ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.1.08 Математический анализ

Специальность 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Специализация Информационная безопасность автоматизированных систем критически важных объектов

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Теория пределов функций одной действительной переменной. Непрерывность функций одной действительной переменной.	-	-	-	1	2
2	Приложения дифференциального исчисления функций одной действительной переменной.	-	-	-	3	4
3	Криволинейные и поверхностные интегралы, их свойства, вычисление, приложения.	-	-	-	5	0
4	Линейные системы дифференциальных уравнений. Основные свойства решений. Построение общего решения. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Устойчивость решений. Уравнения с частными производными	-	-	-	10	10
Итого в соответствии с РПД		-	-	-	**19**	**100**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

Замечательные пределы

Определение. Первым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Теорема. Первый замечательный предел равен 1 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. Рассмотрим два односторонних предела $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}$ и докажем, что каждый из них равен 1. Тогда по теореме двусторонний дел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ также будет равняться 1.

Итак, пусть $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (этот интервал -- одно из окончаний базы $x\to 0+$). В тригонометрическом круге (радиуса $R=1$) с центром O построим центральный угол, равный x, и проведём вертикальную касательную в точке U пересечения горизонтальной оси с окружностью ($|OU|=1$). Обозначим точку пересечения луча с углом наклона x с окружностью буквой V, а с вертикальной касательной -- буквой W; через T обозначим проекцию точки V на горизонтальную ось.

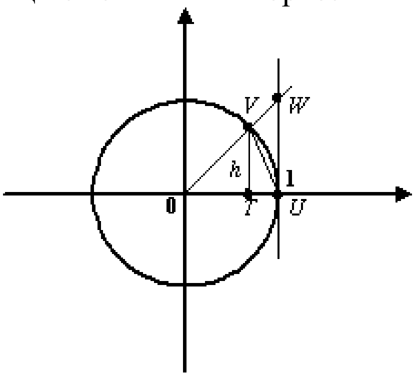


Рис. Тригонометрический круг

Пусть $S_{\triangle OUV}$ -- площадь треугольника OUV, $S_{\text{сек.}OUV}$ -- площадь кругового сектора OUV, а $S_{\triangle OUW}$ -- площадь треугольника OUW. Тогда очевидно следующее неравенство:

$$S_{\triangle OUV} < S_{\text{сек.}OUV} < S_{\triangle OUW}.$$

Заметим, что горизонтальная координата точки V равна $|OT|=\cos x$, а вертикальная -- $h=\sin x$ (это высота треугольника OUV), так что $S_{\triangle OUV}=\frac{1}{2}|OU|h=\frac{\sin x}{2}$. Площадь центрального сектора круга радиуса R с центральным углом x равна $\frac{1}{2}R^2x$, так что $S_{\text{сек.}OUV}=\frac{1}{2}x$. Из треугольника OUW находим, что $|WU|=\operatorname{tg}x$. Поэтому $S_{\triangle OUW}=\frac{1}{2}|OU||WU|=\frac{\operatorname{tg}x}{2}.$ Неравенство, связывающее площади трёх фигур, можно теперь записать в виде

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg}x}{2}.$$

Все три части этого неравенства положительны, поэтому его можно записать так:

$$\frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}>\frac{1}{\operatorname{tg}x}=\frac{\cos x}{\sin x},$$

или (умножив на $\sin x$) так:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Предел постоянной 1 в правой части неравенства, очевидно, равен 1. Если мы покажем, что при $x \to 0+$ предел $\cos x$ в левой части неравенства тоже равен 1, то по теореме "о двух милиционерах" предел средней части $\frac{\sin x}{x}$ также будет равен 1.

Итак, осталось доказать, что $\cos x \xrightarrow{x\to 0+} 1$. Сперва заметим, что $0 < \sin x = h < |UV| < x$, так как x равняется длине дуги окружности UV, которая, очевидно, длиннее хорды $|UV|$. Применяя теорему "о двух милиционерах" к неравенству $0 < \sin x < x$ при $x \to 0+$, получаем, что

$$\sin x \xrightarrow{x\to 0+} 0. \qquad (*)$$

Простая замена переменной $t = \frac{x}{2}$ показывает, что и $\sin\frac{x}{2} \xrightarrow{x\to 0+} 0$. Теперь заметим, что $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$. Применяя теоремы о линейности предела и о пределе произведения, получаем:

$$\lim_{x\to 0+} \cos x = \lim_{x\to 0+} \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - \lim_{x\to 0+} \sin\frac{x}{2} \cdot \lim_{x\to 0+} \sin\frac{x}{2} = 1 - 0\cdot 0 = 1. \qquad (**)$$

Тем самым показано, что

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Сделаем теперь замену $t = -x$; при этом база $x \to 0+$ перейдёт в базу $t \to 0-$ (что означает, что если $x \in (0;\delta)$, то $t = -x \in (-\delta;0)$). Значит,

$$\lim_{t\to 0-} \frac{\sin(-t)}{-t} = 1,$$

но $\sin(-t) = -\sin t$ ($\sin$ -- нечётная функция), и поэтому

$$\lim_{t\to 0-} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0-} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Мы показали, что левосторонний предел также равен 1, что и завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема означает, что график функции $y=\frac{\sin x}{x}$ выглядит так:

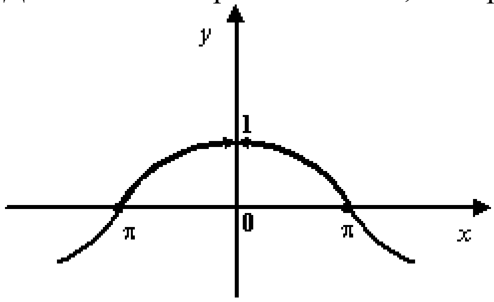


Рис. График $y=\frac{\sin x}{x}$

Приведём примеры применения первого замечательного предела для вычисления других родственных пределов.

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$.

Очевидно, что

$$\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\frac{\sin x}{x}},$$

при этом предел знаменателя $\frac{\sin x}{x}$ -- это первый замечательный предел, равный 1 (и, следовательно, не равный 0). Числитель правой части, равный 1, имеет предел 1. Значит, по теореме о пределе отношения,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}$.

Сделаем замену переменного: пусть $y=\arcsin x$. Тогда $x=\sin y$ и база $x\to 0$ переходит в базу $y\to 0$. После замены получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

Очевидно, что

$$\frac{\arcsin x}{x}=\frac{1}{\frac{x}{\arcsin x}},$$

при этом предел знаменателя $\dfrac{x}{\arcsin x}$ был вычислен в предыдущем примере; он равен 1. Числитель правой части имеет предел 1. Применяя теорему о пределе отношения, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Преобразуем функцию под знаком предела следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right).$$

Теперь вынесем постоянный множитель за знак предела и применим теорему о пределе произведения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot.$$

(Чуть ниже мы увидим, что пределы сомножителей существуют, так что применять эту теорему здесь можно.) Заметим, что при заменах $t=2x$ и $y=3x$ база $x\to 0$ переходит в базу $t\to 0$ и $y\to 0$, так что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

Определение. Вторым замечательным пределом называется предел

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e, заданное этим пределом, играет очень большую роль как в математическом анализе, так и в других разделах математики. Число e часто называют основанием натуральных логарифмов.

Теорема. Второй замечательный предел существует. Его значение e -- число, лежащее между $2\frac{3}{7}$ и 3.

Более подробное изучение числа e показывает, что e -- иррациональное число, несколько первых десятичных знаков которого таковы:

$$e=2{,}7182818285\ldots\quad.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма; формула, в ней полученная, называется формулой бинома Ньютона.

Лемма. Пусть $a,b\in\mathbb{R}$ и n -- натуральное число. Тогда имеет место формула

$$(a+b)^n= \\ =a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)n}b^n.$$

Заметим, что в дроби

$$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)n},$$

очевидно, сокращаются все сомножители в числителе и знаменателе, так что эта дробь равна 1. Аналогично, в предыдущем (не выписанном) слагаемом после сокращения получается коэффициент, равный n, в третьем справа слагаемом -- равный $\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$, и т. д. Таким образом, коэффициенты в слагаемых, стоящих на одинаковых местах, считая слева и справа от края формулы, совпадают.

Доказательство. Доказывать утверждение леммы будем по индукции по параметру n. При $n=1$ формула 2.2, очевидно, верна:

$$(a+b)^1=a+b.$$

(Заметим, что при $n=2$ и $n=3$ формула 2.2 также хорошо известна:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ и } (a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3.)$$

Предположим, что она верна для $n=k$, и докажем, что тогда она верна и при $n=k+1$. Действительно,

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k\cdot(a+b)=(a+b)^ka+(a+b)^kb=$$
$$=a^{k+1}+ka^kb+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}a^{k-1}b^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{k-2}b^3+\ldots+ab^k+$$
$$+a^kb+ka^{k-1}b^2+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}a^{k-2}b^3+\ldots+kab^k+b^{k+1}=$$
$$=a^{k+1}=(k+1)a^kb+\left[\frac{k(k-1)}{1\cdot2}+k\right]a^{k-1}b^2+$$
$$+\left[\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}\right]a^{k-2}b^3+\ldots+(k+1)ab^k+b^{k+1}.$$

При этом в квадратных скобках получается:

$$\frac{k(k-1)}{1\cdot2}+k=k\left(\frac{k-2}{2}+1\right)=\frac{(k+1)k}{1\cdot2};$$

$$\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}=\frac{k(k-1)}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{k-2}{3}+1\right)=$$

$$= \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{k+1}{3} = \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

и так далее, то есть как раз то, что должно получиться в качестве коэффициентов формулы бинома Ньютона при $n = k+1$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и применим к y_n формулу бинома Ньютона при $a = 1$ и $b = \frac{1}{n}$. Получим

$$\begin{aligned} y_n &= \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1+n\cdot\tfrac{1}{n}+\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\tfrac{1}{n^2}+\tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{n^3}+\ldots+\tfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\tfrac{1}{n^n} = \\ &= 2+\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{n-2}{n}\cdot\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n-(n-1)}{n}\cdot\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}. \end{aligned}$$

Покажем, что последовательность y_n ограничена сверху. Для этого заменим все дроби $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, ..., $\frac{n-(n-1)}{n}$ на 1. Все эти дроби меньше 1, так что сумма в правой части формулы увеличится:

$$y_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}.$$

Далее, заменим все числа $3,\ldots,n$ в знаменателях этих слагаемых на 2; от этого правая часть ещё увеличится. Получим:

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

В правой части получилась сумма членов геометрической прогрессии. Она равна

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поэтому $y_n < 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$ что и означает ограниченность последовательности сверху числом 3.

Покажем теперь, что последовательность y_n не убывает. Действительно, запишем формулу в виде

$$\begin{aligned} y_n = 2 &+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{1\cdot 2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+ \\ &+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}. \quad (2.1) \end{aligned}$$

В аналогичной формуле, написанной для $n+1$ вместо n, во-первых, увеличится каждое из выражений в круглых скобках (так как вычитаемое уменьшится) и, значит, увеличатся все слагаемые, содержащие такие скобки. Во-вторых, число слагаемых увеличится на одно: добавится положительное слагаемое

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}.$$

Следовательно, при росте номера n члены последовательности y_n строго возрастают: $y_{n+1}>y_n$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

Применим теперь к возрастающей ограниченной сверху последовательности y_n теорему о пределе монотонной ограниченной функции и получим, что существует предел

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

причём число e не больше постоянной 3, ограничивающей последовательность. Осталось заметить, что $y_4=(1+\frac{1}{4})^4=2\frac{113}{256}=2\frac{339}{768}>2\frac{3}{7}$. Так как все последующие члены y_n ещё больше, то и предел e, на основании теоремы о переходе к пределу в неравенстве, не меньше числа $2\frac{113}{256}>2\frac{3}{7}$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Можно также показать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \qquad (***)$$

однако строгое доказательство достаточно тяжело, и мы его здесь пропускаем.

В формуле (***) можно сделать замену $\alpha=\frac{1}{x}$, при этом база $x\to+\infty$ перейдёт в базу $\alpha\to 0+$, и мы получим

$$\lim_{\alpha\to 0+}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Пример. Найдём предел $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{t}{x})^x$.

Здесь параметр $t\in\mathbb{R}$ -- фиксированное число. При вычислении предела он будет рассматриваться как постоянная. Сделаем замену $\alpha=\frac{t}{x}$, тогда $\alpha\xrightarrow{x\to\infty}0$ и $x=\frac{t}{\alpha}$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{t}{x})^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot t}=\left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^t=e^t.$$

(Здесь мы воспользовались, пока на интуитивном уровне, тем, что степенная функция непрерывна, то есть что $\lim\limits_{z\to z_0}z^t=z_0^t$. Полученная формула даёт нам возможность выразить экспоненциальную функцию e^t как некоторый предел.

С помощью похожей замены вычисляются пределы функций вида $u(x)^{v(x)}$ в случае, когда основание степени $u(x)$ при некоторой базе стремится к 1, а показатель степени $v(x)$ -- к бесконечности. Такие выражения, а также и связанные с ними пределы, называются неопределённостями вида $[1^\infty]$.

Обратим внимание читателя, что $[1^\infty]$ -- это лишь условная запись: 1 здесь указывает, что основание степени **стремится** к 1 (и вовсе не обязательно **равно 1**); в «показателе степени» стоит вообще не число, а символ бесконечности. Поэтому было бы грубой ошибкой, встретив такую условную запись (или написав её), сделать вывод о том, что единица, мол, в любой степени даёт единицу, и поэтому ответ равен единице. С условными символами в этой записи нельзя действовать так же, как с числами. Предыдущий пример, в котором основание степени $1+\frac{t}{x}$ стремится к 1, а показатель степени x к ∞, даёт как раз неопределённость вида $[1^\infty]$. Однако значение предела равно e^t, а этот результат может быть **любым положительным числом**, в зависимости от того, какое значение t взято.

Вот ещё один пример на раскрытие неопределённости вида $[1^\infty]$.

Пример. Найдём предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{2x+1}$.

Здесь основание степени имеет предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{1+0}{1+0}=1,$$

а показатель степени $2x+1\xrightarrow{x\to\infty}\infty$. Поэтому можно применять тот же приём сведения ко второму замечательному пределу, что в предыдущем примере. Для начала найдём, что следует взять за бесконечно малую величину α. Поскольку основание степени стремится к 1, то оно равно $1+\alpha$, где $\alpha\to 0$. Значит,

$$\alpha=\frac{x+1}{x+3}-1=\frac{x+1-x-3}{x+3}=\frac{-2}{x+3}.$$

Теперь преобразуем функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{x+3}\cdot(2x+1)}.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, имеет вид $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ и при $\alpha\to 0$ стремится к числу e (это второй замечательный предел), а предел показателя степени мы найдём отдельно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2(2x+1)}{x+3}=-2\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=-2\cdot\frac{2+0}{1+0}=-4.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x+1} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$

(Мы воспользовались тем, что если $\lim\limits_{B} u(x) = A > 0$ и $\lim\limits_{B} v(x) = B$, то $\lim\limits_{B}(u(x))^{v(x)} = A^B$. Это следует из непрерывности показательной и логарифмической функций, если учесть, что $u^v = e^{v\ln u}$.)

Замечание Не любые пределы величин вида $u(x)^{v(x)}$ вычисляются с помощью сведения ко второму замечательному пределу. Ещё раз напомним, что так надо поступать лишь в случае, когда основание степени $u(x)$ при данной базе стремится к 1, а показатель степени $v(x)$ -- к бесконечности. В иных ситуациях можно бывает для вычисления предела обойтись более простыми рассуждениями. Например, при нахождении предела

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x}$$

можно заметить, что основание степени стремится к $\frac{1}{2}$, так что получается формально $[(\frac{1}{2})^{+\infty}]$. Это выражение не является неопределённостью (в отличие от выражения $[1^\infty]$), так как основание степени при достаточно больших x близко к $\frac{1}{2}$ (и заведомо меньше, скажем, $\frac{2}{3}$) и при возведении в неограниченно увеличивающуюся степень x будет меньше $(\frac{2}{3})^x$ и, следовательно, будет стремиться к 0. Так что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x} = 0$$

и прибегать к помощи второго замечательного предела не пришлось.

Векторное поле. Потенциальное поле. Дивергенция векторного поля. Ротор векторного поля. Соленоидальное поле. Механические приложения векторного анализа. Приложения криволинейных и поверхностных интегралов

Пример. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости (p), отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x+3y-z)\,dS \qquad (p): 2x+y+z=2$$

Решение

Данная поверхность S представляет собой часть плоскости $2x+y+z=2$, расположенную в первом октанте.

Запишем уравнение плоскости в виде $z = 2-2x-y$. Тогда $z'_x = -2$, $z'_y = -1$.

Используя формулу $\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)\,dS = \iint\limits_{D} f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy$, имеем

$$\iint_S (2x+3y-z)dS = \iint_G (2x+3y-(2-2x-y))\sqrt{1+4+1}dxdy = 2\sqrt{6}\iint_G (2x+2y-1)dxdy =$$

$$= 2\sqrt{6}\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2x+2y-1)dy = 2\sqrt{6}\int_0^1 (2xy+y^2-y)\Big|_0^{2-2x} dx =$$

$$= 2\sqrt{6}\int_0^1 (2x(2-2x)+(2-2x)^2-(2-2x))dx = 2\sqrt{6}\int_0^1 (4x-4x^2+4-8x+4x^2-2+2x)dx =$$

$$= 4\sqrt{6}\int_0^1 (1-x)dx = 4\sqrt{6}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 = 4\sqrt{6}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{6}$$

Ответ: $\iint_S (2x+3y-z)dS = 2\sqrt{6}$

Пример. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S (2y^2-z)dxdy$, где S – часть поверхности параболоида $z = x^2+y^2$ (нормальный вектор n которой образует тупой угол с ортом k), отсекаемая плоскостью z=2.

Решение

Поверхность S является частью параболоида $z = x^2+y^2$, отсеченной плоскостью $z = 2$. Поверхность S однозначно проецируется на плоскость Oxy в область D_{xy} — круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат. Уравнение окружности $x^2+y^2=2$, которая является границей D_{xy} .

Поэтому, получаем

$$\iint_S (2y^2-z)dxdy = \iint_D (2y^2-x^2-y^2)dxdy = \iint_S (y^2-x^2)dxdy == \begin{vmatrix} x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ |J| = r \\ 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{2}} r(r^2\sin^2\phi - r^2\cos^2\phi)dr = \int_0^{2\pi} \cos 2\phi d\phi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = \frac{1}{2}\sin 2\phi\Big|_0^{2\pi} \frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{8}(\sin 4\pi - \sin 0)*4 =$$

Ответ: $\iint_S (2y^2-z)dxdy = 0$

Пример. Вычислить поток векторного поля $a(M)$ через внешнюю сторону пирамиды, образуемою плоскостью (p) и координатными плоскостями, двумя способами: а) использовав определение потока; б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса. $a(M) = (x+2z)i + (y-3z)j + zk$, (p): $3x+2y+3z=6$

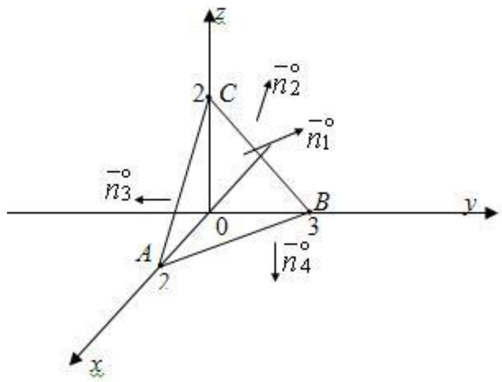
Решение

При вычислении потока данного примера рассмотрим сумму потоков, т. к. поверхность σ состоит из четырех частей.

$$\prod = \iint_\sigma \overline{A}\cdot\overline{n}^o d\sigma = \iint_{\Delta ABC} \overline{A}\cdot\overline{n}_1^o d\sigma + \iint_{\Delta CBO} \overline{A}\cdot\overline{n}_2^o d\sigma + \iint_{\Delta AOC} \overline{A}\cdot\overline{n}_3^o d\sigma + \iint_{\Delta AOB} \overline{A}\cdot\overline{n}_4^o d\sigma,$$

Где $\overline{n}_1^o, \overline{n}_2^o, \overline{n}_3^o, \overline{n}_4^o$ – соответственно нормали к поверхностям $\Delta ABC, \Delta CBO, \Delta AOC$ и ΔAOB.

Будем вычислять каждый из слагаемых интегралов отдельно. В первом интеграле ΔABC взаимно однозначно проектируется, например, на плоскость $x0y$, а уравнение его плоскости $3x+2y+3z-6=0$.



Принимая $F(x,y,z)=3x+2y+3z-6$,
Найдем единичный вектор нормали к этой плоскости $\bar{n}_1^{\circ}=\dfrac{\operatorname{grad}F}{|\operatorname{grad}F|}=\dfrac{3\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}}{\sqrt{22}}$.

Здесь $\cos\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{22}}>0$, что и соответствует нормали к внешней стороне треугольника. После этого находим

$$\frac{\bar{A}\cdot\bar{n}_1^{\circ}}{|\cos\gamma|}=\frac{1}{\sqrt{22}}(3(x+2z)+2(y-3z)+3z)\cdot\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{22}}}=\frac{1}{3}(3x+2$$

Тогда

$$I_1=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Delta AOB}(3x+2y+3z)\,dxdy=\frac{1}{3}\int_0^2 dx\int_0^{3-\frac{3}{2}x}\left(3x+2y+3\left(2-x-\frac{2}{3}y\right)\right)dy=$$

$$=\frac{6}{3}\int_0^2 dx\int_0^{3-\frac{3}{2}x}dy=2\int_0^2 y\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x}dx=2\int_0^2\left(3-\frac{3}{2}x\right)dx=2\left(3x-\frac{3}{4}x^2\right)\Bigg|_0^2=2\left(3*2-\frac{3}{4}2^2\right)=6$$

Во втором интервале $\bar{n}_2^{\circ}=-\bar{i}$, $\cos\alpha=-1<0$ и

$$\frac{\bar{A}\cdot\bar{n}_2^{\circ}}{|\cos\alpha|}=-(x+2z)\cdot\frac{1}{1}=(-x-2z)\Big|_{x=0}=-2z.$$

$$\iint\limits_{\Delta COB}\frac{\bar{A}\cdot\bar{n}_2^{\circ}}{|\cos\alpha|}\Bigg|_{x=0}dydz=\iint\limits_{\Delta COB}(-2z)\,dydz=-2\int_0^3 dy\int_0^{2-\frac{2}{3}y}zdz=-2\int_0^3\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{2-\frac{2}{3}y}dy=-\int_0^3\left(2-\frac{2}{3}y\right)^2dy=$$

$$=-\int_0^3\left(4-\frac{8}{3}y+\frac{4}{9}y^2\right)dy=-\left(4y-\frac{4}{3}y^2+\frac{4}{27}y^3\right)\Bigg|_0^3=-\left(4*3-\frac{4}{3}3^2+\frac{4}{27}3^3\right)=-4$$

В третьем интеграле $\bar{n}_3^{\circ}=-\bar{j},\quad \cos\beta=-1<0$ и $\dfrac{\bar{A}\cdot\bar{n}_3^{\circ}}{|\cos\beta|}=(y-3z)\cdot\dfrac{-1}{1}$.

$$I_3=\iint\limits_{\Delta AOC}(-y+3z)\Big|_{y=0}dxdz=3\int_0^2 dx\int_0^{2-x}zdz=\frac{3}{2}\int_0^2 z^2\Big|_0^{2-x}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^2(4-4x+x^2)\,dx=\frac{3}{2}\left(4x-2x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{2}\left(4*2-2*2^2+\frac{1}{3}2^3\right)=4$$

В четвертом интеграле $\bar{n}_4^{0}=-k,\quad \cos\gamma=-1<0$ и $\dfrac{\bar{A}\cdot\bar{n}_4^{\circ}}{|\cos\gamma|}=-z.$

$$I_4=-\iint\limits_{\Delta AOB}z\Big|_{z=0}dxdy=0$$

Окончательно получаем $I_1+I_2+I_3+I_4=6-4+4+0=6$.

Решим задачу с помощью теоремы Остроградского:

$a(M) = (x+2z)i + (y-3z)j + zk$

$$\operatorname{div}\overline{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x+2z) + \frac{\partial}{\partial y}(y-3z) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1+1+1 = 3,$$

Поэтому $$\prod = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\overline{A}dv = \iiint\limits_{V} 3dv = 3V = 3*2*3*2*\frac{1}{3}*\frac{1}{2} = 6,$$

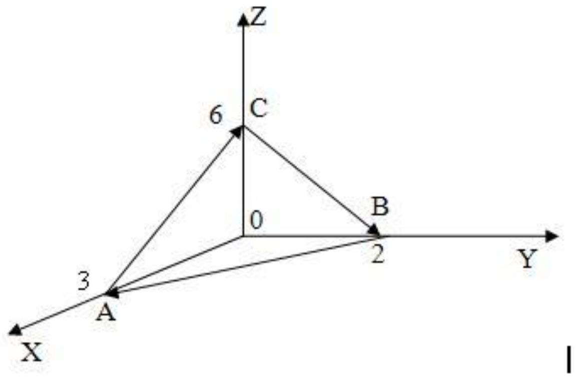
Где V – объем пирамиды (V_{CAOB}).

Ответ: $\prod = 6$

Пример. Вычислить циркуляцию векторного поля $a(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости (p): $Ax+By+Cz=D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $n = (A,B,C)$ этой плоскости двумя способами: 1) использовав определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса $a(M) = (x+y+z)i + 2zj + (y-7z)k$, (p): $2x+3y+z=6$

Решение

В результате пересечения плоскости (p) с координатными плоскостями получим треугольник ABC и укажем на нем положительное направление обхода контура $ABCA$.



1. Вычислим

цию C данного поля по формуле:

На

ем: $z=0$, $2x+3y=6$, $y = 2-\frac{2}{3}x$, $dy = -\frac{2}{3}dx$.

$a(M) = (x+y+z)i + 2zj + (y-7z)k$, $\overline{dS} = dx\overline{i} + dy\overline{j}$, $\overline{a}\cdot\overline{dS} = (x+y)dx$,

$$\int\limits_{AB} \overline{a}\cdot\overline{dS} = \int\limits_{AB}(x+y)dx = \int\limits_{3}^{0}\left(x+2-\frac{2}{3}x\right)dx = \int\limits_{3}^{0}\left(2+\frac{1}{3}x\right)dx = \left(2x+\frac{1}{6}x^2\right)\Bigg|_{3}^{0} =$$

$$= -2*3-\frac{1}{6}3^2 = -\frac{15}{2}$$

На отрезке BC: $x=0$, $3y+z=6$, $z=6-3y$, $dz=-3dy$,

$a(M) = (x+y+z)i + 2zj + (y-7z)k$, $\overline{dS} = dy\overline{j} + dz\overline{k}$, $\overline{a}\cdot\overline{dS} = 2zdy + (y-7z)dz$,

$$\int_{BC} \overline{a}\cdot\overline{dS} = \int_{BC} 2zdy + (y-7z)dz = \int_2^0 (2(6-3y) - 3(y-7(6-3y)))dy =$$

$$= \int_2^0 (138-72y)dy = (138y - 36y^2)\Big|_2^0 = -138*2 + 36*2^2 = -276+144 = -132$$

На отрезке $CA:\ y=0$, $2x+z=6$, $dz=-2dx$, $\overline{a}\cdot\overline{dS} = (x+z)dx - 7zdz$,

$$\int_{CA} \overline{a}\cdot\overline{dS} = \int_{CA} (x+z)dx - 7zdz = \int_0^3 ((x+z)+14z)dx = \int_0^3 ((x+6-2x)+14(6-2x))dx =$$

$$= \int_0^3 (-29x+90)dx = \left(-\frac{29}{2}x^2+90x\right)\Bigg|_0^3 = -\frac{29}{2}3^2 + 90*3 = \frac{279}{2}$$

Следовательно, $$C = -\frac{15}{2} - 132 + \frac{279}{2} = 0.$$

2. Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса. Для этого вычислим:

$$\overline{rot\,a}(M) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+y+z) & 2z & (y-7z) \end{vmatrix} = (1-2)\overline{i} - (0-1)\overline{j} + (0-1)\overline{k} = -\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$$

В качестве поверхности S в формуле Стокса возьмем боковую поверхность пирамиды $OABC$: $S = S_{OCA} + S_{OAB} + S_{OBC}$.

По формуле Стокса имеем: $$C = \iint_S \overline{rot\,a}\cdot\overline{n}\cdot dS = \iint_S \overline{rot\,a}\cdot\overline{dS},$$

Где $\overline{dS} = dydz\overline{i} + dxdz\overline{j} + dxdy\overline{k}$, $\overline{rot\,a}\cdot\overline{dS} = -dydz + dxdz - dxdy.$

Следовательно, $$C = \iint_S -dydz + dxdz - dxdy = -\iint_{COB} dydz + \iint_{COA} dxdz - \iint_{AOB} dxdy = -6+9-3 = 0.$$

Ответ: $C=0$

Пример. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = xyz$ в точке $M_0(2;1;0)$.

Решение

Находим частные производные функции $U(M)$ в любой точке $M(x,y,z)$ и в точке M_0: $\frac{\partial U(M)}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial U(M_0)}{\partial x} = 1*0 = 0$,

$$\frac{\partial U(M)}{\partial y} = xz,\ \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = 2*0 = 0,\quad \frac{\partial U(M)}{\partial z} = xy,\ \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = 2*1 = 2.$$

Тогда в точке $M_0(2;1;0)$ имеем $\overline{gradU}(M_0)=0\bar{i}+0\bar{j}+2\bar{k}=2\bar{k}$. Наибольшая скорость изменения поля в точке M_0 достигается в направлении $\overline{gradU}(M_0)$ $\left|\overline{gradU}(M_0)\right|$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \overline{gradU}}=\max\frac{\partial U(M_0)}{\partial S}=\left|\overline{gradU}(M_0)\right|=\sqrt{0^2+0^2+2^2}=2$$

.

Пример. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $a(M)=(x+y)i+yzj+xzk$ в точке $M_0(2;1;0)$.

Решение

Модуль ротора векторного поля равен максимальному значению поверхностной плотности циркуляции векторного поля. По формуле:

$$\overline{rot}\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Тогда

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (x+y) & yz & xz\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(xz)}{\partial y}-\frac{\partial(yz)}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial z}-\frac{\partial(xz)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(yz)}{\partial x}-\frac{\partial(x+y)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=-y\vec{i}-z\vec{j}-1\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\right|=\sqrt{(-y)^2+(-z)^2+1^2}=\sqrt{y^2+z^2+1}$$

Тогда в т. $M_0(2;1;0)$, $\left|\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\right|\Big|_{(2,1,0)}=\sqrt{1^2+0^2+1}=\sqrt{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$

Пример. Выяснить, является ли векторное поле $a(M)=yzi+xzj+xyk$ потенциальным.

Решение

Поле является потенциальным, если выполнены следующие условия: $\dfrac{\partial a_y}{\partial x}=\dfrac{\partial a_x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial a_x}{\partial z}=\dfrac{\partial a_z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial a_z}{\partial y}=\dfrac{\partial a_y}{\partial z}$.

В нашем случае $\dfrac{\partial a_y}{\partial x}=\dfrac{\partial a_x}{\partial y}=z$, $\dfrac{\partial a_x}{\partial z}=\dfrac{\partial a_z}{\partial x}=y$, $\dfrac{\partial a_z}{\partial y}=\dfrac{\partial a_y}{\partial z}=x$.

Следовательно, поле $\vec{a}-$ потенциальное.

9. Вычислить криволинейный интеграл (циркуляцию) $\oint\limits_C 5zydx+z(3+5x)dy+y(5x+7)dz$, где $C-$ линия, определяемая уравнениями $x=2(\sin t+\cos t)$; $y=2\sin t$; $z=2\cos t$; $t\in[0;2\pi]$ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

Решение
Решение

$x = 2(\sin t + \cos t) \Rightarrow dx = 2(\cos t - \sin t)dt$

$y = 2\sin t \Rightarrow dy = 2\cos t dt$

$z = 2\cos t \Rightarrow dz = -2\sin t dt$

. Тогда получим

$$Ц = \int_C 5zydx + z(3+5x)dy + y(5x+7)dz = \int_0^{2\pi} 5*2\cos t*2\sin t*2(\cos t - \sin t)dt +$$

$$+2\cos t(3+5*2(\sin t+\cos t))2\cos t dt + 2\sin t(5*2(\sin t+\cos t)+7)(-2)\sin t dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(40\cos t\sin t(\cos t - \sin t) + 4\cos^2 t(3+10\sin t+10\cos t) - 4\sin^2 t(10\sin t + 10\cos t + 7))dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(80\cos^2 t\sin t - 80\cos t\sin^2 t + 12\cos^2 t + 40\cos^3 t - 40\sin^3 t - 28\sin^2 t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(120\cos^2 t\sin t - 120\cos t\sin^2 t + 6\cos 2t + 40\cos t - 40\sin t - 8 + 14\sin 2t)dt =$$

$$= (-40\cos^3 t - 40\sin^3 t + 3\sin 2t + 40\sin t + 40\cos t - 8t - 7\cos 2t)\Big|_0^{2\pi} = -8*2\pi = -16\pi$$

Ответ: $Ц = -16\pi$

10. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$; выяснить, является ли данное поле потенциальным или соленоидальным; если да, то найти соответственно его скалярный или векторный потенциал и сделать проверку потенциала:
$\vec{a} = e^{x+y}\left(z\vec{i} + z\vec{j} + \vec{k}\right).$

Решение

Дивергенция

$$divf = \frac{\partial(e^{x+y}z)}{\partial x} + \frac{\partial(e^{x+y}z)}{\partial y} + \frac{\partial(e^{x+y})}{\partial z} = ze^{x+y} + ze^{x+y} + 0 = 2ze^{x+y}$$

Поле не соленоидальное

Ротор

$$rota = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x+y}z & e^{x+y}z & e^{x+y} \end{vmatrix} = (e^{x+y} - e^{x+y})\bar{i} - (e^{x+y} - e^{x+y})\bar{j} + (e^{x+y}z - e^{x+y}z)\bar{k} = 0$$

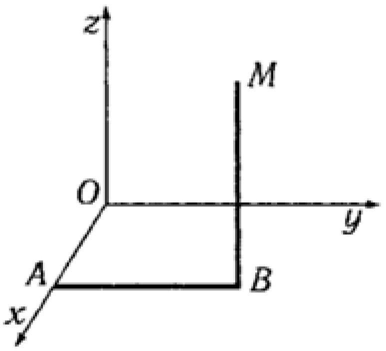
$rota = 0$ - поле безвихревое, а, следовательно, и потенциальное.

Найдём потенциал данного поля

Поскольку поле потенциально, то его потенциал можно найти по формуле

$$U = \int_{AB}(\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_A^B dU = U(B) - U(A).$$

Где в качестве пути интегрирования возьмём ломаную OABM, состоящую из отрезков прямых, параллельных координатным осям



$$U(x,y,z) = \int_{OM} e^{x+y} z dx + e^{x+y} z dy + e^{x+y} dz = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BM}$$

На отрезке OA: $y = 0$, $z = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, следовательно

$$I_{OA} = \int_0^x 0 dx = 0$$

На отрезке AB: $x = const$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$, отсюда

$$I_{AB} = \int_0^y e^{x+y} * 0 * 0 = 0$$

На отрезке BM: $x = const$, $y = const$, $dx = 0$, $dy = 0$ и

$$I_{BM} = \int_0^z e^{x+y} dz = e^{x+y} z\Big|_0^z = ze^{x+y} + C$$

Таким образом, $U(x,y,z) = ze^{x+y} + C$

5.2.9 Решение системы дифференциальных уравнений. Основные свойства решений. Построение общего решения. Уравнение Лапласа в различных системах координат. Некоторые уравнения математической физики

Уравнение Лапласа — уравнение в частных производных. В трёхмерном пространстве уравнение Лапласа записывается так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

и является частным случаем уравнения Гельмгольца.

Уравнение рассматривают также в двумерном и одномерном пространстве. В двумерном пространствеуравнение Лапласа записывается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Также и в n-мерном пространстве. В этом случае нулю приравнивается сумма n вторых производных. С помощью дифференциального оператора

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + ...$$

— (оператора Лапласа) —

это уравнение записывается (для любой размерности) одинаково как $\triangle u = 0$

В этом случае размерность пространства указывается явно (или подразумевается).

Уравнение Лапласа относится к эллиптическому виду.

Функции, являющиеся решениями уравненияЛапласа, называются гармоническими функциями.

Замечание: всё сказанное выше относится к декартовым координатам в плоском пространстве (какова бы нибыла его размерность).

При использовании других координат представление оператора Лапласа меняется,и, соответственно, меняется запись уравнения Лапласа
Эти уравнения такженазываются уравнением Лапласа, однако для устранения неоднозначности терминологии при этом обычно явно добавляется указание системы координат (и, при желании полной ясности, размерности), например: двумерное уравнение Лапласа в полярных координатах).

Другие формы уравнения Лапласа

В сферических координатах (r,θ,φ) уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=0$$

В полярных координатах r, φ уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$$

Основные понятия теории уравнений математической физики

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1^0. Уравнение

$$F\left(x_1,x_2,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}\right)=0, \qquad (1)$$

$$m_1+m_2+\dots+m_n=m,$$

где *u* - искомая функция, $x_1,\dots,x_n$- независимые переменные , *F* – известная функция своих аргументов, называется*дифференциальным уравнением в частных производных*. Наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение (1), называется *порядком* этого уравнения. *Решением* уравнения (1) в некоторой области *D* называется любая функция $u=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$, необходимое число раз дифференцируемая и обращающая его в тождество.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, где $u=u(x,y)$.

Решение. Исходное уравнение можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$, значит, производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ зависит только от *y*, т.е. $\frac{\partial u}{\partial y}=g(y)$, где $g(y)$ – произвольная дифференцируемая функция. Отсюда $u=\int g(y)dy+F(x)=G(y)+F(x)$, где $F(x)$ – произвольная дифференцируемая функция, зависящая только от *x*, а $G(y)=\int g(y)dy$. Таким образом, решением рассматриваемого уравнения является любая функция вида $u=G(y)+F(x)$, где $G(y)$ и $F(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.□

Пример 2. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial x}=x^2$, удовлетворяющее условию $u(x,y)|_{x=0}=y^2$.

Решение. Общее решение данного уравнения имеет вид $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\varphi(y)$. Подставим в полученное выражение $x=0$, будем иметь $u(x,y)|_{x=0}=\varphi(y)=y^2$. Отсюда $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+y^2$.
□

2^0. Классификация линейных уравнений второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial u}{\partial y}+a_0 u=f(x,y)$$, (3)

I. **Пусть в уравнении (3)** a_{11}, a_{12}, a_{22} **– постоянные коэффициенты**. Для того, чтобы привести уравнение (3) к каноническому виду применяют способ характеристик: составляется уравнение

$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0$, (4)

так называемое *уравнение характеристик*, которое распадается на два уравнения . Разделим уравнение (4) на $(dx)^2$ и произведем замену $\frac{dy}{dx}=t$, тогда уравнение (4) примет вид

$a_{11}t^2-2a_{12}t+a_{22}=0$. (5)

1) Если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$, то уравнение **эллиптического типа**. Для этого уравнения интегралы уравнения характеристик имеют вид $\varphi(x,y)\pm i\psi(x,y)=C_{12}$, где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – действительные функции. С помощью подстановки $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ уравнение (3) приводится к каноническому виду

$$\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

где ξ, η – новые переменные; f_1 – известная функция.

2) Если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, то уравнение **гиперболического типа**. Тогда уравнение характеристик имеет два интеграла: $\varphi(x,y)=C_1$, $\psi(x,y)=C_2$. С помощью замены переменных $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ дифференциальное уравнение (3) приводится к каноническому уравнению вида $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=F\left(\xi,\eta,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$.

3) Если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$, то уравнение **параболического типа**. Тогда уравнение характеристик дает лишь один интеграл $\varphi(x,y)=C$. В этом случае замена переменных $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ – некоторая функция, для которой $\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\neq 0$. Тогда уравнение приводится к каноническому виду $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=f_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ или $\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=f_4\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, где f_3, f_4 – известные функции.

После указанных подстановок будем иметь уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+a_0 u=f(\xi,\eta)$$, (5)

где

$A=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,$

$B=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y,$

$C=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,$

$D=a_1\xi_x+a_2\xi_y, \quad E=a_1\eta_x+a_2\eta_y.$

Можно заметить, что для уравнений: 1) эллиптического типа $B=0,\ A=C$, 2) гиперболического типа $A=C=0$, 3) параболического типа $A=B=0$ или $C=B=0$.

II. **Если в уравнении (3) коэффициенты a_{ij} переменные**, то для него выделяются области эллиптичности, гиперболичности и параболичности.

Пример 3. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Решение. В данном случае $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = -3$. Так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 > 0$, то данное уравнение является уравнением гиперболического типа. Составим уравнение характеристик: $(dy)^2 - 2dxdy - 3(dx)^2 = 0$. Оно распадается на два: $\frac{dy}{dx} = 3$, $\frac{dy}{dx} = -1$. Интегрируя их, соответственно получаем: $y - 3x = C_1$, $y + x = C_2$. Вводим новые переменные по формулам $\xi = x + y$, $\eta = 3x - y$.

Вычислив $\xi_x = 1$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = 3$, $\eta_y = -1$, получим: $A = 0$, $B = 8$, $C = 0$, $D = 8$, $E = 0$.

Подставив коэффициенты в уравнение (5), получим $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$. □

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Решение. Здесь $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 2$, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0$, т.е. имеем уравнение эллиптического вида. Уравнение характеристик запишется в виде: $(dy)^2 + 2dxdy + 2(dx)^2 = 0$, получаем два семейства мнимых характеристик: $y + x - ix = C_1$ и $y + x + ix = C_2$. Производя замену переменных $\xi = x + y$, $\eta = x$, имеем $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$. Подставив найденные значения в (5), получим $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Лабораторно-практическое занятие 1 (ЛПЗ-1) Функция. Способы задания. Классификация функций

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- понятие функции, способы ее задания;
- классификацию функций;
- преобразование графиков.

Лабораторно-практическое занятие 2 (ЛПЗ-2) Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- свойства сходящихся последовательностей;
- технику нахождения пределов последовательностей;
- свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Лабораторно-практическое занятие 3 (ЛПЗ-3) Непрерывность функции в точке

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- определения функции, непрерывной в точке, на множестве, понятие односторонних пределов, признак существования предела;
- алгоритм исследования функции на непрерывность и классификацию точек разрыва.

Лабораторно-практическое занятие 4 (ЛПЗ-4) Производная функции в точке. Правила дифференцирования

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- геометрический и физический смысл производной;
- уравнение касательной и нормали к кривой;
- правила дифференцирования;
- технику нахождения производной выражения.

Лабораторно-практическое занятие 5 (ЛПЗ-5) Исследование функции средствами дифференциального исчисления

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- необходимое, достаточное условие существования экстремума, теорему о монотонности дифференцируемой функции;
- необходимое, достаточное условие существования точки перегиба, теорему об исследовании формы кривой;
- классификацию асимптот, достаточный признак наклонной асимптоты, признак вертикальной асимптоты;

Лабораторно-практическое занятие 6 (ЛПЗ-6) Приложения дифференциального исчисления

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- применение правил Лопиталя для раскрытия неопределенностей;
- алгоритм исследования функции на наибольшее и наименьшее значение;
- методы решения оптимизационных задач.

Лабораторно-практическое занятие 7 (ЛПЗ-7) Функция двух переменных, ее дифференцирование

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- понятие частного и полного приращения, алгоритм нахождения частных производных;
- формулы для нахождения полного дифференциала сложно заданной функции;
- дифференцирование неявной функции;
- применение дифференциала функции двух переменных к приближенным вычислениям.

Лабораторно-практическое занятие 8 -9 (ЛПЗ-8-9) Приложения дифференциального исчисления функции многих действительных переменных.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в области;
- понятие условного экстремума;
- алгоритм нахождения производной скалярного поля по направлению4

- понятие и вычисление градиента скалярного поля.

Лабораторно-практическое занятие 10 (ЛПЗ-10) Основные методы интегрирования

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- алгоритм применения, теоремы звездочка, метода интегрирования «по частям», интегрирования методом подстановки;
- классификацию простейших рациональных дробей и методы их интегрирование.

Лабораторно-практическое занятие 11 (ЛПЗ-11) Основные методы интегрирования

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- основную теорему математического анализа, ее следствия;
- условия применения формулы Ньютона-Лейбница;
- основные методы вычисления определенного интеграла;

Лабораторно-практическое занятие 12 (ЛПЗ-12) Приложения определенного интеграла

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- формулы длины дуги плоской кривой фигуры в декартовой, полярной системе координат, заданной параметрически;
- формулы для вычисления объема тел вращения;
- алгоритм исследования несобственных интегралов первого и второго рода на сходимость.

Лабораторно-практическое занятие 13-14 (ЛПЗ-13-14) Методы вычисления двойного интеграла. Геометрические приложения двойного интеграла

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- теореме о переходе от двойного интеграла к повторному;
- алгоритм смены порядка интегрирования в повторном интеграле;
- вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, коэффициент растяжения пространства, замена переменной в двойном интеграле;
- применение двойного интеграла к вычислению площади плоской фигуры, объема тела.

Лабораторно-практическое занятие 15 (ЛПЗ-15) Криволинейный интеграл первого рода.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- физический смысл интеграла первого рода;
- теоремы о вычислении криволинейных интегралов;
- применение формулы Грина, теорему о независимости интеграла от пути интегрирования;

Лабораторно-практическое занятие 18-19 (ЛПЗ-18-19) Степенные ряды.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- понятие функционального ряда, теоремы, выражающие свойства суммы функциональных рядов;

- свойства степенных рядов, разложение элементарных функций в степенные ряды;
- применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

Лабораторно-практическое занятие 20-21 (ЛПЗ-19-20) Тригонометрические ряды.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:
- проверку системы функций на ортонормированность;
- вычисление коэффициентов ряда Фурье;
- разложение функции в ряд Фурье по симметричному и произвольному промежутку.

Лабораторно-практическое занятие 22 (ЛПЗ-22) Дифференциальные уравнения, основные понятия

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- основные понятии теории обыкновенных дифференциальных уравнений;

- классификацию дифференциальных уравнений первого порядка, методы их решения;

- основные понятия и теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;

Лабораторно-практическое занятие 23 - 25 (ЛПЗ-23-25) Дифференциальные уравнения первого порядка

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- классификацию дифференциальных уравнений первого порядка, методы их решения;

- основные понятия и теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;

- алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, однородных уравнений первого порядка, линейных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнений Бернулли, уравнений в полных дифференциалах.

Лабораторно-практическое занятие 26 (ЛПЗ-26) Дифференциальные уравнения неразрешенные относительно производной. Прикладные задачи

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

-типы уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной;

- алгоритмы интегрирования уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной;

- методы решения текстовых задач.

Лабораторно-практическое занятие 27 (ЛПЗ-26) Системы дифференциальных уравнений

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- основные понятия, свойства теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
- основные классы систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
- алгоритмы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лабораторно-практическое занятие 28-29 (ЛПЗ-28-29) ЛДУ, свойства, методы решения

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- основные понятия и теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений n - го порядка, ЛОДУ;
- классификацию уравнений, допускающих понижение степени, алгоритмы решения уравнений, допускающих понижение степени
- теоремы, определяющие свойства ФСР, алгоритм ее нахождения, вычисление определителя Вронского;

Лабораторно-практическое занятие 30-32 (ЛПЗ-30-32) ЛОДУ n - го порядка с постоянными коэффициентами.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- основные понятия и теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений n - го порядка, ЛОДУ;
- алгоритмы решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами;
- теоретические основы метода вариации произвольной постоянной. Алгоритм его применения.
- основные понятия, свойства ЛНДУ; особенности структуры общего решения ЛНДУ;
- алгоритмы построения общего решения ЛНДУ со специальной правой частью.

Лабораторно-практическое занятие 34 (ЛПЗ-34) Линейные системы дифференциальных уравнений. Основные свойства решений. Построение общего решения. Уравнения математической физики.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на:

- основные понятия, свойства теории дифференциальные уравнения в частных производных;
- основные типы дифференциальных уравнений в частных производных;
- алгоритмы решения простейших уравнений математической физики..

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

4.1 Практическое занятие 1 (ПЗ-1) Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- понятие числовой последовательности, предела числовой последовательности;
- свойства сходящихся последовательностей4
- алгоритмы нахождения типовых пределов последовательности.

4.2 Практическое занятие 2 (ПЗ-2) Предел функции в точке и на бесконечности

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- причину введения понятия предела функции в точке, свойства функций, имеющих предел в точке;
- свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций;
- таблицу бесконечно малых, эквивалентных данным, алгоритмы вычисления предела функции в точках и на бесконечности, раскрытие неопределенностей.

4.3 Практическое занятие 3 – 4 (ПЗ-3-4) Дифференцирование сложной, обратной, показательно-степенной функции. Неявная функция, ее дифференцирование. Дифференциал функции, его свойства

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- правила дифференцирования;
- дифференцирование сложной, обратной, неявной функции, логарифмическое дифференцирование;
- геометрический смысл дифференциала, его вычисление, приложение к приближенным вычислениям.

4.4 Практическое занятие 5 (ПЗ-5) Исследование функции методами дифференциального исчисления

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- необходимое, достаточное условие существования экстремума, теорему о монотонности дифференцируемой функции;
- необходимое, достаточное условие существования точки перегиба, теорему об исследовании формы кривой;
- классификацию асимптот, достаточный признак наклонной асимптоты, признак вертикальной асимптоты;

4.5 Практическое занятие 6 (ПЗ-6) Функция двух переменных, ее дифференцирование

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- понятие частного и полного приращения, алгоритм нахождения частных производных;
- формулы для нахождения полного дифференциала сложно заданной функции;
- дифференцирование неявной функции;
- применение дифференциала функции двух переменных к приближенным вычислениям.

4.6 Практическое занятие 7-8 (ПЗ-7-8) Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных. Векторное, потенциальное, соленоидальное поле. Дивергенция, ротор векторного поля.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- критерий Сильвестра, условия его применения;
- алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в области;
- понятие условного экстремума;
- понятие векторного, потенциального, соленоидального поля;
- определение дивергенции, циркуляции, ротора поля..

4.7 Практическое занятие 9 -10 (ПЗ-9-10) Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- понятие первообразной, неопределенного интеграла;
- свойства неопределенного интеграла;
- алгоритм применения непосредственного интегрирования, теоремы звездочка, метода интегрирования «по частям», интегрирования методом подстановки;
- классификацию простейших рациональных дробей и методы их интегрирование.

4.8 Практическое занятие 11 (ПЗ-11) Определенный интеграл. Интегрирование непрерывных функций

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- определение определенного интеграла , его свойства;
- основную теорему математического анализа, ее следствия;
- условия применения формулы Ньютона-Лейбница;
- основные методы вычисления определенного интеграла;
- геометрический смысл определенного интеграла, интеграл с переменным верхним пределом.

4.9 Практическое занятие 12-13 (ПЗ-12-13) Геометрические приложения определенного интеграла

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- формулы для вычисления площади плоской фигуры в декартовой, полярной системе координат, ограниченной плоской кривой, заданной параметрически;
- формулы длины дуги плоской кривой фигуры в декартовой, полярной системе координат, заданной параметрически;
- формулы для вычисления объема тел вращения;

4.10 Практическое занятие 14 (ПЗ-14) Двойной интеграл, его вычисление

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- теореме о переходе от двойного интеграла к повторному;
- алгоритм смены порядка интегрирования в повторном интеграле;
- вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, коэффициент растяжения пространства, замена переменной в двойном интеграле;

4.11 Практическое занятие 15 (ПЗ-15) Вычисление криволинейных интегралов второго рода

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- физический смысл интегралов первого и второго рода;
- теоремы о вычислении криволинейных интегралов;
- применение формулы Грина, теорему о независимости интеграла от пути интегрирования;
- восстановление функции по ее полному дифференциалу.

4.12 Практическое занятие 16 - 17 (ПЗ-16-17) Положительные числовые ряды, признаки их сходимости

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- понятие суммы числового ряда, достаточные признаки сходимости положительных рядов;
- абсолютно сходящиеся ряды, их свойства;
- теорему Лейбница и ее следствия;
- алгоритм исследования произвольного ряда на сходимость.