ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.1.17 ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Специальность 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Специализация Информационная безопасность автоматизированных систем критически важных объектов

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		Промежуточная аттестация	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	**Тема 1** Комплексные числа и действия с ними. Комплексная плоскость.	×	×	×	2	4
2	**Тема 3** Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции. Предел и непрерывность. Отображения с помощью непрерывных функций. Степенные ряды. Элементарные ФКП.	×	×	×	6	4
3	**Тема 4** Производная ФКП. Условия Коши - Римана, аналитические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Элементы теории конформных отображений.	×	×	×	8	4
4	**Тема 6** Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку. Интегралы от ФКП по кривой. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения. Первообразная функция. Интегральная формула Коши.	×	×	×	8	4
5	**Тема 7** Нули и особые точки аналитической функции. Ряды Тейлора и Лорана.	×	×	×	8	4
6	**Тема 8** Вычеты и их приложения.	×	×	×	8	2
7	**Итого: 76**	6	×	×	**40**	**30**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Наименование вопроса. Приложения алгебры комплексных чисел в теории электрических цепей переменного тока: комплексный метод расчёта электрических цепей при установившихся режимах синусоидальных токов (2 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

- Рассмотреть метод комплексных амплитуд и примеры.

2.2 Наименование вопроса. Элементарные ФКП. (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

- Рассмотреть основные элементарные функции, их свойства, вычисление.

2.3 Наименование вопроса. Элементы теории конформных отображений. (8 ч).

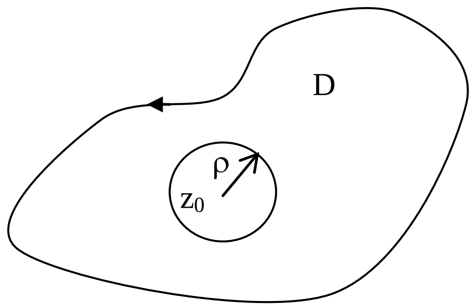
При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

- Рассмотреть конформные отображения с помощью дробно-линейной и других элементарных функций.

2.4 Наименование вопроса. Интегралы от ФКП по кривой. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения. Первообразная функция. Интегральная формула Коши (8 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Если функция *f(z)* – аналитическая в односвязной замкнутой области с кусочно-гладкой границей L,



то справедлива **формула Коши**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

где z_0 – любая точка внутри контура L, интегрирование по контуру производится в положительном направлении (против часовой стрелки). Интеграл в правой части называется **интегралом Коши.**

Интегральную формулу Коши называют основной формулой теории аналитических функций, т.к. многие результаты получены при использовании этой формулы. Формула выражает фундаментальное свойство аналитической функции: значение функции в односвязной ограниченной области выражается через её значения на контуре.

2.5 Наименование вопроса. Нули и особые точки аналитической функции. Ряды Тейлора и Лорана (2 ч)

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Функция f(z), аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, разлагается в сходящийся к ней степенной ряд по степеням (z – z_0). Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$c_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}};\qquad k=0,1,2,...$$

Степенной ряд с коэффициентами такого вида называется **рядом Тейлора.**

Рассмотрим теперь функцию f(z), аналитическую в кольце $r<|z-z_0|<R$. Эта функция может быть представлена в виде сходящегося ряда:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}};\qquad n=0,\pm1,\pm2,...$

Ряд такого вида называется **рядом Лорана**. При этом функция f(z) может быть представлена в виде суммы:

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z);\qquad f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n;\quad f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n};$$

Ряд, определяющий функцию f_1(x), называется **правильной частью** ряда Лорана, а ряд, определяющий функцию $f_2(x)$, называется **главной частью** ряда Лорана.

Известная интегральная формула для коэффициентов ряда Лорана на практике не очень удобна. Чаще всего для разложения в ряд Лорана используют известные разложения в ряд Тейлора, например в геометрический ряд.

2.6 Наименование вопроса. Понятие вычета. Вычет относительно простого полюса. Вычет относительно кратного полюса. Вычисление вычета с помощью формулы Коши. Применение теоремы Коши о вычетах к вычислению интегралов. Вычисление интегралов от вещественных функций (8 ч)

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Следует обсудить различные способы вычисления вычетов и приложения вычетов к вычислению интегралов. Пусть z_0 – изолированная особая точка функция f(z), т.е. пусть функция f(z) – аналитическая в некотором круге $|z - z_0| < R$ из которого исключена точка z_0. Тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz = \underset{z=z_0}{Выч} f(z) = \underset{z_0}{\mathrm{Re}s} f(z)$$

называется **вычетом** функции f(z) в точке z_0, где L – контур в круге $|z - z_0| < R$, ориентированный против часовой стрелки и содержащей в себе точку z_0. Вычет также обозначают иногда $\underset{z_0}{\mathrm{Re}s} f(z)$.

Если $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k; \quad 0 < |z - z_0| < R;$ есть ряд Лорана функции f в точке z_0, то $\underset{z=z_0}{Выч} f(z) = c_{-1}$.

Таким образом, если известно разложение функции в ряд Лорана, то вычет легко может быть найден в случае любой особой точки.

В частных случаях вычет может быть найден и без разложения в ряд Лорана.

Например, если функция $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет простой нуль при z = z_0 $(\psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0)$, то z = z_0 является простым полюсом функции f(z). Тогда можно показать, что вычет находится по формуле

$$\underset{z=z_0}{Выч} = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если z = z_0 – полюс порядка $m \geq 1$, то вычет может быть найден по формуле:

$$\underset{z=z_0}{Выч} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}.$$

2. Применение теоремы Коши о вычетах к вычислению интегралов.

Теорема. *Пусть функция f(z) – аналитическая на всей плоскости z, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Тогда верно равенство:*

$$\sum_{k=1}^{N} \underset{z=z_k}{Выч} f(z) + \underset{z=\infty}{Выч} f(z) = 0$$

А интеграл от функции по контуру L, содержащему внутри себя эти точки, равен

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \underset{z=z_j}{Выч} f(z)$$

3. Вычисление интегралов от вещественных функций.

Теорема. Если функция f аналитическая в замкнутой верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек, не лежащих на оси OX, и $f(z) = o(z^{-1}), z \to \infty$, то верна формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{Выч}\, f(z).$$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие № 1(ПЗ-1). Комплексные числа и действия с ними.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты

- Поле комплексных чисел, действия с комплексными числами в алгебраической форме. -
- Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
- Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма записи.
- Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.
- Формула Муавра
- Показательная форма записи комплексных чисел.
- Действия с комплексными числами в показательной форме.
- Приложения алгебры комплексных чисел в теории электрических цепей переменного тока: комплексный метод расчёта электрических цепей при установившихся режимах синусоидальных токов.

3.2 Практическое занятие №2 (ПЗ-2). Линии и области на комплексной плоскости

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты

- Непрерывную линию на комплексной плоскости можно задать *комплексно-параметрическим уравнением, комплексным уравнением.* Линии и области, заданные комплексными уравнениями и неравенствами, проще всего строить используя наглядную геометрическую интерпретацию модуля и аргумента комплексного числа.

3.3 Практическое занятие №3 (ПЗ-3). Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции. Предел и непрерывность. Отображения с помощью непрерывных функций. Степенные ряды. Элементарные ФКП.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- Определение ФКП. Однозначные и однолистные функции.

- Предел и непрерывность.

- Отображения с помощью непрерывных функций.

3.4 Практическое занятие №4 (ПЗ-4). Производная ФКП. Условия Коши-Римана, аналитические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Элементы теории конформных отображений.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- Понятие производной ФКП. Условия Коши - Римана, аналитические функции. Рассмотреть критерий дифференцируемости и достаточные условия дифференцируемости.
- Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

3.5 Практическое занятие №5 (ПЗ-5). Гармонические функции, сопряжённые гармонические функции. Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- Гармонические функции, сопряжённые гармонические функции.
- Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части.

3.6 Практическое занятие №6 (ПЗ-6). Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку. Интегралы от ФКП по кривой. Теорема Коши для односвязной области и её обобщения. Первообразная функция. Интегральная формула Коши

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку.
- Интегралы от ФКП по кривой.
- Теорема Коши для односвязной области и её обобщения. Первообразная функция.
- Интегральная формула Коши.

3.7 Практическое занятие №7 (ПЗ-7). Нули и особые точки аналитической функции. Ряды Тейлора и Лорана. Вычеты и их приложения.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- Нули и особые точки аналитической функции, классификацию особых изолированных точек аналитической функции.
- Ряды Тейлора. Понятие о ряде Лорана, области сходимости ряда Лорана.