виду;
- подбор примеров, иллюстрирующий свойства структур.

3.2 Практическое занятие 2 (ПЗ-2) Матрицы, операции над ними

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- классификацию матриц;
- условия осуществления операций над матрицами;
- алгоритм перемножения матриц.

3.3 Практическое занятие 3 (ПЗ-3) Определители и их свойства

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- свойства определителей;
- алгоритмы вычисления определителей третьего порядка;
- применение теоремы Муавра-Лапласа.

3.4 Практическое занятие 4 (ПЗ-4) СЛУ и методы их решения.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- условие существования и алгоритм нахождения обратной матрицы
- классификацию СЛУ по количеству решений;
- условия и алгоритмы применения метода Крамера и метода обратной матрицы к решению определенных СЛУ.

3.5 Практическое занятие 5 (ПЗ-5) СЛОУ и методы их решения

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- особенности неопределенных систем;
- структуру решений СЛОУ;

- алгоритм применения метода Гаусса;
- понятие фундаментальной системы решений СЛУ и ее применение при нахождении общего решения.

3.6 Практическое занятие 6-7 (ПЗ-6-7) Линейные операторы и их свойства

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- определение понятия линейного оператора, его свойства, матрицу;
- матрицу перехода от базиса к базису;
- алгоритм нахождения собственных значений и векторов линейного оператора;
- диагональную матрицу оператора и ее свойства.

3.7 Практическое занятие 8 (ПЗ-8) Вектора, их классификация, действия над ними.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- различные подходы к определению понятия вектора, векторного пространства;
- классификацию векторов;
- алгоритмы выполнения операций над векторами в векторной и координатной форме;
- понятие орта, проекции вектора на вектор;
- построение системы координат.

3.8 Практическое занятие 9 (ПЗ-9) Векторное пространство. Скалярное и векторное произведение векторов.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- понятие векторного пространства, линейной зависимости- независимости векторов;
- свойства системы линейно независимых векторов;
- определение, вычисление, свойства скалярного и векторного произведения;
- приложения скалярного и векторного произведения.

3.9 Практическое занятие 10 (ПЗ-10) . Смешанное произведение векторов, решение комплексных задач.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- определение, вычисление, свойства смешанного произведения векторов;

- признаки коллинеарности, ортогональности, компланарности векторов;
- алгоритмы вычисления скалярного, векторного, смешанного произведения векторов;
- применение скалярного, векторного, смешанного произведения векторов к решению комплексных геометрических задач;

3.10 Практическое занятие 11 (ПЗ-11) Способы задания прямой.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- основные способы задания прямой на плоскости;
- свойства коллинеарных и ортогональных векторов;
- активизацию геометрических знаний школьного курса.

3.11 Практическое занятие 12 (ПЗ-12) Способы задания плоскости. Метрическая теория плоскостей.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- основные способы задания плоскости в пространстве;
- признаки параллельности, перпендикулярности, компланарности векторов;
- формулы для вычисления расстояния между точками, расстояния между точкой и плоскостью.

3.12 Практическое занятие 13 (ПЗ-13) Кривые второго порядка

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- канонические уравнения кривых второго порядка;
- алгоритм приведения уравнения алгебраической линии второго порядка к каноническому виду;
- формулы для нахождения параметров кривых.

3.13 Практическое занятие 14 (ПЗ-14) Поверхности вращения

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- классификацию поверхностей второго порядка;
- определение, построение поверхностей вращения;
- квадратичные формы и алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду.