**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.1.17 Теория функций комплексного переменного

Направление подготовки: 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Специализация: Информационная безопасность автоматизированных систем критически важных объектов

Форма обучения Очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция № 1 (2 ч). Тема: «Комплексные числа и действия с ними»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Комплексные числа и действия с ними.

2. Комплексная плоскость.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Комплексные числа и действия с ними.

Комплексным числом, представленным (записанным) в алгебраической форме, называется выражение вида $z = x + i \cdot y$, где $x, y \in R$ - действительные числа, $x = \operatorname{Re} z$ - действительная часть комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ - мнимая часть (перев. с англ.: real- реальный, image- мнимый). Символ i называется мнимой единицей: $i^2 = -1$.

Отношение равенства комплексных чисел: два комплексных числа $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ равны тогда и только тогда, когда равны соответственно их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Суммой двух комплексных чисел z_1, z_2 называется число z, равное

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + i \cdot y_1 + x_2 + i \cdot y_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2).$$

Произведением комплексных чисел z_1, z_2 называется число z, равное

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + \cdot y_2 \cdot i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 y_2 \cdot i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 =$$
$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot i.$$

Для любого комплексного числа $z = x + iy$ существует *комплексно-сопряжённое число* $\overline{z} = x - iy$, причём $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$. На плоскости C комплексно-сопряжённым числам соответствуют точки, симметричные относительно действительной оси.

Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма записи. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.

Будем изображать комплексные числа $z = x + iy \neq 0$ радиус-векторами точек z (Рис. 2). Длина радиус-вектора точки z называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $|\overline{z}| = |z|$. Здесь $|z|$ - расстояние от начала комплексной плоскости до точки z, $|z_2 - z_1|$ - расстояние между точками z_1 и z_2. Угол φ, который образует радиус-вектор z с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $Arg(z)$. Значения $Arg(z)$ находятся неоднозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k,\ k \in Z$. *Главным значением* аргумента $\arg(z)$ комплексного числа z называется значение $Arg z$ из промежутка $-\pi; \pi$: $Arg(z) = \arg(z) + 2\pi k,\ k \in Z,\ -\pi < \arg(z) \le \pi$.

Пользуясь формулами перехода от декартовых координат к полярным координатам $x=|z|\cdot\cos\varphi,\ y=|z|\cdot\sin\varphi,\ \dfrac{y}{x}=tg\varphi$ запишем комплексное число

z в виде $z=|z|\cdot\ \cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$. Эта форма записи комплексного числа называется *тригонометрической(или полярной)*. Формулы для нахождения главного значения аргумента комплексного числа:

$$\arg(z)=\begin{cases} arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), x>0; \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)+\pi, x<0, y\geq 0; \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)-\pi, x<0, y<0; \\ \dfrac{\pi}{2}, x=0, y>0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, x=0, y<0. \end{cases}$$

Для комплексных чисел

$$z_1=|z_1|\cdot\ \cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\ ,\ z_2=|z_2|\cdot\ \cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\ ,$$

записанных в тригонометрической форме, справедливы следующие правила умножения и деления:

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ \cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\ ,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\ \cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\ ,\ z_2\neq 0.$$

В частности, справедлива *формула Муавра возведения комплексных чисел в степень*

$$z^n=\ z\cdot\ \cos\varphi+i\sin\varphi\ ^n=|z|^n\cdot\ \cos n\varphi+i\sin n\varphi\ ,\ n\in N.$$

Комплексные числа $z_1=|z_1|\cdot\ \cos\varphi_1+i\sin\varphi_1$ и $z_2=|z_2|\cdot\ \cos\varphi_2+i\sin\varphi_2$, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда

$$|z_1|=|z_2|,\ Arg\ \ z_1\ -Arg\ \ z_2\ =2\pi m,\ m \text{ - целое.}$$

С помощью этого понятия равенства комплексных чисел и формулы Муавра возведения в степень получают следующую *формулу Муавра извлечения корней* $n-ой$ степени из комплексных чисел:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,...,n-1.$$

В общем случае для любого комплексного $z\neq 0$ существует ровно n различных значений $\sqrt[n]{z}$, которые изображаются на комплексной плоскости вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r=\sqrt[n]{|z|}$ с центром в нулевой точке(либо значения $\sqrt[n]{z}$ изображают радиус-векторами).

3. Показательная форма записи комплексных чисел. Действия с комплексными числами в показательной форме.

С помощью *формулы Эйлера*

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$$

любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить *в показательной форме:*

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

В показательной форме удобно умножать и делить комплексные числа, возводить в степень и извлекать корни:

если $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$, $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, то

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1} \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi_2} = |z_1 \cdot z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}} \cdot = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$z^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}, \quad z^{-n} = |z|^{-n} \cdot e^{-in\varphi}, \quad \bar{z} = |z| \cdot e^{-i\varphi}.$$

Отметим, что из формулы Эйлера следует: $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \cdot \sin\varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2 \cdot i}.$$

2. Комплексная плоскость.

Множество всех комплексных чисел замкнуто относительно операций

сложения и умножения и *образует поле*, обозначаемое через C. Элементы $z = x + iy$ поля C отождествляются с точками $M(x; y)$ плоскости xOy. В этом случае плоскость xOy называют *комплексной плоскостью*. Комплексные числа можно изображать также радиус-векторами точек. Сложение и вычитание комплексных чисел можно геометрически интерпретировать как сложение и вычитание векторов на комплексной плоскости.

Для любого комплексного числа $z = x + iy$ существует *комплексно-сопряжённое число* $\bar{z} = x - iy$, причём $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. На плоскости C комплексно-сопряжённым числам соответствуют точки, симметричные относительно действительной оси

1. 2 Лекция № 2 (2 ч). Тема: «Линии и области на комплексной плоскости»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Линии на комплексной плоскости.

2. Области на комплексной плоскости.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Линии на комплексной плоскости

Рассмотрим множество $D \subseteq C$, состоящее из комплексных чисел. Будем считать, что значением z может быть любое комплексное число из множества D. В этом случае z называют *комплексным переменным,* а множество D-областью изменения z. В алгебраической форме z имеет вид $z = x + i \cdot y$.

Пусть $\varphi(t), \psi(t)$ - действительные непрерывные функции действительного переменного t, $\alpha \le t \le \beta$. Система уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

определяет на плоскости xOy *непрерывную линию* (параметрическим заданием). Непрерывную линию на комплексной плоскости можно задать *комплексно-параметрическим уравнением*

$$z = z(t) \Leftrightarrow z = \varphi(t) + i \cdot \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta .$$

Если $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывны, имеют непрерывные производные и

$$\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 \ne 0,\ \alpha \le t \le \beta ,$$

то *линию называют гладкой*. Замкнутую линию, не имеющую точек самопересечения, называют *контуром* (*замкнутым контуром*).

Линию на комплексной плоскости можно задать не только комплексно- параметрическим, но и *комплексным уравнением.*

Простейшие линии на комплексной плоскости

1. а) *Комплексное уравнение окружности* с центром в точке $z = z_0$ радиуса r:

$\left|z - z_0\right| = r$ (Рис. 11);

б) *комплексно-параметрическое уравнение окружности* с центром в точке $z = z_0$ радиуса r: $z = z_0 + r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$ (Рис.11);

в) *комплексное уравнение дуги окружности* с центром в точке $z = z_0$ радиуса r (Рис. 12): $\begin{cases} \left|z - z_0\right| = r, \\ \alpha \le arg\left(z - z_0\right) \le \beta; \end{cases}$

г) *комплексно-параметрическое уравнение дуги окружности* с центром в точке $z = z_0$ радиуса r: $z = z_0 + r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t),\ \alpha \le t \le \beta$ (рис. 12).

д) *комплексно-параметрическое уравнение окружности в показательной форме* с центром в точке $z = z_0$ радиуса r: $z = z_0 + r \cdot e^{i \cdot \varphi}, 0 \le t \le 2\pi$;

е) *комплексно-параметрическое уравнение дуги окружности в показательной форме* с центром в точке $z = z_0$ радиуса r: $z = z_0 + r \cdot e^{i \cdot \varphi}, \alpha \le t \le \beta$.

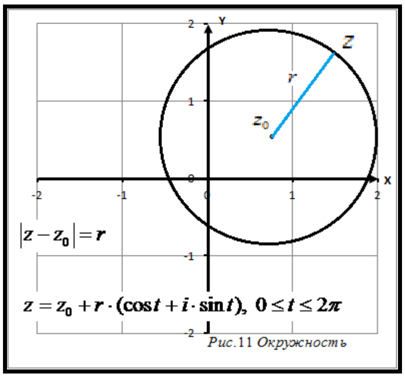


Рис.11 Окружность

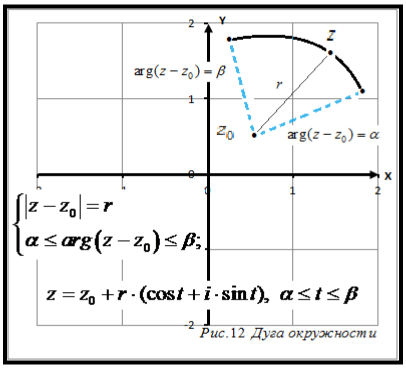


Рис.12 Дуга окружности

2. *Комплексно-параметрическое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки* z_1 и z_2: $z=z_1+(z_2-z_1)\cdot t,\ -\infty<t<+\infty$ (рис.13).

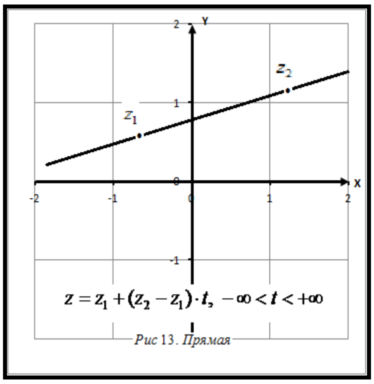


Рис 13. Прямая

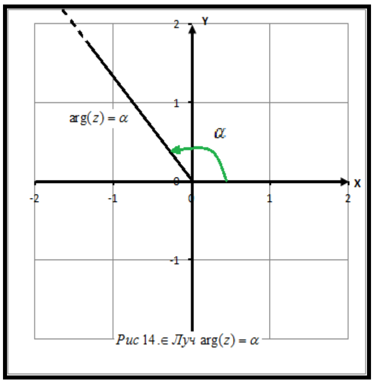


Рис 14.∈ Луч $\arg(z)=\alpha$

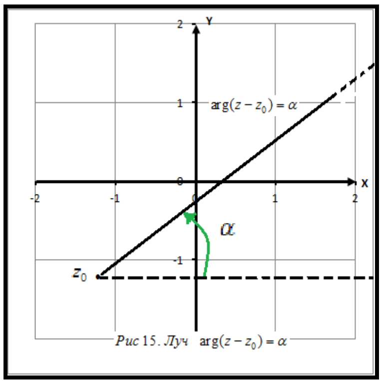


Рис 15. Луч $\arg(z-z_0)=\alpha$

3. *Луч, выходящий из точки* $z=0$ под углом α к оси Ox: $\arg(z)=\alpha$ (рис. 14).

4. *Луч, выходящий из точки* $z=z_0$ под углом α к оси Ox: $\arg(z-z_0)=\alpha$ (рис.15).

2. Области на комплексной плоскости

Простейшие области комплексной плоскости

1. *Открытый круг* с центром в точке $z=z_0$ радиуса r (окрестность)(Рис. 18): $|z-z_0|<r$.

2. *Замкнутый круг* с центром в точке $z=z_0$ радиуса r (Рис. 19): $|z-z_0|\le r$.

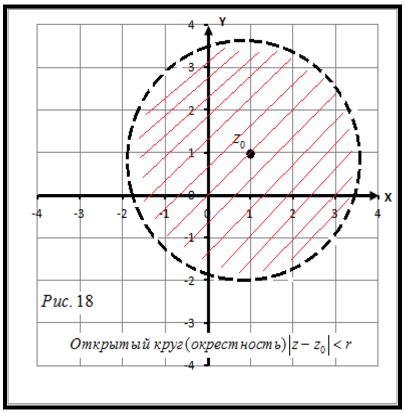


Рис. 18 Открытый круг (окрестность) $|z-z_0|<r$

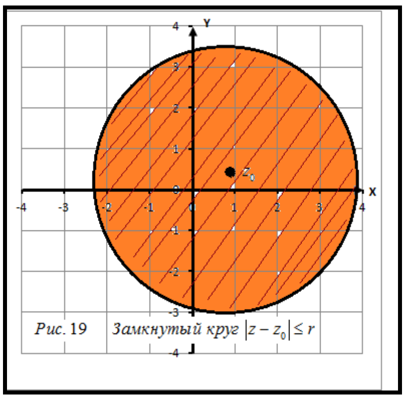
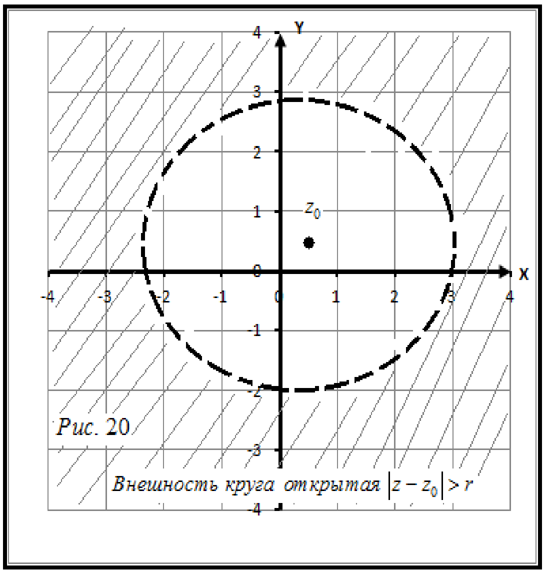
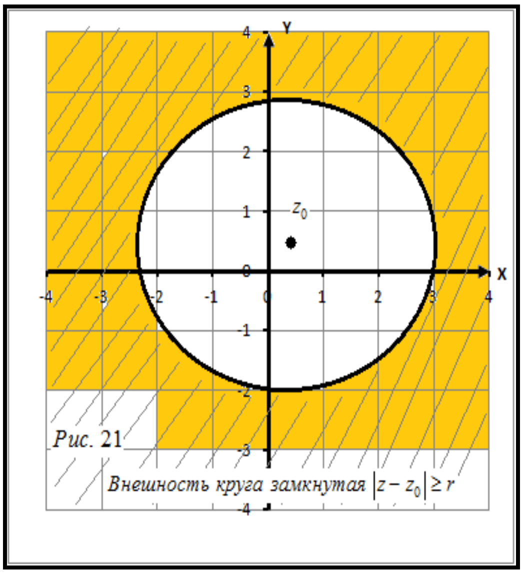


Рис. 19 Замкнутый круг $|z-z_0|\le r$

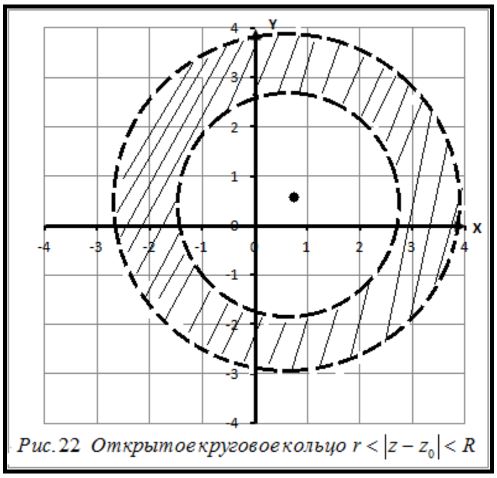
3. *Внешность круга открытая* с центром в точке $z=z_0$ радиуса r: $|z-z_0|>r$ (Рис. 20).

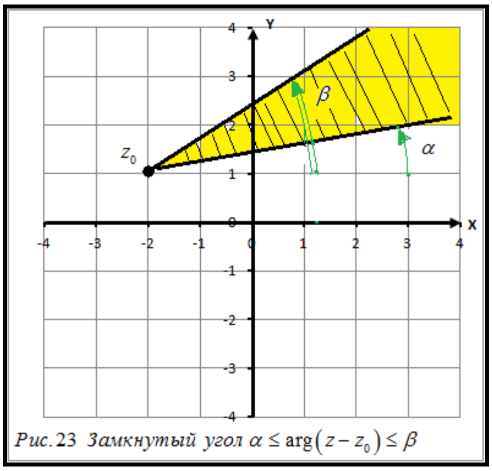
4. *Внешность круга замкнутая* с центром в точке $z=z_0$ радиуса r: $|z-z_0|\ge r$ (Рис. 21).





5. *Открытое круговое кольцо* с центром в точке $z=z_0$, ограниченное концентрическими окружностями радиусов r и R, $0<r<R$ (Рис. 22): $r<|z-z_0|<R$. Кольцо может включать часть границы или всю границу. Например, неравенство $r\leq|z-z_0|\leq R$ задаёт замкнутое кольцо.





6. *Замкнутый угол* с вершиной в точке $z=z_0$ (Рис. 23):

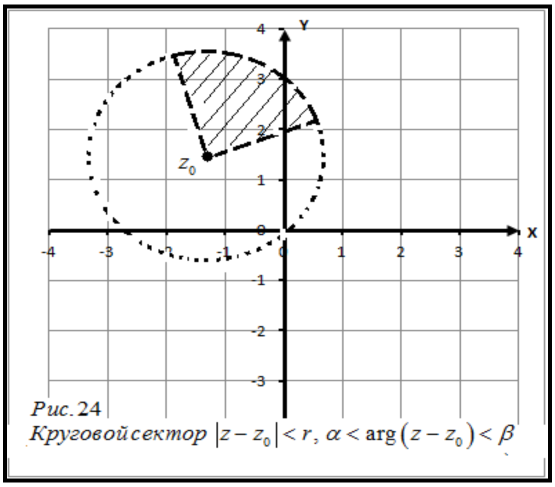
$$\alpha\leq\arg\ z-z_0\ \leq\beta,\ \alpha<\beta.$$

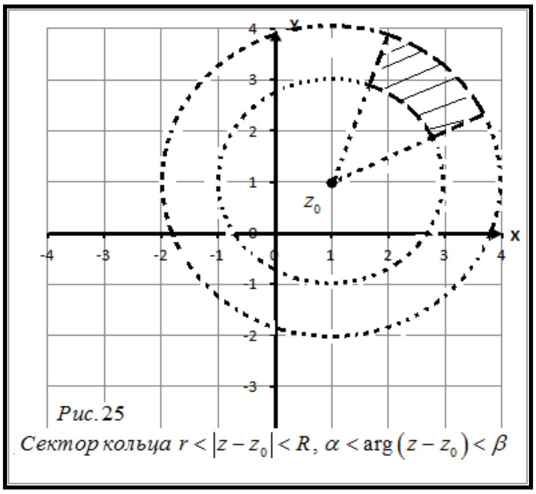
Стороны угла, либо некоторые участки сторон, могут не включаться в область. Например, $\alpha<\arg\ z-z_0\ <\beta$ задаёт открытый угол.

7. *Открытый круговой сектор* с центром в точке $z=z_0$, ограниченный дугой окружности радиуса r и лучами $\arg(z-z_0)=\alpha$, $\arg(z-z_0)=\beta$, $\alpha<\beta$ (Рис. 24): $|z-z_0|<r,\alpha<\arg\ z-z_0\ <\beta$. Круговой сектор может быть замкнутым.

8. Сектор кругового кольца с центром в точке $z = z_0$, ограниченный дугами концентрических окружностей радиусов r и R и лучами $\arg(z - z_0) = \alpha$, $\arg(z - z_0) = \beta$, $\alpha < \beta$ (Рис. 25): $r < |z - z_0| < R, \alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ (открытый).

Круговой сектор может быть замкнутым.

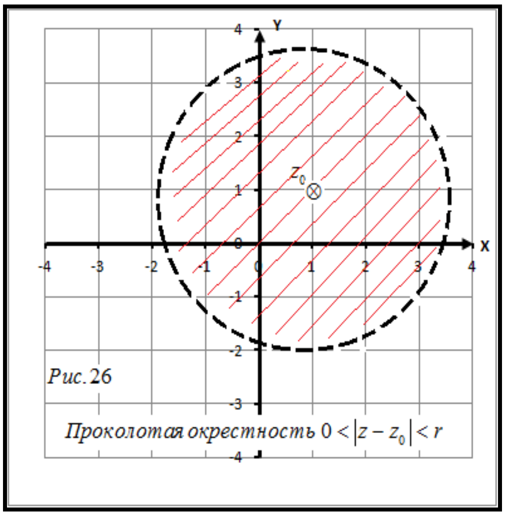


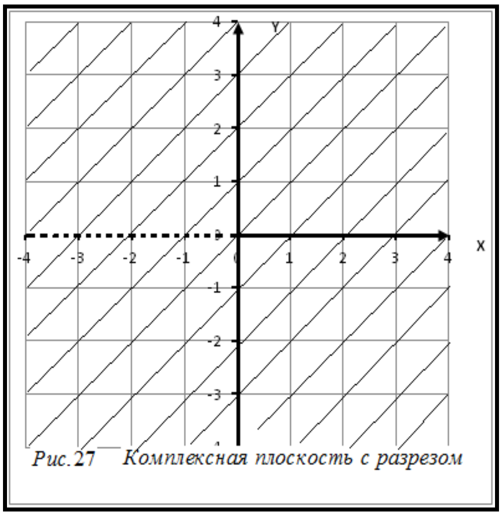


9. *Проколотая окрестность* с центром в точке $z = z_0$ радиуса r (Рис. 26):

$0 < |z - z_0| < r$.

***10**. Комплексная плоскость с разрезом* вдоль отрицательной части действительной оси (Рис. 27): $-\pi < \arg z < \pi$.





***11**. Правая полуплоскость комплексной плоскости* (замкнутая) (Рис. 28):

$$\operatorname{Re} z \geq 0.$$

***12**. Верхняя полуплоскость комплексной плоскости* (замкнутая) (Рис. 29):

$$\operatorname{Im} z \geq 0.$$

Полуплоскости могут быть открытыми.

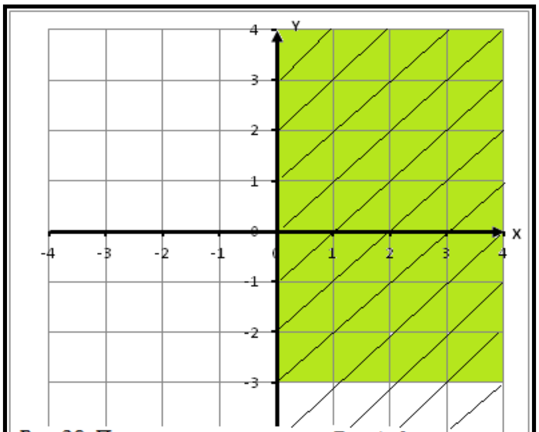


Рис.28 Правая полуплоскость : $\operatorname{Re} z \geq 0$

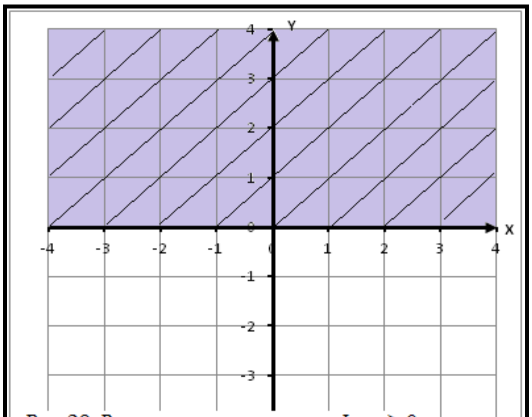


Рис.29 Верхняя полуплоскость : $\operatorname{Im} z \geq 0$

13. *Первая четверть комплексной плоскости* (Рис. 30): $\operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0$ (за-мкнутая).

14. *Прямоугольник на комплексной плоскости* (Рис. 31): $a \leq \operatorname{Re} z \leq b$, $c \leq \operatorname{Im} z \leq d$, $a < b, c < d, a, b, c, d \in R$ (замкнутый). Прямоугольники могут быть открытыми.

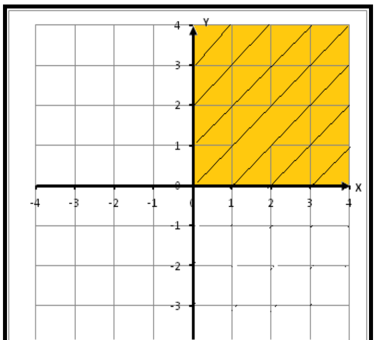


Рис.30 Первая четверть КП : $\operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0$

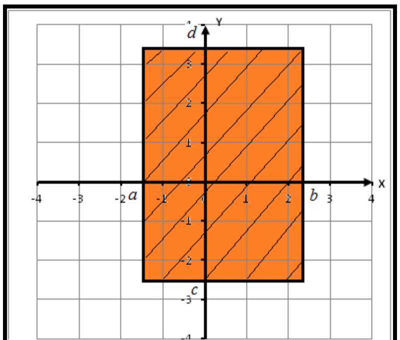


Рис.31 Прямоугольник на комплексной плоскости

Линии и области, заданные комплексными уравнениями и неравенствами, проще всего строить используя наглядную геометрическую интерпретацию модуля и аргумента комплексного числа.

1.3 Лекция № 3 (2 ч). Тема: «Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции. Предел и непрерывность. Отображения с помощью непрерывных функций. Степенные ряды. Элементарные ФКП»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции.
2. Предел и непрерывность.
3. Отображения с помощью непрерывных функций. Степенные ряды. Элементарные ФКП.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции.

Пусть D и G - комплексные числовые множества (вообще говоря, множества на расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$). *Функцией* $w = f(z)$ *комплексного переменного* z называется бинарное отношение f между множествами D и G, причём каждое число z множества D будет являться первым элементом какой-либо упорядоченной пары подмножества f декартового произведения $D \times G$ ($f \subseteq D \times G$). Множество D называется *областью определения функции*, G-*областью значений функции*, а $E = f(D) \subseteq G$-*множеством значений функции*. Если каждому значению $z \in D$ соответствует лишь одно значение $w \in G$, то функция называется *однозначной*, если же некоторым z соответствует более чем одно значение w, то функция называется *многозначной*. Только однозначная комплексная функция является функцией в общепринятом понимании (отображение). Итак, *однозначной функцией* $w = f(z)$ *комплексного переменного* z называется отображение f комплексного числового множества D в комплексное числовое множество G.

Обозначим $z = x + i \cdot y$ и представим функцию в алгебраической форме $w = u + i \cdot v$, где x, y-действительные числа. Тогда в алгебраической форме

$$w = f(z) \equiv f(x + i \cdot y) \equiv u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Действительная и мнимая части функции комплексного переменного $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$, $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ являются действительными функциями двух действительных переменных x и y.

Итак, функция $w = f(z)$ определяет две действительные функции действительных переменных $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Обратно, задание функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ определяет комплексную функцию комплексного переменного $w = f(z) \equiv u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ в алгебраической форме.

Для наглядной геометрической иллюстрации функции $w = f(z)$ значения аргумента z изображают на комплексной плоскости xOy, которую обозначают (z), а значения функции w изображают на комплексной плоскости $uO'v$, которую обозначают (w). Таким образом, комплексная функция отображает множество точек D комплексной плоскости (z), на множество точек E комплексной плоскости (w) (рис. 44).

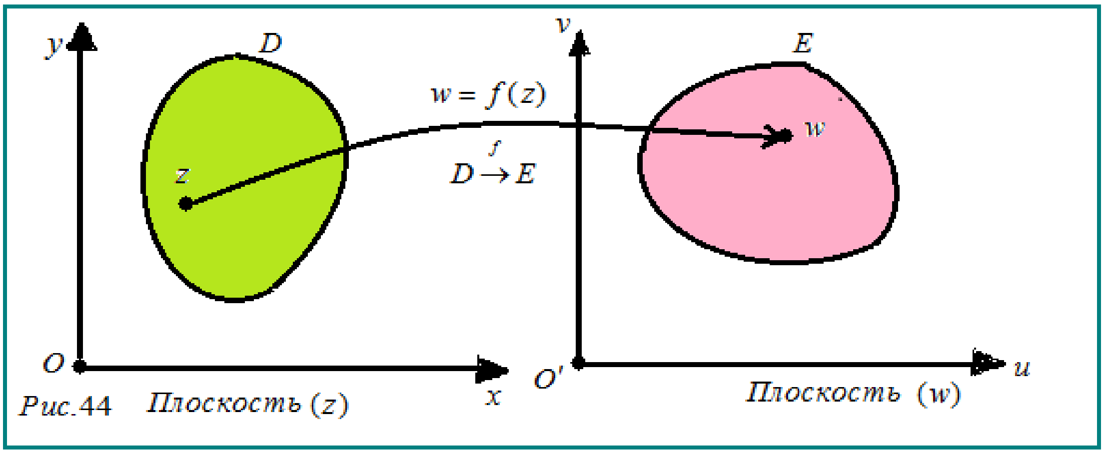


Рис.44

Иногда для геометрического представления функций комплексного переменного в системе координат $Oxy\rho$ изображают *поверхность модуля* или *рельеф функции*: $\rho = |f(z)|$. Если $w = f(z) \equiv u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, то поверхность модуля задаётся уравнением $\rho = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$. На рисунке 45 представлена поверхность модуля функции $w = z^2$: $\rho = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$. Это параболоид вращения относительно вертикальной оси.

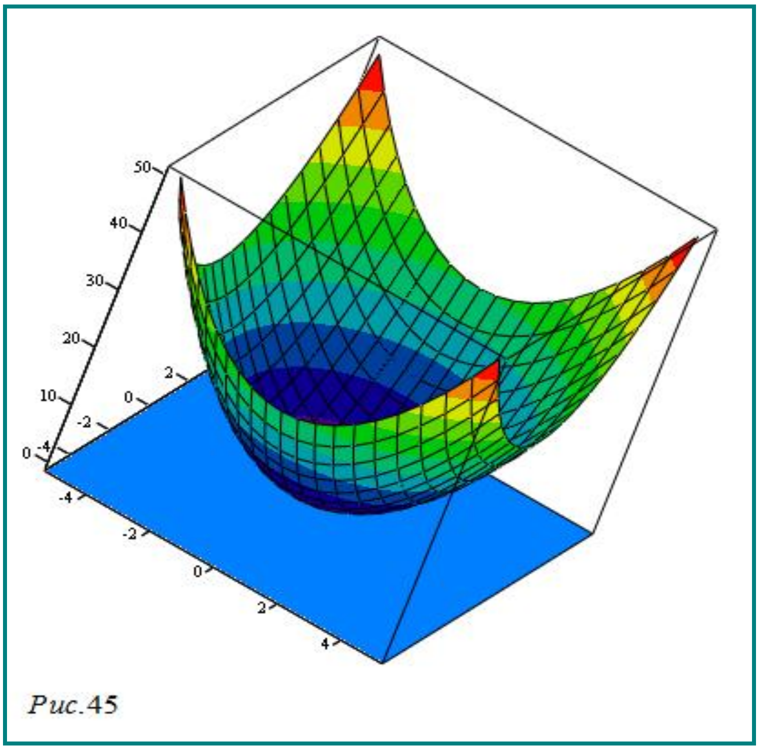


Рис.45

В теории функций комплексного переменного биективное отображение $w = f(z)$ области D на область E принято называть *однолистной функцией*. Для однолистной функции $w = f(z)$ справедливо следующее утверждение:

$$\forall z_1, z_2 \in D \ (z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)) .$$

В приложениях важное значение имеет свойство отображений с помощью однозначных непрерывных функций: если однозначная непрерывная в области D функция $w = f(z)$ отображает эту область на множество E, то множество E так же является областью. Если, сверх того, функция непрерывна в замыкании области $\bar{D}$, то f отображает ∂D на ∂E, т.е. границей образа области D будет образ границы этой же области:

$$\partial E = f(\partial D) \Leftrightarrow \partial f(D) = f(\partial D).$$

2. Предел и непрерывность.

Определение. Функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеет **предел** в точке z_0, равный числу $A = a + ib$, если $\lim\limits_{|z-z_0|\to 0} |f(z) - A| = 0$: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$.

Свойства пределов функций комплексного переменного.

Для пределов функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$ справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$

2) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$

3) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$; $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0.$

Определение. Функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется **непрерывной** в точке z_0, если выполняется равенство

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

3. Отображения с помощью непрерывных функций. Степенные ряды. Элементарные ФКП.

Под элементарными функциями комплексного переменного $z = x + i \cdot y$ понимают обычно функции:

$f(z) = a \cdot z + b$ - *линейная функция* $(a, b \in Z)$;

$f(z) = z^n$ - *степенная функция*, n-целое;

$f(z) = \dfrac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ -*дробно-линейная функция* $(a, b, c, d \in Z)$;

$f(z) = a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + a_2 \cdot z^{n-2} + \ldots + a_n$ - *целая рациональная функция*;

$f(z)=\dfrac{a_0\cdot z^n+a_1\cdot z^{n-1}+a_2\cdot z^{n-2}+...+a_n}{b_0\cdot z^m+b_1\cdot z^{m-1}+b_2\cdot z^{m-2}+...+b_m}$ -*общая рациональная функция*;

$f(z)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ -*функция Жуковского*;

$f(z)=e^z$ -*показательная функция*;

$f(z)=Lnz$ -*логарифмическая функция*;

$f(z)=\sin z$, $f(z)=\cos z$, $f(z)=tgz\equiv\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $f(z)=ctgz\equiv\dfrac{\cos z}{\sin z}$ - *тригонометрические функции*;

$f(z)=Arc\sin z$, $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z$, $f(z)=Arctgz$, $f(z)=Arcctgz$ -*обратные тригонометрические функции*;

гиперболические функции: $shz=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ -синус гиперболический,

$chz=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ -косинус гиперболический, $thz=\dfrac{shz}{chz}$ -тангенс гиперболический,

$cthz=\dfrac{chz}{shz}$ – котангенс гиперболический,

обратные гиперболические функции.

Представление основных элементарных функций в алгебраической форме (формулы вычисления значений функций) и простейшие свойства функций.

1. Показательная функция e^z.

1.1. Показательная функция определена на всей комплексной плоскости и её представление в алгебраической форме определяется формулой

$$e^z=e^{x+i\cdot y}=e^x\cdot(\cos y+i\cdot\sin y)=e^x\cdot\cos y+e^x\cdot i\cdot\sin y,$$

т.е. $\mathrm{Re}\;e^z=e^x\cdot\cos y$, $\mathrm{Im}\;e^z=e^x\cdot\sin y$.

При $y=0$ для действительных $z=x$ имеем $e^z=e^x$; при $x=0$ для чисто мнимых $z=i\cdot y$ получим формулу Эйлера: $e^{i\cdot y}=\cos y+i\cdot\sin y$.

1.2. $|e^z|=e^x$, $Arg\;e^z=y+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$.

1.3. Функция e^z является аналитической на всей комплексной плоскости, при этом $e^z \ ' = e^z$.

1.4. $\forall z_1, z_2 \left(e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2},\ \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} \right)$.

1.5. Функция e^z является периодической: число $2\pi i$ - основной период, любое число $2\pi ki$, где $k \in Z$, будет периодом

$\forall z \ \ e^{z+2\pi ki} = e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot \ \ cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi \ \ = e^z$.

1.6. Показательная функция e^z связана с тригонометрическими функциями тождеством Эйлера: $e^{i \cdot z} = \cos z + i \cdot \sin z$.

1.7. $\forall z \ \ e^z \neq 0$.

1.8. Отображение, осуществляемое функцией $w = e^z$, является конформным на всей комплексной плоскости.

Пример 24. Вычислить значение e^z при а) $z = \dfrac{\pi}{2} \cdot i$, б) $z = 3 - \dfrac{\pi}{4} \cdot i$.

Решение. Значения функции e^z вычисляем по формуле пункта 1.1:

$$e^z = e^{x+i\cdot y} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) = e^x \cdot \cos y + e^x \cdot i \cdot \sin y.$$

а) $z = \dfrac{\pi}{2} \cdot i \Rightarrow x = 0,\ y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \ e^z = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = e^0 \cdot (\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \sin\dfrac{\pi}{2}) = i$;

б) $z = 3 - \dfrac{\pi}{4} \cdot i \Rightarrow x = 3,\ y = -\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow e^z = e^{3-i\cdot\frac{\pi}{4}} = e^3 \cdot \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= e^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = e^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ \ 1 - i \ \ .$$

2. Логарифмы комплексных чисел. Логарифмическая функция $Ln\, z$.

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной.

Определение. *Комплексное числа w называется логарифмом комплексного числа z, если $e^w = z$ и обозначается $w = Lnz$.*

Теорема*. Для любого комплексного числа $z \neq 0$ существует логарифм $w = Lnz$. Логарифм нуля в комплексной области не существует (так же как и в действительной области).*

Доказательство. Пусть дано $z \in C,\ z \neq 0$. Покажем существование числа w такого, что $e^w = z$, т.е. $w = Lnz$. Число $w = Lnz$ представим в алгебраической форме $w = u + i \cdot v$, где u и v пока не известны, а число z - в показательной форме: $z = |z| \cdot e^{i \cdot Argz}$. Тогда равенство $e^w = z$ примет вид $e^{u+i\cdot v} = |z| \cdot e^{i\cdot Argz}$. Поэтому

$$e^{u+i\cdot v} = |z| \cdot e^{i\cdot Argz} \Leftrightarrow e^u \cdot e^{i\cdot v} = |z| \cdot e^{i\cdot Argz} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^u = |z|,\ e^{i\cdot v} = e^{i\cdot Argz} \ \Leftrightarrow \ u = \ln|z|,\ v = Argz.$$

Поэтому формула вычисления логарифма комплексного числа (представления логарифма в алгебраической форме) имеет вид

$$Lnz = u + i \cdot v = \ln|z| + i \cdot Argz.$$

Так как $Argz = argz + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, где $\arg z$ - главное значение аргумента комплексного числа z, то

$$Lnz = \ln|z| + i \cdot argz + 2\pi ki,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ .$$

В этих формулах $\ln|z|$ - натуральный логарифм действительного числа $|z| \neq 0$.

Теорема доказана.

Если $z = x + i \cdot y$, то $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и логарифм комплексного числа z вычисляется по формуле

$$Lnz = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i \cdot argz + 2\pi ki,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots .$$

Эта формула показывает, что логарифмическая функция комплексного аргумента $w = Lnz$ имеет бесконечно много значений (бесконечнозначная). При $k = 0$ выделяют ветвь этой функции, называемую главным значением логарифма:

$$lnz = \ln|z| + i \cdot argz.$$

Пример 25. Вычислить значение Lnz при а) $z = i$, б) $z = -1$, в) $z = 1 + i$.

Решение. Значения функции Lnz вычисляем по формуле

$$Lnz = \ln|z| + i \cdot argz + 2\pi ki,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

а). $Lni = \ln|i| + i \cdot \arg i + 2\pi ki = \ln 1 + i \cdot \dfrac{\pi}{2} + 2\pi ki = i \cdot \dfrac{\pi}{2} + 2\pi ki, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Главное значение логарифма числа $z = i$ получим из этой формулы при $k = 0$:

$$lni = \ln|i| + i \cdot \arg i = \ln 1 + i \cdot \frac{\pi}{2} = i \cdot \frac{\pi}{2}.$$

б). В комплексной области существуют логарифмы отрицательных чисел. Например, $Ln(-1)=\ln|-1|+i\cdot\arg(-1)+2\pi ki=\ln 1+i\cdot\pi+2\pi ki=i\cdot(1+2k)\cdot\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$;

при $k=0$ получим главное значение логарифма числа $z=-1$:

$ln(-1)=\ln|-1|+i\cdot\arg(-1)=i\cdot\pi$.

в). $Ln(1+i)=\ln|1+i|+i\cdot\arg(1+i)+2\pi ki=\ln\sqrt{2}+i\cdot\dfrac{\pi}{4}+2\pi ki, k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$,

$ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\cdot\dfrac{\pi}{4}$.

3. Тригонометрические функции.

3.1. Тригонометрические ФКП $\sin z$ и $\cos z$ определены на всей комплексной плоскости и выражаются через показательную ФКП с помощью тождеств Эйлера:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\cdot i}.$$

Функции tgz и $ctgz$ определяются через $\sin z$ и $\cos z$: $tgz\equiv\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $ctgz\equiv\dfrac{\cos z}{\sin z}$. Для действительных $z=x$ эти функции совпадают с тригонометрическими функциями вещественного аргумента.

3.2. Положив $z=x+i\cdot y$ в формулах п. 3.1, получим представление $\sin z$ и $\cos z$ в алгебраической форме:

$$\cos z=\cos(x+i\cdot y)=\cos x\cdot\operatorname{ch}y-i\cdot\sin x\cdot\operatorname{sh}y,$$

$$\sin z=\sin(x+i\cdot y)=\sin x\cdot\operatorname{ch}y+i\cdot\cos x\cdot\operatorname{sh}y.$$

3.3. Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\sin iz=i\cdot\operatorname{sh}z, \cos iz=c\mathrm{h}\,z,$$

$$\operatorname{sh}iz=i\cdot\sin z,\ \operatorname{ch}iz=\cos z.$$

3.4. Функции $\sin z$ и $\cos z$ аналитические на всей плоскости, а $\tan z$ и $\cot z$ - в области определения, причём

$$(\sin z)'=\cos z,\quad (\cos z)'=-\sin z,\quad (tgz)'=\frac{1}{\cos^2 z},\quad (ctgz)'=-\frac{1}{\sin^2 z}.$$

3.5. Отображения, осуществляемые функциями $\sin z$ и $\cos z$, являются конформными на всей комплексной плоскости.

3.6. Функции $\sin z$ и $\cos z$ являются периодическими: число 2π - основной период, любое число $2\pi k$, где $k\in Z$, будет периодом.

3.7. В комплексной области для функций $\sin z$ и $\cos z$ нарушаются известные свойства $|\sin z| \le 1, |\cos z| \le 1$, т.е. модули этих функций могут принимать значения, большие единицы. Например, из формул п. 3.3 следует, что

$\cos i = ch1$. Поэтому, $|\cos i| = ch1 = \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} = \dfrac{e + \frac{1}{e}}{2} \approx 1.543$, т.е. $|\cos i| > 1$. Это свойство $\sin z$ и $\cos z$ можно увидеть, изобразив в системе координат $Oxy\rho$ *поверхность модуля* или *рельеф функции*: $\rho = |\sin z|$ с MathCAD. Так как

$\sin z = \sin\ x + i \cdot y\ = \sin x \cdot chy + i \cdot \cos x \cdot shy$, то поверхность модуля $\rho = |\sin z|$ задаётся уравнением $\rho = \sqrt{\ \sin x \cdot chy\ ^2 + \ \cos x \cdot shy\ ^2}$ (Рис. 46).

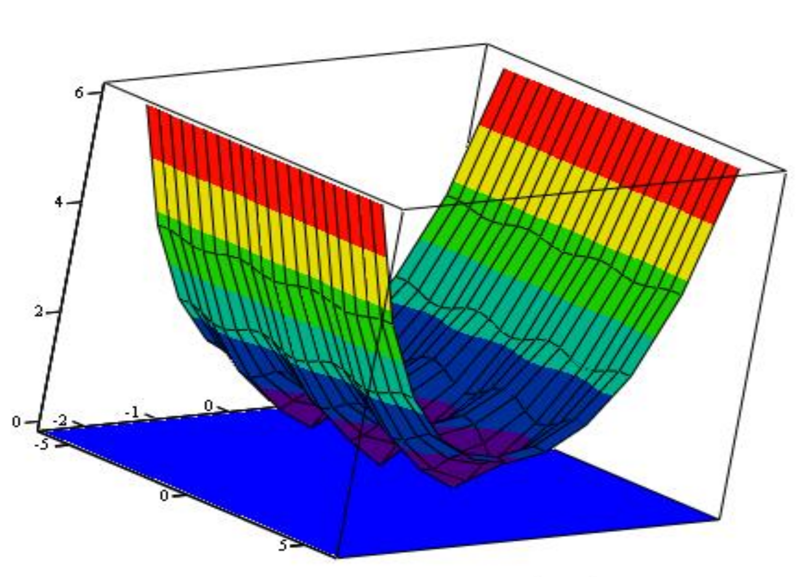


Рис. 46 $\rho = |\sin z|$

Пример 26. Вычислить значение $\cos z$ при а) $z = i$, б) $z = \dfrac{\pi}{2} + i$.

Решение. а). Значение $\cos i$ вычисляем по формуле $\cos iz = chz$ (при $z = 1$):

$$\cos i = ch1, \text{ где } ch1 = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2} \approx 1.543.$$

б). Значение $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + i\right)$ вычисляем по формуле

$$\cos z = \cos\ x + i \cdot y\ = \cos x \cdot chy - i \cdot \sin x \cdot shy \quad \text{при} \quad x = \frac{\pi}{2}0,\ y = 1:$$

$$\cos i = \cos(0 + i\cdot 1) = \cos 0\cdot ch1 - i\cdot \sin 0\cdot sh1 = ch1 = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2} \approx 1.543.$$

4. Гиперболические функции.

$$chz = ch(x + i\cdot y) = chx\cdot \cos y + i\cdot shx\cdot \sin y,$$

$$shz = sh(x + i\cdot y) = shx\cdot \cos y + i\cdot chx\cdot \sin y.$$

1. 4. Лекция № 4 (2 ч). Тема: «Производная ФКП. Условия Коши- Римана, аналитические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Элементы теории конформных отображений»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Производная ФКП. Условия Коши - Римана, аналитические функции.
2. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
3. Элементы теории конформных отображений.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Производная ФКП. Условия Коши- Римана, аналитические функции.

Пусть однозначная функция комплексного переменного $w = f(z)$ определена в окрестности конечной точки z комплексной плоскости. Если точка $z + \Delta z$ принадлежит этой окрестности, то $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ будет приращением функции $w = f(z)$ при переходе от точки z к точке $z + \Delta z$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

то этот предел называется *производной функции* $w = f(z)$ *в точке* z и обозначается

$$w'(z) = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

а сама функция $w = f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z. Представим функцию $w = f(z)$ в алгебраической форме $f(z) = u(x, y) + i\cdot v(x, y)$, где $u(x, y), v(x, y)$ - действительные функции двух действительных аргументов x, y.

Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в конечной точке области комплексной плоскости (во внутренней точке области): для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + i\cdot v(x, y)$, определённая в области D комплексной плоскости, была в точке $z = x + i\cdot y$ этой области дифференцируемой как функция комплексного аргумента, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) как функции двух действительных переменных и выполнялись условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \qquad \text{(КРЭД)}$$

При выполнении всех этих условий производная $f'(z)$ может быть вычислена по одной из следующих формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Достаточные условия дифференцируемости функции в конечной точке области комплексной плоскости: для дифференцируемости комплексной функции $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ достаточно, чтобы частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ существовали, были непрерывными и удовлетворяли условию (КРЭД).

Функция называется *дифференцируемой в области*, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Функция $w = f(z)$ однозначная и дифференцируемая в области называется *аналитической*(иначе, *голоморфной, регулярной, правильной*) в этой области. Функция называется *аналитической* в конечной точке z, если она является аналитической в некоторой окрестности этой точки. Точки плоскости z, в которых функция не является аналитической, называются *особыми точками* этой функции.

2. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Элементы теории конформных отображений.

Пусть функция $\omega = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Проведем через точку z_0 любую гладкую кривую L. Ее образом также будет какая-то гладкая кривая $f(L)$, проходящая через точку $\omega_0 = f(z_0)$.

Пусть α означает угол наклона касательной в точке z_0 к кривой L, а β – угол наклона касательной к $f(L)$ в точке ω_0.

Угол поворота касательной к кривой L при данном отображении будет равен $\beta - \alpha = \arg f'(z_0)$.

С учетом того, что результат получился не зависящим от выбора кривой L, можно сделать вывод, что все кривые, проходящие через точку z_0, при данном отображении f поворачиваются на один и тот же угол, равный аргументу производной в данной точке.

Если теперь рассмотреть две кривые L_1 и L_2, проходящие через точку z_0, и угол между ними обозначить через γ, то поскольку обе кривые (точнее, касательные к ним) поворачиваются на одинаковый угол, то угол между образами - $f(L_1)$ и $f(L_2)$ - тоже будет равен γ.

3. Элементы теории конформных отображений.

Определение. Отображение, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через данную точку, называется конформным в этой точке.

Таким образом, отображение посредством аналитической в области функции f во всех точках z_0, где $f'(z_0) \neq 0$, является конформным.

Итак, $|f'(z_0)|$ - это локальный коэффициент растяжения окрестности точки z_0 относительно z_0 при отображении f.

1. 5 Лекция № 5 (2 ч). Тема: «Гармонические функции и их связь с аналитическими функциями, сопряжённые гармонические функции. Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Гармонические функции, сопряжённые гармонические функции.
2. Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. Гармонические функции, сопряжённые гармонические функции

Пусть однозначная функция $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ определена в области D

Напомним, что для того, чтобы $u(x,y)$ ($v(x,y)$ была действительной(мнимой) частью аналитической функции $f(z)$ необходимо, а в случае односвязной области D и достаточно, чтобы функция $u(x,y)$ ($v(x,y)$) имела непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяла дифференциальному уравнению с частными производными

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

являются *гармоническими функциями*. Это дифференциальное уравнение называют *уравнением Лапласа.* Действительную функцию $u(x,y)$, имеющую непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющую равнению Лапласа называют *гармонической функцией в области* D. Уравнение Лапласа записывают в символической форме

$$\Delta u = 0.$$

Итак, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Не всякая пара гармонических функций образует аналитическую функцию. Функция $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ будет аналитической, если гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ связаны условиями Коши - Римана.

Пару гармонических функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанных условиями Коши- Римана, называют *сопряжёнными гармоническими функциями*. Таким образом, действительная и мнимая части функции, аналитической в некоторой области, являются в этой области сопряжёнными гармоническими функциями.

Зная одну из гармонических функций, например действительную (мнимую) часть неизвестной аналитической функции, можно восстановить другую, например мнимую (действительную) часть этой аналитической функции. Таким образом аналитическую функцию можно восстановить по известной действительной или мнимой части. Как гармоническая, так и аналитическая функции восстанавливаются с точностью до постоянного слагаемого. При этом функция восстанавливается однозначно, если задано одно из значений этой функции.

2. Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части

Рассмотрим методы восстановления аналитической функции в односвязной области.

Пример 23. Проверить, является ли функция $u(x,y)=x^2-y^2+2x$ действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, и если является, то найти эту аналитическую функцию, если $f(0)=0$.

Решение. Функцию $f(z)$ будем искать в виде $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, где $u(x,y)$ дана в условиях задачи, а $v(x,y)$ неизвестна. Функция $u(x,y)$ определена на всей комплексной плоскости (в односвязной области). Вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

Видно, что функция $u(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Поэтому она гармоническая и является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ на всей плоскости. Найдём гармоническую функцию $v(x,y)$, сопряжённую с функцией $u(x, y)$. Тогда будет восстановлена и функция $f(z)$. Существует несколько способов восстановления $f(z)$.

Первый способ восстановления $f(z)$ (с помощью неопределённого интеграла от функции действительного аргумента). Из условий Коши- Римана следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2. \end{cases}$$

Следовательно, функция $v(x, y)$ является решением системы дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y, \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2. \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

Интегрировать эту систему уравнений можно с помощью неопределённого интеграла или криволинейного.

Интегрируя первое уравнение системы (S) по x (считая y постоянным), восстанавливаем функцию $v(x, y)$ с точностью до произвольной гладкой (пока неизвестной) функции $\varphi(y)$:

$$\begin{cases} v(x, y) = \int 2y \cdot dx + \varphi(y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x, y) = 2y \cdot \int dx + \varphi(y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} v(x, y) = 2yx + \varphi(y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2. \end{cases}$$

Найденную в первом уравнении этой системы уравнений функцию $v(x, y)$ продифференцируем по y и подставим во второе уравнение системы (исключим из системы уравнений $\dfrac{\partial v}{\partial y}$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + \varphi'(y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x,y) = 2yx + \varphi(y), \\ 2x + \varphi'(y) = 2x + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x,y) = 2yx + \varphi(y), \\ \varphi'(y) = 2. \end{cases}$$

Решим второе уравнение этой системы $\varphi'(y) = 2$ (простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение) и найдём функцию $\varphi(y)$: $\varphi(y) = 2y + C$, где C - произвольная вещественная постоянная. Эту функцию подставим в первое уравнение системы и найдём сопряжённую гармоническую функцию

$v(x,y) = 2xy + 2y + C$.

Аналитическая функция $f(z)$ восстановлена нами в виде

$$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + i \cdot \ 2yx + 2y + C \ ,$$

т.е.

$$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + i \cdot \ 2yx + 2y \ + i \cdot C .$$

Подставляя в эту формулу начальное значение $f(0) = 0$, $z = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$, находим C: $0 = i \cdot C \Rightarrow C = 0$. Итак, по действительной части $u(x,y)$ найдена функция аналитическая на всей комплексной плоскости

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i \cdot \ 2yx + 2y \ .$$

Заметим, что $f(z)$ можно задать аналитическим выражением, зависящим от z. Полагая $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$, получим

$$f(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{z - \overline{z}}{2i} \right)^2 + 2\frac{z + \overline{z}}{2} + i \cdot 2 \cdot \frac{z - \overline{z}}{2i} \left(\frac{z + \overline{z}}{2} + 1 \right) =$$

$$= \frac{z^2 + z \cdot \overline{z} + \ \overline{z}\ ^2 + z^2 - z \cdot \overline{z} + \ \overline{z}\ ^2}{4} + z + \overline{z} + \frac{z^2 - \ \overline{z}\ ^2}{2} + z - \overline{z} ,$$

$$f(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{\overline{z}\ ^2}{2} + 2z + \frac{z^2}{2} - \frac{\overline{z}\ ^2}{2} = z^2 + 2z , \text{ т.е. } f(z) = z^2 + 2z .$$

Замечание. Для того, чтобы выразить $f(z)$ аналитическим выражением от z, достаточно в формуле $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ выполнить формальную замену $x = z$, $y = 0$.

Второй способ восстановления $f(z)$ (с помощью криволинейного интеграла). Из системы уравнений (S) следует, что полный дифференциал функции $v(x,y)$ равен

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy = 2y \cdot dx + (2x + 2) \cdot dy.$$

Напомним, что выражение $P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy$ в односвязной области является полным дифференциалом (при гладких $P(x, y)$ и $Q(x, y)$) тогда и только тогда, когда выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. В данном примере для функций $P(x, y) = 2y$ и $Q(x, y) = 2x + 2$ эти условия выполняются: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2$.

В односвязной области функция $v(x, y)$ восстанавливается по своему полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла 2- го типа не зависящего от формы линии интегрирования

$v(x,y) = v(x_0, y_0) + \int\limits_{M_0}^{M} 2\eta \cdot d\xi + (2\xi + 2) \cdot d\eta$, где $M_0(x_0, y_0)$ - фиксированная, а $M(x, y)$ - переменная точки комплексной плоскости, ξ, η - переменные интегрирования. Линия $M_0 M$ кусочно-гладкая. Выбрав начальной точку $M_0(x_0, y_0) = O(0,0)$, а линию интегрирования составленной из отрезков координатных линий $OM = ON \cup NM$, где $N = N(x,0)$, вычислим криволинейный интеграл сведением его к определённым:

$$v(x,y) = v(0,0) + \int\limits_{O}^{N} 2\eta \cdot d\xi + (2\xi + 2) \cdot d\eta + \int\limits_{N}^{M} 2\eta \cdot d\xi + (2\xi + 2) \cdot d\eta.$$

В этой формуле первый интеграл равен нулю

$$\int\limits_{O}^{N} 2\eta \cdot d\xi + (2\xi + 2) \cdot d\eta = \langle \eta = 0, d\eta = 0; \rangle = 0,$$

а второй равен

$$\int\limits_{N}^{M} 2\eta \cdot d\xi + (2\xi + 2) \cdot d\eta = \langle \xi = x, d\xi = 0; 0 \le \eta \le y \rangle = \int\limits_{0}^{y} (2x + 2) \cdot d\eta =$$

$$= (2x\eta + 2\eta)\Big|_0^y = 2xy + 2y.$$

Поэтому, $v(x,y) = v(0,0) + 2xy + 2y$. Учитывая начальное условие $f(0) = 0$, а также что $u(0,0) = 0$ и $f(0) = u(0,0) + i \cdot v(0,0)$, заключаем: $v(0,0) = 0$. Следовательно,

$v(x,y)=2xy+2y$. Получили такой же результат, как и в первом методе: $f(z)=x^2-y^2+2x+i\cdot(2yx+2y)\equiv z^2+2z$.

Третий способ восстановления $f(z)$ -с помощью первообразной (неопределённого интеграла от функции комплексного аргумента). Аналитическая функция $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ является дифференцируемой, причём её производную удобно находить по одной из следующих формул

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так как по условию дана функция $u(x,y)=x^2-y^2+2x$, то для нахождения производной $f'(z)$ следует взять формулу

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2x+2+i\cdot 2y.$$

Преобразованием $x=\frac{z+\overline{z}}{2}, y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$ приводим производную к виду

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2x+2+i\cdot 2y=2\frac{z+\overline{z}}{2}+2+i\cdot 2\frac{z-\overline{z}}{2i}=2z+2.$$

Функцию $f(z)$ находим по её производной с помощью неопределённого интеграла и первообразной:

$$f(z)=\int f'(z)\cdot dz+C=\int(2z+2)\cdot dz+C=z^2+2z+C.$$

Начальное значение $f(0)=0$ позволяет найти $C=0$. Следовательно,

$$f(z)-z^2+2z.$$

Ещё один способ восстановления $f(z)$ по действительной части $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ основан на применении формул

$$f(z)=2\cdot u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2};\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)-\overline{C}_0,\quad f(z)=2\cdot i\cdot v\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2};\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)+\overline{C}_0,\ C_0=f(z_0).$$

1. 6 Лекция № 6 (2 ч). Тема: «Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку. Интегралы от ФКП по кривой. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения. Первообразная функция. Интегральная формула Коши»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку.
2. Интегралы от ФКП по кривой.

3. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения.

4. Первообразная функция.

5. Интегральная формула Коши.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку.

В этой теме рассматриваются следующие простейшие методы вычисления интеграла функции комплексного аргумента:

1) выражение значения интеграла ФКП в алгебраической форме через два действительных криволинейных интеграла 2-го типа;

2) сведение вычисления интеграла ФКП по гладкой дуге L к вычислению интеграла от комплекснозначной функции вещественного аргумента t на отрезке $\alpha;\beta$;

3) применение аналога формулы Ньютона-Лейбница для аналитической функции, которая позволяет вычислить интеграл ФКП, если известна её первообразная.

Более глубокое рассмотрение вопросов интегрирования, связанных с интегральной теоремой Коши и интегральной формулой Коши, рядами и теорией вычетов осуществляется в следующих темах.

Интеграл от комплекснозначной функции вещественного аргумента.

Рассмотрим комплексную функцию вещественного аргумента t на отрезке $a;b$: $w = f(t) \equiv u(t) + i \cdot v(t)$, где функции $u(t),\ v(t)$ непрерывны на этом отрезке.

Интеграл функции $w = f(t)$ *на отрезке* $a;b$ *вычисляется по формуле*

$$\int_a^b f(t) \cdot dt = \int_a^b u(t) \cdot dt + i \cdot \int_a^b v(t) \cdot dt .$$

2. Интегралы от ФКП по кривой.

Рассмотрим теперь функцию $w = f(z) \equiv u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ комплексного переменного $z = x + i \cdot y$ и вычисление интеграла от ФКП по гладкой дуге L.

Первый способ вычисления интеграла ФКП по гладкой дуге. Интеграл от ФКП $w = f(z)$ по гладкой дуге вычисляется по формуле

$$\int_L f(z) \cdot dz = \int_L (u + i \cdot v) \cdot (dx + i \cdot dy) = \int_L u \cdot dx - v \cdot dy + i \cdot \int_L v \cdot dx + u \cdot dy ,$$

которая выражает значение интеграла ФКП через два действительных криволинейных интеграла 2-го типа.

Второй способ вычисления интеграла ФКП по гладкой дуге L. Предполагая дугу L гладкой, записывают её уравнение в комплексно-параметрической форме: $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, т.е. $z = \varphi(t) + i \cdot \psi(t)$. Тогда

$$\int_L f(z) \cdot dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)] \cdot z'(t) \cdot dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}(t) \cdot dt + i \cdot \int_\alpha^\beta \mathrm{Im}(t) \cdot dt,$$

где $\mathrm{Re}(t) = \mathrm{Re}\, f[z(t)] \cdot z'(t)$, $\mathrm{Im}(t) = \mathrm{Im}\, f[z(t)] \cdot z'(t)$. Таким образом, эта формула позволяет свести вычисление интеграла ФКП по гладкой дуге L к вычислению интеграла от комплекснозначной функции вещественного аргумента t на отрезке $[\alpha;\beta]$ (см. §1).

3. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения.

4. Первообразная функция.

Третий способ вычисления интеграла ФКП по гладкой дуге L. Область D, обладающая свойством: внутренность любой замкнутой непрерывной линии, лежащей в этой области, также включается в данную область, называется *односвязной областью* комплексной плоскости C. Области, не обладающие этим свойством, называются *многосвязными*. Ограниченная область комплексной плоскости является n *-связной*, если её граница состоит из n попарно непересекающихся замкнутых непрерывных линий.

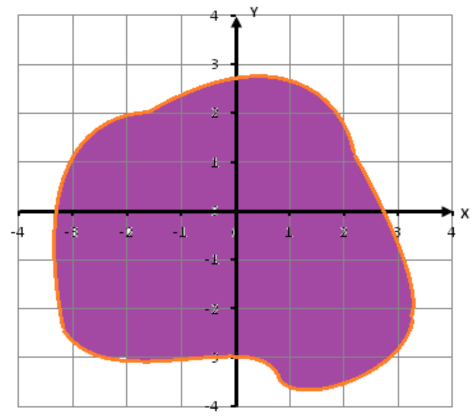


Рис. 49 *Односвязная область*

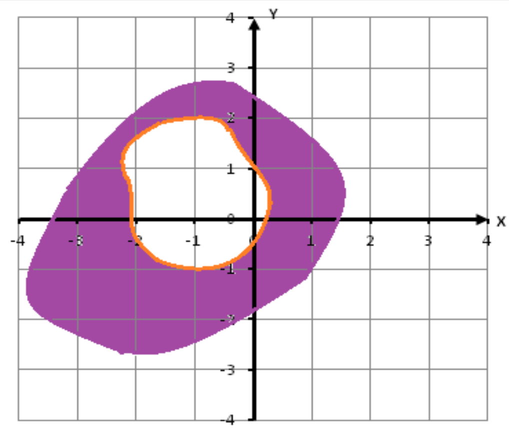


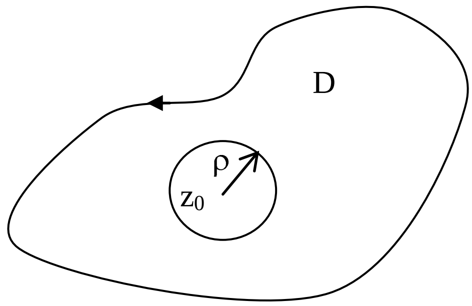
Рис. 50 *Двусвязная область*

Этот способ вычисления интегралов основан на следующей теореме, вытекающей из интегральной теоремы Коши: если функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в односвязной области D (а значит аналитическая в области D), то в этой области существует первообразная $F(z)$ для функции $f(z)$. Тогда интеграл $\int_L f(z) \cdot dz$ не зависит от формы дуги интегрирования L, а зависит от начальной z_1 и конечной z_2 точек дуги L. Для аналитической функции справедлив аналог формулы Ньютона-Лейбница, которая позволяет вычислить интеграл ФКП, если известна её первообразная $F(z)$:

$$\int_L f(z)\cdot dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\cdot dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

5. Интегральная формула Коши

Если функция *f(z)* – аналитическая в односвязной замкнутой области с кусочно – гладкой границей L,



то справедлива **формула Коши**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

где z_0 – любая точка внутри контура L, интегрирование по контуру производится в положительном направлении (против часовой стрелки). Интеграл в правой части называется **интегралом Коши.**

1. 7 Лекция № 7 (2 ч). Тема: «Нули и особые точки аналитической функции. Ряды Тейлора и Лорана»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Нули и особые точки аналитической функции.

2. Ряды Тейлора. Ряды Лорана.

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Нули и особые точки аналитической функции

Пусть функция аналитическая в открытом круге $0 < |z - z_0| < R$ за исключением центральной точки z_0. Как правило, в этой точке функция бывает не определена. Тогда точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции *f*.

Рассмотрим следующие частные случаи:

1) Функция f(x) имеет вид: $f(z) = f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Т.к. степенной ряд сходится во всех точках внутри круга, то его сумма $f_1(x)$ определена и непрерывно дифференцируема во всех точках круга, а, следовательно, и в центре круга z_0. В этом случае говорят, что **особенность функции f в точке z_0 устранима.** Для устранения особой точки достаточно доопределить функцию в центре круга ($f(z_0) = c_0$) и функция будет аналитической не только в окрестности центра круга, но и в самом центре.   В этом случае

$\int\limits_L f(z)dz = 0$ для любого контура L, содержащего точку z_0 и принадлежащего к кругу $|z - z_0| < R$.

2) Функция f(x) имеет вид: $f(z) = f_1(z) + \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum\limits_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$.

В этом случае точка z_0 называется **полюсом функции f(z) порядка (кратности) m.** При m = 1 точку z_0 называют еще **простым полюсом.** Порядок полюса может быть определен по формуле:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c \neq 0, \quad z_0 \text{ – полюс порядка } m.$$

3) Функция f(z) имеет вид $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} = f_1(z) + f_2(z)$, где в ряду $f_2(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ не равно нулю бесконечное количество коэффициентов c_{-k}. В этом случае говорят, что функция f(z) имеет в точке z_0 **существенно особую точку.**

2. Ряды Тейлора. Ряды Лорана

(Пьер Альфонс Лоран (1813 – 1854) – французский математик)

Функция f(z), аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, разлагается в сходящийся к ней степенной ряд по степеням (z – z_0). Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}; \qquad k = 0,1,2,...$$

Степенной ряд с коэффициентами такого вида называется **рядом Тейлора.**

Рассмотрим теперь функцию f(z), аналитическую в кольце $r < |z - z_0| < R$. Эта функция может быть представлена в виде сходящегося ряда:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}}; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2,...$

Ряд такого вида называется **рядом Лорана**. При этом функция f(z) может быть представлена в виде суммы:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z); \qquad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n};$$

Ряд, определяющий функцию f_1(x), называется **правильной частью** ряда Лорана, а ряд, определяющий функцию $f_2(x)$, называется **главной частью** ряда Лорана.

Полученная интегральная формула для коэффициентов ряда на практике не очень удобна. Чаще всего для разложения в ряд Лорана используют известные разложения в ряд Тейлора.

1. 8 Лекция № 8 (2 ч). Тема: «Вычеты и их приложения»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Вычеты.
2. Применение теоремы Коши о вычетах к вычислению интегралов.
3. Вычисление интегралов от вещественных функций

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Вычеты.

Определение. Пусть z_0 – изолированная особая точка функция f(z), т.е. пусть функция f(z) – аналитическая в некотором круге $|z-z_0|<R$ из которого исключена точка z_0. Тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz = \underset{z=z_0}{Выч}\, f(z) = \underset{z_0}{\mathrm{Res}} f(z)$$

называется **вычетом** функции f(z) в точке z_0, где L – контур в круге $|z-z_0|<R$, ориентированный против часовой стрелки и содержащей в себе точку z_0. Вычет также обозначают иногда $\underset{z_0}{\mathrm{Res}} f(z)$.

Если $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k; \qquad 0<|z-z_0|<R;$ есть ряд Лорана функции f в точке z_0, то $\underset{z=z_0}{Выч}\, f(z) = c_{-1}$.

Таким образом, если известно разложение функции в ряд Лорана, то вычет легко может быть найден в случае любой особой точки.

В частных случаях вычет может быть найден и без разложения в ряд Лорана.

Например, если функция $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},\quad \varphi(z_0)\neq 0$, а $\psi(z)$ имеет простой нуль при z = z_0 $(\psi(z_0)=0,\quad \psi'(z_0)\neq 0)$, то z = z_0 является простым полюсом функции f(z). Тогда можно показать, что вычет находится по формуле

$$\underset{z=z_0}{Выч} = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если z = z_0 – полюс порядка m ≥ 1, то вычет может быть найден по формуле:

$$\underset{z=z_0}{Выч}\, f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}.$$

2. Применение теоремы Коши о вычетах к вычислению интегралов.

Теорема. *Пусть функция f(z) – аналитическая на всей плоскости z, за исключением конечного числа точек z_1, z_2, …, z_N. Тогда верно равенство:*

$$\sum_{k=1}^{N} \underset{z=z_k}{Выч} f(z) + \underset{z=\infty}{Выч} f(z) = 0$$

А интеграл от функции по контуру L, содержащему внутри себя эти точки, равен

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \underset{z=z_j}{Выч} f(z)$$

3. Вычисление интегралов от вещественных функций.

Теорема. Если функция f аналитическая в замкнутой верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек, не лежащих на оси OX, и $f(z) = o(z^{-1}), z \to \infty$, то верна формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{Выч}\, f(z).$$

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие № 1 (2 часа). Тема: «Комплексные числа и действия с ними»

2.1.1 Задание для работы:

1. Поле комплексных чисел, действия с комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
2. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма записи. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра
3. Показательная форма записи комплексных чисел. Действия с комплексными числами в показательной форме. Приложения алгебры комплексных чисел в теории электрических цепей переменного тока: комплексный метод расчёта электрических цепей при установившихся режимах синусоидальных токов.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Поле комплексных чисел, действия с комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

1. Вычислить $z_1+z_2,\ z_1-z_2$, если $z_1 = 1-2i,\ z_2 = 3+5i$.

Решение. $z_1+z_2 = 1-2i+3+5i = 1+3+(-2+5)i = 4+3i$,

$z_1-z_2 = 1-2i-(3+5i) = 1-3+(-2-5)i = -2-7i$.

2. Вычислить $z_1 \cdot z_2$, взяв $z_1,\ z_2$ из примера 1.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = \ 1-2i \ \cdot \ 3+5i \ = 3+5i-6i-10i^2 = 13-i$.

3. Вычислить (представить в алгебраической форме) $\frac{z_1}{z_2}$, взяв z_1, z_2 из примера 1.

Решение. Умножением числителя и знаменателя дроби на комплексно-сопряжённое к знаменателю эту дробь представляют в алгебраической форме.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-2i}{3+5i}=\frac{1-2i\ \cdot\ 3-5i}{3+5i\ \cdot\ 3-5i}=\frac{3-5i-6i+10i^2}{3^2+5^2}=\frac{-7-11i}{34}=-\frac{7}{34}-\frac{11}{34}i.$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Для любого комплексного числа $z=x+iy$ существует *комплексно-сопряжённое число* $\overline{z}=x-iy$, причём $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$. На плоскости C комплексно-сопряжённым числам соответствуют точки, симметричные относи-

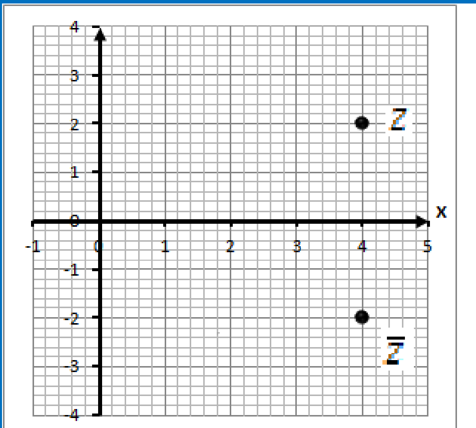


Рис. 1

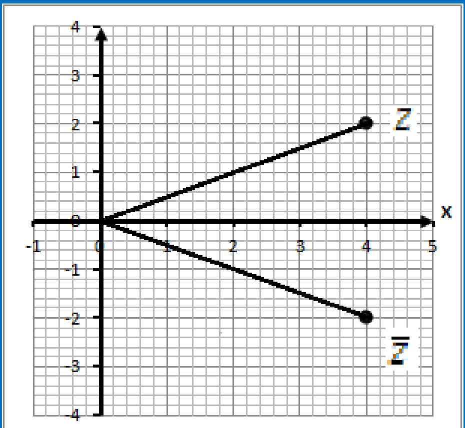


Рис. 1*

тельно действительной оси (Рис 1, Рис 1*).

Пример 3. Найти комплексное число, сопряжённое к $z=4+2i$ и изобразить числа $z,\overline{z}$ на комплексной плоскости.

Решение. $\overline{z}=4-2i$ (Рис 1).

2. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма записи. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.

Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма записи.

1. Найти модуль и аргумент комплексного числа, записать число в тригонометрической форме. Изобразить число на комплексной плоскости: $1. z_1=1+i$; $2. z_2=-2i$; $3. z_3=-1+i\cdot\sqrt{3}$. *Решение*. 1. $x_1=\operatorname{Re}z_1=1,\ y_1=\operatorname{Im}z_1=1,\ |z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

$\varphi_1=arctg\frac{y_1}{x_1}=arctg\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}, z_1=|z_1|\cdot\ \cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\ =\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, Рис.3).

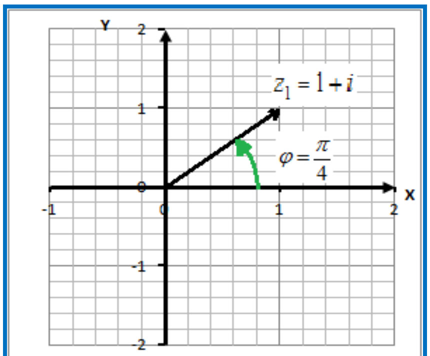


Рис. 3

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра

1. Вычислить $z_1 \cdot z_2, \ \frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме: $z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{3} - i$.

Решение. Запишем комплексные числа в тригонометрической форме.

$$1.\ x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1,\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1,\ |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\ \varphi_1 = arctg\frac{y_1}{x_1} = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

$$z_1 = |z_1| \cdot \ \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 \ = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$2.\ x_2 = \operatorname{Re} z_2 = \sqrt{3},\ y_2 = \operatorname{Im} z_2 = -1,\ |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\varphi_2 = arctg\frac{y_2}{x_2} = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6},$$

$$z_2 = |z_2| \cdot \ \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2 \ = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Находим произведение и частное чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \ =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Значения $\cos\frac{\pi}{12},\ \sin\frac{\pi}{12}$ вычисляем с MathCAD:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \to \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0.966,\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \to \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.259.$$

Поэтому

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) =$$

$$=\frac{\sqrt{12}+2}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{12}-2}{2}\approx 2,732+0,732\cdot i.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\ \cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\ =\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$ Вновь вычисляем с MathCAD

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\to-\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}{2}\approx 0.183,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\to\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}{2}\approx 0.683$$ и окончательно находим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\approx 0,183+0,683\cdot i.$$

2. Найти все значения корня $\sqrt{i}$.

Решение. Число $z=i$ представим в тригонометрической форме:

$$x=\operatorname{Re}z=0,\ y=\operatorname{Im}z=1\Rightarrow|z|=\sqrt{0^2+\ 1\ ^2}=1,\varphi=\frac{\pi}{2},$$

$$z=|z|\cdot\ \cos\varphi+i\sin\varphi\ =1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

По формуле Муавра извлечения корней находим

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,...,n-1$$

$$\sqrt{i}=\sqrt{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)\right),\ k=0,1.$$

Здесь $\sqrt{1}=1$-арифметический корень, поэтому $\sqrt{i}$ имеет два значения:

при $k=0$ $$\sqrt{i}\ _{k=0}=\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};$$

при $k=1$ $\sqrt{i}_{k=1} = \left(\cos\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) =$

$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Найденные значения корня $\sqrt{i}$ комплексно-сопряжённые и, так как $|z|=|i|=1$, изображаются на комплексной плоскости концами диаметра единичной окружности с центром в нулевой точке (Рис. 6):

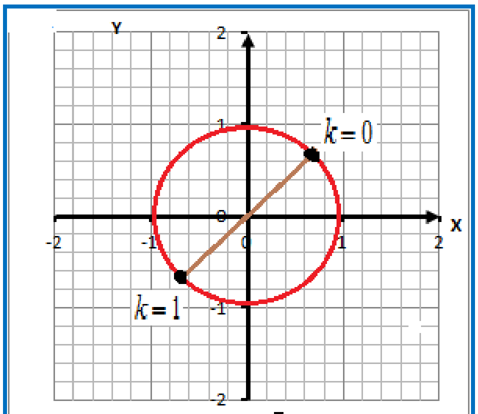


Рис.6 $\sqrt{i}$

3. Показательная форма записи комплексных чисел. Действия с комплексными числами в показательной форме. Приложения алгебры комплексных чисел в теории электрических цепей переменного тока: комплексный метод расчёта электрических цепей при установившихся режимах синусоидальных токов.

Показательная форма записи комплексных чисел. Действия с комплексными числами в показательной форме.

1. Записать число в показательной форме: $1. z_1 = 1+i,\ \ 2. z_2 = -2i,\ \ 3. z_3 = -1+i\cdot\sqrt{3}$.

Решение. 1. $x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1,\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1,\ |z_1| = \sqrt{2},\ \varphi_1 = arctg\dfrac{y_1}{x_1} = arctg\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$,

$z_1 = |z_1|\cdot\ \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\ = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. По формуле Эйлера запишем число в показательной форме в виде $z_1 = |z_1|\cdot e^{i\varphi_1} = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}$.

2. Вычислить $z_1\cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$ в показательной форме: $z_1 = 1+i, z_2 = \sqrt{3}-i$.

2. *Решение*. Запишем комплексные числа в показательной форме.

$$1.\ x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1,\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1, |z_1| = \sqrt{2}, \varphi_1 = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

$$z_1 = |z_1|\cdot\ \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\ = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), z_1 = |z_1|\cdot e^{i\varphi_1} = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$2.\ x_2 = \operatorname{Re} z_2 = \sqrt{3},\ y_2 = \operatorname{Im} z_2 = -1,\ |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\varphi_2 = arctg\frac{y_2}{x_2} = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6},$$

$$z_2 = |z_2|\cdot\ \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\ = 2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right),\ z_2 = |z_2|\cdot e^{i\varphi_2} = 2\cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Находим произведение и частное чисел:

$$z_1\cdot z_2 = |z_1\cdot z_2|\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = 2\sqrt{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}}\cdot = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Приложения алгебры комплексных чисел в теории электрических цепей переменного тока: комплексный метод расчёта электрических цепей при установившихся режимах синусоидальных токов.

В теоретических основах электротехники рассматриваются методы расчета линейных электрических цепей переменного тока в стационарных режимах, в которых ЭДС, токи и напряжения являются гармоническими функциями времени. Определение токов и напряжений в таких цепях связано с нахождением частных решений линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, составленных на основе законов Кирхгофа.

Для вычисления с помощью законов Кирхгофа тока в узлах цепи, напряжения на участке цепи необходимо суммировать токи или напряжения и ЭДС, представленные синусоидальными (гармоническими) функциями. Как мы уже видели на предыдущей странице, эта операция (сложения колебаний) требует трудоёмких и громоздких вычислений, т.к. такие функции помимо заданной угловой частоты ω определяются ещё двумя величинами - амплитудой и начальной фазой. Комплексные числа $z \neq 0$ так же задаются двумя величинами: модулем и аргументом. Это сопоставление позволило создать метод, упростивший вычисления.

Метод заключается в сопоставлении действительным гармоническим воздействиям (гармоническим колебаниям) комплексных воздействий, т.е. в символическом изображении этих колебаний комплексными числами (комплексными *экспонентами) и называется комплексным методом* или *символическим методом*, а также *методом комплексных амплитуд*. Метод был предложен американским инженером Ч. П. Штейнмецем в 1893 г., а в России введён академиком В. Ф. Миткевичем.

Краткое описание метода комплексных амплитуд. Пусть гармоническое воздействие, например в виде синусоидально меняющегося тока, $I = I(t)$ задаётся формулой

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

в которой I_0 - амплитуда колебаний, ω - угловая частота (скорость изменения аргумента-угла $\omega \cdot t = \theta$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$, T - период гармонических колебаний, t - время, $f = \frac{1}{T}$ - частота колебаний), а φ - начальная фаза колебаний; $\omega \cdot t + \varphi$ - фаза колебаний. Из формул Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2 \cdot i}$$

следует, что

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = I_0 \cdot \frac{e^{i(\omega \cdot t + \varphi)} - e^{-i(\omega \cdot t + \varphi)}}{2 \cdot i} = \operatorname{Im}\left(I_0 \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}\right),$$

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = I_0 \cdot \frac{e^{i(\omega \cdot t + \varphi)} + e^{-i(\omega \cdot t + \varphi)}}{2} = \operatorname{Re}\left(I_0 \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}\right)$$

т.к. $I_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t + \varphi)} = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + i \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$.

Комплекснозначная функция

$$I_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t + \varphi)} = I_0 \cdot e^{i \cdot \varphi} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \dot{I}_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

вещественного аргумента t *является символическим изображением вещественной функции* $I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ *(действительного синусоидального тока)* и при заданной угловой частоте ω, так же как и $I = I(t)$, определяется двумя величинами - амплитудой I_0 и начальной фазой φ. *Комплексной амплитудой тока* $I = I(t)$ называется комплексное число

$$\dot{I}_0 = I_0 \cdot e^{i \cdot \varphi}.$$

Вещественную синусоидальную функцию $I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ *называют оригиналом*, а комплекснозначную функцию $I_0 \cdot e^{i\cdot(\omega \cdot t+\varphi)} = \dot{I}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$ - *её изображением* и пишут

$I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \Rightarrow I_0 \cdot e^{i\cdot(\omega \cdot t+\varphi)} = \dot{I}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$.

Итак, любому действительному гармоническому воздействию

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \text{ (или } x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\text{)}$$

на комплексной плоскости соответствует комплексное воздействие

$$\dot{x}(t) = A \cdot \left(\cos(\omega \cdot t + \varphi) + i \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\right) = A \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t+\varphi)} = A \cdot e^{i\cdot\varphi} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \dot{A} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}, \quad \text{(A)}$$

т.е. $\dot{x}(t) = \dot{A} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$, $\dot{x}(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{A} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\right) + i \cdot \mathrm{Im}\left(\dot{A} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\right)$, (B)

$$A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \mathrm{Re}\,\dot{x}(t), \quad A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \mathrm{Im}\,\dot{x}(t), \quad \text{(C)}$$

где комплексное число $\dot{A} = A \cdot e^{i\cdot\varphi} = A \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ называется *комплексной амплитудой воздействия*: $x(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{A} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$. (D)

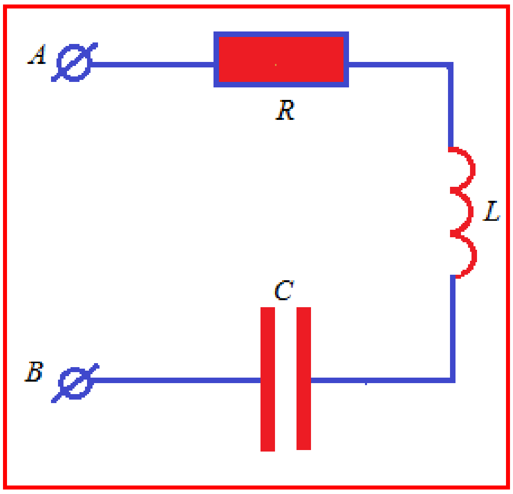
Оригинал: *гармоническое воздействие* $x(t)$	***Изображение:*** *комплексное воздействие* $\dot{x}(t)$
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ или $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$	$\dot{x}(t) = \dot{A} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$

Поэтому анализ электрических цепей производят не при гармонических, а при комплексных воздействиях, соответствие между которыми устанавливается формулами (A)-(D).

Пример 15. К ветви AB цепи с последовательно соединёнными участками R, L, C приложено напряжение $U = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$. Требуется: 1) составить уравнение Кирхгофа для цепи, 2) с помощью комплексных изображений тока в цепи и напряжения перейти к алгебраическому уравнению, 3) решив алгебраическое уравнение найти комплексную амплитуду и комплексное изображение тока, 4) найти оригинал- мгновенное значение синусоидального гармонического колебания тока в цепи.

Решение. 1). По втором закону Кирхгофа (закон Кирхгофа для контуров) *сумма напряжений во всех ветвях любого замкнутого контура электрической цепи равна сумме ЭДС источников энергии, действующих в этом контуре*. Если к некоторой ветви AB цепи с последовательно соединёнными активным сопротивлением R, катушкой с индуктивностью L, конденсатором ёмкостью C приложено напряжение $U = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, то падение напряжения вдоль всей ветви будет равно сумме напряжений на этих элементах:

$U = U_R + U_L + U_C$.



$$U = U_R + U_L + U_C$$

$$U_R = R \cdot I$$

$$I = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow U_C = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(\xi) \cdot d\xi + U_C(0)$$

$$U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$U = R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(\xi) \cdot d\xi + U_C(0)$$

По закону Ома на участке цепи с активным сопротивлением $U_R = R \cdot I$. Напряжение на концах катушки индуктивности $U_L = L \cdot \dfrac{dI}{dt}$. Для участка цепи с конденсатором известно, что $U_C = \dfrac{q}{C}$, где q - заряд конденсатора, поэтому $dU_C = \dfrac{dq}{C}$. Так как $I = \dfrac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I \cdot dt$, то $dU_C = \dfrac{1}{C} \cdot I \cdot dt$. Интегрируя это равенство почленно по отрезку $0\,;t$, получим формулу для U_C:

$$\int_0^t dU_C = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(\xi) \cdot d\xi \text{, т. е. } U_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(\xi) \cdot d\xi + U_C(0),$$

$$U_C = \frac{1}{C} \cdot \left(\int_0^t I(\xi) \cdot d\xi + q(0) \right).$$

Подставляя найденные выражения для U_R, U_L, U_C в формулу $U = U_R + U_L + U_C$, получим следующее уравнение Кирхгофа для цепи с последовательным соединением R, L, C

$$U = R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \left(\int_0^t I(\xi) \cdot d\xi + q(0) \right).$$

В этом уравнении неизвестной функцией является мгновенное значение тока $I(t)$. Так как неизвестная функция $I(t)$ входит как под знак производной, так и под знак интеграла, то уравнение называется интегро-дифференциальным. Решим его методом комплексных амплитуд (символическим методом).

В соответствие с методом комплексных амплитуд $U(t)$, $I(t)$, $\frac{dI}{dt}$, $\int_0^t I(\xi)\cdot d\xi + q(0)$ заменим их комплексными изображениями:

Оригинал: *гармоническое воздействие*	*Комплексное* ***изображение***
$U = U_0 \cdot \sin\ \omega \cdot t + \varphi$	$\dot{U}(t) = \dot{U}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$
$I = I_0 \cdot \sin\ \omega \cdot t + \varphi$	$\dot{I}(t) = \dot{I}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$
$\frac{dI}{dt}$	$\frac{d\dot{I}(t)}{dt} = i \cdot \omega \cdot \dot{I}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$
$\int_0^t I(\xi)\cdot d\xi + q(0)$	$\frac{\dot{I}_0}{i\cdot\omega} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$

Здесь $\dot{U}_0 = U_0 \cdot e^{i\cdot\varphi}$, $\dot{I}_0 = I_0 \cdot e^{i\cdot\varphi}$ -комплексные амплитуды напряжения и тока. В результате вместо интегро-дифференциального уравнения Кирхгофа получим алгебраическое уравнение относительно $\dot{I}(t) = \dot{I}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$

$$\dot{U}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = R \cdot \dot{I}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} + L \cdot i \cdot \omega \cdot \dot{I}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} + \frac{1}{C} \cdot \frac{\dot{I}_0}{i\cdot\omega} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}.$$

Сократив обе части уравнения на $e^{i\cdot\omega\cdot t}$, получим простейшее линейное алгебраическое уравнение относительно комплексной амплитуды тока
$\dot{I}_0 = I_0 \cdot e^{i\cdot\varphi}$

$$\dot{I}_0 \cdot \left(R + L \cdot i \cdot \omega + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \right) = \dot{U}_0,$$

из которого находим $\dot{I}_0$: $\dot{I}_0 = \dfrac{\dot{U}_0}{R + L \cdot i \cdot \omega + \dfrac{1}{i\cdot\omega\cdot C}}$.

По комплексной амплитуде тока восстанавливаем оригинал- мгновенное значение синусоидального гармонического колебания тока в цепи $I(t)$:

$$I(t) = \operatorname{Im} \dot{I}(t) = \operatorname{Im} \dot{I}_0 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \operatorname{Im}\left(\frac{\dot{U}_0}{R + L \cdot i \cdot \omega + \dfrac{1}{i\cdot\omega\cdot C}} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} \right).$$

2.1.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия об основных действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме;

- приобрели умения и навыки выполнения действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

2.2 Практическое занятие № 2 (2 часа). Тема: «Линии и области на комплексной плоскости»

2.2.1 Задание для работы:

1. Линии на комплексной плоскости.
2. Области на комплексной плоскости.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Линии на комплексной плоскости.

1.Определить и изобразить линии на комплексной плоскости, заданные комплексными уравнениями:

1. $|z| = 3$; **2.** $|z - i| = 2$; **3.** $|z + 1 - i| = 2$; **4.** $|z + i| = |z - 1|$.

Решение. **1.** $|z|$ - это расстояние от точки z до начала координат. Уравнение задаёт множество точек, удалённых от начала координат на одно и тоже расстояние, равное 3. Поэтому первая линия является окружностью с центром в начале координат и радиусом 3.

2. $|z - i|$- это расстояние от точки z до точки $z_0 = i$. Уравнение задаёт множество точек z, удалённых от точки $z_0 = i$ на одно и тоже расстояние, равное 2. Поэтому вторая линия является окружностью с центром в точке $z_0 = i$ и радиусом 2. (См. рис. 32).

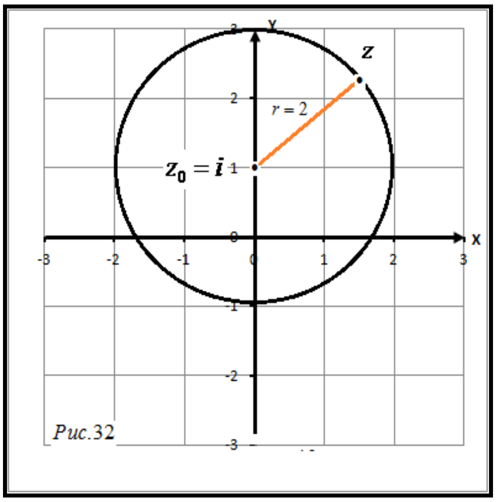


*Рис.*32

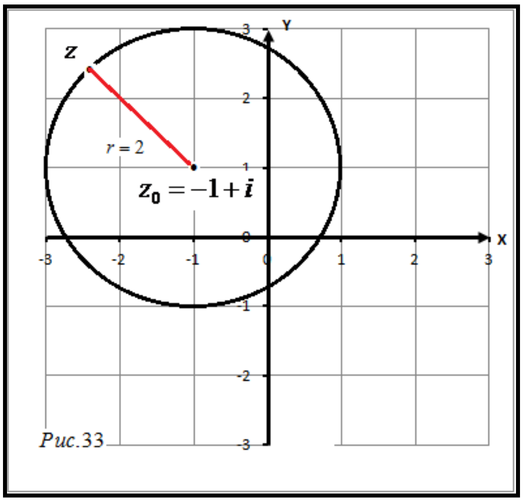


*Рис.*33

3. $|z + 1 - i| \equiv |z - (-1 + i)| = |z - z_0| \Rightarrow z_0 = -1 + i$. Поэтому, $|z + 1 - i|$ равно расстоянию от точки z до точки $z_0 = -1 + i$. *Обращаем внимание читателей на то, что смысл расстояния между точками* z *и* z_0 *имеет* $|z - z_0|$, *а не* $|z + z_0|$: $|z + z_0|$*- это расстояния* *между точками* z *и* $(-z_0)$! Уравнение задаёт множество точек z, удалённых от точки $z_0=-1+i$ на одно и тоже расстояние, равное 2. Поэтому третья линия является окружностью с центром в точке $z_0=-1+i$ и радиусом 2. (См. рис. 33).

2. Области на комплексной плоскости.

1. Определить и изобразить области комплексной плоскости, заданные неравенствами

1. $|z|<3$; **2**.$|z-i|<2$; **3**. $|z+1-i|\ge 2$; **4**. $|z+i|\le|z-1|$.

Решение. **1**.Неравенство задаёт открытый круг с центром в начале координат, радиусом 3.

2. Открытый круг с центром в точке $z_0=i$ и радиусом 2. (Рис. 35).

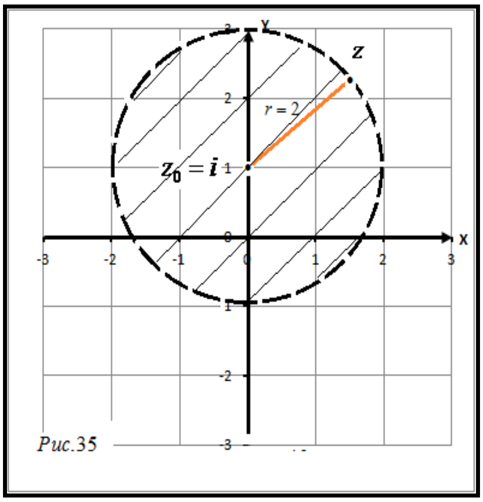


Рис.35

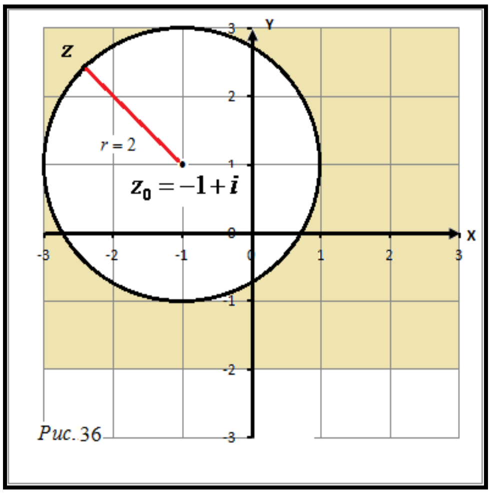


Рис. 36

3. Неравенство задаёт внешность круга (замкнутую) с центром в точке $z_0=-1+i$ и радиусом 2. (Рис. 36).

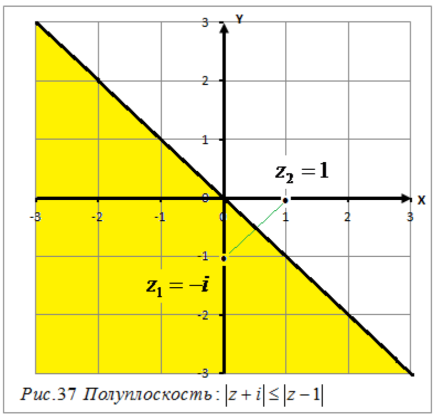


Рис.37 Полуплоскость: $|z+i|\le|z-1|$

4. Неравенство задаёт нижнюю полуплоскость (замкнутую), границей которой является биссектриса 2-го и 4-го координатных углов (Рис. 37). Для «пробной точки» $z=-1$ нижней полуплоскости справедливо данное неравенство:

$$z=-1\Rightarrow|z+i|\le|z-1|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|-1+i|\le|-1-1|\Leftrightarrow\sqrt{2}\le 2.$$

2.2.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия об основных видах линий и областей на комплексной плоскости, способах их задания, свойствах;
- приобрели умения и навыки задания, изображения, классификации простейших линий и областей на комплексной плоскости.

2.3 Практическое занятие № 3 (2 часа). Тема: «Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции. Предел и непрерывность. Отображения с помощью непрерывных функций. Степенные ряды. Элементарные ФКП»

3.3.1 Задание для работы:

1. Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции.
2. Предел и непрерывность.
3. Отображения с помощью непрерывных функций.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции.

1. Функцию $w = z^2$ представить в алгебраической форме $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$.

Решение. Т.к. $w = (x + i\cdot y)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$, то $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

Поэтому $w = z^2 \equiv x^2 - y^2 + 2xy\cdot i$.

2. Предел и непрерывность.

1. Исследовать на непрерывность функции: 1). $\omega = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 2). $\omega = \overline{z} = x - iy$.

1) Функция $\omega = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} + i0$ непрерывна на всей комплексной плоскости, так как на ней непрерывны $u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = 0.$

2) Функция $\omega = \overline{z} = x - iy$ непрерывна на C.

3. Отображения с помощью непрерывных функций.

1. Найти образ области при указанном отображении с помощью функции $w = f(z)$.

1. $\operatorname{Im} z \ge \operatorname{Re} z,\ w = \dfrac{z}{z+i}$ 2. $0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2},\ w = z^2$ 3. $|z-2| \le 1,\ w = \dfrac{1}{z}.$

1. Найти образы прямых $x = 1$, $y = 1$ при отображении $\omega = z^2$.

Решение. Для функции $\omega = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ имеем

$u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$. Образом прямой $x = 1$ является парабола $\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y, \end{cases}$ то есть

$u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$. Прямая $y = 1$ отображается на параболу $u = \dfrac{v^2}{4} - 1$.

2.3.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия об ФКП, однозначных, многозначных и однолистных функциях; понятия предела и непрерывности ФКП, основные свойства; понятие и основные свойства отображений с помощью непрерывных ФКП;

- приобрели умения и навыки алгебраического представления ФКП, простейших вычислениях пределов и исследовании на непрерывность ФКП, выполнения простейших отображений с помощью непрерывных ФКП;

2.4 Практическое занятие № 4 (2 часа). Тема: «Производная ФКП. Условия Коши-Римана, аналитические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Элементы теории конформных отображений»

2.4.1 Задание для работы:

1. Производная ФКП. Условия Коши - Римана, аналитические функции.
2. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Производная ФКП. Условия Коши - Римана, аналитические функции.

1. Выяснить, в каких точках комплексной плоскости дифференцируемы функции и вычислить производные в этих точках. В каких точках плоскости функции аналитические?

$$1.\ f(z)=e^x\cdot\cos y+i\cdot e^x\cdot\sin y; \qquad 2.\ f(z)=|z|^2; \qquad 3.\ f(z)=\overline{z}.$$

Решение. 1. Функция определена на всей комплексной плоскости. В представлении в алгебраической форме $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ данной функции действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ равны

$$u(x,y)=e^x\cdot\cos y, \qquad v(x,y)=e^x\cdot\sin y.$$

Частные производные существуют и непрерывны на всей плоскости xOy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cdot\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cdot\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cdot\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cdot\cos y$$

и выполняются условия (КРЭД). По достаточному признаку дифференцируемости данная функция дифференцируемая, а значит и аналитическая, на всей комплексной плоскости. Производная может быть найдена по формуле

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cdot\cos y+i\cdot e^x\cdot\sin y.$$

Замечание. Видно, что $f'(z)=f(z)$, $f\ \ 0\ \ =1$ для всех точек комплексной плоскости. В действительной области подобным свойством обладает только одна функция: $f(x)=e^x$. Поэтому функцию

$$f(z)=e^x\cdot\cos y+i\cdot e^x\cdot\sin y$$

называют комплексной показательной функцией(экспонентой) и обозначают e^z или $\exp z$:

$$e^z=e^x\cdot\cos y+i\cdot e^x\cdot\sin y.$$

2. $f(z)=|z|^2 \Rightarrow f(z)=x^2+y^2$, $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=0$. Вычисляем производные $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=2y$, $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}=0$. Условия (КРЭД)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 2x=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 2y=0 \end{cases}$$

выполняются лишь в точке $z=0$. Функция дифференцируема только в одной точке $z=0$, но не является аналитической ни в одной точке плоскости, производная в точке $z=0$ (при $z=0 \Rightarrow x=0,\ y=0$) вычисляется по формуле

$$f'(0)=\frac{\partial u(0;0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(0;0)}{\partial x}=2\cdot 0+i\cdot 0=0.$$

3. Функция не дифференцируема и не является аналитической ни в одной точке плоскости. Действительно, $f(z)=\overline{z}\equiv x-i\cdot y$, $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$. Вычисляем производные $u_x(x,y)=1, u_y(x,y)=0$, $v_x(x,y)=0$, $v_y(x,y)=-1$. Условия (КРЭД) не выполняются ни водной точке комплексной плоскости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 1\neq -1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 0=0. \end{cases}$$

Следовательно, функция не дифференцируема ни в одной точке плоскости, не является аналитической.

2. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

1. Пример. Найдем коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $f(z)=z^2$ в точке $z_0=1+i$.

Решение. Так как $f'(z)=2z$, то $f'(1+i)=2(1+i)$. Но $|2+2i|=2\sqrt{2}$, а $\arg 2(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$, т.е. угол поворота равен $\dfrac{\pi}{4}$, а коэффициент растяжения равен $2\sqrt{2}$.

2.4.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия дифференцируемой ФКП, условия дифференцируемости; геометрический смысл модуля и аргумента производной;
- приобрели умения и навыки проверки ФКП на дифференцируемость и вычисления производных.

2.5 Практическое занятие № 5 (2 часа). Тема: «Гармонические функции, сопряжённые гармонические функции. Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части»

2.5.1 Задание для работы:

1. Гармонические функции, сопряжённые гармонические функции.
2. Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Гармонические функции, сопряжённые гармонические функции.

1. Проверить, является ли функция $u(x,y)=x^2-y^2+2x$ гармонической.

Решение. Функция $u(x,y)$ определена на всей комплексной плоскости (в односвязной области). Вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

Видно, что функция $u(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Поэтому она гармоническая

2. Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части.

1. Проверить, является ли функция $u(x,y)=x^2-y^2+2x$ действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, и если является, то найти эту аналитическую функцию, если $f(0)=0$.

Решение. Функцию $f(z)$ будем искать в виде $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, где $u(x,y)$ дана в условиях задачи, а $v(x,y)$ неизвестна. Функция $u(x,y)$ определена на всей комплексной плоскости (в односвязной области). Вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

Видно, что функция $u(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Поэтому она гармоническая и является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ на всей плоскости. Найдём гармоническую функцию $v(x,y)$, сопряжённую с функцией $u(x,y)$. Тогда будет восстановлена и функция $f(z)$. Существует несколько способов восстановления $f(z)$.

Первый способ восстановления $f(z)$ (с помощью неопределённого интеграла от функции действительного аргумента). Из условий Коши- Римана следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x+2. \end{cases}$$

Следовательно, функция $v(x,y)$ является решением системы дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y, \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x+2. \end{cases} \tag{S}$$

Интегрировать эту систему уравнений можно с помощью неопределённого интеграла или криволинейного.

Интегрируя первое уравнение системы (S) по x (считая y постоянным), восстанавливаем функцию $v(x,y)$ с точностью до произвольной гладкой (пока неизвестной) функции $\varphi(y)$:

$$\begin{cases} v(x,y) = \int 2y \cdot dx + \varphi(y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x+2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x,y) = 2y \cdot \int dx + \varphi(y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x+2, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} v(x,y) = 2yx + \varphi(y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x+2. \end{cases}$$

Найденную в первом уравнении этой системы уравнений функцию $v(x,y)$ продифференцируем по y и подставим во второе уравнение системы (исключим из системы уравнений $\dfrac{\partial v}{\partial y}$):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+\varphi'(y),\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v(x,y)=2yx+\varphi(y),\\ 2x+\varphi'(y)=2x+2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v(x,y)=2yx+\varphi(y),\\ \varphi'(y)=2.\end{cases}$$

Решим второе уравнение этой системы $\varphi'(y)=2$ (простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение) и найдём функцию $\varphi(y)$: $\varphi(y)=2y+C$, где C - произвольная вещественная постоянная. Эту функцию подставим в первое уравнение системы и найдём сопряжённую гармоническую функцию $v(x,y)=2xy+2y+C$.

Аналитическая функция $f(z)$ восстановлена нами в виде

$$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)=x^2-y^2+2x+i\cdot\ 2yx+2y+C\ ,\text{ т.е.}$$

$$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)=x^2-y^2+2x+i\cdot\ 2yx+2y\ +i\cdot C.$$

Подставляя в эту формулу начальное значение $f(0)=0$, $z=0\Rightarrow x=0,y=0$, находим C: $0=i\cdot C\Rightarrow C=0.$ Итак, по действительной части $u(x,y)$ найдена функция аналитическая на всей комплексной плоскости

$$f(z)=x^2-y^2+2x+i\cdot\ 2yx+2y\ .$$

Заметим, что $f(z)$ можно задать аналитическим выражением, зависящим от z. Полагая $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2},y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, получим

$$f(z)=\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2+2\frac{z+\overline{z}}{2}+i\cdot 2\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}\left(\frac{z+\overline{z}}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{z^2+z\cdot\overline{z}+\ \overline{z}^{\ 2}+z^2-z\cdot\overline{z}+\ \overline{z}^{\ 2}}{4}+z+\overline{z}+\frac{z^2-\ \overline{z}^{\ 2}}{2}+z-\overline{z},$$

$$f(z)=\frac{z^2}{2}+\frac{\overline{z}^{\ 2}}{2}+2z+\frac{z^2}{2}-\frac{\overline{z}^{\ 2}}{2}=z^2+2z,\text{ т.е. } f(z)=z^2+2z.$$

Замечание. Для того, чтобы выразить $f(z)$ аналитическим выражением от z, достаточно в формуле $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ выполнить формальную замену $x=z$, $y=0$.

2.5.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили понятия гармонической и сопряжённых гармонических функций; методы восстановления аналитической функции по её действительной или мнимой части;
- приобрели умения и навыки выявления гармонических и сопряжённых гармонических функций, восстановления аналитической функции по её действительной или мнимой части.

2.6 Практическое занятие № 6 (2 часа). Тема: «Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку. Интегралы от ФКП по кривой. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения. Первообразная функция. Интегральная формула Коши»

2.6.1 Задание для работы:

1. Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку.
2. Интегралы от ФКП по кривой.
3. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения. Первообразная функция.
4. Интегральная формула Коши.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку.

Рассмотрим комплексную функцию вещественного аргумента t на отрезке $[a;b]$: $w = f(t) \equiv u(t) + i \cdot v(t)$, где функции $u(t),\ v(t)$ непрерывны на этом отрезке. *Интеграл функции* $w = f(t)$ *на отрезке* $[a;b]$ *вычисляется по формуле*

$$\int_a^b f(t)\cdot dt = \int_a^b u(t)\cdot dt + i\cdot\int_a^b v(t)\cdot dt .$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\cdot t}\cdot dt$.

Решение. Представим функцию $f(t) = e^{i\cdot t}$ в алгебраической форме с помощью формулы Эйлера: $e^{i\cdot t} = \cos t + i\cdot\sin t$. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\cdot t}\cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot dt + i\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - i\cdot\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - i\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1 + i .$$

2. Интегралы от ФКП по кривой.

Рассмотрим теперь функцию $w = f(z) \equiv u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ комплексного переменного $z = x + i\cdot y$ и вычисление интеграла от ФКП по гладкой дуге L. *Первый способ вычисления интеграла ФКП по гладкой дуге*. Интеграл от ФКП $w = f(z)$ по гладкой дуге вычисляется по формуле

$$\int_L f(z)\cdot dz = \int_L (u+i\cdot v)\cdot(dx+i\cdot dy) = \int_L u\cdot dx - v\cdot dy + i\cdot\int_L v\cdot dx + u\cdot dy,$$

которая выражает значение интеграла ФКП через два действительных криволинейных интеграла 2-го типа.

Пример 28. Вычислить интеграл $\int_L \left(6\cdot z^2 - 2z - i\right)\cdot dz$ по линии L, соеди-няющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$, 1) по отрезку прямой, 2) по дуге параболы $y = x^2$, 3) по ломаной OAB (Рис. 47). Убедиться в том, что интеграл не зависит от формы линии интегрирования и указать достаточное условие независимости.

Решение. Представим функцию $f(z) = 6\cdot z^2 - 2z - i$ в алгебраической форме:

$$f(z) = 6\cdot z^2 - 2z - i = 6\cdot\left(x+iy\right)^2 - 2\left(x+iy\right) - i = 6\cdot\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)^2 - 2\left(x+iy\right) - i =$$

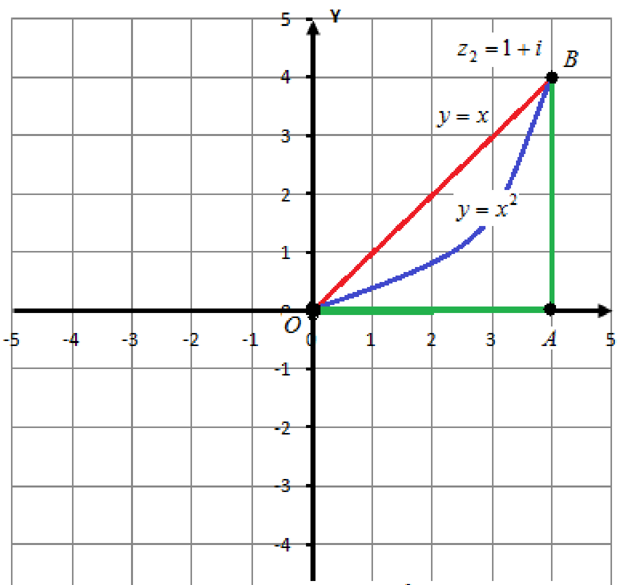


Рис. 47 *Вычисление* $\int_L \left(6\cdot z^2 - 2z - i\right)\cdot dz$

$$= 6x^2 - 6y^2 + 12ixy - 2x - 2iy - i = 6x^2 - 6y^2 - 2x + i\cdot\left(12xy - 2y - 1\right),$$

$$u(x,y) = 6x^2 - 6y^2 - 2x, \quad v(x,y) = 12xy - 2y - 1.$$

Поэтому

$$\int_L \left(6\cdot z^2 - 2z - i\right)\cdot dz = \int_L (u+i\cdot v)\cdot(dx+i\cdot dy) = \int_L u\cdot dx - v\cdot dy + i\cdot\int_L v\cdot dx + u\cdot dy =$$

$$= \int_L \left(6x^2 - 6y^2 - 2x\right)\cdot dx - \left(12xy - 2y - 1\right)\cdot dy +$$

$$+ i\cdot\int_L \left(12xy - 2y - 1\right)\cdot dx + \left(6x^2 - 6y^2 - 2x\right)\cdot dy.$$

1) Вдоль отрезка OB прямой (Рис. 47) $y=x,\ dy=dx,\ 0\le x\le 1$

$$\int\limits_L (6\cdot z^2-2z-i)\cdot dz=\int\limits_0^1(1-12x^2)\cdot dx+i\cdot\int\limits_0^1(12x^2-4x-1)\cdot dx=$$

$$=(x-4x^3)\Big|_0^1+i\cdot(4x^3-2x^2-x)\Big|_0^1=(1-4)+i\cdot(4-2-1)=-3+i\ .$$

2) Вдоль дуги OB параболы (Рис. 47) $y=x^2,\ dy=2xdx,\ 0\le x\le 1$

$$\int\limits_L (6\cdot z^2-2z-i)\cdot dz=\int\limits_L(6x^2-6y^2-2x)\cdot dx-(12xy-2y-1)\cdot dy+$$

$$+i\cdot\int\limits_L(12xy-2y-1)\cdot dx+(6x^2-6y^2-2x)\cdot dy=$$

$$=\int\limits_0^1(6x^2+4x^3-30x^4)\cdot dx+i\cdot\int\limits_0^1(24x^3-6x^2-12x^5-1)\cdot dx=$$

$$=(2x^3+x^4-6x^5)\Big|_0^1+i\cdot(6x^4-2x^3-2x^6-x)\Big|_0^1=(2+1-6)+i\cdot(6-2-2-1)=-3+i$$

3) Вдоль ломаной OAB (Рис. 47)

$$\int\limits_L (6\cdot z^2-2z-i)\cdot dz=\int\limits_{OA}(6\cdot z^2-2z-i)\cdot dz+\int\limits_{AB}(6\cdot z^2-2z-i)\cdot dz=$$

$$=\int\limits_{OA}(6x^2-6y^2-2x)\cdot dx-(12xy-2y-1)\cdot dy+$$

$$+i\cdot\int\limits_{OA}(12xy-2y-1)\cdot dx+(6x^2-6y^2-2x)\cdot dy+$$

$$+\int\limits_{AB}(6x^2-6y^2-2x)\cdot dx-(12xy-2y-1)\cdot dy+$$

$$+i\cdot\int\limits_{AB}(12xy-2y-1)\cdot dx+(6x^2-6y^2-2x)\cdot dy\,.$$

Вдоль отрезка OA действительной оси (Рис. 47) $y=0,\ dy=0,\ 0\le x\le 1$; вдоль отрезка AB вертикальной прямой $x=1,\ dx=0,\ 0\le y\le 1$, поэтому

$$\int\limits_L (6\cdot z^2-2z-i)\cdot dz=\int\limits_0^1(6x^2-2x)\cdot dx-i\cdot\int\limits_0^1 dx-\int\limits_0^1(12y-2y-1)\cdot dy+$$

$$+i\cdot\int\limits_0^1(4-6y^2)\cdot dy=(2x^3-x^2)\Big|_0^1-i\cdot x\Big|_0^1-(5y^2-y)\Big|_0^1+i\cdot(4y-2y^3)\Big|_0^1=$$

$$=(2-1)-i-(5-1)+i\cdot(4-2)=1-i-4+i\cdot 2=-3+i\,.$$

Отметим, что интеграл $\int\limits_L \left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz$ *по трём различным линиям* L*, соединяющим точки* $z_1=0$ *и* $z_2=1+i$*, имеет одно и то же значение* $-3+i$*, т.е. не зависит от формы дуги интегрирования*. Этим свойством обладает не всякая интегрируемая функция. Известно следующее *условие независимости интеграла от формы линии интегрирования*- **следствие из интегральной теоремы Коши**: *если функция аналитическая в односвязной области и* L_1*,* L_2*- линии, лежащие в этой области и имеющие общие концы, то интегралы по этим линиям равны*. В этом примере функция $f(z)=6\cdot z^2-2z-i$ является аналитической на всей комплексной плоскости и интеграл этой функции не зависит от формы дуги интегрирования.

3. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения. Первообразная функция.

Этот способ вычисления интегралов основан на следующей теореме, вытекающей из интегральной теоремы Коши: если функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в односвязной области D (а значит аналитическая в области D), то в этой области существует первообразная $F(z)$ для функции $f(z)$. Тогда интеграл $\int\limits_L f(z)\cdot dz$ не зависит от формы дуги интегрирования L, а зависит от начальной z_1 и конечной z_2 точек дуги L. Для аналитической функции справедлив аналог формулы Ньютона-Лейбница, которая позволяет вычислить интеграл ФКП, если известна её первообразная $F(z)$:

$$\int\limits_L f(z)\cdot dz=\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\cdot dz=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}=F(z_2)-F(z_1).$$

Пример. Убедиться в том, что интеграл $\int\limits_L \left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz$ по линии L, соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$ не зависит от формы линии интегрирования и вычислить его *третьим способом*.

Решение. В этом примере функция $f(z)=6\cdot z^2-2z-i$ является аналитической на всей комплексной плоскости и интеграл этой функции не зависит от формы дуги интегрирования. Её первообразная равна $F(z)=2z^3-z^2-i\cdot z$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_L \left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz=\left(2z^3-z^2-i\cdot z\right)\Big|_{z_1=0}^{z_2=1+i}=2\left(1+i\right)^3-\left(1+i\right)^2-i\cdot\left(1+i\right)=-3+i.$$

4. Интегральная формула Коши.

Теорема. Если функция f аналитическая в замкнутой односвязной области $\overline{D}$, ограниченной контуром γ, а z - любая внутренняя точка этой области, то

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi .$$

Пример. Вычислить 1) $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{z-i}dz$; 2) $\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{z-i}dz$

Решение. 1). $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{z-i}dz=2\pi i\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}=-2\pi$; 2). $\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{z-i}dz=0$.

2.6.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятие интеграла ФКП, способы вычисления интегралов; интегральную теорему Коши и формулу Коши, их применение к вычислению интегралов;
- приобрели умения и навыки вычисления интегралов, применения интегральной теоремы Коши и формулы Коши.

2.7 Практическое занятие № 7 (2 часа). Тема: «Нули и особые точки аналитической функции. Ряды Тейлора и Лорана. Вычеты и их приложения»

2.7.1 Задание для работы:

1. Нули и особые точки аналитической функции.
2. Ряды Тейлора. Ряды Лорана.
3. Вычет относительно кратного полюса.
4. Вычисление вычета с помощью формулы Коши.

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Нули и особые точки аналитической функции.

Задание 1. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\frac{e^{z}-1}{z^{3}}+\frac{2}{z}$;

б) $f(z)=\frac{1-\cos 6z}{z^{2}}$;

в) $f(z)=(z-i)^{3}\sin\frac{1}{2(z-i)}$.

Решение.

а). Особой точкой функции является точка $z_0=0$. Чтобы определить вид особой точки разложим функцию в ряд Лорана по степеням z :

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}+\frac{2}{z}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}=$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}=\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots+\frac{2}{z}=$$

$$=\underbrace{\frac{5}{2z}+\frac{1}{1!z^2}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots}_{\text{правильная часть}}$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, значит $z_0=0$ - полюс. Порядок высшей отрицательной степени $(n=2)$ определяет порядок полюса. Следовательно, $z_0=0$ - полюс кратности 2. Вычет найдем, используя формулу $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$,

тогда $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{5}{2}$.

б). Особой точкой функции является точка $z_0=0$. Чтобы определить вид особой точки используем признак поведения функции в особой точке.

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos 6z}{z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{2\sin^2 3z}{z^2}=18$, значит $z_0=0$ устранимая точка и, следовательно $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0$.

в). Особой точкой функции является точка $z_0=i$. Чтобы определить вид особой точки используем разложение функции в ряд Лорана по степеням $z-i$:

$$f(z)=(z-i)^3\sin\frac{1}{2(z-i)}=(z-i)^3\left(\frac{1}{2(z-i)}-\frac{1}{3!(2(z-i))^3}+\frac{1}{5!(2(z-i))^5}-\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(2(z-i))^{2n+1}}+\ldots\right)=\frac{(z-i)^2}{2}-\frac{1}{2^3 3!}+\underbrace{\frac{1}{5!2^5(z-i)^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!2^{2n+1}(z-i)^{2n-2}}+\ldots}_{\text{главная часть}}.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, значит $z_0=i$ - существенно особая точка. Тогда $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=C_{-1}=0$, т.к. коэффициент при $\frac{1}{z-i}$ равен нулю.

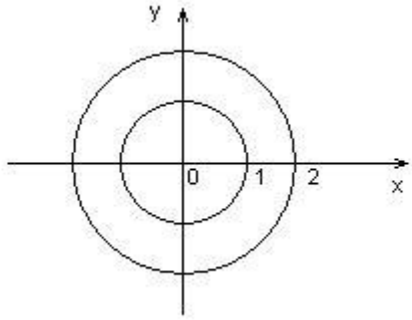
2. Ряды Тейлора. Ряды Лорана.

***Задание*.** Найти все лорановские разложения данной функции $f(z)$ по степеням $z-z_0$. Указать главную и правильную части ряда.

а) $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$, $z_0=0$;

б) $f(z)=\frac{2z+1}{(z-1)(z+2)}$, $z_0=1$.

Решение. а) Функция $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ имеет две особые точки $z_1=1$ и $z_2=-2$. Отметим их на плоскости Z, проведем 2 окружности с центром в точке $z_0=0$, проходящие соответственно через точки $z_1=1$ и $z_2=-2$. Следовательно, имеется три области, в каждой из которых функция $f(z)$ является аналитической:



1) $|z|<1$;

2) кольцо $1<|z|<2$;

3) область $|z|>2$, являющаяся внешностью круга $|z|\le 2$.

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей, используя формулу

$$(1-t)^{-1}=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\ldots+t^n+\ldots$$

справедливую при $|t|<1$. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}.$$

1) Рассмотрим круг $|z|<1$. Запишем элементарные дроби $\dfrac{1}{z-1}$ и $\dfrac{1}{z+2}$ в виде $\dfrac{1}{1-t}$, где $|t|<1$ при $|z|<1$. Представим функцию $f(z)$ следующим образом:

$f(z)=-\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}$. Теперь к таким дробям применима формула (1).

Так как в рассматриваемой области $|z|<1$, то в силу формулы (1)

$\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots$. Так как $|z|<1$ и тем более $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ (если $|z|<1$, то тем более $|z|<2$), значит, в силу формулы (1) $\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}=1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^3}{8}+\ldots+(-1)^n\dfrac{z^n}{2^n}+\ldots$.

Следовательно,

$$-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=-1-z-z^2-z^3-\ldots-z^n-\ldots+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots=$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3-\ldots-\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n-\ldots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n$$

Полученное разложение содержит только правильную часть ряда Лорана.

2) Рассмотрим кольцо $1 < |z| < 2$. В этой области запишем рассматриваемую функцию в виде $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$. В знаменателях дробей мы записали выражения вида $1-t$, где $|t| < 1$.

Так как $|z| > 1$, то $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ и в силу формулы (1) $\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots$. Так как $|z| < 2$, то, как и в предыдущем случае, $\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{2^n} + \ldots$.

Следовательно,

$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Полученное разложение содержит и правильную, и главную часть ряда Лорана.

3) Рассмотрим область $|z| > 2$. В этой области $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, поэтому в силу формулы (1) $\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots$. В рассматриваемой области $\left|\frac{z}{2}\right| > 1$, значит $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ и поэтому $\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n}{z^n} + \ldots$.

Функцию $f(z)$ представим в виде $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$. В силу полученных разложений имеет место равенство

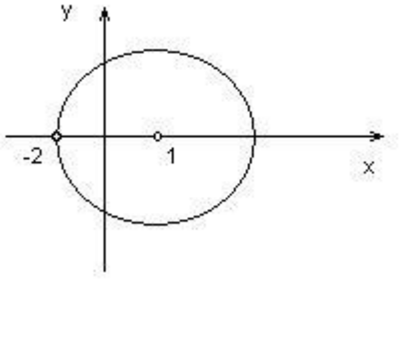
$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots + 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + .. + (-1)^n \frac{2^n}{z^n} + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 + (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{z^n}.$$

Полученное разложение содержит только главную часть ряда Лорана.

б) Функция $f(z)$ имеет 2 особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -2$, отметим их на плоскости Z. Точка $z_1 = 1$ совпадает с точкой $z_0 = 1$. Проводим окружность с центром в точке $z_0 = 1$, проходящую через точку $z_2 = 2$.

Следовательно существуют две области, в каждой из которых функция $f(z)$ является аналитической:



1) кольцо $1 < |z-1| < 3$

2) кольцо $|z-1| > 3$

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей, используя формулу (1). Представим функция $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}$$

1) Требуется получить разложение функции $f(z)$ по степеням z–1 в области $1<|z-1|<3$. Первая дробь уже представляет собой степень $z-1$. Для того, чтобы вторую дробь представить в искомом виде, сделаем замену $z-1=t$, тогда $z=t+1$ и $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}$.

Дробь $\frac{1}{t+3}$ разложим по степеням t как в предыдущем примере. При $0<|t|<3$ воспользуемся представлением:

$$\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{9}-\frac{t^3}{27}+...+(-1)^n\frac{t^n}{3^n}+...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^n}{3^{n+1}};$$

Сделаем обратную замену. Получим, что при $0<|z-1|<3$ функция $f(z)$ представима в виде

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Полученное разложение содержит правильную и главную часть ряда Лорана.

2) Аналогично, сделав замену $z-1=t$, получаем представление дроби $\frac{1}{t+3}$ в области $|t|>3$

$$\frac{1}{t+3}=\frac{1}{t}\frac{1}{1+\frac{3}{t}}=\frac{1}{t}\left(1-\frac{3}{t}+\frac{9}{t^2}-\frac{27}{t^3}+...+(-1)^n\frac{3^n}{t^n}+...\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{t^n}$$

Сделав обратную замену, получаем, что при $|z-1|>3$ функция $f(z)$ представима в виде:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{(z-1)^n}=\frac{2}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{(z-1)^n}.$$

В первом случае главная часть ряда Лорана содержит только одно слагаемое, во втором случае ряд Лорана состоит только из одной главной части.

2.7.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия нулей и особых точек аналитической функции, ряда Тейлора и ряда Лорана;
- приобрели умения и навыки отыскания нулей и особых точек аналитической функции, разложения аналитических функций в ряд Тейлора и ряд Лорана.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычет относительно кратного полюса.

Задание. Определить вид особых точек функции и найти в них вычеты:

а) $f(z)=\frac{\sin z}{z\ \ z+1^{\ 3}}$; б) $f(z)=\frac{z\cos z}{z^2-\pi^2}$.

Решение. а). Функция $f(z)=\dfrac{\sin z}{z\,(z+1)^3}$ имеет внутри контура интегрирования две особые точки $z=0$ и $z=-1$. Определим вид особых точек и найдем в них вычеты.

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z(z+1)^3}=1$, следовательно $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=0$.

$\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\sin z}{z(z+1)^3}=\infty$, следовательно $z=-1$ - полюс.

Так как $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\sin z}{z(z+1)^3}(z+1)^3=1$, то $z=-1$ - полюс порядка $n=3$.

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)^3\frac{\sin z}{z(z+1)^3}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{\sin z}{z}\right]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z\cdot\cos z-\sin z}{z^2}\right]'=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2(\cos z-z\sin z-\cos z)-2z(z\cdot\cos z-\sin z)}{z^4}\right]=-\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2\cdot\sin z+2z\cos z-2\sin z}{z^3}\right]=$$

$$=\frac{\sin 1-2\cos 1}{2}.$$

б). Функция $f(z)=\dfrac{z\cos z}{z^2-\pi^2}$ имеет внутри контура интегрирования две особые точки $z=\pi$ и $z=-\pi$. Так как $z=\pi$ и $z=-\pi$ - полюсы первого порядка, то для вычисления вычетов применим формулу $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, где $\varphi(z)=z\cos z$, $\psi(z)=z^2-\pi^2$, $\psi'(z)=2z$.

$\operatorname*{Res}\limits_{z=\pi} f(z)=\dfrac{z\cos z}{2z}\Big|_{z=\pi}=-\dfrac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=-\pi} f(z)=\dfrac{z\cos z}{2z}\Big|_{z=-\pi}=-\dfrac{1}{2}$

2. Вычисление вычета с помощью формулы Коши.

Если функция f аналитическая в замкнутой односвязной области $\overline{D}$, ограниченной контуром γ, а z_0 - любая внутренняя точка этой области, то по формуле Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta.$$

Функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ имеет единственную изолированную особую точку z_0 внутри γ. По определению вычета

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\frac{f(z)}{z-z_0}.$$

Сравнивая два последних интегральных равенства заключаем:

$$\underset{z=z_0}{Выч}\frac{f(z)}{z-z_0}=f(z_0),\ f(z_0)\neq 0\,.$$

Пример. Вычислить $\underset{z=i}{Выч}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{z-i}$.

Решение. $\underset{z=i}{Выч}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{z-i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

2.7.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили вычисление вычетов относительно полюса и вычисление вычетов с помощью формулы Коши;
- приобрели умения и навыки вычисление вычетов относительно полюса и с помощью формулы Коши.