

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Методические рекомендации для  
самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

**Б1.Б.25Электротехника**

**Направление подготовки 10.03.01 Информационная безопасность**

**Профиль подготовки Безопасность автоматизированных систем**

**Квалификация выпускника бакалавр**

**Форма обучения очная**

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Организация самостоятельной работы.....</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2. Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних задания</b>  |           |
| <b>2.1 ИДЗ-1. Расчет цепей постоянного тока.....</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2.2 ИДЗ-2. Расчет цепей однофазного и трехфазного переменного тока.....</b>   | <b>9</b>  |
| <b>2.3 ИДЗ-3. Расчет трехфазной цепи переменного тока с соединением фаз нагрузки звездой с нейтральным проводом и треугольником.....</b> | <b>13</b> |
| <b>3. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов</b>  |           |
| <b>3.1 СИВ-1. Расчет магнитных цепей.....</b>  | <b>17</b> |
| <b>3.2 СИВ-2. Уравнение намагничивающих сил трансформатора.....</b>  | <b>25</b> |
| <b>3.3 СИВ-3. Схема замещения трансформатора.....</b>  | <b>25</b> |
| <b>3.4 СИВ-4. Синхронные генераторы и синхронные двигатели.....</b>  | <b>30</b> |
| <b>3.5 СИВ-5. Активные и пассивные электрические фильтры.....</b>  | <b>34</b> |
| <b>3.6 СИВ-6. Расчет переходных процессов.....</b>   | <b>35</b> |
| <b>3.7 СИВ-7. Мощность цепей с несинусоидальной ЭДС.....</b>   | <b>54</b> |
| <b>4. Методические рекомендации по подготовке к занятиям</b>   |           |
| <b>4.1 Практическое занятие № ПЗ-1 Расчет цепи постоянного тока.....</b>   | <b>56</b> |
| <b>4.2 Практическое занятие № ПЗ-2 Расчет сложной цепи постоянного тока со смешанным соединением элементов.....</b>                      | <b>56</b> |
| <b>4.3 Практическое занятие № ПЗ-3 Реактивные элементы цепи синусоидального тока.....</b>  | <b>56</b> |
| <b>4.4 Практическое занятие № ПЗ-4 Расчет резонансных явлений в цепи переменного тока. Резонанс тока.....</b>                            | <b>56</b> |
| <b>4.5 Практическое занятие № ПЗ-5 Расчет трехфазной электрической цепи переменного тока при включении нагрузки звездой.....</b>         | <b>56</b> |
| <b>4.6 Практическое занятие № ПЗ-6 Расчет трехфазной электрической цепи переменного тока при включении нагрузки звездой.....</b>         | <b>56</b> |
| <b>4.7 Практическое занятие № ПЗ-7 Расчет переходных процессов в электрических цепях.....</b>  | <b>58</b> |
| <b>4.8 Практическое занятие № ПЗ-8 Расчет цепей с несинусоидальной ЭДС.....</b>  | <b>22</b> |

## 1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

### 1.1. Организационно-методические данные дисциплины

| №<br>п.п<br>. | Наименование темы   | Общий объем часов по видам самостоятельной работы |                          |                                       |   |                             |
|---------------|---|---|--------------------------|---------------------------------------|---|-----------------------------|
|               |   | подготовка курсового проекта (работы)             | подготовка реферата/эссе | индивидуальные домашние задания (ИДЗ) | самостоятельное изучение вопросов (СИВ) | подготовка к занятиям (ПкЗ) |
| 1             | 2   | 3   | 4                        | 5                                     | 6                                       | 7                           |
| 1.            | <b>Тема 1</b><br>Электробезопасность  |   |                          |                                       |   | 1                           |
| 2             | <b>Тема 2</b><br>Электроизмерения   |   |                          |                                       |   |                             |
| 3             | <b>Тема 3</b><br>Методы расчета сложных электрических цепей постоянного тока.<br>Электрические цепи с нелинейными элементами. |   |                          |                                       | 4                                       | 1                           |
| 4             | <b>Тема 4</b><br>Электромагнетизм.  |   |                          |                                       | 2                                       |                             |
| 5             | <b>Тема 5</b><br>Цепи однофазного переменного тока  |   |                          |                                       | 7                                       | 1                           |
| 6.            | <b>Тема 6</b><br>Цепи трехфазного переменного тока  |   |                          |                                       | 7                                       | 7                           |
| 7             | <b>Тема 7</b> Трансформаторы.   |   |                          |                                       |   | 1                           |
| 8             | <b>Тема 8</b> Асинхронные машины переменного тока. Синхронные машины. Машины постоянного тока                                 |   |                          |                                       | 4                                       |                             |
| 9             | <b>Тема 9</b> Четырехполюсники. Фильтры   |   |                          |                                       | 4                                       |                             |
| 10            | <b>Тема 10</b> Переходные процессы в электрических цепях.   |   |                          |                                       | 4                                       | 1                           |
| 11            | <b>Тема 11</b> цепи несинусоидального периодического тока   |   |                          |                                       | 4                                       |                             |
| 5.            | <b>Всего в семестре</b>   |   |                          |                                       | <b>36</b>                               | <b>6</b>                    |

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

ИДЗ НЕ ПРЕДУСМОТРЕННЫ РУП

## 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

### 3.1 Методы расчета сложных электрических цепей постоянного тока.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на расчет неразветвленных и разветвленных магнитных цепей, расчет магнитных цепей с постоянной магнитодвижущей силой.

#### Расчет магнитных цепей. Закон полного тока.

Для расчета магнитных цепей можно воспользоваться законом полного тока. При этом решается одна из двух задач.

Прямая задача, в которой по заданному магнитному потоку  $\Phi$  в магнитной цепи определяют намагничающую силу  $IW$ .

Обратная задача, в которой по заданной намагничающей силе  $IW$  определяют магнитный поток  $\Phi$ .

Для однородной магнитной цепи прямая задача решается в следующей последовательности:

- а) по заданному магнитному потоку и габаритам цепи определяют магнитную индукцию;
- б) по кривой намагничивания материала сердечника определяют напряженность  $H$  по вычисленной индукции  $B$ ;
- в) по закону полного тока определяют намагничающую силу  $IW=Hl$ , где  $S$  — сечение магнитопровода;  $l$  — длина средней линии магнитопровода.

Обратная задача для однородной цепи решается в обратной последовательности, т. е.:

- а) по закону полного тока определяют напряженность поля магнитной цепи ;
- б) по кривой намагничивания материала сердечника определяют магнитную индукцию  $B$  по вычисленному значению напряженности  $H$ ;
- в) определяют магнитный поток цепи  $\Phi = BS$ .

Для неоднородной неразветвленной магнитной цепи (см. рис. 3.9, а) прямая задача решается в следующей последовательности:

- а) по заданному магнитному потоку  $\Phi$ , который для всех участков неразветвленной цепи имеет одинаковое значение, определяют магнитную индукцию  $B$  каждого однородного участка

Если задана магнитная индукция какого-либо участка  $B_{уч}$ , то находят магнитный поток этого участка  $\Phi_{уч}=B_{уч}S_{уч}$ , который для всех участков неразветвленной цепи имеет

одинаковое значение. Затем определяют магнитную индукцию остальных участков, как показано выше;

- б) по кривым намагничивания материалов (Приложения 5, 6) определяют напряженности ферромагнитных участков Н1 и Н2. Напряженность в воздушном зазоре вычисляют по выражению ;
- в) определив длину средней линии каждого участка, по закону полного тока (второй закон Кирхгофа для магнитной цепи), вычисляют намагничивающую силу рассчитываемой магнитной цепи, или ток I, или витки W.

Закон полного тока.

Магнитное поле создается электрическими токами. Количественная связь между линейным интегралом от вектора напряженности магнитного поля Н вдоль любого произвольного контура и алгебраической суммой токов охваченных этим контуром, определяется законом полного тока

Положительное направление интегрирования связано с положительным направлением тока правилом правого винта. Если контур интегрирования будет пронизывать катушку с числом витков до, по которой проходит ток , то .

Закон полного тока является опытным законом. Его можно экспериментально проверить путем измерения с помощью специального устройства (известного из курса физики), называемого магнитным поясом.

### **Магнитные цепи с постоянными магнитными потоками. Магнитные цепи с переменными магнитными потоками**

Расчет неразветвленной магнитной цепи

Формула, выражающая закон полного тока магнитной цепи, была получена для кольцевого магнитопровода постоянного поперечного сечения и с равномерно распределенной обмоткой. Эту формулу распространяют и на магнитные цепи, где намагничивающая обмотка сосредоточена на ограниченном участке магнитопровода, а отдельные участки цепи выполнены из различных ферромагнитных и неферромагнитных материалов и имеют различное поперечное сечение.

В приближенных расчетах магнитных цепей принимают, что магнитный поток на всех участках цепи остается одним и тем же, хотя на самом деле в магнитной цепи образуются также потоки рассеяния  $\Phi_p$ , которые замыкаются по воздуху, а не следуют по пути магнитопровода.

В расчетах магнитных цепей различают прямую и обратную задачи.

## Прямая задача

Задано: 1) геометрические размеры магнитной цепи; 2) характеристика  $B = f(H)$  (кривая намагничивания) ферромагнитных материалов, из которых выполнена магнитная цепь; 3) магнитный поток  $\Phi$ , который надо создать в магнитной цепи. Требуется найти намагничающую силу обмотки  $F = IW$ . Решение задачи рассматривается применительно к магнитопроводу, представленному на рис. 4.7.

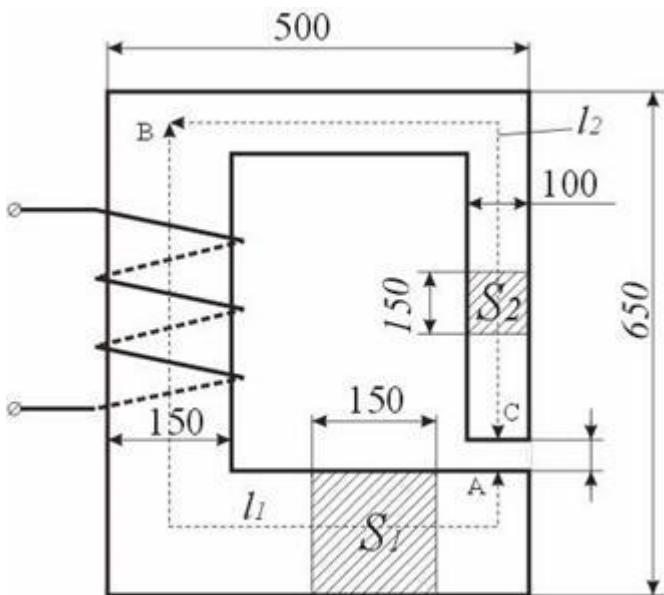


Рис. 4.7. Магнитная цепь

1. Магнитная цепь разбивается на ряд участков с одинаковым поперечным сечением  $S$ , выполненном из однородного материала.
2. Намечается путь прохождения средней магнитной линии (на рис. 4.7 показано пунктиром).
3. Т.к. магнитный поток на всех участках цепи остается постоянным, то магнитная индукция  $B = \Phi / S$  на каждом из участков и напряженность магнитного поля  $H$  неизменны. Это позволяет сравнительно просто определить значение  $\int H dL$  для контура, образованного средней магнитной линией, а следовательно, найти искомую величину намагничающей силы, поскольку  $F = \int H dL$ .

Запишем интеграл  $\int H dL$  в виде суммы интегралов с границами интегрирования, совпадающими с началом и концом каждого участка цепи. Тогда

$$\int H dL = \int_a^b H_1 dL + \int_b^c H_2 dL + \int_c^a H_3 dL = H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_{\text{возд}} \delta = IW$$

где:  $L_1$  и  $L_2$  – длины ферромагнитных участков цепи [м].  
 $\delta$  – ширина воздушного зазора, [м].

4. Значения  $H_1$  и  $H_2$  определяют по известным величинам магнитной индукции  $B$  с помощью кривых намагничивания, соответствующих ферромагнитных материалов.

А для воздушного зазора

$$H_{\text{возд}} = \frac{B_{\text{возд}}}{\mu_0} = \frac{B_{\text{возд}}}{4\pi \times 10^{-7}} = 8 \times 10^5 B_{\text{возд}}$$

А/м.

Обратная задача

Задано:

1. Геометрические размеры магнитной цепи;
2. Характеристики ферромагнитных материалов;
3. Намагничающая сила обмотки  $F$ .

Требуется определить магнитный поток  $\Phi$ .

$$\Phi = \mu_a S \frac{IW}{L} = \frac{IW}{\frac{L}{\mu_a S}} = \frac{F}{R_m}$$

Непосредственное использование формулы для определения магнитного потока  $\Phi$  оказывается невозможным, поскольку магнитное сопротивление цепи переменное и само зависит от величины магнитного потока. Такие задачи решаются методом последовательного приближения в следующем порядке. Задаются рядом произвольных значений магнитного потока в цепи и для каждого из этих значений определяют необходимую намагничающую силу обмотки так, как это делается при решении прямой задачи.

По полученным данным строят кривую  $\Phi(F)$  – вебер-амперную характеристику. Имея эту зависимость, нетрудно для заданного значения намагничающей силы найти величину магнитного потока.

Для оценки необходимого значения  $\Phi$  можно пренебречь сопротивлением ферромагнитного участка и посчитать поток, который получится под действием намагничающей силы  $F$  при сопротивлении воздушного участка. Это значение  $\Phi$  заведомо больше расчетного.

Остальные значения можно давать меньше.

$$\Phi = \frac{F}{R_{m\text{возд}}} = \frac{F}{\frac{b}{S \times 4\pi \times 10^{-7}}}$$

Особенности расчета магнитных цепей с переменной магнитодвижущей силой

Физические процессы в цепях переменного тока, содержащих катушку со стальным сердечником, имеют ряд особенностей по сравнению с процессами в цепях постоянного тока. Эти особенности оказывают существенное влияние на конструктивное выполнение и технические характеристики электрических аппаратов и машин переменного тока.

Ферромагнитные элементы в цепях переменного тока имеют дополнительные потери в сердечнике на гистерезис и вихревые токи. Для снижения потерь стальной сердечник выполняют шихтованным из тонких изолированных друг от друга пластин.

### Потери в сердечнике

Потери в сердечнике, называемые потерями в стали  $P_c$ , увеличиваются при повышении частоты питающего напряжения. Переменный магнитный поток  $\Phi$  индуцирует в стальном сердечнике вихревые токи (токи Фуко), замыкающиеся в плоскостях, перпендикулярных к оси потока. Эти токи вызывают нагрев стали, снижая тем самым к.п.д. и ограничивая нагрузочную способность электромагнитных устройств. Потери энергии в стальном магнитопроводе значительно снижаются при уменьшении толщины листа электротехнической стали ( $0,1 \div 0,5$  мм)

$$P_b = k_b f^2 B_m^2 d^2 / \rho ,$$

где  $k_b$  – коэффициент, определяемый экспериментально;  
 $f$  – частота перемагничивания стали;

$B_m$  – максимальная магнитная индукция;  
 $d$  – толщина листа электротехнической стали сердечника;  
 $\rho$  – удельное сопротивление материала сердечника.

Помимо потерь от вихревых токов, в стальном магнитопроводе при переменном магнитном потоке возникают потери, обусловленные явлением гистерезиса

$$P_r = k_r f B_m^2 G ,$$

где  $k_r$  – постоянный коэффициент;  
 $G$  – вес сердечника в килограммах.

Суммарные потери от вихревых потоков и гистерезиса  $P_c = P_b + P_r$  [Вт] называют магнитными потерями или потерями в стали.

### Векторная диаграмма и схема замещения катушки с сердечником

При расчете цепей с ферромагнитными элементами с синусоидальными источниками питания индуктивность  $L$  нельзя считать постоянной, и поэтому необходимо использовать зависимость между ЭДС и потокосцеплением или потоком. Форма кривой зависимости между потоком  $\Phi$  и намагничивающим током  $i$  (рис. 4.8) подобна форме основной кривой намагничивания  $B(H)$ , т.к.  $\Phi = B S$ , а  $H = IW / L$ .

Нелинейный характер зависимости между  $\Phi$  и  $i$  приводит к тому, что индуктивность катушки  $L = W \Phi / i$  перестает быть величиной постоянной и зависит от величины намагничивающего тока.

При непостоянстве индуктивности  $L$  ЭДС самоиндукции  $e$ , наводимую в катушке переменным током  $i$  следует определять по формуле

$$e = -W \frac{d\Phi}{dt} .$$

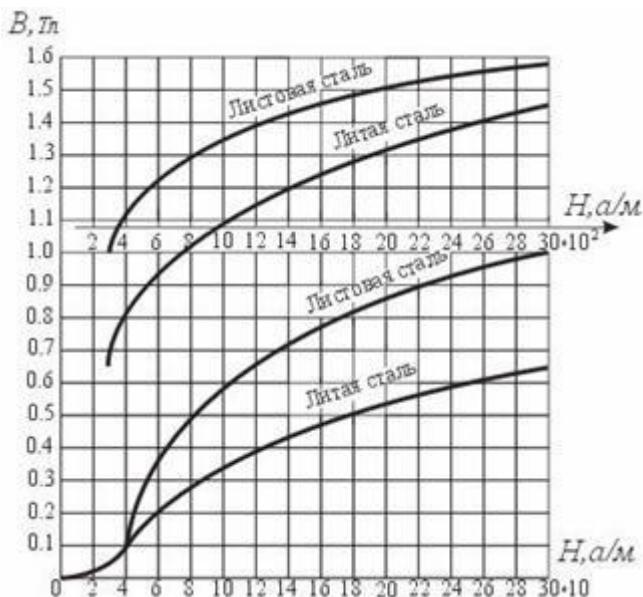


Рис. 4.8. Зависимость  $B(H)$

Если к катушке подведено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \pi/2)$ , а активное сопротивление обмотки  $R \approx 0$ , то приложенное напряжение уравновешивается только ЭДС самоиндукции:

$$u = -e, \\ U_m \sin(\omega t + \pi/2) = W d\Phi / dt.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\Phi = U_m / (2 \pi f) W \sin(\omega t) = \Phi_m \sin(\omega t).$$

Из полученного соотношения следует:

1. При синусоидальном напряжении на зажимах катушки магнитный поток  $\Phi$ , вызванный протекающим по цепи током  $I$ , тоже синусоидальный.
2. Заданному действующему значению напряжения  $U$  на зажимах катушки соответствует определенная амплитуда магнитного потока  $\Phi_m$  независимо от того, имеется ли у катушки стальной сердечник или же магнитный поток целиком замыкается по воздуху. Магнитный поток индуцирует в обмотке катушки ЭДС самоиндукции  $e$ , равную по величине приложенному напряжению и противоположную ему по направлению

$$e = -W d\Phi / dt = -W \Phi_m \omega \cos(\omega t) = 2 \pi f W \Phi_m \sin(\omega t - \pi/2),$$

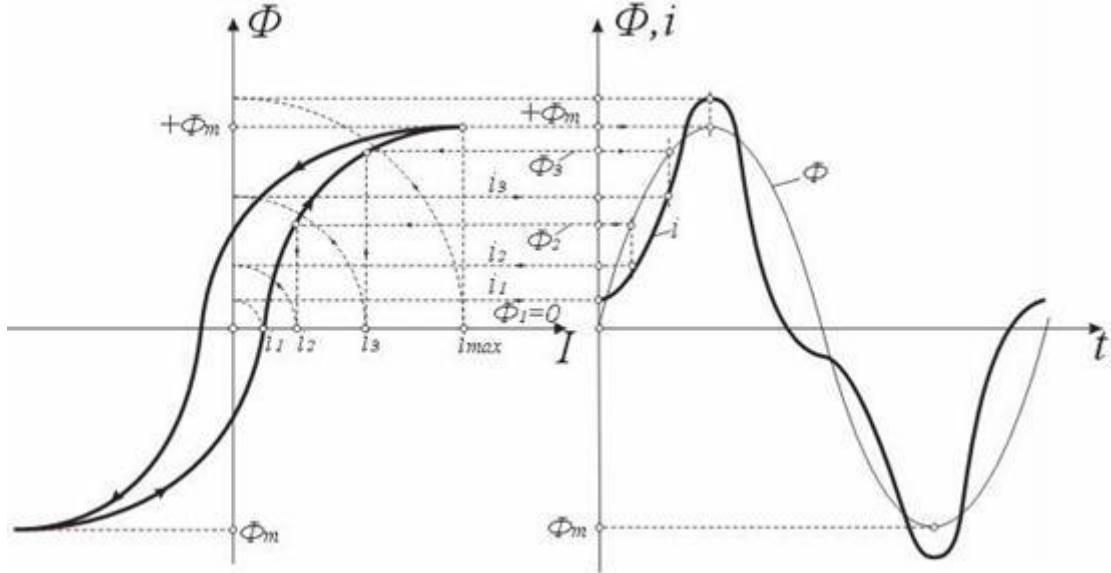
$$E_m = 2 \pi f W \Phi_m,$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f W \Phi_m = 4,44 f W \Phi_m$$

При этом индуцируемая ЭДС  $E$  отстает от магнитного потока на четверть периода.

Выражение для действующей индуцированной ЭДС  $E = 4,44 f W \Phi_m$  часто используется при анализе работы и в практических расчетах и называется трансформаторной ЭДС.

Процесс намагничивания и размагничивания стального сердечника протекает по несовпадающим ветвям петли гистерезиса. График зависимости  $\Phi(i)$  при циклическом перемагничивании (рис. 4.9 а) имеет такую же форму, как и петля гистерезиса  $B(H)$ . На рис. 4.9 б изображен график синусоидального изменения магнитного потока во времени  $\Phi(t)$ .



а) б)

Рис. 4.9. Кривая перемагничивания (а) и кривые  $\Phi(t)$  и  $\Phi(i)$  для катушки со стальным сердечником

Располагая кривыми  $\Phi(i)$  и  $\Phi(t)$ , построим кривую намагничивающего тока  $i(t)$ .

Полученная кривая намагничивающего тока  $i(t)$  является несинусоидальной периодической функцией. Для упрощения анализа и расчета цепей переменного тока, содержащих катушки с ферромагнитными сердечниками, несинусоидальный намагничивающий ток заменяют эквивалентным синусоидальным, опираясь на равенство действующих значений. Для построения расчетной схемы замещения катушки с сердечником запишем уравнение

$$u = -e + L_p \frac{di}{dt} + R i,$$

где:  $R$  – сопротивление обмотки;  
 $L_p$  – индуктивность рассеяния.

Полное комплексное сопротивление запишется

$$\underline{Z} = R + R_o + i(x_p + x_o),$$

где:  $R_o$  – активное сопротивление, обусловлено потерями на вихревые токи и гистерезис;  
 $x_o$  – индуктивное сопротивление, определяет мощность, необходимую на создание основного магнитного потока;

$R$  – сопротивление обмотки катушки;

$x_p$  – индуктивное сопротивление, определяет мощность потока рассеяния;

$R_o$  и  $x_o$  – нелинейные сопротивления.

Векторная диаграмма и а) последовательная, б) параллельная схемы замещения изображены на рисунке 4.10.

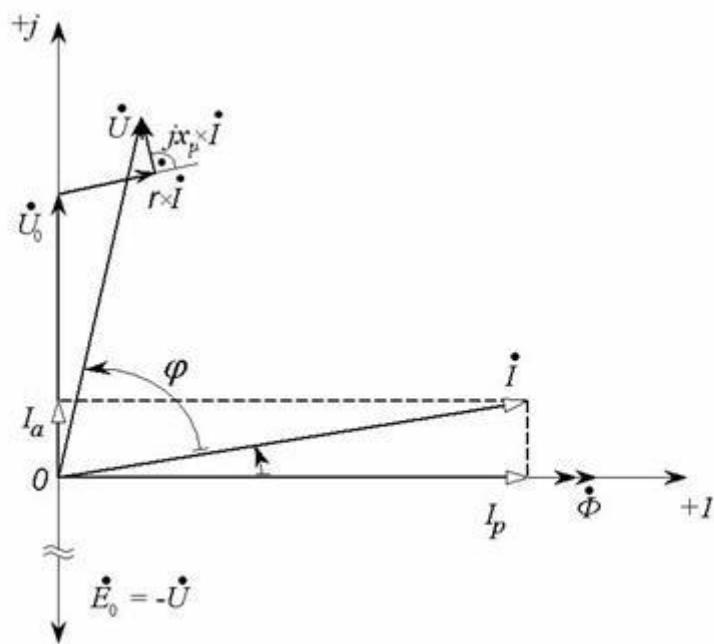
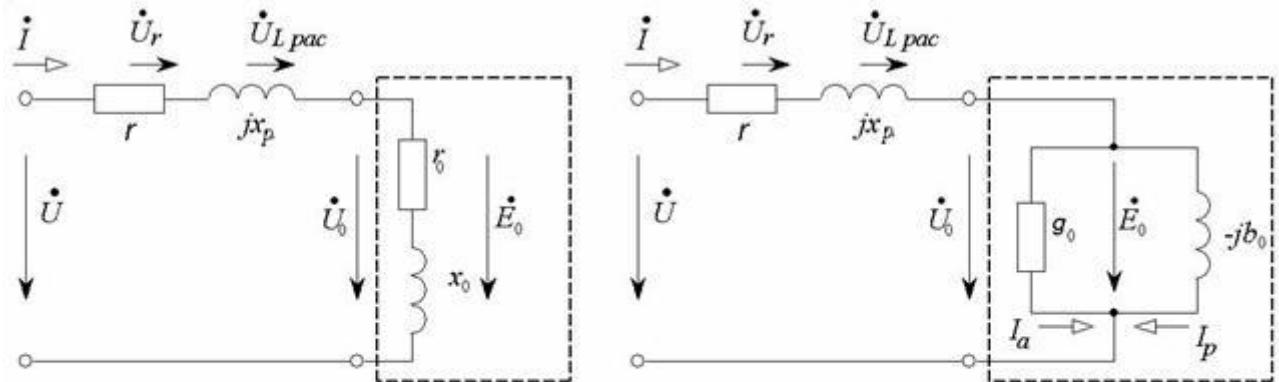


Рис. 4.10. Векторная диаграмма и соответствующие ей а) последовательная и б) параллельная схемы замещения

### 3.2 Электромагнетизм

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на намагничающую силу в разных режимах.

В режиме холостого хода имеем  $\underline{I}_2 = \underline{0}$ ,  $\underline{I}_1 = \underline{I}_0$  – ток холостого хода.

Намагничающая сила равна  $\underline{I}_0 \underline{w}_1$ .

В режиме нагрузки имеем  $\underline{I}_1 \neq \underline{0}$ ,  $\underline{I}_2 \neq \underline{0}$ . Намагничающая сила трансформатора под нагрузкой равна  $\underline{I}_1 \underline{w}_1 + \underline{I}_2 \underline{w}_2$ .

Поскольку магнитные потоки в обоих режимах одинаковы, то одинаковы и возбуждающие их намагничающие силы:

$$\underline{I}_0 \underline{w}_1 = \underline{I}_1 \underline{w}_1 + \underline{I}_2 \underline{w}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 - \underline{I}_2 \frac{\underline{w}_2}{\underline{w}_1} = \underline{I}_0 + \underline{I}'_2; \quad \underline{I}'_2 = -\frac{\underline{I}_2}{k},$$

где  $\underline{I}'_2$  – приведенный ток вторичной обмотки. Он показывает, какое влияние оказывает ток вторичной обмотки на ток первичной обмотки.

Основные уравнения работы трансформатора:

$$\underline{U}_1 = -\underline{E}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_1; \quad \underline{E}_2 = \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}'_2.$$

### 3.3 Трансформаторы

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на то, что одним из средств изучения работы трансформатора является эквивалентная схема замещения, в которой магнитная связь между обмотками трансформатора замещена электрической связью, а параметры вторичной обмотки приведены к числу витков первичной.

Возьмём трансформатор с двумя обмотками: первичной —  $W_1$  для подключения к сети и вторичной —  $W_2$  для подключения нагрузки. Его упрощенное устройство и условно-графическое обозначение на схемах показано на рисунке 1.

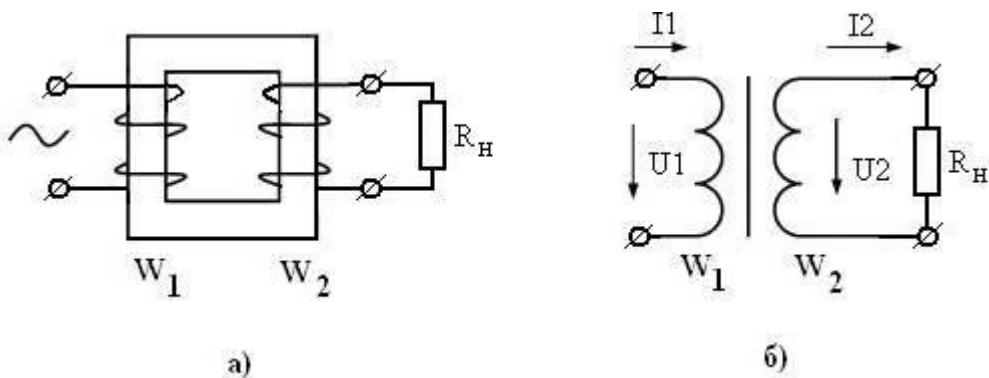


Рисунок 1 Условно-графическое обозначение трансформатора

Возможны три режима работы трансформатора: режим холостого хода (ХХ), рабочий режим (номинальный) и режим короткого замыкания (КЗ). Рассмотрим работу трансформатора в этих режимах.

**Режим холостого хода.** В этом режиме сопротивление нагрузки равно бесконечности, в результате чего трансформатор эквивалентен обычной катушке индуктивности с ферромагнитным сердечником. В режиме холостого хода трансформатор можно представить схемой замещения, приведенной рисунке 2.

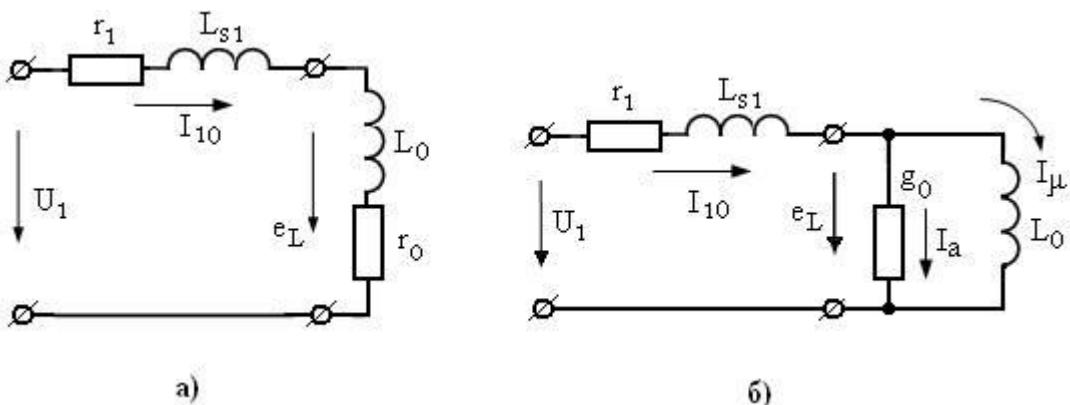


Рисунок 2 Схема замещения трансформатора для режима холостого хода (а — последовательная, б — параллельная)

В эквивалентной схеме трансформатора, приведенной на рисунке 2:

$r_1$  — активное сопротивление первичной обмотки

$L_{s1}$  — индуктивность, характеризующая поток рассеяния первичной обмотки

$r_0$  — сопротивление активных потерь в магнитопроводе

$L_0$  — основная индуктивность первичной обмотки

$$L_0 = \frac{W_1^2}{R_{\text{нн}}} = \frac{W_1^2 \cdot \mu_a \cdot s}{l_{\text{ср}}} \quad (1)$$

$I_\mu$  — ток, создающий основной магнитный поток (ток намагничивания)

$I_a$  — ток активных потерь в сердечнике

$I_{10} = I_a + I_\mu$  — ток холостого хода трансформатора.

Параллельная эквивалентная схема трансформатора удобна для построения векторной диаграммы напряжений и токов для реальной катушки индуктивности. Векторная диаграмма приведена на рисунке 3.

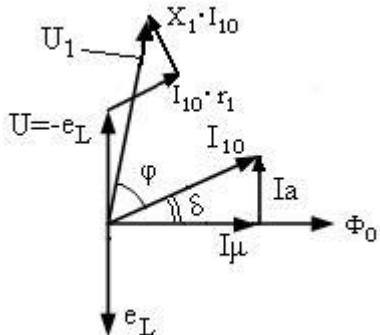


Рисунок 3 Векторная диаграмма напряжений и токов трансформатора в режиме холостого хода

Здесь  $\delta$  — угол потерь в магнитопроводе

$X_1$  — сопротивление индуктивности рассеяния  $L_{S1}$ .

При этом вектор ЭДС индуцированный в обмотке  $W_2$  (напряжение во вторичной обмотке) совпадает по фазе с  $e_L$ , а напряжение  $U_1$  является суммой

$$U_1 = -e_L + I_1(r_1 + jX_1); \quad -u_1 + I_1(r_1 + jX_1) - e_L = 0 \quad (2)$$

Потери на омическом сопротивлении обмотки малы, поскольку ток холостого хода много меньше номинального и угол сдвига между током и напряжением ( $I_{10}$  и  $U_1$ ) определяется потерями в магнитопроводе. Из опыта холостого хода и находят угол потерь  $\delta$  и рассчитывают потери в сердечнике.

Трансформатор является обращающим устройством (первичную и вторичную обмотки можно поменять местами!), поэтому для каждой из обмоток записываем основную формулу трансформаторной ЭДС.

$$U_1 = 4 \cdot k_\Phi \cdot W_1 \cdot f \cdot s \cdot B_m \quad (3)$$

$$U_2 = 4 \cdot k_\Phi \cdot W_2 \cdot f \cdot s \cdot B_m \quad (4)$$

Разделив уравнение (3) на (4), получим выражение для коэффициента трансформации:

$$n = \frac{U_1}{U_2} = \frac{W_1}{W_2} \quad (5)$$

В режиме холостого хода трансформатора как раз и определяют его коэффициент трансформации.

**Рабочий режим (нагруженный или номинальный).** Если к вторичной обмотке  $W_2$  подключить нагрузку  $R_h$ , то ее напряжение  $U_2$  вызовет ток нагрузки  $I_2$ , как это показано на рисунке 1б. Токи  $I_1$  и  $I_2$  ориентированы различно относительно магнитного потока  $\Phi_0$ . Ток  $I_1$  создает поток  $\Phi_1$ , а ток  $I_2$  создает поток  $\Phi_2$  и стремится уменьшить поток  $\Phi_1$ . Иначе говоря, в магнитопроводе появляются магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , которые на основании

закона Ленца направлены встречно и их алгебраическая сумма даёт:  $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_0$  — магнитный поток холостого хода трансформатора.

Отсюда можно записать уравнение намагничивающих сил (закон полного тока):

$$I_1 W_1 + I_2 W_2 = I_{10} W_1 \quad (6)$$

Видно, что изменение тока  $I_2$  обязательно приведёт к изменению тока  $I_1$ . Нагрузка образует второй контур, в котором ЭДС вторичной обмотки  $e_2$  является источником энергии. При этом, справедливы уравнения:

$$U_1 = -e_2 + I_1(r_1 + jx_1) \quad (7)$$

$$U_2 = e_2 - I_2(r_2 + jx_2) \quad (8)$$

где  $r_2$  — омическое сопротивление вторичной обмотки

$x_2$  — сопротивление индуктивности рассеяния вторичной обмотки.

По закону Киргофа сумма токов (6) может быть обеспечена параллельным соединением электрических цепей, поэтому в рабочем режиме трансформатор можно представить эквивалентной схемой, приведенной на рисунке 4.

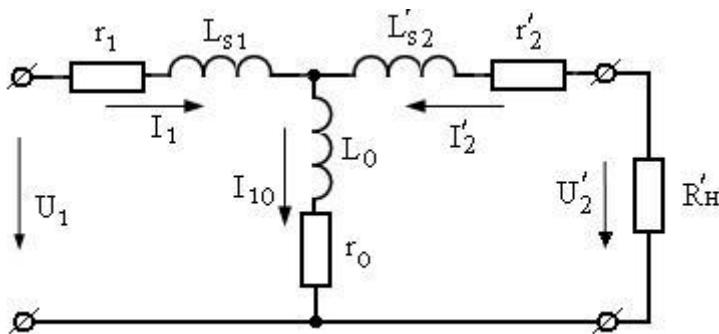


Рисунок 4 Схема замещения трансформатора в рабочем режиме

Эквивалентная схема трансформатора в рабочем режиме, приведенная на рисунке 4 называется Т-образной схемой замещения или приведённым трансформатором.

Приведение вторичной обмотки к первичной выполняется при условии равенства полных мощностей вторичных обмоток  $S'_2 = S_2$ , или  $U_2 \cdot I_2 = U'_2 \cdot I'_2$ . Из этого равенства можно получить формулы пересчета в первичную обмотку напряжений и токов вторичной обмотки и из них получить приведенные значения сопротивлений нагрузки, вторичной обмотки и индуктивности рассеивания.

$$I'_2 = \frac{I_2}{n} \quad (9)$$

$$U'_2 = U_2 \cdot n \quad (10)$$

$$R'_2 = R_2 \cdot n^2 \quad (11)$$

$$r'_2 = r_2 \cdot n^2 \quad (12)$$

$$x'_2 = x_2 \cdot n^2 \quad (13)$$

Токи и напряжения приводятся через коэффициент трансформации, а сопротивления — через квадрат коэффициента трансформации. Можно пересчитать вторичную цепь в первичную или наоборот.

Представление трансформатора в виде эквивалентной схемы позволяет методами теории цепей рассчитать любую, сколь угодно сложную схему с трансформаторами.

**Режим короткого замыкания (КЗ).** Этот режим в условиях эксплуатации является аварийным. Он сознательно применяется только для экспериментального определения параметров трансформатора (индуктивности рассеивания). Измерения проводят в следующей последовательности. Входное напряжение устанавливают равным нулю. Замыкают выходные клеммы ( $U_2 = 0$ ). Плавно поднимают входное напряжение ( $U_1$ ) до тех пор, пока в обмотках не установятся номинальные токи. Величина  $U_1 = U_{K3}$  называется напряжением короткого замыкания, является паспортной величиной трансформатора и обычно составляет 5...10% от номинального напряжения  $U_{1\text{ном}}$ . При этом, ток холостого хода  $I_{10}$  весьма мал по сравнению с номинальным и им можно пренебречь (считать равным нулю). Тогда эквивалентная схема трансформатора в режиме КЗ принимает вид, показанный на рисунке 5.

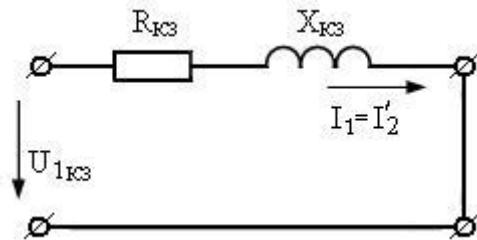


Рисунок 5 Эквивалентная схема трансформатора в режиме короткого замыкания

Ток холостого хода мы приняли равным нулю  $I_{10} = 0$ , поэтому в эквивалентной схеме трансформатора параллельная цепь  $L_0r_0$  отсутствует. Входное сопротивление трансформатора полностью определяются индуктивностью рассеивания первичной и вторичной обмоток, а также их омическим сопротивлением:

$$r_1 + jx_1 + r_2' + jx_2' = R_{K3} + jX_{K3} = Z_{K3} \quad (14)$$

Результирующее сопротивление — это сопротивление короткого замыкания трансформатора. Зная полное сопротивление короткого замыкания:

$$Z_{K3} = \frac{U_{1K3}}{I_1}$$

можно найти коэффициент передачи трансформатора, а в случае малой индуктивности рассеивания потери мощности в обмотках трансформатора.

$$R_{K3} = r_1 + r_2' \approx 2 * r_1$$

Намагничающая сила, создающая магнитный поток в сердечнике в режиме короткого замыкания (измерительный режим) практически равна нулю:

$$I_1 \cdot W_1 + I_2 \cdot W_2 = I_{10} \cdot W_1 = 0 \quad \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_0 = 0$$

и если  $I_{10} = 0$ , то  $I_1 W_1 = -I_2 W_2$  откуда находим отношение токов, а значит и коэффициент трансформации по току:

$$\frac{W_1}{W_2} = -\frac{I_2}{I_1} = n \quad (15)$$

Знак минус в формуле (15) говорит о том, что магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются.

**Если у трансформатора есть несколько вторичных обмоток**, как показано на условно-графическом изображении трансформатора, приведенном на рисунке 6а, то пересчитанные сопротивления нагрузки на эквивалентной схеме соединяются параллельно и его эквивалентная схема принимает вид, показанный на рисунке 6б.

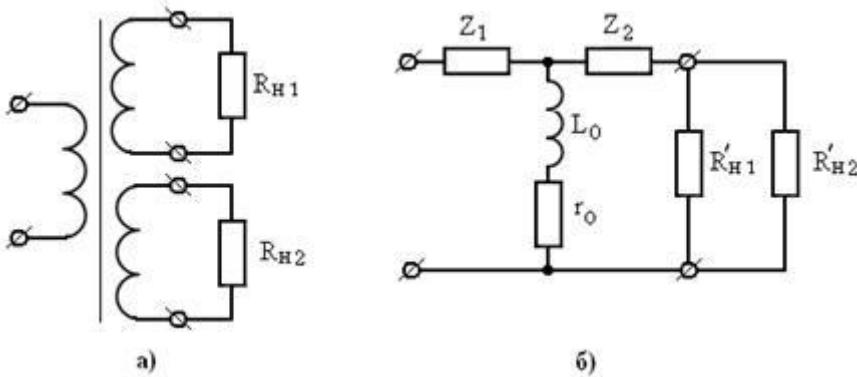


Рисунок 6 Схема замещения трансформатора с двумя вторичными обмотками

При этом значение импеданса (полного сопротивления) вторичных обмоток  $Z_2$  находится как сумма сопротивлений вторичных обмоток и сопротивления их индуктивностей рассеивания:

$$Z_2 = r_2' + r_2'' + j(x_2' + x_2'')$$

### 3.4 Цепи однофазного переменного тока

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на устройство генератора с явно и неявно выраженным полюсами, внешние и регулировочные характеристики синхронного генератора, принцип работы синхронного двигателя.

В синхронных машинах частота вращения ротора равна частоте вращения магнитного поля статора и, следовательно, определяется частотой тока сети и числом пар полюсов, т. е.  $n = 60f/p$  и  $f = pn/60$ .

Как и всякая электрическая машина, синхронная машина обратима, т. е. может работать как генератором, так и двигателем.

Электрическая энергия вырабатывается синхронными генераторами, первичными двигателями которых являются либо гидравлические, либо паровые турбины, либо двигатели внутреннего сгорания.

Обычно обмотки возбуждения получают энергию от возбудителя, который представляет собой генератор постоянного тока.

Возбудитель находится на одном валу с рабочей машиной, и мощность его составляет малую величину, порядка **1 - 5%** мощности синхронной машины, возбуждаемой им.

При небольшой мощности часто используются схемы питания обмоток возбуждения синхронных машин от сети переменного тока через полупроводниковые выпрямители.

Простейшим генератором может быть виток из провода **1** и **2**, вращающийся в магнитном поле (изо). Магнитное поле возбуждается током обмотки возбуждения, помещенной на полюсах статора **N - S**. При вращении витка проводники **1** и **2** пересекают магнитное поле, созданное между полюсами **N - S**, вследствие чего в витке будет индуцироваться эдс.

Концы витка соединены с кольцами **3**, вращающимися вместе с витком. Если на кольцах поместить неподвижные щетки и соединить их с приемником электрической энергии, то по замкнутой цепи, состоящей из витка, колец, щеток и приемника энергии, пойдет электрический ток под действием эдс.

Полученная в таком простейшем генераторе эдс будет непрерывно изменяться в зависимости от положения витка в магнитном поле.

Когда проводники **1** и **2** находятся под осями полюсов (см. изо), то при вращении витка они пересекают в единицу времени наибольшее число линий магнитного поля. Следовательно, в данный момент индуцируемая в витке эдс будет иметь наибольшее значение.

В дальнейшем при повороте витка изменится число линий магнитного поля, пересекаемых в единицу времени проводниками **1** и **2**. При повороте витка на **90°** в пространстве проводники будут перемещаться в вертикальном направлении, совпадающем с направлением магнитных линий поля. Следовательно, проводники **1** и **2** не пересекают магнитных линий и эдс в витке равна нулю.

При повороте витка на угол, больший **90°**, изменится направление перемещения этих проводников в магнитное поле, а следовательно, и направление эдс, индуцируемой в витке.

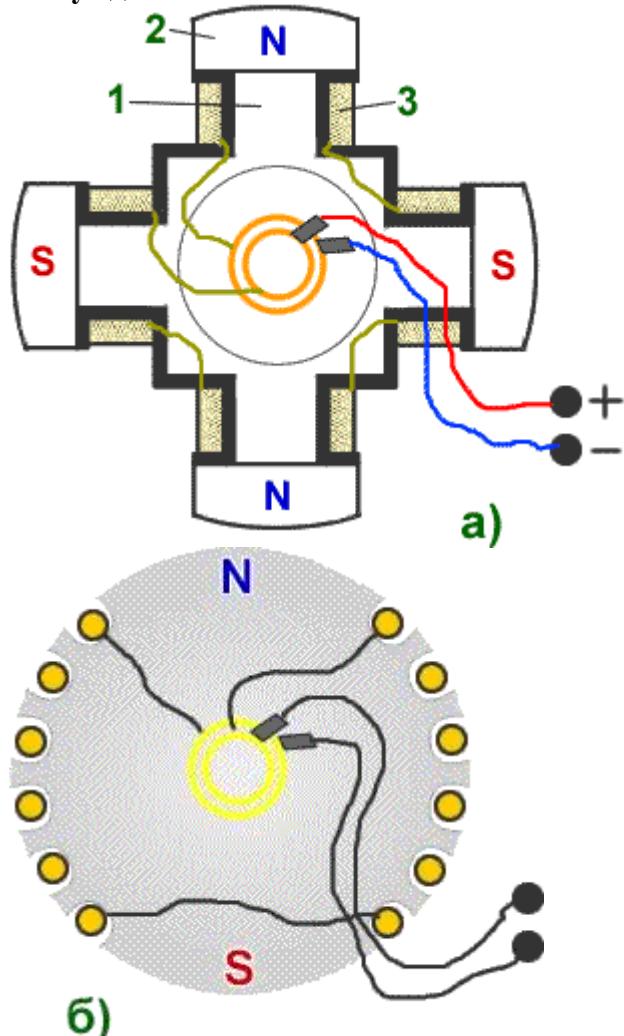
Если магнитное поле между полюсами **N** и **S** распределется равномерно, то эдс будет меняться во времени синусоидально. За один оборот витка в пространстве эдс, индуцируемая в нем, претерпевает один период изменения.

Если виток вращается при помощи какого-либо первичного двигателя с постоянной частотой вращения **n** в минуту, то в этом витке индуцируется переменная эдс с частотой **f = n/60**.

**Ротор синхронной машины:**

**а - с явно выраженным полюсами, б - с неявно выраженным полюсами;**

**1 - сердечник, 2 - полюсный наконечник, 3 - катушка обмотки возбуждения**



Первичные двигатели синхронных генераторов с явно выраженным полюсами обычно представляют собой гидравлические турбины, являющиеся тихоходными машинами.

При большой частоте вращения такое устройство ротора не может обеспечить нужной механической прочности и поэтому у высокоскоростных машин роторы выполняют с неявно выраженным полюсами (изо. 6).

Сердечники роторов с неявно выраженным полюсами обычно изготавливают из цельных поковок, на поверхности которых фрезеруются пазы. После укладки обмоток возбуждения на роторе пазы его забиваются клиньями, а лобовые соединения обмотки возбуждения укрепляются стальными бандажами, помещенными на торцовых частях ротора. При такой конструкции ротора допускаются большие частоты вращения.

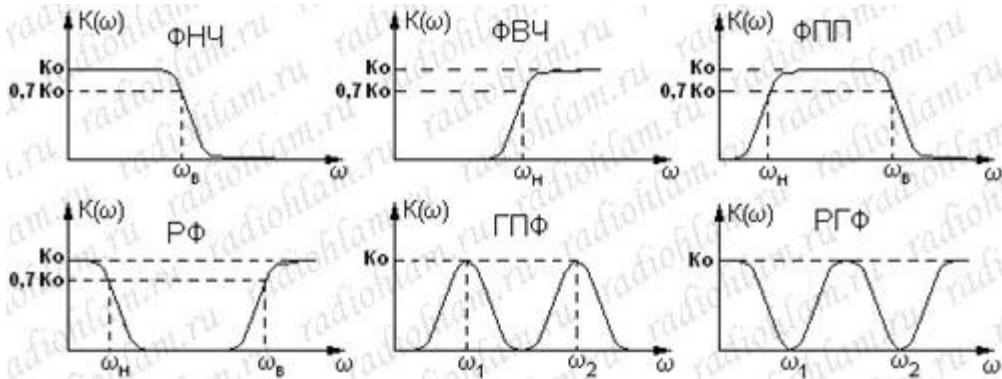
Для генераторов с неявно выраженным полюсами первичными двигателями обычно являются паровые турбины, принадлежащие к

числу быстроходных машин.

### 3.5. Цепи трехфазного переменного тока

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на назначение фильтров

Электрический фильтр - это устройство, предназначенное для выделения или подавления электрических сигналов заданных частот.



По характеру полосы пропускаемых частот фильтры делятся на шесть типов:

- 1) ФНЧ (фильтр нижних частот) - пропускает сигналы с частотой от 0 до  $f_B$  ( $f_B = \omega_B/2\pi$ ).
- 2) ФВЧ (фильтр верхних частот) - пропускает сигналы с частотой от  $f_H$  до  $\infty$ .
- 3) ФПП (полосовой фильтр) - пропускает сигналы с частотой от  $f_H$  до  $f_B$ .
- 4) РФ (режекторный фильтр) - не пропускает сигналы заданной частоты или полосы частот
- 5) ГПФ (гребенчатый фильтр) - фильтр, имеющий несколько полос пропускания.
- 6) РГФ (режекторный гребенчатый фильтр) - фильтр, имеющий несколько полос подавления.

Основные характеристики электрических фильтров - это полоса пропускания и избирательность.

Границы полос пропускания ( $\omega_B$ ,  $\omega_H$ ) определяются по частотам, на которых коэффициент усиления  $Ko$  уменьшается в  $\sqrt{2} \approx 0,7$  раз.

Избирательность - мера, характеризующая способность фильтра разделять две группы колебаний с близкими частотами. Она определяется крутизной спада коэффициента передачи  $K(\omega)$  на переходном участке от полосы пропускания к полосе подавления. Обычно крутизна спада оценивается в логарифмических единицах, Дб/окт:  $\Delta = 20 \lg(K(\omega_2)/K(\omega_1))$ , где  $\omega_2 = 2\omega_1$ .

Фильтры бывают пассивные - состоящие только из пассивных элементов (резистор, конденсатор, катушка индуктивности) и активные - в состав которых входят усиительные элементы.

Пассивные фильтры используют только энергию фильтруемого сигнала, активные - используют дополнительно подведенную энергию.

Для понимания того, как рассчитываются фильтры вспомним уравнения, связывающие напряжение и ток для пассивных элементов.

- 1) Резистор:  $u(t)=R*i(t)$ , в операторной форме  $U(S)=R*I(S)$ ,  $W(S)=R$
- 2) Конденсатор:  $i(t)=C*d(u(t))/dt$ , в операторной форме  $U(S)=I(S)*1/CS$ ,  $W(S)=1/CS$
- 3) Индуктивность:  $u(t)=L*d(i(t))/dt$ , в операторной форме  $U(S)=LS*I(S)$ ,  $W(S)=LS$

Рассмотрим последовательно соединенные L, C, R звенья:

Если считать, что входное сопротивление нагрузки много больше сопротивления фильтра, то  $i_2=0$ ,  $i_1=i$ . В действительности это не так, но мы рассматриваем идеальный вариант.

Тогда (для данной схемы) можно считать  $U_{\text{вых}}(S)=I(S)*R$ ,  $U_{\text{вх}}(S)=I(S)*(LS+1/CS+R)$ , отсюда коэффициент усиления:  $K(S)=U_{\text{вых}}(S)/U_{\text{вх}}(S)=R/(LS+1/CS+R)$ .

Подставив в эту формулу  $S=j\omega$ , можно получить зависимости:

$K(\omega)$  - АЧХ фильтра и  $j(\omega)$  - ФЧХ фильтра.

Необходимо помнить, что чем более неравномерны АЧХ и ФЧХ фильтра на рабочем участке, тем более сильно искажается форма отфильтрованного сигнала.

### **3.6 Асинхронные машины переменного тока. Синхронные машины. Машины постоянного тока**

Устройство синхронного генератора

Возникновение эдс в проводниках возможно как при перемещении этих проводников в неподвижном магнитном поле, так и при перемещении магнитного поля относительно неподвижных проводников.

В первом случае полюсы, т. е. индуктирующая часть машины, возбуждающая магнитное поле, помещаются на неподвижной части машины (на статоре), а индуктируемая часть (якорь), т. е. проводники, в которых создается эдс, - на вращающейся части машины (на роторе).

Во втором случае полюсы помещаются на роторе, а якорь — на статоре.

Выше мы рассмотрели принцип действия синхронного генератора с неподвижными полюсами и вращающимся якорем. В таком генераторе энергия, вырабатываемая им,

передается приемнику энергии посредством скользящих контактов - контактных колец и щеток.

Скользящий контакт в цепи большой мощности создает значительные потери энергии, а при высоких напряжениях наличие такого контакта крайне нежелательно. Поэтому генераторы с вращающимся якорем и неподвижными полюсами выполняют только при невысоких напряжениях (до 380/220 В) и небольших мощностях (до 15 кВА).

Наиболее широкое применение получили синхронные генераторы, в которых полюсы помещены на роторе, а якорь — на статоре.

Ток возбуждения протекает по обмотке возбуждения, которая представляет собой последовательно соединённые катушки, помещенные на полюсы ротора.

Концы обмотки возбуждения соединены с контактными кольцами, которые крепятся на валу машины. На кольцах помещаются неподвижные щетки, посредством которых в обмотку возбуждения подводится постоянный ток от постороннего источника энергии - генератора постоянного тока, называемого возбудителем.

Ротор синхронных генераторов выполняют либо с явно выраженными (выступающими) полюсами, либо с неявно выраженными полюсами, т. е. без выступающих полюсов.

В машинах с относительно малой частотой вращения (при большом числе полюсов) роторы должны быть с явно выраженными полюсами (изо, а), равномерно расположенными по окружности ротора.

Полюс состоит из сердечника 1, полюсного наконечника 2 и катушки обмотки возбуждения 3, помещаемой на сердечнике полюса.

### **3.7 Четырехполюсники, фильтры**

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на методах расчета переходных процессов в электрических цепях

Переходные процессы в цепях с  $RLi$   $RC$ .

Установившиеся процессы в линейных электрических цепях, т. е. такие процессы, при которых напряжения и токи либо неизменны во времени (цепи постоянного тока), либо представляют собой периодические функции времени (цепи переменного тока).

Наступлению установившегося процесса, отличного от первоначального режима работы цепи, предшествует, как правило, переходный процесс, при котором напряжения и токи изменяются непериодически.

Переход от одного режима работы цепи к другому может быть вызван- изменением параметров или схемы цепи, называемым в общем случае в электротехнике коммутацией:

Можно теоретически считать, что коммутация цепи производится мгновенно,- т. е. на включение, выключение или переключение цепи время не расходуется. Тем не менее переход от исходного режима работы цепи к последующему установившемуся процессу происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени. Объясняется это тем, что каждому состоянию цепи соответствует определенный запас энергии электрических и магнитных полей. Переход к новому режиму связан с нарастанием или убыванием

энергии этих -полей. Энергия  $w_L = \frac{Li_L^2}{2}$ , запасаемая в магнитном поле индуктивности L,

и энергия  $w_C = \frac{Cu_C^2}{2}$ , запасаемая в электрическом поле емкости C, не могут изменяться мгновенно: энергия может изменяться непрерывно, без скачков, так как в противном случае мощность, равная, производной энергии по времени, достигала бы бесконечных значений, что физически невозможно. Именно поэтому, например, в случае размыкания ветви с индуктивной катушкой в месте размыкания неизбежно возникает искра, в сопротивлении которой расходуется энергия, накопленная в магнитном поле индуктивной катушки. Аналогично если замкнуть накоротко зажимы конденсатора, который был предварительно заряжен, то запасенная в нем электрическая энергия рассеется в сопротивлении соединяющего провода и между контактами.

Если исключить случаи размыкания индуктивности и замыкания накоротко емкости и рассматривать цепи, в которых энергия, накапливаемая в магнитном или электрическом поле, может рассеиваться в виде тепла в сопротивлениях, то, считая, что коммутация происходит мгновенно, можно искрообразование не учитывать.

Для завершения переходного и наступления установившегося процессов теоретически требуется бесконечно большое время. Практически, однако, время переходного процесса определяется малым интервалом, по истечении которого токи и напряжения настолько приближаются к установившимся значениям, что разница оказывается практически неощутимой. Чем интенсивнее происходит рассеивание энергии в сопротивлениях, тем быстрее протекает переходный процесс.

Если бы электрическая цепь состояла только из сопротивлений, и не содержала индуктивностей и емкостей, то переход от одного установившегося состояния к другому совершился бы мгновенно, без затраты времени. В реальных электротехнических устройствах тепловые потери, обусловленные током, магнитные и электрические поля сопутствуют друг другу. Применяя специальные схемы и подбирая соответствующие

параметры цепи, можно в зависимости от необходимости ускорить или замедлить переходный процесс.

В одних случаях переходные процессы в электрических цепях нежелательны и опасны (например, при коротких замыканиях в энергетических системах). В других случаях переходный процесс представляет собой естественный, нормальный режим работы цепи, как это, например, имеет место в радиопередающих и радиоприемных устройствах, системах автоматического регулирования и других цепях.

Существуют различные методы расчета переходных процессов в линейных электрических цепях. Настоящая глава посвящена классическому методу решения дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы.

### ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Высказанные выше положения о том, что запас энергии магнитного или электрического поля может изменяться только плавно, без скачков, выражают принцип непрерывности во времени потокосцепления индуктивности и электрического заряда емкости и называются законами коммутации.

Невозможность скачкообразного изменения потокосцепления следует из того, что в противном случае на индуктивности появилось бы бесконечно большое напряжение  $u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \infty$ , что лишено физического смысла. Ввиду равенства  $\Psi = Li$  принцип непрерывности потокосцепления означает, что при неизменном  $L$  ток  $i$  не может изменяться скачком. *Итак, в начальный момент после коммутации ток в индуктивности остается таким же, каким он был непосредственно перед коммутацией, а затем плавно изменяется.*

Аналогично невозможность скачкообразного изменения электрического заряда  $q$  следует из того, что в противном случае через емкость проходил бы бесконечно большой ток  $i_c = \frac{dq}{dt} = \infty$ , что также лишено физического смысла. Ввиду равенства  $q = C \cdot u_c$  принцип непрерывности электрического заряда означает, что при неизменном  $C$  напряжение  $u_c$  не может изменяться скачком. *Итак, в начальный момент после коммутации напряжение на емкости остается таким же, каким оно было непосредственно перед коммутацией, а затем плавно изменяется.*

При этом следует отметить, что в цепях с идеализированными сосредоточенными параметрами скачкообразно могут изменяться: 1) токи в сопротивлениях и емкостях и 2) напряжения на сопротивлениях и индуктивностях

Значения тока в индуктивности и напряжения на емкости в момент коммутации называются независимыми начальными условиями.

Обычно принимают, что коммутация происходит в момент времени  $t = 0$ ; тогда ток в индуктивности и напряжение на емкости в момент времени непосредственно перед коммутацией обозначаются через  $i_L(0-)$  и  $u_c(0-)$ , а в начальный момент переходного процесса после коммутации—через  $i_L(0)$  и  $u_c(0)$ .

На основании законов коммутации:

$$\left. \begin{array}{l} i_L(0-) = i_L(0), \\ u_c(0-) = u_c(0). \end{array} \right\}$$

Эти равенства выражают начальные условия цепи, в которых происходит коммутация.

При нулевых начальных условиях, т. е. когда  $i_L(0-) = 0$  и  $u_c(0-) = 0$ , индуктивность в начальный момент после коммутации равносильна разрыву цепи, а емкость равносильна короткому замыканию.

В случае ненулевых начальных условий, т. е. когда  $i_L(0) \neq 0$  и  $u_c(0) \neq 0$ , индуктивность в первый момент равносильна источнику тока  $i_L(0)$ , а емкость равносильна источнику э. д. с.  $u_c(0)$ .

Независимые начальные условия характеризуют энергию магнитного и электрического полей, запасенную к моменту коммутации, и для расчета переходного процесса обязательно требуется знание этих начальных условий, причем совершенно безразлично, каким образом эти условия в цепи были созданы.

При расчете переходных процессов в разветвленных электрических цепях наряду с независимыми начальными условиями используются так называемые зависимые начальные условия, а именно: значения токов, напряжений и их производных в начальный момент времени ( $t=0$ ).

До сих пор нами исключались из рассмотрения случаи коммутации, при которых неизбежно между контактами возникает искра или дуга. Один из таких случаев показан на рис. 1,а. До коммутации ток проходит через индуктивность  $L_1$  и контакт, шунтирующий индуктивность  $L_2$ ; ток в  $L_2$  равен нулю. В момент  $t = 0$  контакт размыкается и индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  оказываются включенными последовательно; ток в них принудительно становится одинаковым. Поскольку в момент коммутации ток не изменяется, а ток в  $L_2$  равен нулю, в силу первого закона Кирхгофа ток должен замкнуться через дугу, образовавшуюся между контактами. Кроме того, если под  $L_2$  подразумевать реальную индуктивную катушку, то ток может частично замкнуться и через межвитковую емкость. После быстрого погасания дуги токи в  $L_1$  и  $L_2$  уравниваются. Эта начальная стадия переходного процесса протекает столь быстро, что ею практически можно

пренебречь, считая, что токи в  $L_1$  и  $L_2$  уравниваются мгновенно. Именно в этом смысле можно условно говорить о скачкообразном

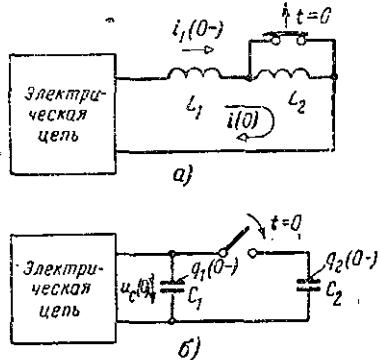


Рисунок 1. Случаи размыкания (а)

или замыкания (б) при частичной потере энергии.

изменении токов в индуктивностях, которое предшествует исследуемому переходному процессу в цепи. При этом для расчета переходного процесса используется принцип непрерывности суммарного потокосцепления при коммутации, т. е.  $L_1 \cdot i(0-) = (L_1 + L_2) \cdot i(0)$ . Скачкообразное изменение токов и соответствующих им потоков в  $L_1$  и  $L_2$  в момент коммутации не сопряжено в данном случае с наведением бесконечно большой суммарной э. д. с. самоиндукции, поскольку суммарное потокосцепление не претерпевает скачкообразного изменения. При новых значениях токов в  $L_1$  и  $L_2$  магнитная энергия, запасенная в катушках, будет меньше энергии, запасенной в первой катушке до коммутации. Часть энергии превратится в тепло в искре, а также излучится.

Найденный таким образом ток  $i(0)$  в  $L_1$  и  $L_2$  может рассматриваться как независимое начальное условие для расчета переходного процесса во всей цепи на рисунке 1, а после разрыва дуги.

При коммутациях в цепях с емкостями при отсутствии сопротивлений также возможны весьма быстрые перераспределения зарядов, условно рассматриваемые как мгновенные. В этом случае применим принцип непрерывности суммарного заряда. Полученные при этом значения зарядов и напряжений на отдельных емкостях используются в расчете последующего переходного процесса как независимые начальные условия.

Например, в случае схемы на рисунке 1, б принцип непрерывности суммарного заряда до и после коммутации выражается равенством

$$q_1(0-) + q_2(0-) = q_1(0) + q_2(0) = \\ = u_C(0) (C_1 + C_2).$$

При сделанном допущении в остальной электрической цепи, соединенной с емкостями, не возникает бесконечно большого тока', так как суммарный заряд не изменяется скачкообразно при  $t = 0$ .

В процессе рассматриваемой коммутации энергия электрического поля уменьшится, так как часть ее превратится в тепло в очень малом сопротивлении проводника при очень большом' токе, а также сможет выделиться в. искре и излучиться.

### *ПРИНУЖДЕННЫЙ И СВОБОДНЫЙ РЕЖИМЫ*

В общем случае анализ переходного процесса в линейной цепи с сосредоточенными параметрами  $r$ ,  $L$ ,  $C$  и  $M$  сводится к решению обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, выражающих законы Кирхгофа. Эти уравнения представляют собой линейную комбинацию напряжений, токов, их первых производных и интегралов по времени.

Например, если какая-нибудь э. д. с.  $e(t)$  включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных  $r$ ,  $L$  и  $C$ , то интегродифференциальное уравнение имеет вид:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t).$$

Это уравнение после дифференцирования приводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

Как известно, общий интеграл такого уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Частное решение выражает принужденный режим, задаваемый источником. Если воздействующая функция, стоящая в правой части уравнения, постоянна или является периодической функцией времени, то принужденный ток будет одновременно и установившимся.

Общее решение физически определяет поведение цепи при отсутствии внешних источников электрической энергии и заданных начальных условиях. Функции, определяемые общим решением, называются свободными составляющими (токов, напряжений и пр.).

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

и соответствующее ему характеристическое уравнение

$$Lp^2 + rp + \frac{1}{C} = 0.$$

Если корни характеристического уравнения обозначить через  $p_1$  и  $p_2$ , то общее решение запишется в виде:

$$i_{cb}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

В случае, рассмотренном выше, однородное уравнение имеет вид:

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Полный переходный ток в цепи равен сумме принужденного и свободного токов:

$$i(t) = i_{np}(t) + i_{cb}(t).$$

Аналогично напряжение, заряд, магнитный поток и другие функции на любом участке цепи в переходном режиме состоят из принужденной и свободной составляющих.

На основании законов коммутации (см. § 14-2) можно найти начальные независимые условия  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$ . После этого можно написать согласно

$$\begin{aligned} i_L(0) &= i_{L_{np}}(0) + i_{L_{cb}}(0); \\ u_C(0) &= u_{C_{np}}(0) + u_{C_{cb}}(0), \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} i_{L_{cb}}(0) &= i_L(0) - i_{L_{np}}(0); \\ u_{C_{cb}}(0) &= u_C(0) - u_{C_{np}}(0). \end{aligned} \right\}$$

Итак, начальные значения свободных функций  $i_{L_{cb}}(0)$  и  $u_{C_{cb}}(0)$  определяются изменениями в момент коммутации соответствующих принужденных функций.

В частном случае при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} i_{L_{cb}}(0) &= -i_{L_{np}}(0); \\ u_{C_{cb}}(0) &= -u_{C_{np}}(0). \end{aligned}$$

В зависимости от порядка дифференциальных уравнений, описывающих исследуемые переходные процессы, различают цепи первого, второго и более высокого порядков.

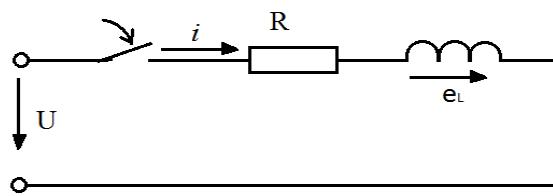
В цепях первого порядка накопление энергии происходит только в одном элементе,  $L$  или  $C$  в форме магнитной энергии (в цепи с индуктивностью), или электрической энергии (в цепи с емкостью). Одноконтурная цепь, содержащая элементы, в которых накапливается энергия обоих видов — магнитная и электрическая, представляет собой

цепь второго порядка (цепь  $r$ ,  $L$ ,  $C$ ). Разветвленные цепи могут быть более высокого порядка.

### Переходные процессы в RL – цепи.

Включение RL – цепи на постоянное напряжение.

Рассмотрим переходный процесс при подключении индуктивности к источнику постоянного напряжения.



Запишем уравнение контура по второму закону Кирхгофа:

$$R_i + L \frac{di}{dt} - U = 0$$

отсюда:

$$R_i + L \frac{di}{dt} = U$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$i = i_y + i_{cs}$$

Установившийся ток в этой цепи:

$$i_y = \frac{U}{R}$$

Так как в установившемся режиме  $X_L = 0$

Определим свободную составляющую:

$$L \frac{di_{cs}}{dt} + Ri_{cs} = 0$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$i_{cs} = Ae^{pt}$$

Корень характеристического уравнения  $P$ :

$$Lp + R = 0, \text{ откуда } P = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

Постоянную интегрирования  $A$  определим, используя первый закон коммутации. Так как, до коммутации ток в цепи был равен нулю, следовательно, в начальный момент времени после коммутации он также равен нулю.

$$i(0) = i(0_+) = i_y(0) + i_{cs}(0) = 0$$

$$\text{или } \frac{U}{R} + A = 0$$

$$-\frac{U}{R}$$

откуда  $A =$

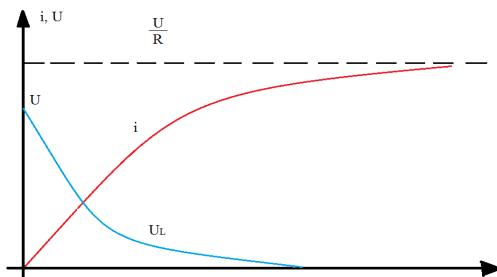
Окончательное выражение для переходного тока:

$$i = i_y + i_{cs} = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Напряжение на индуктивности определяется выражением:

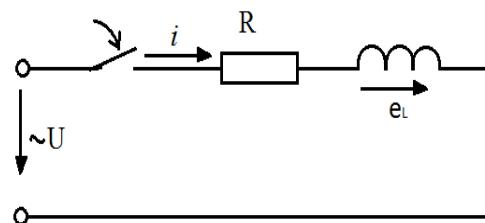
$$U_L = L \frac{di}{dt} = U - Ri = U - U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Законы изменения переходного тока и напряжения можно представить графиками:



Из полученных выражений следует, что ток в цепи с индуктивностью при включении её на постоянное напряжение, плавно возрастает от нуля до  $I=U/R$ . Напряжение же наоборот, плавно уменьшается от  $U$  до нуля. Реально ток и напряжение достигают установившихся значений по истечении времени  $t=(4\%5)\tau$ .

Включение RL-цепи на синусоидальное напряжение.



Пусть напряжение источника в момент включения  $U=U_m \sin(\omega t + \Psi)$   
Тогда установившийся ток катушки

$$i_y = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \Psi - \phi)$$

где  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$  – полное сопротивление катушки

$\phi = \arctg \frac{\omega L}{R}$  – угол сдвига между током и напряжением

Свободная составляющая:

$$i_{cs} = A l^{pt}$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$

Переходный ток:

$$i = i_y + i_{cb}$$

или

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \Psi - \phi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Используя первый закон коммутации, получим:

$$i(0) = i(0_+) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{U_m}{Z} \sin(\Psi - \phi) + A = 0$$

$$\text{откуда } A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\Psi - \phi)$$

Тогда переходный ток:

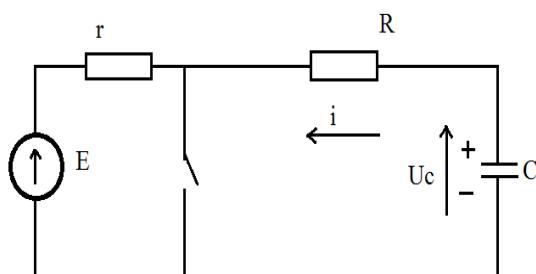
$$i_y = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \Psi - \phi) - \frac{U_m}{Z} \sin(\Psi - \phi) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Выводы:

1. Если в момент включения установившийся ток равен нулю, или  $\Psi - \phi = 0$ , то свободный ток не возникает и в цепи сразу наступает установившийся режим.
1. Если в момент включения установившийся ток имеет наибольшее значение  $\Psi - \phi = \frac{\pi}{2}$ , то переходящий ток достигает максимального значения через четверть периода.

### Переходные процессы в RC – цепи.

1. Короткое замыкание в RC – цепи.(Разряд



конденсатора)

Будем считать, что до коммутации конденсатор заряжен до напряжения  $U_c(0_+) = U_0 = E$ .

Установившийся ток и напряжение в цепи после коммутации равны нулю(конденсатор полностью разряжен)

Уравнение свободных составляющих имеет вид:

$$\begin{aligned} Ri_{cb} + U_{cb} &= 0 \\ \text{т. к } i_{cb} &= \frac{dq_{cb}}{dt} = C \frac{dU_{cb}}{dt} \\ \text{то } RC \frac{dU_{cb}}{dt} + U_{cb} &= 0 \end{aligned}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$U_{c_{cb}} = Ae^{pt}$$

Решаем характеристическое уравнение и определяем  $P$ .

$$RCp + 1 = 0, \quad p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

где  $\tau = RC$  – постоянная времени

Используя второй закон коммутации определяем постоянную интегрирования:

$$U_c(0_-) = U_c(0_+) = U_0, \quad \text{но } U_{c_{cb}}(0) = A \\ \text{следовательно } A = U_0.$$

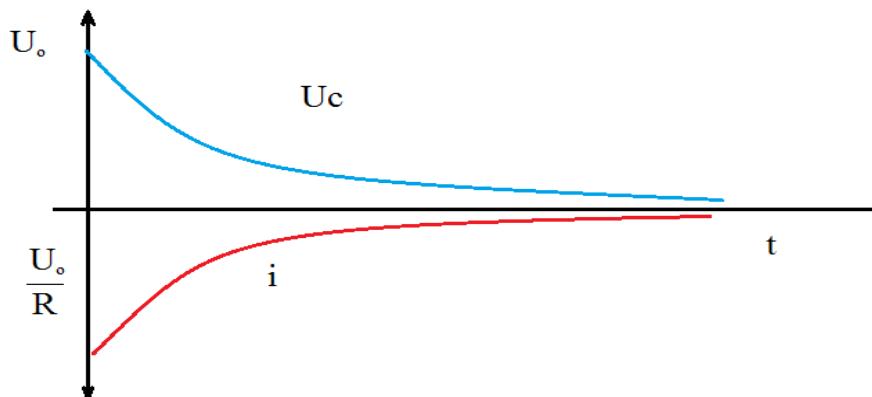
Запишем выражение переходного напряжения на конденсаторе:

$$U_c = U_{c_y} + U_{c_{cb}} = 0 + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Переходный ток в цепи конденсатора:

$$i = C \frac{dU_c}{dt} = -\frac{1}{\tau} C U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

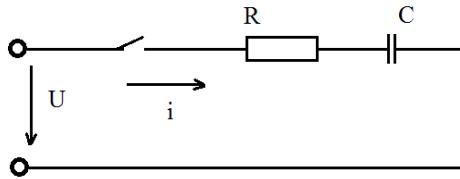
График изменения напряжения и тока:



С энергетической точки зрения, переходный процесс характеризует переход энергии электрического поля конденсатора в тепловую энергию, выделяемую на резисторе. При этом, сопротивление на резисторе не влияет на количество выделяемого тепла, а определяет лишь длительность разряда и начальный ток.

Включение RC – цепи на постоянное напряжение.

Рассмотрим переходный процесс при подключении конденсатора к источнику постоянного напряжения.



Из приведённой схемы следует, что установившееся напряжение на конденсаторе:

$$U_{C_y} = U$$

Свободная составляющая напряжения:

$$U_{C_{CB}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ где } \tau = CR,$$

Согласно второму закону коммутации:

$$U_{C}(0_{-}) = U_{C}(0_{+}) = 0$$

Следовательно:

$$U_{C}(0) = U_{C_y}(0) + U_{C_{CB}}(0) = U + A = 0$$

Постоянная интегрирования:

$$A = -U$$

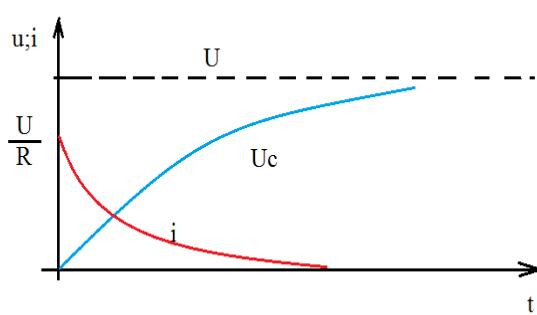
Переходное напряжение на конденсаторе:

$$U_{C} = U_{C_y} + U_{C_{CB}} = U + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Переходный ток в цепи конденсатора:

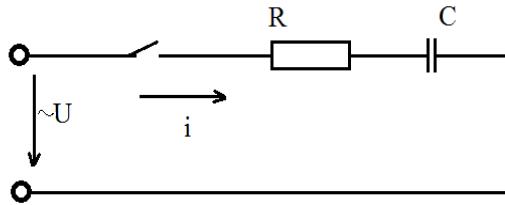
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dCU_{C}}{dt} = CU(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})' = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Представим ток и напряжение графиками:



Из полученных выражений и графиков видно, что напряжение на конденсаторе возрастает по экспоненте от нуля до напряжения источника  $U$ , а ток уменьшается от начального максимального значения до нулевого.

Включение  $RC$  – цепи на синусоидальное напряжение.



Пусть напряжение источника в момент включения ключа:

$$U = U_m \sin(\omega t + \Psi).$$

Тогда установившийся ток цепи определяется выражением:

$$i_y = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \Psi + \phi)$$

$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2}$  – полное сопротивление

$\phi = \arctg \frac{X_c}{R}$  – угол сдвига между током и напряжением

Установившееся напряжение на конденсаторе:

$$U_{C_y} = X_c \cdot i_y = \frac{U_m}{Z} X_c \sin(\omega t + \Psi + \phi - \frac{\pi}{2})$$

Свободная составляющая напряжения на конденсаторе:

$$U_{C_{CB}} = A e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ где } \tau = CR$$

Переходное напряжение на конденсаторе:

$$U_C = U_{C_y} + U_{C_{CB}} = \frac{U_m}{Z \omega C} \sin(\omega t + \Psi + \phi - \frac{\pi}{2}) + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Согласно второму закону коммутации:

$$U_C(0_-) = U_C(0_+) = U_0$$

Следовательно:

$$U_C(0) = U_{C_y}(0) + U_{C_{CB}}(0)$$

Отсюда:

$$A = - \frac{U_m}{Z \omega C} \sin(\omega t + \Psi + \phi - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_m}{Z \omega C} \sin(\omega t + \Psi + \phi - \frac{\pi}{2}) + A$$

Окончательное переходное напряжение на конденсаторе:

$$U_C = \frac{U_m}{Z \omega C} \sin(\omega t + \Psi + \phi - \frac{\pi}{2}) - \frac{U_m}{Z \omega C} \sin(\omega t + \Psi + \phi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ток цепи определяется:

$$i = \frac{Um}{R} [\cos \phi \sin(\omega t + \Psi + \phi) - \sin \phi \sin(\Psi + \phi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

Анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы:

1. Если в момент включения установившееся напряжение на конденсаторе равно нулю, т.е.  $(\Psi + \phi - \frac{\pi}{2} = 0)$ , то свободное напряжение равно нулю, и в цепи сразу наступает установившийся режим.
2. Если в момент включения установившееся напряжение имеет наибольшее значение, т.е.  $(\Psi + \phi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2})$ , то переходное напряжение достигает наибольшего значения через четверть периода.
3. Расчет переходных процессов в разветвлённых цепях.

В разветвлённой цепи, содержащей одновременно параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$  расчёт усложняется из-за увеличения числа неизвестных и повышения порядка дифференциального уравнения.

Последовательность расчёта:

1. Рассчитать цепь до коммутации с целью определения независимых начальных условий.
2. Рассчитать цепь после коммутации с целью определения установившихся составляющих токов и напряжений.
3. Составить систему уравнений по законам Кирхгофа для свободных составляющих токов и напряжений.
4. Решить систему уравнений с целью расчёта корней характеристического уравнения.
5. По полученным корням найти общее решение для свободных составляющих и записать решение как сумму установившихся и свободных составляющих.
6. Найти постоянную интегрирования.
7. Записать переходные напряжения и токи.

Система уравнения для определения постоянных интегрирования имеет вид:

$$\begin{aligned} i(0) &= i_y(0) + A_1 + A_2 + A_3 \dots \\ i'(0) &= i'_y(0) + P_1 A_1 + P_2 A_2 + P_3 A_3 \dots \\ i''(0) &= i''_y(0) + P_1^2 A_1 + P_2^2 A_2 + P_3^2 A_3 \dots \end{aligned}$$

Начальные значения  $i(0)$ ,  $i'(0)$ ,  $i''(0)$  находят путём решения уравнений, составленных по закону Кирхгофа, с использованием законов коммутации.

В разветвлённых цепях порядок уравнений возрастает до третьей степени. При этом в зависимости от корней характеристического уравнения возможны следующие варианты общего решения уравнения для свободных составляющих:

1. Если корни характеристического уравнения вещественные, неравные и отрицательные, т.е.  $P_1 \neq P_2 \neq P_3$ , то свободный ток определяется выражением  $i_{cb} = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} + A_3 e^{P_3 t}$ .
2. Если корни характеристического уравнения вещественные, равные и отрицательные, т.е.  $P_1 = P_2 = P_3$ , то  $i_{cb} = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2) \cdot e^{P t}$

3. Если один корень вещественный, а два другие – комплексные и сопряжённые, т. е.  $P_1$  – вещественный,  $P_2$  и  $P_3$  – комплексные, то

$$i_{cb} = A_1 e^{P_1 t} + (A_2 \cos \omega t + A_3 \sin \omega t) \cdot e^{-P_2 t}$$

2. Классический метод расчета.

При расчете переходных процессов классическим методом составляют систему интегродифференциальных уравнений цепи, используя для этого законы Кирхгофа и уравнения для отдельных элементов:

$$u_r = ri_r; u_L = L di_L / dt; i_c = C du_c / dt$$

Затем эту систему уравнений путем замены переменных сводят к дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка относительно искомой величины, в качестве которой обычно используют одну из переменных состояния, т. е. тока в любой индуктивности или напряжения на одной из емкостей. Общее решение полученного линейного дифференциального уравнения ищут в виде суммы двух членов:

$$i_L = i_{Lcb} + i_{Lpr}$$

или

$$u_C = u_{Ccb} + u_{Cpr}$$

где  $i_{Lcb}$ ,  $u_{Ccb}$  – соответствуют общим решениям однородных уравнений (т. е. без независимых источников энергии) и поэтому называются свободными составляющими тока в индуктивности или напряжения на емкости;

$i_{Lpr}$ ,  $u_{Cpr}$  – соответствуют частным решениям неоднородных уравнений (т. е. уравнений с независимыми источниками энергии) и поэтому называются принужденными составляющими тока в индуктивности или напряжения на емкости.

Таким образом, расчет переходных процессов классическим методом сводится к определению трех величин:

1. постоянных интегрирования  $A_k$  и  $B_k$
2. корней характеристического уравнения  $p_k$
3. принужденных составляющих  $i_{Lpr}$ , или  $u_{Cpr}$

## Операторный метод расчета

### 1. Расчет цепей с RLC элементами

Для выполнения умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня можно использовать логарифмы.

### Преобразование Лапласа

1. Допустим, что  $p$  – комплексное число  $p=a+jb$ . Договоримся функцию времени  $f(t)$  (ток, напряжение, эдс, заряд) называть оригиналом. Ей соответствует функция  $F(p)$ , называется изображением, которая определяется следующим выражением

Прямое преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$$

Соответствие между функцией  $F(p)$  и функцией  $f(t)$  записывают так  $F(p) \stackrel{\text{---}}{\equiv} f(t)$   
 где  $\stackrel{\text{---}}{\equiv}$  – знак соответствия

Интеграл с бесконечным верхним пределом называется несобственным. Если в результате интегрирования получается конечное число, то интеграл сходится.

Практически для всех функций, с которыми имеют дело электрики, имеются изображения, т.е. интеграл в преобразовании Лапласа сходится.

Определим изображение простейших функций времен.

Изображение постоянной  $f(t)=A$ . Используем прямое преобразование Лапласа:

$$F(p) = \int_0^\infty A e^{-pt} dt = A \left( \frac{1}{p} \right) \int_0^\infty de^{-pt} = -\frac{Ae^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty = \frac{A}{p}$$

Следовательно  $A \stackrel{\text{---}}{\equiv} \frac{A}{p}$

2.2 Изображение показательной функции.

$$f(t) = e^{at}; F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-t(p-a)} dt = \left( \frac{-1}{p-a} \right) \int_0^\infty e^{-t(p-a)} dt$$

$$d[-t(p-a)] = \frac{-1}{p-a} e^{-t(p-a)} dt \Big|_0^\infty = \frac{-1}{p-a} (0-1) = \frac{1}{p-a}$$

Таким образом  $e^{at} \stackrel{\text{---}}{\equiv} \frac{1}{p-a}$  (1)

Аналогично можно получить изображение функции  $e^{-at}$ :

$$1. e^{-at} \stackrel{\text{---}}{\equiv} \frac{1}{p+a}$$

Приняв в выражении (1)  $a=j\omega$ , получим

$$e^{j\omega t} \stackrel{\text{---}}{\equiv} \frac{1}{p-j\omega}$$

Умножив в выражении (2) обе части на комплекс амплитуды тока  $I_m$ , получим изображение комплекса синусоидального тока:

$$I_m e^{j\omega t} \stackrel{z}{\overline{z}} I_m \frac{1}{p-j\omega}$$

Аналогично , изображение комплекса синусо-  
идальной нагрузки напряжения :

$$U_m e^{j\omega t} \stackrel{z}{\overline{z}} U_m \frac{1}{p-j\omega}$$

2.3. Изображение первой производной.

Допустим , функции  $f(t)$  соответствует изображение  $F(p)$  . Требуется найти изображение первой производной

$\frac{df(t)}{dt}$  зная , что значение функции  $f(t)$  при  $t=0$  равно  $f(0)$ .

Используем преобразование Лапласа:

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} d[f(t)].$$

Выполним интегрирование по частям , обозначив  $e^{-pt}=u$  ;  $f(t)=v$

$$\text{Тогда } \int_0^\infty u dv = uv - \int_0^\infty v du$$

Следовательно

$$\int_0^\infty e^{-pt} d[f(t)] = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) d(e^{-pt}).$$

$$e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty = 0 - f(0) = -f(0)$$

$$- \int_0^\infty f(t) d(e^{-pt}) = P \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = PF(p)$$

Таким образом

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = PF(p) - f(0)$$

$$\text{или } \frac{df(t)}{dt} \stackrel{z}{\overline{z}} PF(p) - f(0)$$

2.4 Изображение напряжения на индуктивности .Допустим , изображение тока катушки  $i(t)$  равно  $I(p)$  . Запишем изображение напряжения на катушке:

$$U_L = L \frac{di}{dt}$$

но  $\frac{di}{dt} \stackrel{z}{\overline{z}} PI(p) - i(0)$  , где  $i(0)$  – значение тока  $i$  при  $t=0$  , т.е.  $i(0)$  . Это значение

положительно , если направление тока совпадает с положительным направлением тока катушки после коммутации.

$$\text{Следовательно } L \frac{di}{dt} \stackrel{z}{\overline{z}} LPI(p) - Li(0)$$

$$\text{Если } i(0)=0 , \text{ то } U_L = L \frac{di}{dt} \stackrel{z}{\overline{z}} LPI(p)$$

Изображение второй производной.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \stackrel{z}{\overline{z}} P^2 F(p) - Pf(0) - f''(0)$$

Изображение интеграла.

Требуется найти изображение функции  $\int_0^t f(t) dt$

Если изображение функции  $f(t)$  равно  $F(p)$ :

$$\text{Тогда } \int_0^t f(t) dt \stackrel{z}{\overline{z}} \frac{F(p)}{p}$$

Изображение напряжения на конденсаторе.

Полная форма записи выражения , определяющая значение напряжения на конденсаторе имеет вид:

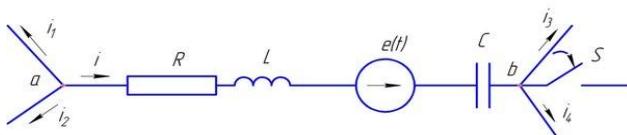
$$U_c = U_{c(0)} + \frac{1}{c} \int_0^t i dt$$

В этом выражении учитывается , что в момент времени  $t$  напряжение на конденсаторе определяется не только током , протекающим через конденсатор в интервале времени от 0 до  $t$  , но и напряжением  $U_{c(0)}$ ,которое на нём было при  $t=0$ . Если изображение тока конденсатора  $I_{(p)}$  т.е. $i(t) = I_{(p)}$  и используя формулы изображений постоянной и интеграла , имеем следующий вид изображения напряжения на конденсаторе

$$U_c = \frac{I(p)}{CP} + \frac{U_{c(0)}}{p}$$

### Закон Ома в операторной форме.

Рассмотрим одну из ветвей электрической цепи , содержащую источник эдс .



В цепи замыкается ключ  $S$  , что приводит к переходному процессу . Непосредственно до коммутации  $i = i_{(0)}$  , напряжение на конденсаторе  $u_c = u_{c(0)}$  . Выразим потенциал точки a через потенциал точки в после коммутации

$\varphi_a = \varphi_b + u_c - e(t) + uL + uR$  ,

тогда  $u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = uR + uL + u_c - e(t)$

Учтём что  $uL = L \frac{di}{dt}$  , а  $u_c = u_{c(0)} + \frac{1}{c} \int_0^t i dt$

$$u_{ab} = iR + L \frac{di}{dt} + u_{c(0)} + u_{c(0)} + \frac{1}{c} \int_0^t i dt - e(t) \quad (1)$$

Применим к уравнению (1) прямое преобразование Лапласа , заменив каждое слагаемое в нём его изображением:

$$\begin{aligned} iR &\stackrel{\text{def}}{=} RI(p) ; u_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} U_{ab}(p) ; e(t) \stackrel{\text{def}}{=} E(p) \\ L \frac{di}{dt} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{di}{dt} L p I(p) - L i(0) ; u_{c(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_{c(0)}}{p} \\ \frac{1}{c} \int_0^t i dt &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{I(p)}{CP} \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} u_{ab} &= I(p)R + L p I(p) - L i(0) + \frac{U_{c(0)}}{p} + \\ &+ \frac{I(p)}{CP} - E(p) = I(p) ( R + L p + \frac{1}{CP} ) - L i(0) + \frac{U_{c(0)}}{p} - \end{aligned}$$

$$1. \quad E(p). \quad (2).$$

Вместо дифференциального уравнения (1) получим алгебраическое уравнение (2).

$$\frac{U_{ab}(p) + L i(0) - \frac{U_{c(0)}}{p} + E(p)}{Z(p)}$$

Из уравнения (2) следует , что  $I(p) =$

$$\text{где } Z(p) = R + L p + \frac{1}{CP} .$$

$Z(p)$  представляет собой операторное сопротивление участка цепи  $ab$ . Структура его аналогична структуре комплекса сопротивления того же участка цепи переменному току, если  $j^\omega$  заменить на  $P$ , действительно:

$$Z = R + j(xL - xc) = R + j(\omega L - \frac{j}{\omega c}) = R + j^\omega L - \frac{j}{\omega c} =$$

$$= R + j^\omega L - \frac{-1}{j\omega c} = R + j^\omega L + \frac{1}{j\omega c} .$$

Уравнение (3) называется закон Ома участка цепи в операторной форме. Оно записано при ненулевых начальных условиях. Слагаемое  $L_i(0)$  представляет собой внутреннюю эдс, обусловленную запасом энергии в магнитном поле катушки. Слагаемое  $\frac{U_c(0)}{p}$  это внутренняя эдс, обусловлена запасом энергии в электрическом поле конденсатора, если он до коммутации заряжен. В частном случае, когда на участке цепи отсутствует эдс  $e(t)$  и когда в момент коммутации  $i(0)$  и  $uc(0) = 0$ , уравнение приобретает вид:

$$I(P) = \frac{U_a(p)}{p}$$

(Закон Ома для участка без эдс при нулевых начальных условиях).

Первый закон Кирхгофа в операторной форме.

Составим уравнение для узла  $a$  участка цепи по первому закону Кирхгофа:  $i_1 + i + i_2 = 0$

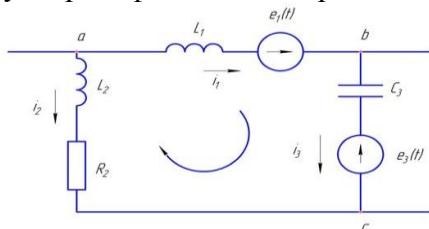
Применим к этому уравнению преобразование Лапласа, с учётом, что изображение суммы равно сумме изображений:

$$I1(p) + I(p) + I2(p) = 0$$

В общем случае  $\Sigma I(p) = 0$ .

Это выражение определяет первый закон Кирхгофа в операторной форме.

3. Второй закон Кирхгофа в операторной форме. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для некоторого контура электрической



цепи:

Проставим произвольно положительные направления токов ветвей и обходим контур по часовой стрелке:

$$L1 \frac{di1}{dt} + uc_3(0) + \frac{1}{c_3} \int_0^t i3 dt - i2R2 - L2 \frac{di2}{dt} = e1(t) - e3(t) \quad (1).$$

$uc_3(0)$  – начальное напряжение на конденсаторе в момент времени  $t = 0$ .

Каждое из слагаемых заменим операторным изображением:

$$L1 \frac{di1}{dt} \stackrel{+}{=} L1PI1(p) - L1i1(0) ;$$

$$uc_3(0) \stackrel{+}{=} \frac{uc_3(0)}{p} ;$$

$$\frac{1}{c_3} \int_0^t i3 dt \stackrel{+}{=} \frac{i3(p)}{c_3 p} ;$$

$$\begin{aligned}
 i2R2 & \stackrel{\cdot}{=} R2I2(p) ; \\
 L2 \frac{di2}{dt} & \stackrel{\cdot}{=} L2PI2(p) - L2i2(0) ; \\
 e1(t) & \stackrel{\cdot}{=} E1(p) ; \\
 e3(t) & \stackrel{\cdot}{=} E3(p) .
 \end{aligned}$$

Заменим в уравнении (1) слагаемые их изображениями, перенеся в правую часть все внутренние ЭДС:

$$L1PI1(p) + \frac{I3(p)}{C3P} - R2I2 - L2PI2(p) = E1(p) - E3(p) +$$

$$+ L1i1(0) - \frac{u_{c3}(0)}{p} - L2i2(0)$$

$$L1PI1(p) - (R2 + L2P)I2(p) + \frac{1}{C3P} I3(p) = E1(p) - E3(p) +$$

$$+ E_{\text{вн}}(p)$$

$$I1(p)Z1(p) - I2(p)Z2(p) + I3(p)Z3(p) = E1(p) - E2(p) - E_{\text{вн}}(p)$$

$$\text{Здесь } Z1(p) = L1P$$

$$Z2(p) = R2 + L2P$$

$$Z3(p) = \frac{1}{C3P}$$

$$E_{\text{вн}}(p) = L1i1(0) - L2i2(0) - \frac{u_{c3}(0)}{p}$$

В более общем виде это уравнение можно записать так:

$$\sum I_k(p)Z_k(p) = \sum E_k(p)$$

Уравнение представляет собой запись второго закона Кирхгофа в операторной форме. Как следует из выше изложенного, уравнениям, составленным по законам Кирхгофа для мгновенных значений, соответствуют аналогичные уравнения, составленные по тем же законам в операторной форме.

4. Последовательность расчёта операторным методом.

Расчёт состоит из двух основных этапов:

1. Составление уравнений изображений искомых функций времени;
1. Переход от изображений к функциям времени.

### 3.7 Переходные процессы в электрических цепях

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на способы расчета цепей с несинусоидальной ЭДС

Определим теперь среднюю мощность  $P$  в цепи при несинусоидальных токах и напряжениях. Она всегда может быть выражена в виде

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u_i dt$$

Подставляя в это выражение напряжение и ток, представленные рядами Фурье, получим

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T (U_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots)(I_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots) dt = \\
 &= \sum \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt + \sum \frac{1}{T} \int_0^T u_p i_q dt \\
 &\quad p \neq q
 \end{aligned}$$

Но при  $p \neq q$  все слагаемые второй суммы тождественно равны нулю, поэтому средняя мощность равна

$$\begin{aligned}
 P &= \sum \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt = \sum P_k = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k \dots = \\
 &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots
 \end{aligned} \tag{5}$$

Из выражения (5) следует, что *средняя или активная мощность в цепи с несинусоидальными токами и напряжениями равна сумме средних или активных мощностей отдельных гармоник.*

По аналогии с цепями синусоидального тока можно ввести понятие полной или кажущейся мощности как произведение действующих значений тока и напряжения

$$S = UI,$$

тогда отношению  $P/(UI)$  можно придать смысл *коэффициента мощности*  $\cos \varphi_3$ .

$$\cos \varphi_3 = \frac{P}{UI}$$

Выражение  $\cos \varphi_3$  формально справедливо для некоторой электрической цепи синусоидального тока, в которой протекает ток с действующим значением  $I$  и существует падение напряжения  $U$ . При этом в цепи выделяется активная мощность  $P$ .

Следовательно, при изучении некоторых явлений *несинусоидальные токи и напряжения, не содержащие постоянных составляющих, можно заменить эквивалентными им по действующему значению синусоидальными со сдвигом фаз между ними  $\varphi_3$ , соответствующим коэффициенту мощности несинусоидальных величин.* Кривые токов и напряжений в общем случае имеют различные спектры, поэтому для них не существует понятия угла сдвига фаз и  $\varphi_3$  имеет смысл только для эквивалентных синусоид.

В отличие от выражения (5) для активной мощности в цепи несинусоидального тока, полученного из понятия средней за период величины, реактивную мощность определить таким образом невозможно. В цепях синусоидального тока она была определена через амплитуду или среднее за четверть периода значение одной из переменных составляющих мгновенной мощности. Поэтому для цепи несинусоидального тока ее можно определить только формально по аналогии с активной мощностью в виде

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots + U_k I_k \sin \varphi_k + \dots$$

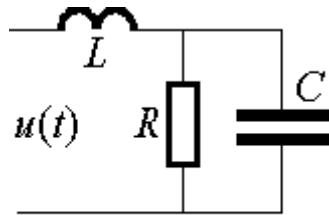
Без доказательства отметим, что *в цепях несинусоидального тока не существует связи между активной, реактивной и полной мощностью в виде треугольника мощностей*, т.е.  $S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

---

Если все элементы электрической цепи с несинусоидальными токами и напряжениями линейны, т.е. параметры элементов не зависят от токов и падений напряжения, то анализ электромагнитных процессов в них можно проводить, используя разложение в ряды Фурье.

Расчет цепи при несинусоидальных токах проводится аналогично расчету при синусоидальных, но он должен выполняться отдельно для каждой гармоники, т.е. алгоритм расчета следующий:

- представить действующую в цепи ЭДС или ток рядом Фурье (если требуется);
- любыми методами расчета цепей синусоидального тока произвести расчет отдельно для каждой гармоники спектра;
- по полученному спектру искомых величин найти требуемые значения.



Пусть требуется найти активную мощность в цепи рис. 3, где приложенное напряжение равно  $u(t) = 10 + 20\sin(1000t - 30^\circ) + 5\sin(3000t + 45^\circ)$  В, а параметры элементов  $R = 20$  Ом,  $C = 50$  мкФ и  $L = 5$  мГн.

**Рис. 3**

Спектр приложенного напряжения содержит постоянную составляющую или нулевую гармонику, а также первую и третью гармоники.

Реактивные сопротивления цепи зависят от частоты. Для  $k$ -й гармоники их можно представить через сопротивления на частоте основной гармоники в виде

$$x_{Lk} = k\omega_1 L = kx_{L1} ; \quad x_{Ck} = \frac{1}{k\omega_1 C} = \frac{x_{C1}}{k} ,$$

где  $x_{L1} = \omega_1 L = 5$  Ом и  $x_{C1} = 1/(\omega_1 C) = 20$  Ом - индуктивное и емкостное сопротивления на частоте основной гармоники. При расчете реактивных сопротивлений можно формально считать постоянную составляющую нулевой гармоникой. При этом  $x_{L0} = 0$ , а  $x_{C0} = \infty$ , что соответствует отсутствию этих элементов и вполне согласуется с теорией цепей постоянного тока, где в статических режимах реактивных элементов нет.

Общее комплексное сопротивление цепи на частоте  $k$ -й гармоники будет

$$Z_k = jkx_{L1} - j \frac{R \cdot x_{C1}}{R - jx_{C1}} = \left( kx_{L1} + \frac{R \cdot x_{C1}^2}{k^2 R^2 + x_{C1}^2} \right) - j \left( \frac{kR^2 x_{C1}}{k^2 R^2 + x_{C1}^2} \right) .$$

Подставляя в это выражение значения  $k = 0, 1, 3$ , получим значения общих комплексных сопротивлений на всех гармониках в виде  $Z_0 = 20 \text{ Ом}$ ;  $Z_1 = 10 - j5 \text{ Ом}$ ;  $Z_3 = 2 + j9 \text{ Ом}$ . Из этих выражений видно, что комплексные сопротивления на разных частотах могут иметь реактивную составляющую разного знака.

Отсюда комплексные значения токов -  $I_0 = \underline{U}_0/Z_0 = 10/20 = 0.5 \text{ А}$ ;  $I_1 = \underline{U}_1/Z_1 = 20e^{-j30^\circ}/(10 - j5) = 1.78e^{-j3.4^\circ} \text{ А}$ ;  $I_3 = \underline{U}_3/Z_3 = 5e^{j45^\circ}/(2 + j9) = 0.54e^{-j32.4^\circ} \text{ А}$ .

Полученные комплексные значения составляющих спектра токов можно представить рядом Фурье в виде

$$i = 0.5 + 1.78\sin(1000t - 3.4^\circ) + 0.54\sin(1000t - 32.4^\circ) \text{ А.}$$

Теперь можно определить активную мощность в цепи как

$$\begin{aligned} P &= \underline{U}_0 \underline{I}_0 + \frac{\underline{U}_{1m} \underline{I}_{1m}}{2} \cos(\psi_{u1} - \psi_{i1}) + \frac{\underline{U}_{3m} \underline{I}_{3m}}{2} \cos(\psi_{u3} - \psi_{i3}) = \\ &= 10 \cdot 0.5 + \frac{20 \cdot 1.78}{2} \cos[-30^\circ - (-3.4^\circ)] + \frac{5 \cdot 0.54}{2} \cos[45^\circ - (-32.4^\circ)] = 22.2 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Как уже упоминалось выше, реальные источники электрической энергии в силу конструктивных особенностей формируют ЭДС и токи, отличающиеся от синусоидальных. Чаще всего эти величины симметричны, т.к. симметрична конструкция электромеханических генераторов, и не содержат четных гармоник.

Для оценки формы симметричных кривых используют коэффициенты формы  $k_f$ , амплитуды  $k_A$  и искажений  $k_d$ .

Под **коэффициентом формы** понимают отношение действующего значения к среднему значению, взятому за положительную полуволну, т.е.

$$k_f = \frac{U}{U_{\text{ср}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}}{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} u dt}$$

Для синусоидальных величин  $k_f \approx 1.11$ .

Под **коэффициентом амплитуды** понимают отношение амплитудного значения к действующему  $k_A = U_m/U$  и для синусоиды это значение равно 1.414.

**Коэффициент искажений** это отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всего спектра, т.е.  $k_d = U_1/U$ .

Поскольку идеальных синусоидальных величин практически не бывает, то в технике существует понятие **практически синусоидальных** кривых. Форма кривой считается практически синусоидальной, если все ее ординаты отличаются от ординат первой

гармоники не более, чем на 5%. При этом количество контрольных точек должно быть не менее 12.

### 3.9 Цепи несинусоидальной периодической ЭДС

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на способы расчета цепей с несинусоидальной ЭДС

Определим теперь среднюю мощность  $P$  в цепи при несинусоидальных токах и напряжениях. Она всегда может быть выражена в виде

Подставляя в это выражение напряжение и ток, представленные рядами Фурье, получим

Но при  $\rho \neq q$  все слагаемые второй суммы тождественно равны нулю, поэтому средняя мощность равна

(5)

Из выражения (5) следует, что средняя или активная мощность в цепи с несинусоидальными токами и напряжениями равна сумме средних или активных мощностей отдельных гармоник.

По аналогии с цепями синусоидального тока можно ввести понятие полной или кажущейся мощности как произведение действующих значений тока и напряжения

$$S = UI,$$

тогда отношению  $P/(UI)$  можно придать смысл коэффициента мощности  $\cos \phi$ .