ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.Б.1.10 Теория вероятностей и математическая статистика

Специальность 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Специализация Информационная безопасность автоматизированных систем критически важных объектов

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
5	Многомерные случайные величины, их числовые характеристики	-	-	-	6	4
10	Понятие о случайной функции. Основные понятия. Закон распределения случайной функции. Характеристики случайной функции.	-	-	-	4	8
11	Динамическая система. Оператор динамической системы. Линейные преобразования случайной функции.	-	-	-	4	4
12	Стационарный случайный процесс. Стационарный случайный процесс с эргодическим свойством.	-	-	-	2	6
14	Спектральное разложение стационарной случайной функции.	-	-	-	8	8
Итого в соответствии с РПД		-	-	-	**24**	**87**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

5.2.1 Нормальный закон распределения двумерной случайной величины

Непрерывная случайная величина (X,Y) имеет двумерное нормальное распределение, если ее плотностью распределения равна

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\},$$

где $m_x=M[X]$, $m_y=M[Y]$, $s_x=\sqrt{D[X]}$, $s_y=\sqrt{D[Y]}$, $r_{xy}=\frac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ -коэффициент корреляции, $k_{xy}=M[(x-m_x)(y-m_y)]$- ковариация.

Отсюда следует, что

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\},$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\},$$

т.е. если (X,Y) распределена нормально, то и каждая ее составляющая случайная величина распределена нормально.

Если коэффициент корреляции $r_{xy}=0$, т.е. величины X и Y некоррелированны, то легко получить, что $f(x,y)=f_1(x)\times f_2(y)$, т.е. для двумерного нормального распределения понятия некоррелированности и независимости равносильны.

Если X и Y - независимые случайные величины, имеющие нормальные распределения, то

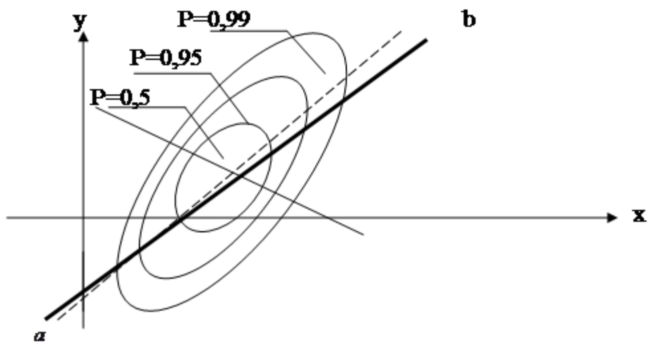
$$P(a<X<b;g<Y<d)=P(a<X<b)\times P(g<Y<d)=$$

$$=\left\{\Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}\right)\right\}\left\{\Phi\left(\frac{\delta-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{\gamma-m_y}{\sigma_y}\right)\right\}$$

С геометрической точки зрения график плотности представляет собой “гору” с достаточно крутыми склонами, вершина которой находится в точке (m_x,m_y). Линиями уровня служат эллипсы

$$\left\{\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2-2r_{xy}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}=C=const$$

с центром в т. (m_x,m_y), большая полуось которых имеет при $r_{xy}>0$ положительный наклон к оси абсцисс 0x. По мере удаления от центра плотность нормального распределения очень быстро убывает и стремится к нулю.



На рис.1 представлены линии уровня- эллипсы, ограничивающие область, в которые случайный вектор попадает с вероятностями 0,5; 0,9; 0,99.

Рис.1

Говорят, что X и Y связаны ли-

нейной корреляционной зависимостью, если обе функции регрессии Y на X и X на Y линейны.
Имеет место следующая важная теорема.

Теорема *(без доказательства)*. **Если двумерная случайная величина (X,Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью**.

Например, если (X,Y) распределена нормально, причем $m_x=3$, $m_y=1$, $s_x=\sqrt{5}$, $s_y=1$, $k_{xy}=2$, то $r_{xy}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ и

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{5}\cdot 1\sqrt{1-\frac{4}{5}}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\frac{4}{5})}\left(\frac{(x-3)^2}{5}-2\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{(x-3)(y-1)}{\sqrt{5}\cdot 1}+\frac{(y-1)^2}{1}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(x-3)^2-4(x-3)(y-1)+5(y-1)^2]\right\},$$

Прямая среднеквадратической регрессии Y на X

$y=kx+b$, где $k=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}r_{xy}$, $b=m_y-k\times m_x$ имеет вид $y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$.

Пример. Случайные величины X и Y независимы и нормально распределены с $m_X=m_Y=0; D(X)=D(Y)=1.$ Найти вероятность того, что случайная точка (X,Y) попадет в кольцо $k=\{(x,y):4\le x^2+y^2\le 9\}$

Решение: Так как случайные величины X и Y независимы, то они не коррелированы и, следовательно, r = 0. Подставляя $m_x=m_y=0, \sigma_x=\sigma_y=1, r=0$ в (C), получаем $x^2+y^2=C^2$,

то есть эллипс равной вероятности выродился в круг равной вероятности. Тогда

$$P\{(X,Y)\in k\}=P(3)-P(2)=\left(1-\exp\left(-\frac{9}{2}\right)\right)-\left(1-\exp\left(-\frac{4}{2}\right)\right)=e^{-2}-e^{-4,5}\approx 0.1242.$$

Ответ:0,1242.

5.2.4 Виды нелинейных операторов, примеры.

При изложении теории преобразования случайных функций мы будем пользоваться широко применяемым в математике и технике понятием оператора.

Понятие оператора является обобщением понятия функции. Когда мы устанавливаем функциональную связь между двумя переменными y и x и пишем:

$$y=f(x). \qquad (1)$$

то под символом f мы понимаем правило, по которому заданному значению x приводится в соответствие вполне определенное значение y. Знак f есть символ некоторого преобразования, которому нужно подвергнуть величину x, чтобы получить y. Соответственно виду этого преобразования функции могут быть линейными и нелинейными, алгебраическими, трансцендентными и т. д.

Аналогичные понятия и соответствующая символика применяются в математике и в тех случаях, когда преобразованию подвергаются не величины, а функции.

Рассмотрим некоторую функцию $x(t)$ и установим определенное правило A, согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в другую функцию $y(t)$. Запишем это преобразование в следующем виде:

$$y(t) = A\{x(t)\}. \qquad (2)$$

Примерами подобных преобразований могут быть, например, дифференцирование:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \qquad (3)$$

интегрирование:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau, \qquad (4)$$

и т. д.

Правило A, согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в функцию $y(t)$, мы будем называть оператором; например, мы будем говорить: оператор дифференцирования, оператор интегрирования, оператор решения дифференциального уравнения и т. д.

Определяя оператор, мы рассматривали только преобразование функции $x(t)$ в другую функцию y того же аргумента t. Следует заметить, что такое сохранение аргумента при определении оператора вовсе не является обязательным: оператор может преобразовывать функцию $x(t)$ в функцию другого аргумента $y(s)$, например:

$$y(s) = \int_a^b \varphi(t,s)x(t)dt, \qquad (5)$$

где $\varphi(t,s)$ - некоторая функция, зависящая, помимо аргумента t, еще и от параметра s.

Но так как при анализе ошибок динамических систем наиболее естественным аргументом является время t, мы здесь ограничимся рассмотрением операторов, преобразующих одну функцию аргумента t в другую функцию того же аргумента.

Если динамическая система преобразует поступающую на ее вход функцию $x(t)$ в функцию $y(t)$:

$$y(t) = A\{x(t)\},$$

то оператор A называется оператором динамической системы.

В более общем случае на вход системы поступает не одна, а несколько функций; равным образом на выходе системы могут появляться несколько функций; в этом случае оператор системы преобразует одну совокупность функций в другую. Однако в целях простоты изложения мы рассмотрим здесь лишь наиболее элементарный случай преобразования одной функции в другую.

Преобразования или операторы, применяемые к функциям, могут быть различных типов. Наиболее важным для практики является класс так называемых линейных операторов.

Оператор L называется линейным однородным, если он обладает следующими свойствами:

1) к сумме функций оператор может применяться почленно:

$$L\{x_1(t) + x_2(t)\} = L\{x_1(t)\} + L\{x_2(t)\}; \qquad (6)$$

2) постоянную величину c можно выносить за знак оператора:

$$L\{cx(t)\} = cL\{x(t)\}. \qquad (7)$$

Из второго свойства между прочим, следует, что для линейного однородного оператора справедливо свойство

$$L\{0\}=0, \qquad (8)$$

т. е. при нулевом входном воздействии реакция системы равна нулю.

Примеры линейных однородных операторов:

1) оператор дифференцирования:

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt};$$

2) оператор интегрирования:

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau;$$

3) оператор умножения на определенную функцию $\varphi(t)$:

$$y(t)=\varphi(t)x(t),$$

4) оператор интегрирования с заданным «весом» $\varphi(t)$:

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

и т. д.

Кроме линейных однородных операторов, существуют еще линейные неоднородные операторы.

Оператор L называется линейным неоднородным, если он состоит из линейного однородного оператора с прибавлением некоторой вполне определенной функции $\varphi(t)$:

$$L\{x(t)\}=L_0\{x(t)\}+\varphi(t), \qquad (9)$$

где L_0 - линейный однородный оператор.

Примеры линейных неоднородных операторов:

1) $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+\varphi(t)$,

2) $y(t)=\displaystyle\int_0^t x(\tau)\varphi(\tau)d\tau+\varphi_1(t)$,

3) $y(t)=\varphi_1(t)x(t)+\varphi_2(t)$.

где $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ - вполне определенные функции, а $x(t)$ - преобразуемая оператором функция.

В математике и технике широко применяется условная форма записи операторов, аналогичная алгебраической символике. Такая символика в ряде случаев позволяет избегать сложных преобразований и записывать формулы в простой и удобной форме.

Например, оператор дифференцирования часто обозначают буквой p:

$$p=\frac{d}{dt},$$

помещаемой в виде множителя перед выражением, подлежащим дифференцированию. При этом запись

$$y(t)=px(t)$$

равносильна записи

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}.$$

Двойное дифференцирование обозначается множителем p^2:

$$p^2 x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

и т. д.

Пользуясь подобной символикой, в частности, очень удобно записывать дифференциальные уравнения.

Пусть, например, работа динамической системы A описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, связывающими реакцию системы $y(t)$ с воздействием $x(t)$. В обычной форме записи
это дифференциальное уравнение имеет вид:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) . \qquad (10)$$

В символической форме это уравнение может быть записано в виде:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) =$$
$$= (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0) x(t) .$$

где $p = \frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования.

Обозначая для краткости полиномы относительно p, входящие в правую и левую части,

$$A_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 ,$$
$$B_m(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0 ,$$

запишем уравнение в еще более компактной форме:

$$A_n(p) y(t) = B_m(p) x(t) . \qquad (11)$$

Наконец, формально разрешая уравнение (15.6.11) относительно $y(t)$, можно символически записать оператор решения линейного дифференциального уравнения в «явном» виде:

$$y(t) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} x(t) . \qquad (12)$$

Пользуясь аналогичной символикой, можно записать в операторной форме и линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. В обычной форме это уравнение имеет вид:

$$a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t) y(t) =$$
$$= b_m(t) \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}(t) \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1(t) \frac{dx(t)}{dt} + b_0(t) x(t) . \qquad (13)$$

Обозначая многочлены относительно p, коэффициенты которых зависят от

$$A_n(p,t) = a_n(t) p^n + a_{n-1}(t) p^{n-1} + \ldots + a_1(t) p + a_0(t) ,$$
$$B_m(p,t) = b_m(t) p^m + b_{m-1}(t) p^{m-1} + \ldots + b_1(t) p + b_0(t) ,$$

можно записать оператор дифференциального уравнения в виде:

$$y(t) = \frac{B_m(p,t)}{A_n(p,t)} x(t) \quad . \qquad (14)$$

В дальнейшем мы по мере надобности будем пользоваться такой символической формой записи операторов.

Встречающиеся в технике динамические системы часто описываются линейными дифференциальными уравнениями. В этом случае, как нетрудно убедиться, оператор системы является линейным.

Динамическая система, оператор которой является линейным, называется линейной динамической системой.

В противоположность линейным операторам и системам рассматриваются системы и операторы нелинейные. Примерами нелинейных операторов могут служить

$$y(t) = x^2(t), \quad y(t) = \int_0^t x^3(\tau)d\tau, \quad y(t) = \sin x(t),$$

а также решение нелинейного дифференциального уравнения, хотя бы

$$y'(t) + \alpha \cos y(t) = x(t).$$

Динамическая система, оператор которой не является линейным, называется нелинейной системой.

На практике линейные системы встречаются очень часто. В связи с линейностью этих систем к анализу их ошибок может быть с большой эффективностью применен аппарат теории случайных функций. Подобно тому, как числовые характеристики линейных функций обычных случайных величин могут быть получены по числовым характеристикам аргументов, характеристики случайной функции на выходе линейной динамической системы могут быть определены, если известны оператор системы и характеристики случайной функции на ее входе.

Еще чаще, чем линейные системы, на практике встречаются системы не строго линейные, но в известных пределах допускающие линеаризацию. Если случайные возмущения на входе системы достаточно малы, то практически любая система может рассматриваться - в пределах этих малых возмущений - как приближенно линейная, подобно тому, как при достаточно малых случайных изменениях аргументов практически любая функция может быть линеаризована.

Прием приближенной линеаризации дифференциальных уравнений широко применяется в теории ошибок динамических систем.

В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные динамические системы и соответствующие им линейные операторы.

5.2.5 Стационарный белый шум и его инженерная интерпретация

Временной ряд называется **детерминированным**, если значения уровней временного ряда точно определены какой-либо математической функцией, являющейся реализацией исследуемого процесса.

Временной ряд называется **случайным**, если уровни временного ряда могут быть описаны с помощью функции распределения вероятностей.

Таким образом, уровни временного ряда могут быть детерминированными или случайными величинами.

Уровни случайного временного ряда могут быть непрерывными и дискретными случайными величинами.

Случайная величина X называется **дискретной**, если множество её возможных значений является конечным или счётным. В качестве примера случайного временного ряда с дискретными уровнями может служить временной ряд, отражающий значения ежемесячной выдачи зарплаты рабочим.

Случайная величина *X* называется **непрерывной**, если она может принимать любое значение из конечного или бесконечного интервала. В качестве примера случайного временного ряда с непрерывными уровнями может служить временной ряд, отражающий значения температуры воздуха, зарегистрированные с определённой периодичностью.

Стохастическим процессом называется процесс, который развивается во времени в соответствии с законами теории вероятностей.

К стохастическим процессам относится класс стационарных процессов.

Стохастический процесс называется **стационарным**, если его основные свойства остаются неизменными во времени.

Предположим, что исследуется временной ряд *X*. Обозначим через *xt* уровень данного временного ряда. Тогда стационарный процесс будет характеризоваться следующими **четырьмя свойствами:**

1) математическое ожидание стационарного ряда *E(yt)* является постоянным, т. е. среднее значение временного ряда, вокруг которого изменяются уровни, является величиной постоянной:

$$\mathrm{E}(y_t) = \bar{y} = const;$$

2) дисперсия стационарного ряда является постоянной. Она характеризует вариацию уровней временного ряда относительно его среднего значения

$$\bar{x}: \quad D(y) = \mathrm{E}(y_t - \bar{y})^2 = G^2(y) = const;$$

3) автоковариация стационарного ряда с лагом *l* является постоянной, т. е. ковариация между значениями *xt* и *xt+l*, отделёнными интервалом в l единиц времени, определяется по формуле:

$$R_l(y_t) = \mathrm{cov}(y_t, y_{t+l}) = \mathrm{E}\left[(y_t - \bar{y})(y_{t+l} - \bar{y})\right];$$

для стационарных рядов автоковариация зависит только от величины лага *l*, поэтому справедливо равенство вида:

$$R_{l=0}(y_t) = G^2(y);$$

4) коэффициенты автокорреляция стационарного ряда с лагом *l* являются постоянными. Следовательно, автокорреляция является нормированной автоковариацией, т. к. для стационарного процесса *G2(y)=const*:

$$\rho_l = \frac{\mathrm{E}\left[(y_t - \bar{y})(y_{t+l} - \bar{y})\right]}{\sqrt{\mathrm{E}(y_t - \bar{y})^2\,\mathrm{E}(y_{t+l} - \bar{y})^2}} = \frac{\mathrm{E}\left[(y_t - \bar{y})(y_{t+l} - \bar{y})\right]}{G^2(y)},$$

Таким образом, коэффициент автокорреляции порядка *l* определяется по формуле:

$$\rho_l = \frac{R_l(y_t)}{R_{l=0}(y_t)}.$$

Нестационарным временным рядом называется ряд, который не удовлетворяет вышеперечисленным свойствам.

Случайный процесс, называемый белым шумом, является частным случаем стационарных временных рядов.

Белым шумом называется случайная последовательность значений *y1, y2,…,yN,* если её математическое ожидание равно нулю, т.е. *E(Yt)=0*, где

$$t = \overline{1, N},$$

её элементы являются некоррелированными (независимыми друг от друга) одинаково распределёнными величинами, и дисперсия является постоянной величиной *D(Yt)=G2=const*.

Белый шум – это теоретический процесс, который реально не существует, однако он представляет собой очень важную математическую модель, которая используется при решении множества практических задач.

Белый шум.

Его используют как модель наиболее существенной помехи в каналах связи. Он является стационарным случайным процессом с постоянной спектральной плотностью S(w)=S0. Название “белый шум” возникло по аналогии с применяемым в оптике белый свет, который содержит все цвета спектра и все спектральные составляющие которого имеют примерно одинаковую энергию. Определяя белый шум как предельное состояние телеграфного сигнала при a®¥, найдем его свойства. Умножим и разделим выражения для спектральной плотности телеграфного сигнала на a.

Введем спектральную плотность белого шума

S0=2s2/a, (65)

тогда S(w)=S0(2pa)2/[(2pa)2+w2]= S0 /(1+w2/a2). (66)

Из (66) следует, что $\lim\limits_{\alpha\to\infty} S(\omega) = S_0$; если $\sigma^2 \to \infty$, то $\lim\limits_{\sigma^2,\alpha\to\infty} (\sigma^2 / \alpha) = const.$

Рассмотрим, как изменяются дисперсия и корреляционная функция телеграфного сигнала при a®¥. Используя (65) выразим через a дисперсию

$\sigma^2 = 0.5\Omega_0\alpha = S_0\Delta F_1$ (67)

Спектральная плотность - это мощность процесса, которая приходится на 1Гц полосы частот, так как S0=s2/DF1. Из (67) следует, что $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\sigma^2 \to \infty$, т.е. мощность белого шума не ограничена. Подставив значение мощности из (65) в (60), получим

K(t)=0.5 S0ae-a|t| (68)

Т.к. $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\alpha e^{-\alpha|\tau|} \to 0$ при |t|¹0, то и $\lim\limits_{\alpha\to 0,|\tau|\neq 0} K(\tau) \to 0$. При |t|®0 д.б. a®¥, но так как a|t|=const, след $\lim\limits_{\alpha\to 0,|\tau|\to 0} K(\tau) \to \infty$ поскольку S0®¥ при a®0.

Поэтому корреляционную функцию в окрестностях точки t=0 апроксимируют дельта - функцией и записывают

K(t)=0.5 S0d (t) (69)

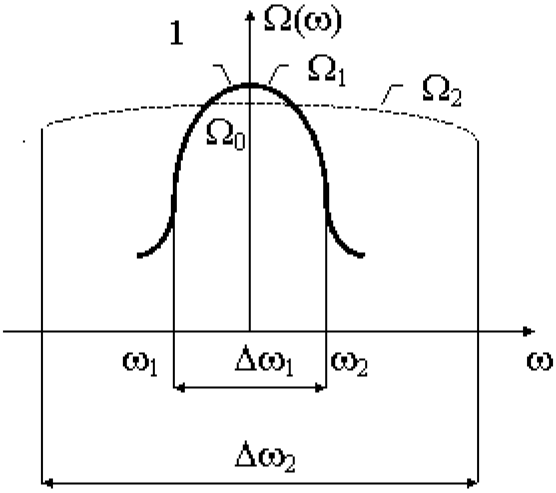
Определим спектральную плотность белого шума через K(t)

$$S(\omega) = 2\int_0^\infty \frac{S_0}{2}\delta(\tau)\cos\omega\tau d\tau = \mathrm{S}_0 \quad (70)$$

Таким образом, белый шум обладает следующими свойствами : его спектральная плотность постоянна, составляющие при любых |t|¹0 не коррелированы, дисперсия бесконечна. Многие помехи в технике связи, вычислительной технике и других областях рассматриваются как белый шум. К таким помехам относят флуктуационные шумы, помехи в многоканальных системах и сетях связи, и др. Белый шум - понятие идеализированное. Не существует источников сигналов и помех, которые могли бы обеспечить бесконечную мощность, а также генерировать реализации процессов с некоррелированными близкими отсчетами. Этой идеализацией можно пользоваться, если действие помехи с шириной спектра Dw2 рассматривают в полосе частот Dw1 полезного сигнала или системы и соблюдается условие

Dw1/Dw2<<1 (71)

а спектральная плотность помехи W2(w) изменяется на интервале Dw1. На следующем рисунке эти условия иллюстрируют графики спектральных характеристик сигнала и помехи.



Характеристиками помехи как белого шума служат спектральная плот ность S0 и средняя мощность в полосе частот сигнала

s2=S0DF1=S0Dw1/2p (72)

Частотные составляющие помехи, которые лежат за пределами полосы пропускания системы, в инженерных расчетах можно не учитывать.

Гауссовский процесс.

Случайный процесс, для которого n - мерная плотность распределения

$$f_n\left(x_1,x_n;t_1,t_n\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n A}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 A}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}X_iX_k\right) \quad (73)$$

называют гауссовским. Здесь

$$A=\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots R_{2n} \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots R_{nn} \end{vmatrix}$$ - определитель;

s2- дисперсия ; m=0; Rik=K/(ti,tk); Aik - алгебраическое дополнение Rik в A. Для стационарного процесса Rik= Rki , где t=tk-ti. Поэтому для гауссовского процесса по корреляционной функции можно определить плотность распределения любого порядка. Первые два значения плотности распределения

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-x^2/2\sigma^2},x\in(-\infty,\infty), \quad (74)$$

$$f_2(x_1,x_2,\tau)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-p^2(\tau)}}\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2+2p(\tau)x_1x_2}{2\sigma^2[1-p^2(\tau)]}\right], \quad (75)$$

Гауссовский белый шум.

Если гауссовский процесс является белым шумом, все n сечений его не корреляционны, Aik=1, A=1, Rik=Rki=diks2, (dik - символ Кронепера). Поэтому плотность распределения N-го порядка определяют как произведение из n одномерных плотностей распределения

$$f_n(x_1,x_n;t_1,t_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,t_i)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) \quad (76)$$

Распределенное по закону Гаусса колебание образуется в результате сложения большого числа независимых или слабокоррелированных случайных колебаний.

5.2.6 Стохастические зависимые процессы типа гибели и размножения.

Марковский процесс с дискретными состояниями $S_0, S_1, \dots, S_n$ называется процессом гибели и размножения, если все состояния можно вытянуть в цепочку, в которой каждое из промежуточных состояний $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ может переходить только в соседние состояния, а крайние состояния S_0, S_n переходят лишь в состояния S_1 и S_{n-1} соответственно. Граф состояний такой системы приведен на рис.4.

Название схемы взято из биологических задач, где состояние популяции S_k означает наличие в ней k особей.

На рис.4 переход вправо соответствует увеличению популяции, влево – ее уменьшению. Таким образом, можно определить $\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)$ как интенсивности размножения, а $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_n(t)$ – как интенсивности гибели. Используется следующее соглашение: буквам λ и μ приписывается индекс того состояния, из которого выходит стрелка.

Марковским процессом гибели и размножения с непрерывным временем называется такой случайный процесс, исследуемый параметр которого может принимать только целые неотрицательные значения. Изменения рассматриваемого параметра могут происходить в любой момент времени, т.е. в любой момент времени он может либо увеличиться, либо уменьшиться на единицу.

Процессом чистого размножения называется такой процесс, у которого интенсивности всех потоков гибели равны нулю; аналогично процессом чистой «гибели» называется процесс, у которого равны нулю интенсивности всех потоков размножения.

Предельные (финальные) вероятности состояний для простейшего эргодического процесса гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме, определяются по следующим формулам:

$$P_k = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \cdot P_0 \ , \qquad k = 1, 2, \dots, n \qquad (3)$$

$$P_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n} \right\}^{-1} \qquad (4)$$

В качестве примера решения системы уравнений схемы гибели и размножения рассмотрим эксплуатацию автомобилей в крупной транспортной фирме.

Интенсивность поступления автомобилей на предприятие равна $\lambda(t)$. Каждый поступивший на предприятие автомобиль списывается через случайное время T_C. Срок службы автомобиля T_C распределен по показательному закону с параметром μ. Процесс эксплуатации автомобилей является случайным процессом. $A(t)$ – число автомобилей данной марки, находящихся в эксплуатации в момент времени t.

Рассмотрим два случая: 1) нет ограничений на число эксплуатируемых автомобилей, 2) на предприятии может эксплуатироваться не более n автомобилей.

Если в начальный момент $t = 0$ на предприятии не было ни одного автомобиля, то решать систему уравнений нужно при начальных условиях:

$P_0(0)=1,\ P_i(0)=0\ \ (i=1,2,\ldots)$.

Аналогично, если при $t=0$ эксплуатировалось k автомобилей, то начальные условия имеют вид:

$P_k(0)=1,\ P_i(0)=0\ \ (i=1,2,\ldots;\ i\neq k)$

Решение системы дифференциальных уравнений Колмогорова при произвольном виде функции $\lambda(t)$ не может быть найдено в аналитическом виде. Однако при постоянных интенсивностях потоков гибели и размножения и конечном числе состояний будет существовать стационарный режим. Система в этом случае является простейшей эргодической системой.

Если интенсивности потока поступления и списания автомобилей постоянны, то оказываются справедливы формулы:

1. Максимальное число автомобилей не ограничено: $P_0=e^{-\frac{\lambda}{\mu}},\qquad P_k=\left[\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\right]\cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$.

2. Математическое ожидание (среднее значение) числа эксплуатируемых автомобилей:

$M[A(t)]=\frac{\lambda}{\mu}$;

При ограниченном n $P_0=\frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{\lambda}{\mu})^k\cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu k!}}},\qquad P_k=P_0\cdot\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!},\quad k=0,1,\ldots,\ n$

В этом случае математическое ожидание равно: $M[A(t)]=\sum\limits_{k=0}^{n}k\cdot P_k$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

3.1 Лабораторная работа 1 (ЛР-1) Вычисление вероятности СС

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- элементы комбинаторики, формулы для вычисления числа сочетаний, размещений. перестановок;
- методы непосредственного вычисление вероятности случайного события.
- теоремы о вероятности суммы случайных событий, о вероятности произведения событий.

3.2 Лабораторная работа 2 (ЛР-2) Условная вероятность. Схема повторных испытаний. Простейший поток событий. Следствия из основных теорем о вычислении вероятности. Схема повторных испытаний

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- понятие условная вероятность, формулы полной вероятности, Байеса.
- условия реализации схемы повторных испытаний; формулы Бернулли, Пуассона, Лапласа.
- определение простейшего потока событий, формулу для подсчета вероятности случайного события с заданной интенсивностью.

3.3 Лабораторная работа 3 – 4 (ЛР-3-4) Случайные величины, законы их распределения, числовые характеристики

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- определение и классификацию СВ;
- определение закона распределения случайной величины;
- вычисление числовых характеристик ДСВ, НСВ, их свойства.

3.4 Лабораторная работа 5 (ЛР-5) Законы распределения ДСВ, НСВ

Частные виды законов распределения случайных величин

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- задание законов распределения: биномиальный, Пуассона, равномерный, показательный, нормальный;
- условия реализации законов распределения, их параметры, связь;
- вычисление числовых характеристик.

3.5 Лабораторная работа 6 -7 (ЛР-6-7) Многомерные случайные величины, их числовые характеристики

Случайный вектор, функция и плотность системы СВ, условные законы распределения, числовые характеристики.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- определение системы двух случайных величин, функции и плотности системы СВ, их свойства;
- построение условных распределений плотностей ССВ, условных законов распределения;
- вычисление корреляционного момента ССВ, его свойства.
- вычисление коэффициента корреляции, составление корреляционной матрицы.

3.6 Лабораторная работа 8 (ЛР-8) Первичная обработка данных эксперимента в среде Excel

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- первичную обработку статистического материала..
- построение полигона частот, гистограммы.
- вычисление числовых характеристик выборки.
- алгоритм обработки данных в среде Excel.

3.7 Лабораторная работа 9 -10 (ЛР-9) Выравнивание рядов

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- понятие статистических гипотез и их классификацию.
- применение критерия согласия.
- методы оценки параметров неизвестного распределения.
- алгоритм выравнивания рядов.

3.8 Лабораторная работа 11 (ЛР-11) Построение регрессии в среде MathCAD

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- алгоритмы работы среде MathCAD;
- анализ реализации на основе опытных данных

3.9 Лабораторная работа 12 (ЛР-12) Показатели стохастической зависимости

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- методы вычисления коэффициента детерминации;
- вычисление коэффициента корреляции, его свойства, значимость.

3.10 Лабораторная работа 13 (ЛР-13). Аппроксимация функций в среде MathCAD.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- постановку задачи численной аппроксимации.
- аппроксимацию таблично заданных функций методом наименьших квадратов.

3.11Лабораторная работа 14 (ЛР-14). Обработка опытов.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- особенности обработки ограниченного числа опытов;
- оценки характеристик выборки;

- оценки неизвестных параметров закона распределения;
- оценку вероятности по частоте.

3.12 Лабораторная работа 15 (ЛР-15) Моделирование случайного процесса.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- способы задания и характеристики системы случайных величин;
- оценки характеристик системы случайных величин по опытным данным;
- методы генерации псевдослучайного процесс;
- понятие огибающей и фазы нормального случайного процесса.

3.13 Лабораторная работа 16 (ЛР-16) Характеристики случайной функции.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- свойства и вероятностный смысл характеристик случайных функций;
- определение характеристик случайной функции из опыта;
- линейные преобразования случайных функций.
- методы определения характеристик преобразованных случайных функций по характеристикам исходных случайных функций.

3.14 Лабораторная работа 17 (ЛР-17) Динамические системы.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- построение фазового портрета динамической системы.
- классические динамические системы: автоколебания, аттрактор, брюсселятор.
- линейные преобразования стационарных случайных функций.

3.15 Лабораторная работа 18 (ЛР-18) Характеристики стационарной случайной функции. Стационарные случайные функции с эргодическим свойством.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- методы определения характеристик преобразованных стационарных случайных функций по характеристикам исходных стационарных случайных функции;
- применение теории стационарных случайных процессов к решению задач, связанных с анализом и синтезом динамических систем;
- определение характеристик эргодической стационарной функции по одной реализации.

3.16 Лабораторная работа 19 (ЛР-19) Метод канонических разложений случайных функций.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- представление случайной функции в виде суммы элементарных случайных функций;
- каноническое разложение случайной функции;
- линейные преобразования случайных функций, заданных каноническими разложениями.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

4.1 Практическое занятие 1 - 2 (ПЗ-1-2) Случайные события, их вероятность. Основные теоремы теории вероятностей. Условная вероятность. Следствия основных теорем теории вероятностей. Схема повторных испытаний

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- классификацию случайных событий; различные подходы к определению вероятности случайного события;
- комбинаторные формулы, методы непосредственного вычисления вероятности случайного события, основные теоремы.
- понятие условной вероятности; модели задач на формулу полной вероятности и формулу Байеса;
- определение схемы повторных испытаний;
- формулы Бернулли, Пуассона, Лапласа, условия их применения;
- вычисление наивероятнейшего числа наступлений события в схеме повторных испытаний;
- свойства простейшего потока, формулу для вычисления вероятности события с заданной интенсивностью.

4.2 Практическое занятие 3 (ПЗ-3) Случайные величины. Функция и плотность распределения СВ. Числовые характеристики случайной величины

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- классификацию СВ, определение закона распределения вероятностей;
- построение функции распределения ДСВ, вычисление плотности распределения НСВ, вероятности попадания СВ в заданный интервал;
- вычисление числовых характеристик СВ.

4.3 Практическое занятие 4 (ПЗ-4) Некоторые распределения ДСВ. Некоторые распределения НСВ

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- особенности законов распределения ДСВ: биномиального, Пуассона, геометрического, гипергеометрического;
- особенности законов распределения НСВ: равномерного, показательного, нормального;
- алгоритм применения формул для нахождения вероятности попадания в интервал нормально распределенной СВ, вероятности ее отклонения от м.о., ее частоты от вероятности, правило трех сигм.

4.4 Практическое занятие 5-6 (ПЗ-5-6) Многомерные случайные величины, их числовые характеристики

Случайный вектор. Распределение многомерной СВ. Условные законы распределения. Числовые характеристики случайного вектора. Коэффициент корреляции.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- определение закона распределения МСВ, частные законы распределения МСВ;
- зависимость СВ, условные законы распределения МСВ, способы их получения;
- вычисление числовых характеристик МСВ, условные числовые характеристики МСВ, их свойства;
- ковариацию. Формулу ее вычисления.

4.5 Практическое занятие 7-8 (ПЗ-7-8) Статистическое распределение. Оценки параметров распределения

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- определение основных понятий статистики
- первичную обработку статистических данных;
- точечные и интервальные оценки параметров распределения;
- метод моментов, метод доверительных интервалов.

4.6 Практическое занятие 9-10 (ПЗ-9-10) Статистические критерии, их виды

Выравнивание рядов

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- определение статистического критерия, ошибок первого и второго рода;
- классификацию статистических критериев, их мощность;
- применение критериев согласия; методы выравнивания рядов.

4.7 Практическое занятие 11-12 (ПЗ-11-12) Стохастическая зависимость межу величинами. Показатели стохастической зависимости

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- понятие стохастической зависимости величин; функцию регрессии;
- установление корреляционной зависимости между величинами; определение, вычисление, коэффициента корреляции;
- признаки корреляционной зависимости, коэффициент детерминации;
- основные термины и формулы, необходимые для построения парной линейной регрессии; формулы для вычисления коэффициента корреляции, его интерпретацию;
-выработку навыков по проверки значимости выборочных коэффициентов.

4.8 Практическое занятие 13-14 (ПЗ-13-14) Обработка опытов. Математическая обработка опытных данных

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- основные понятия теории математической обработки экспериментальных данных;
- использование алгоритмов проверки значимости параметров генеральной совокупности;
- основные принципы составления и обработки выборок.

4.9 Практическое занятие 15-16 (ПЗ-15-16) Определение характеристик случайной функции из опыта. Случайный процесс. Линейные преобразования случайных функций.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- понятие нормального процесса, его фаз, характеристик, вероятностный смысл; линейного преобразования случайной функции;
- методы определения характеристик случайной функции из опыта;
- алгоритм определения характеристик преобразованных случайных функций по характеристикам исходных случайных функций.

4.10 Практическое занятие 17 (ПЗ-17) Стохастическая зависимость межу величинами

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- определение линейных, нелинейных преобразований, оператора динамической системы;
- методы определения характеристик стационарных случайных функций, методы определения характеристик преобразованных стационарных случайных функций по характеристикам исходных стационарных случайных функций;
- алгоритмы анализа и синтеза динамических систем.

4.11 Практическое занятие 18-19 (ПЗ-19) Показатели стохастической зависимости

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- понятие эргодической стационарной функции, ее характеристик;
- у методы определения характеристик эргодической стационарной функции по одной реализации;
- алгоритм представления случайной функции в виде суммы элементарных случайных функций; задание случайной функции каноническим разложением;
- методы исследования линейных преобразований случайных функций, заданных каноническими разложениями.