ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.04

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Направление подготовки бакалавров: 20.03.01 Техносферная безопасность

Профиль подготовки: Безопасность жизнедеятельности в техносфере

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция № 1 (2 часа).

Тема: «Матрицы и определители»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Числовые матрицы. Виды матриц.
2. Операции над матрицами.

3. Определители n-го порядка и их свойства.
4. Разложение определителя по строке (столбцу).
5. Обратные матрицы. Алгоритмы нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.
6. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Числовые матрицы. Виды матриц.

Определение. Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

2. Наименование вопроса № 2. Операции над матрицами

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha\pm\beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Свойства операции умножения матриц.

1)Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение AB=BA выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$\mathbf{A \cdot E = E \cdot A = A}$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \;\; O \cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$$\mathbf{A(B + C) = AB + AC}$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB , то определено произведение B^TA^T и выполняется равенство:
$$(AB)^T = B^TA^T, \text{ где}$$
индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц det (AB) = detA·detB. Понятие det (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

<u>**Определение.**</u> Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:$(ABC)^T = C^TB^TA^T$, при условии, что определено произведение матриц ABC.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число α = 2. Найти $A^TB+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}; \; \alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$A^TB+\alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

1. Наименование вопроса № 3. Определители *n*-го порядка и их свойства.

<u>Определение.</u> **Определителем** квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad \text{где}$$

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Для указанной матрицы А число M_{1k} называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

<u>Определение.</u> **Дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

<u>Свойство1.</u> Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

<u>Свойство 2.</u> $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

<u>Свойство 3.</u> Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

<u>Свойство 4.</u> При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

<u>Свойство 6.</u> Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

<u>Свойство 7.</u> Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

<u>Свойство 8.</u> Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

<u>Свойство 9.</u> Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

<u>Пример:</u>. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 –

– 152 = -26.

2. Наименование вопроса № 4. Разложение определителя по строке (столбцу).

<u>Алгебраические дополнения</u>.

<u>Определение</u>. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы

<u>Теорема Лапласа</u>. *Если выбрано s строк матрицы с номерами i_1, … ,i_s, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

1. Наименование вопроса № 5. Обратные матрицы. Алгоритмы нахождения обратной матрицы.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

<u>Определение.</u> Если существуют квадратные матрицы Х и А одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где Е - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица А, то матрица Х называется **обратной** к матрице А и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \ i=(1,n),\ j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \qquad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \qquad i = j\ .$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

<u>Пример.</u> Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji}- дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы А.

<u>Пример.</u> Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$M_{11}=4$; $\quad M_{12}= 3$; $\quad M_{21}= 2$; $\quad M_{22}=1$

$x_{11}= -2$; $\quad x_{12}= 1$; $\quad x_{21}= 3/2$; $\quad x_{22}= -1/2$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

$$1)\ (A^{-1})^{-1} = A;\ \ 2)\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\ \ \ 3)\ (A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}.$$

5. Наименование вопроса № 5. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Элементарные преобразования матриц.

Базисный минор матрицы. Ранг матрицы.

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

Определение. В матрице порядка $m\times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эвивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \ \text{RgA} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема. *В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.*

Если А- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

1. 2 Лекция № 2 (2 часа).

Тема: «Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения**»**

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.
2. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
3. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

Δ = det A, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30. $x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix}$ = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60. $x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix}$ = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90. $x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};$$

Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.

2. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Метод Гаусса.

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем: 1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения 2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + ... + d_{2n}x_n = d_2 \\ .... \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + ... + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \text{ где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, ..., n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, ... , n; \qquad j = 2, 3, ... , n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

<u>Пример.</u> Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2;\ x_2 = 5;\ x_1 = 1.$$

3. Наименование вопроса № 2. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения.

<u>Решение произвольных систем линейных уравнений.</u>

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

<u>**Определение.**</u> Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

Определение. Если $b_1, b_2, …, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Теорема Кронекера – Капелли.

(условие совместности системы; (Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$RgA = RgA^*.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} + … + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0 \quad \text{RgA} = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{RgA}^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \text{RgA} = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad \text{RgA}^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

1. 3 Лекция № 3 (2 часа).

Тема: «Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов**»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами.

2. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек
3. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.
4. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами.

Определение. **Вектором** называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. **Длиной (модулем)** вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. **Линейными операциями** над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность. 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ 4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$ 5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность 7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ 8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

2. Наименование вопроса № 2. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек

Определение.

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:
- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\,\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\,\overrightarrow{e_3}.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$; $\vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}$;

$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}$.

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов $\overrightarrow{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Система координат.

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой- либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус- вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус-вектора.

Определение. **Декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.
1-я ось – ось **абсцисс**
2-я ось – ось **ординат**
3-я ось – ось **аппликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $\overrightarrow{AB}$ = ($x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$).

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пример. Даны векторы $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1) и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ { -1/4, 7/4, 5/2}.

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат $\vec{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка M(x, y, z) **делит отрезок AB в соотношении λ/μ**, считая от A, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \qquad y = (y_1 + y_2)/2; \qquad z = (z_1 + z_2)/2.$$

3. Наименование вопроса № 3. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.

Скалярное произведение векторов.

Определение. **Скалярным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
5) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};}$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

<u>Пример.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};$ $|\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \dfrac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7};$ $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

<u>Пример.</u> Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}\hat{\ }\vec{b} = \pi/3$.

$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot16 - 28\cdot4\cdot6\cdot\dfrac{1}{2} +$
$+ 12\cdot36 = 240 – 336 + 432 = 672 – 336 = 336$.

4. Наименование вопроса № 4 Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов.

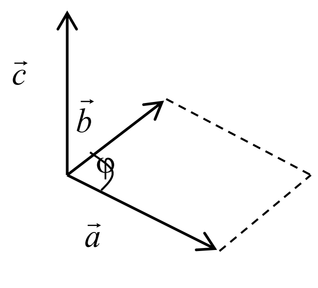
<u>Векторное произведение векторов.</u>

<u>Определение.</u> Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi \ge 0;$ $0 \le \varphi \le \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$.



<u>Свойства векторного произведения векторов:</u>

1) $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(m\vec{b}) = m(\vec{a}\times\vec{b})$;

4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>Пример.</u> Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+\vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}. \qquad S_\Delta = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

<u>Пример.</u> Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

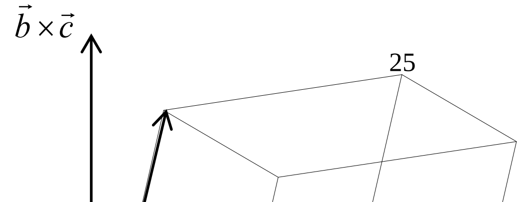
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$, т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

<u>Смешанное произведение векторов.</u>

<u>Определение.</u> Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



$\vec{a}$

$\vec{c}$

$\vec{b}$

Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$$

6)Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

$$\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2)$

$$\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов:
$$\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4)$$
$$\overrightarrow{BD}=(1;4;-3)$$
$$\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$$

Объем пирамиды
$$V=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=$$
$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.
$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$
$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}=\sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. $V=\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}$. (ед)

1. 4 Лекция № 4 (2 часа).

Тема: «Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Прямая и плоскость в пространстве. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Поверхности второго порядка»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.
2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.
3. Прямая и плоскость в пространстве.

.

1.4.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.

<u>Уравнение линии на плоскости.</u>

<u>Определение.</u> Уравнением линии называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

<u>Уравнение прямой на плоскости.</u>

<u>Определение.</u> Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ { $By + C = 0$}- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ { $Ax + C = 0$} – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0$, $A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу
- $A = C = 0$, $B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$(3, -1).

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.
Получаем: $3 – 2 + C = 0$, следовательно С = -1.
Итого: искомое уравнение: $3x – y – 1 = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если$x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки А(1, 2) и В(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1), \ y - 2 = x - 1, \ x - y + 1 = 0.$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B}=k; \quad -\frac{C}{B}=b; \quad т.е. \quad y=kx+b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой
$Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку A(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1\cdot A + (-1)\cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C/A = 0$. При $x = 1$, $y = 2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$C = 1$, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, $\quad a = -1$, $b = 1$.

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ разделить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0} \text{ – нормальное уравнение прямой.}$$

Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu\cdot C < 0$.

p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

<u>Пример.</u> Дано общее уравнение прямой 12x – 5y – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \qquad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \qquad \cos\varphi = 12/13;\ \sin\varphi = -5/13;\ p = 5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

<u>Пример.</u> Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4, a = - 4 не подходит по условию задачи. Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или x + y – 4 = 0.

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \qquad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \qquad 3x - 2y = 0.$$

2. Наименование вопроса № 2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

<u>Угол между прямыми на плоскости.</u>

<u>Определение.</u> Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$. Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

<u>Теорема.</u> *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

<u>Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.</u>

<u>Определение.</u> Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой y = kx + b представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. *Если задана точка M(x_0, y_0), то расстояние до прямой Ax + By + C =0 определяется как*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Определить угол между прямыми: y = -3x + 7; y = 2x + 1.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\quad$ $tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Пример. Показать, что прямые 3x – 5y + 7 = 0 и 10x + 6y – 3 = 0 перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника А(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4x = 6y – 6; 2x – 3y + 3 = 0;

$y = \frac{2}{3}x + 1.$

Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b. k = $-\frac{3}{2}$. Тогда y = $-\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда b = 17. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: 3x + 2y – 34 = 0.

3. Наименование вопроса № 3 Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

Аналитическая геометрия в пространстве.

Уравнение поверхности в пространстве.

Определение. Любое уравнение, связывающее координаты x, y, z любой точки поверхности является уравнением этой поверхности.

Общее уравнение плоскости.

Определение. **Плоскостью** называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению:

Ax + By + Cz + D = 0,

где А, В, С – координаты вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор **нормали** к плоскости.

Возможные следующие частные случаи:

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Для того, чтобы через три какие- либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

Таким образом,
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору $\vec{a}$.

Векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$$

Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости.

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, коллинеарные плоскости.

Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

Уравнение плоскости:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

Теорема. *Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ имеет вид:*

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

<u>Доказательство.</u> Для произвольной точки M(x, y, z), принадлежащей плоскости, составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Т.к. вектор $\overrightarrow{N}$ - вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда скалярное произведение $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{N} = 0$. Таким образом, получаем уравнение плоскости

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Теорема доказана.

<u>Уравнение плоскости в отрезках.</u>

Если в общем уравнении Ax + By + Cz + D = 0 поделить обе части на (-D)

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0,$$

заменив $-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z.

<u>Уравнение плоскости в векторной форме.</u>

$\vec{r} \cdot \vec{n} = p$, где

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки M(x, y, z),

$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, α, β и γ - углы, образованные этим вектором с осями x, y, z, p – длина этого перпендикуляра.

В координатах это уравнение имеет вид: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

<u>Расстояние от точки до плоскости.</u>

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости Ax+By+Cz+D=0 равно:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

<u>Пример.</u> Найти уравнение плоскости, зная, что точка P(4; -3; 12) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

$$\overrightarrow{OP} = (4; -3; 12); \qquad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13, \quad \overrightarrow{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

Таким образом, A = 4/13; B = -3/13; C = 12/13, воспользуемся формулой:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$ $\quad \frac{4}{13}(x - 4) - \frac{3}{13}(y + 3) + \frac{12}{13}(z - 12) = 0$

$$\frac{4}{13}x-\frac{16}{13}-\frac{3}{13}y-\frac{9}{13}+\frac{12}{13}z-\frac{144}{13}=0$$
$$\frac{4}{13}x-\frac{3}{13}y+\frac{12}{13}z-\frac{169}{13}=0$$
$$4x-3y+12z-169=0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки P(2; 0; -1) и Q(1; -1; 3) перпендикулярно плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0.

Вектор нормали к плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0 $\overrightarrow{N}=(3;2;-1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$
$$(x-2)(1-8)-y(1-12)+(z+1)(-2+3)=0$$
$$-7(x-2)+11y+(z+1)=0$$
$$-7x+14+11y+z+1=0$$
$$-7x+11y+z+15=0$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A(2, -1, 4) и B(3, 2, -1) перпендикулярно плоскости $x + y + 2z – 3 = 0$.

Искомое уравнение плоскости имеет вид: Ax + By + Cz + D = 0, вектор нормали к этой плоскости $\overrightarrow{n_1}$ (A, B, C). Вектор $\overrightarrow{AB}$ (1, 3, -5) принадлежит плоскости. Заданная нам плоскость, перпендикулярная искомой имеет вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$ (1, 1, 2). Т.к. точки А и В принадлежат обеим плоскостям, а плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=11\vec{i}-7\vec{j}-2\vec{k}.$$

Таким образом, вектор нормали $\overrightarrow{n_1}$ (11, -7, -2). Т.к. точка А принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е. 11⋅2 + 7⋅1 - 2⋅4 + D = 0;   D = -21.

Итого, получаем уравнение плоскости: 11x - 7y – 2z – 21 = 0.

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка P(4, -3, 12) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Находим координаты вектора нормали $\overrightarrow{OP}$ = (4, -3, 12). Искомое уравнение плоскости имеет вид: 4x – 3y + 12z + D = 0. Для нахождения коэффициента D подставим в уравнение координаты точки Р:

16 + 9 + 144 + D = 0 ,   D = -169.

Итого, получаем искомое уравнение: 4x – 3y + 12z – 169 = 0

Пример. Даны координаты вершин пирамиды A_1(1; 0; 3), A_2(2; -1; 3), A_3(2; 1; 1), A_4(1; 2; 5).

1) Найти длину ребра A_1A_2.

$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1; -1; 0\}$; $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}(ed)$.

2) Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

$\overrightarrow{A_1A_4} = \{1-1; 2-0; 5-3\} = \{0; 2; 2\}$

$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = 2\sqrt{2}(ed)$

$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1; -1; 0)(0; 2; 2) = -2$

$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha = 4\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \qquad \alpha = 120^0$$

3) Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Сначала найдем вектор нормали к грани $A_1A_2A_3$ $\vec{N}$ как векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$\overrightarrow{A_1A_3}$ = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};\ \vec{N} = (-2; -2; -2),\ \left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$$

Найдем угол между вектором нормали и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}\cos\beta$

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}$ =-4 – 4 = -8. Искомый угол γ между вектором и плоскостью будет равен $\gamma = 90^0 - \beta$.

$$\sin\gamma = \cos\beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \qquad \gamma = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{N}\right| = \sqrt{3}(ed^2)$$

5) Найти объем пирамиды.

$$V = \frac{1}{6}\left|\ ((\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4})\ \right| = \left|\ \frac{1}{6}\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\ \right| = \frac{4}{3}\ (\text{ед}^3).$$

6) Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) =$$

$$= 2x - 2 + 2y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2y + 2z - 8 = 0, \text{ т.е. } \quad x + y + z - 4 = 0.$$

Уравнение линии в пространстве.

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

Кроме того, линия в пространстве может быть определена и иначе. Ее можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким- либо уравнением. Пусть $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии L.

Тогда пару уравнений

$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}$ назовем **уравнением линии в пространстве**.

Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$ (m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором** прямой.На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$

Обозначим радиус- векторы этих точек как $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}t$, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}t.}$

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – **параметрическое уравнение прямой**.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

<u>Определение.</u> Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора $\vec{S}$, которые могут быть вычислены по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Отсюда получим: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$. Числа m, n, p называются **угловыми коэффициентами** прямой. Т.к. $\vec{S}$ - ненулевой вектор, то m, n и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел могут равняться нулю. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Кроме того, для точки M_1 можно записать:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.}$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

Общие уравнения прямой в пространстве.

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Как было рассмотрено выше, плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$$\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0, \text{ где}$$

$\vec{N}$ - нормаль плоскости; $\vec{r}$ - радиус- вектор произвольной точки плоскости.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $\overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты: $\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2); $\vec{r}$ (x, y, z).

Тогда общие уравнения прямой в векторной форме:

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}}$$

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m, n, p.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

Пример. Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату x = 0, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ т.е. } A(0, 2, 1).$$

Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

<u>Пример.</u> Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем z = 0. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

$$2x – 9x – 7 = 0;$$

$$x = -1; \ y = 3;$$

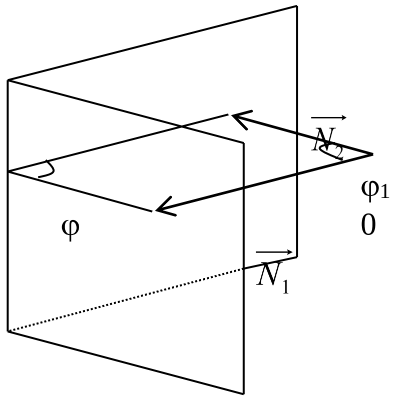
Получаем: A(-1; 3; 0).

Направляющий вектор прямой: $\vec{S} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$.

Итого: $\frac{x+1}{-35} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z}{-7}$; $\qquad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$;

2. Наименование вопроса № 2. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

<u>Угол между плоскостями.</u>



Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормалями к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$, т.е. $\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

Определим угол φ_1. Известно, что плоскости могут быть заданы соотношениями:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}, \text{ где}$$

$\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2). Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \,||\, \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1: \quad \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t, \ l_2: \quad \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1); \quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2); \quad \overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \quad \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

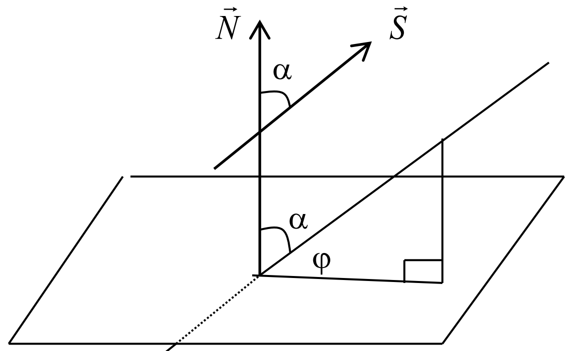
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними раве нулю.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Угол между прямой и плоскостью.

<u>Определение.</u> Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Пусть плоскость задана уравнением $\vec{N}\cdot\vec{r}+D=0$, а прямая - $\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{S}t$. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол α = 90^0 - φ, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|},\quad \sin\varphi=\pm\cos\alpha=\pm\frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}$$

В координатной форме: $$\boxed{\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N}\perp\vec{S},\quad \vec{N}\cdot\vec{S}=0,\quad \sin\varphi=0,\qquad Am+Bn+Cp=0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{N}\times\vec{S}=0;\qquad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

<u>Определение.</u> В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

<u>Пример.</u> Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$(3, -1).

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: 3х – у + С = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.
Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1.
Итого: искомое уравнение: 3х – у – 1 = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

1. Наименование вопроса № 3. Кривые 2-го порядка: эллипс, гипербола, парабола.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
4) $a^2x^2 – c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
6) $y^2 – a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
9) $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность.

В окружности $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ центр имеет координаты $(a; b)$.

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 – 8x + 5y – 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 – 4x + 2{,}5y – 2 = 0$$
$$x^2 – 4x + 4 –4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0$$
$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 – 25/16 – 6 = 0$$
$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

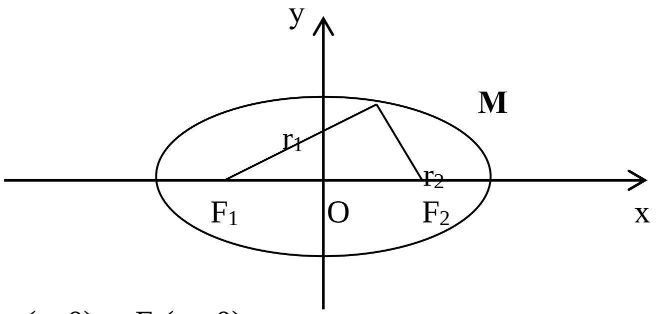
Отсюда находим $O(2; -5/4)$; $R = 11/4$.

Эллипс.

Определение. Эллипсом называется кривая, заданная уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.}$$

<u>Определение.</u> **Фокусами** называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$
c – половина расстояния между фокусами;
a – большая полуось;
b – малая полуось.

<u>Теорема.</u> *Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

<u>Доказательство:</u> В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с вертикальной осью, $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2+c^2}$ (по теореме Пифагора). В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с горизонтальной осью, $r_1 + r_2 = a - c + a + c$. Т.к. по определению сумма $r_1 + r_2$ – постоянная величина, то , приравнивая, получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

<u>Определение.</u> Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$$e = c/a.$$

Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

<u>Определение.</u> Величина $k = b/a$ называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина $1 - k = (a - b)/a$ называется **сжатием** эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $k^2 = 1 - e^2$.

Если $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$, то точка находится вне эллипса.

<u>Теорема.</u> *Для произвольной точки M(x, y), принадлежащей эллипсу верны соотношения*:

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex.$$

<u>Доказательство.</u> Выше было показано, что $r_1 + r_2 = 2a$. Кроме того, из геометрических соображений можно записать:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y} = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$$

Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$. <u>Теорема доказана.</u>

С эллипсом связаны две прямые, называемые **директрисами**. Их уравнения:

$$x = a/e; \quad x = -a/e.$$

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету е.*

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

1) Координаты нижней вершины: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \qquad 4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

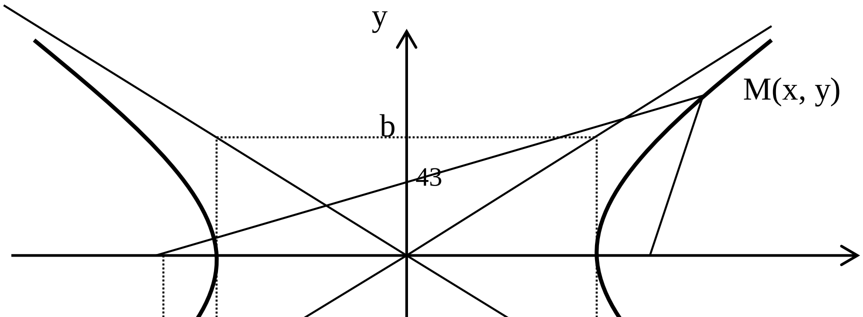
<u>Пример.</u> Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Расстояние между фокусами:

$2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$, по условию $2a = 2$, следовательно $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$. Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

<u>Гипербола.</u>

<u>Определение.</u> **Гиперболой** называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



r1

r2

x

F1 a F2

c

По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.
Выберем на гиперболе произвольную точку M(x, y). Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$

$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$, $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a назыв. действит. осью гиперболы. Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \dfrac{b}{a}x.$

Определение. Отношение $e = \dfrac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

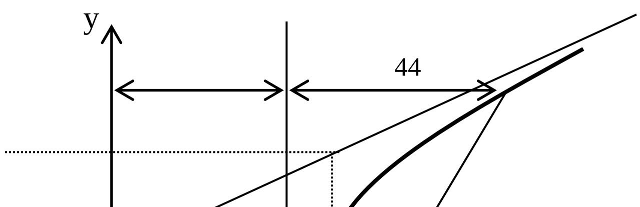
$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Если a = b, e = $\sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней).**

Определение. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения: $x = \pm \dfrac{a}{e}$.

Теорема. *Если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого- либо фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d – величина постоянная, равная эксцентриситету.*

Доказательство. Изобразим схематично гиперболу.



a/e d

M(x, y)

r_1

0 a F_1 x

$OF_1 = c$

Из очевидных геометрических соотношений можно записать: a/e + d = x, следовательно d = x – a/e. $(x – c)^2 + y^2 = r^2$.

Из канонического уравнения: $y^2 = \frac{x^2b^2}{a^2} - b^2$, с учетом $b^2 = c^2 – a^2$:

$$r^2 = x^2 - 2xc + c^2 + \frac{x^2b^2}{a^2} - b^2 =$$

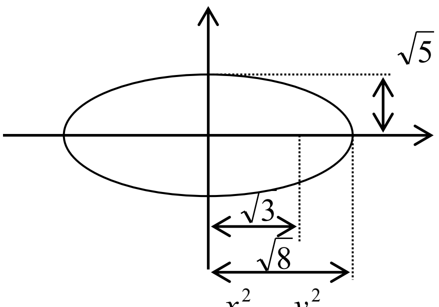
$$= x^2 - 2xc + c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$$

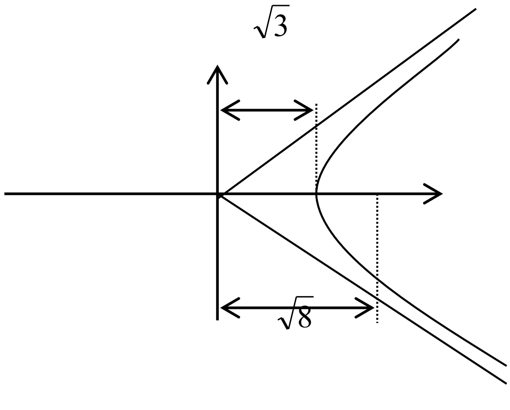
$r = \frac{c}{a}x - a$. Тогда т.к. c/a = e, то r = ex – a. Итого: $\frac{r}{d} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = e$.

Для левой ветви гиперболы доказательство аналогично. Теорема доказана.

Пример. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 – b^2$. Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.



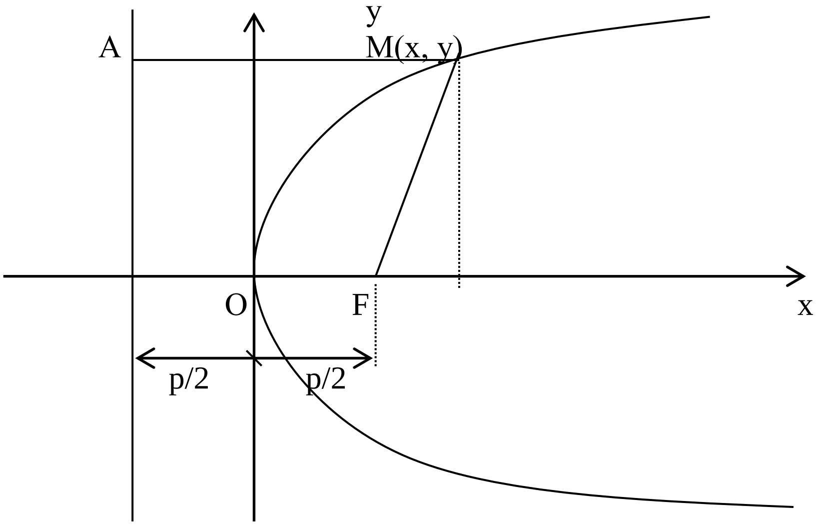


Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Пример. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 – 9 = 16$. Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, e = c/a = 2; c = 2a; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 – 4 = 12$. Итого: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола.

Определение. **Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы. Из геометрических соотношений: AM = MF; AM = x + p/2; $MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2$, $(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$, $x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4$

$y^2 = 2px$ - каноническое уравнение параболы. Уравнение директрисы: x = -p/2.

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4. r = x + p/2 = 4; следовательно: x = 2; $y^2 = 16$; y = ±4. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

2. Наименование вопроса № 2. Полярные уравнения кривых 2-го порядка.

1. Кривые в явной, неявной, параметрической форме, в полярных координатах.
2. Полярные уравнения кривых 2-го порядка.

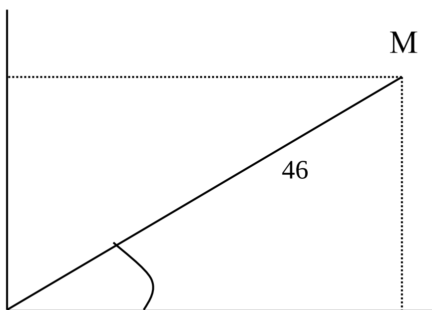
Системы координат.

Любая точка на плоскости может быть однозначно определена при помощи различных координатных систем, выбор которых определяется различными факторами. Способ задания начальных условий для решения какой – либо конкретной технической задачи может определить выбор той или иной системы координат. Для удобства проведения вычислений часто предпочтительнее использовать системы координат, отличные от декартовой прямоугольной системы. Кроме того, наглядность представления окончательного ответа зачастую тоже сильно зависит от выбора системы координат.

Ниже рассмотрим некоторые наиболее часто используемые системы координат.

Полярная система координат.

Определение. Точка O называется **полюсом**, а луч *l* – **полярной осью.** Суть задания какой- либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояние точки от полюса и угол между полярной осью и радиус–вектором этой точки. Этот угол φ называется **полярным углом**.



r

r = $|\overrightarrow{OM}|$

φ

0 l

Можно установить связь между полярной системой координат и декартовой прямоугольной системой, если поместить начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ox.

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Пример. Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \dfrac{4}{3-\cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат:

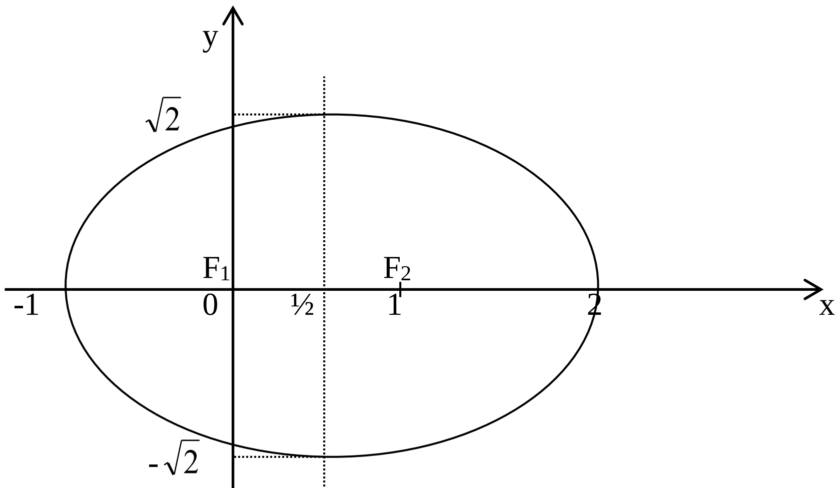
$r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\quad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{4}{3-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$,

$3\sqrt{x^2+y^2} - x = 4$, $3\sqrt{x^2+y^2} = x+4$, $9x^2+9y^2 = 16+8x+x^2$, $8x^2-8x+9y^2-16=0$

$8(x^2-x+1/4)-8\cdot 1/4+9y^2-16=0$, $8(x-1/2)^2-2+9y^2-16=0$

$$8(x-1/2)^2+9y^2=18,\quad \frac{(x-1/2)^2}{9/4}+\frac{y^2}{2}=1$$

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ox на 1/2 вправо, большая полуось a равна 3/2, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, половина расстояния между фокусами равно c = $\sqrt{a^2-b^2}$ = 1/2. Эксцентриситет равен e = c/a = 1/3. Фокусы $F_1(0;0)$ и $F_2(1;0)$.



Пример. Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4-\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}},\ 4\sqrt{x^2+y^2}-5x=9,\ 4\sqrt{x^2+y^2}=5x+9$$

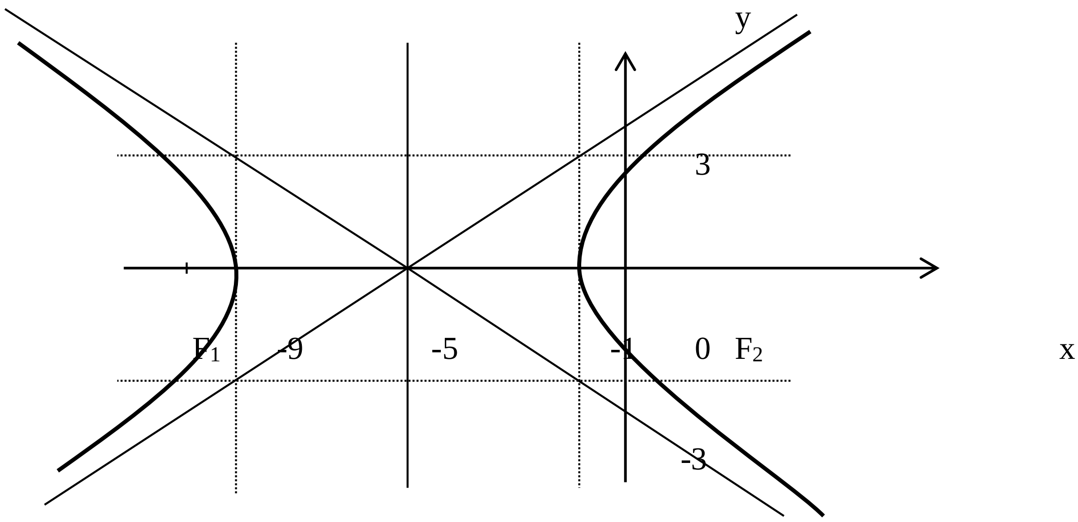
$$16x^2+16y^2=81+90x+25x^2,\ 9x^2+90x-16y^2+81=0$$

$$9(x^2+10x+25-25)-16y^2+81=0,\ 9(x+5)^2-225-16y^2+81=0$$

$$9(x+5)^2-16y^2=144,\ \frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы. Из уравнения видно, что гипербола сдвинута вдоль оси Ох на 5 влево, большая полуось а равна 4, меньшая полуось b равна 3, откуда получаем $c^2 = a^2 + b^2$; c = 5; e = c/a = 5/4.

Фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(0; 0)$. Построим график этой гиперболы.



3. Наименование вопроса № 3. Поверхности 2-го порядка.

1.1. Понятие поверхности 2-го порядка. Классы поверхностей.

1.2. Канонический вид поверхностей 2-го порядка.

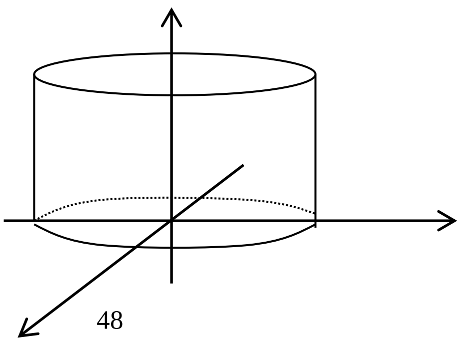
__**Определение.**__ Поверхности второго порядка – это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

<u>Цилиндрические поверхности.</u>

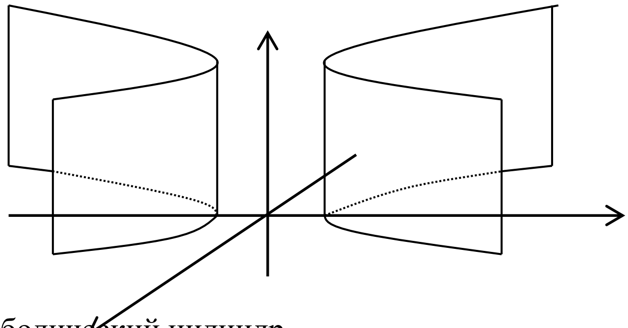
__**Определение.**__ Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой- либо фиксированной прямой.

Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z, т.е. направляющие параллельны оси Oz. Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

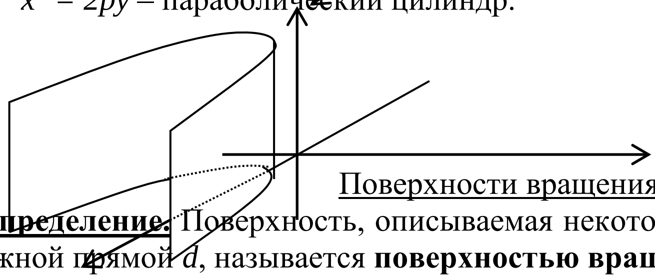
1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллиптический цилиндр.



2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр.



2) $x^2 = 2py$ – параболический цилиндр.



Поверхности вращения.

Определение. Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой *d*, называется **поверхностью вращения** с осью вращения *d*.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz. Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy, $F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - **эллипсоид вращения**

2) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - **однополостный гиперболоид вращения**

3) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - **двуполостный гиперболоид вращения**

4) $\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$ - **параболоид вращения**

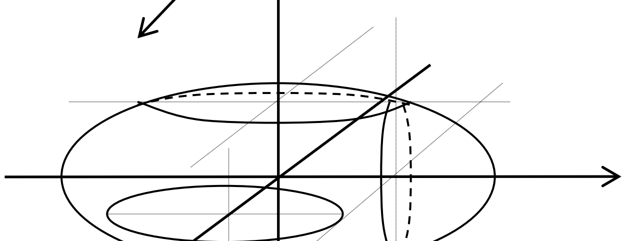
Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси Ox или Oy.

Однако, перечисленные выше поверхности являются лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

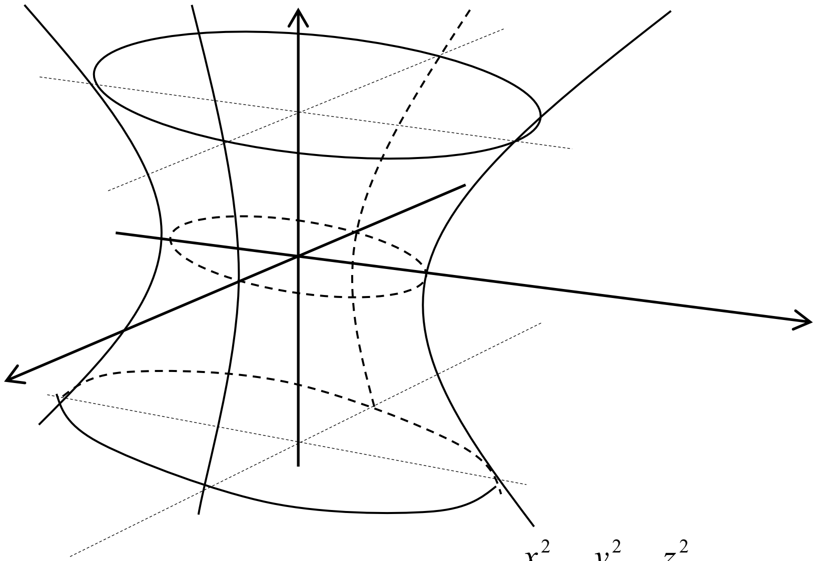
Сфера: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

Трехосный эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

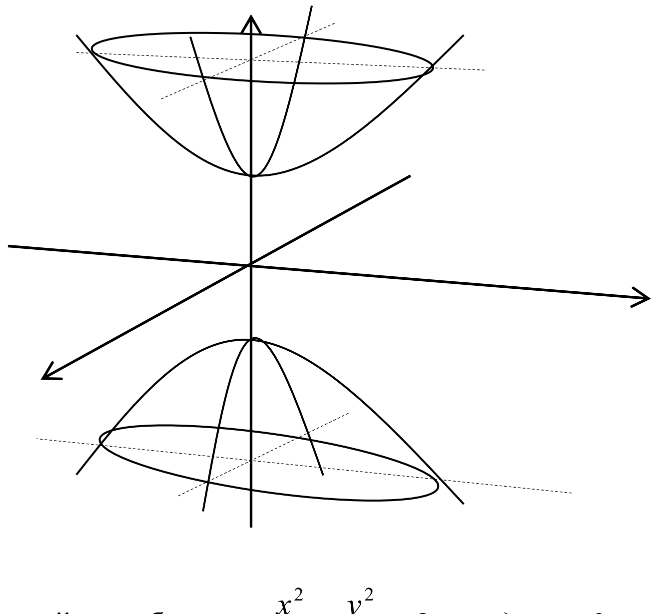
В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями.



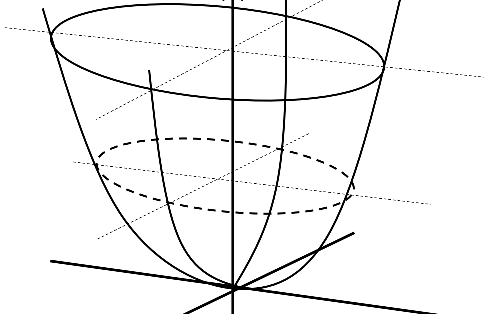
Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



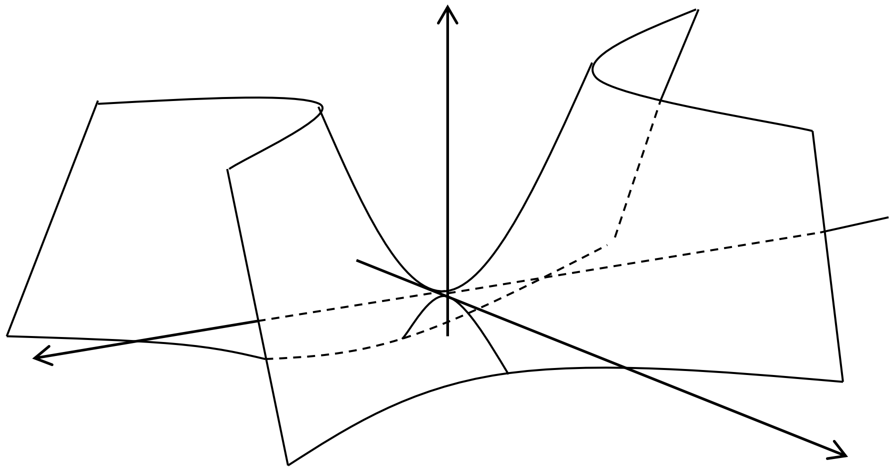
Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



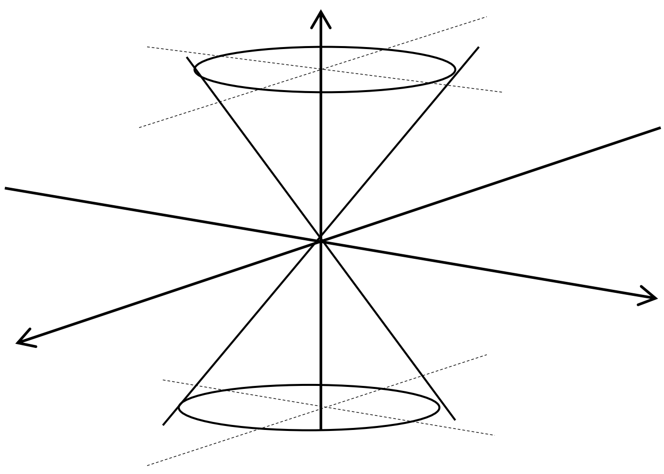
Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad где\ p>0, q>0$



Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$



Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



Цилиндрическая и сферическая системы координат.

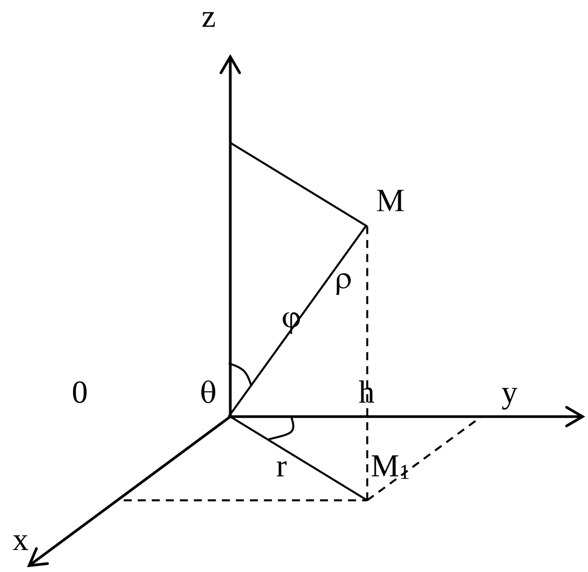
Как и на плоскости, в пространстве положение любой точки может быть определено тремя координатами в различных системах координат, отличных от декартовой прямоугольной системы. Цилиндрическая и сферическая системы координат являются обобщением для пространства полярной системы координат, которая была подробно рассмотрена выше.

Введем в пространстве точку О и луч l, выходящий из точки О, а также вектор $\vec{n} \perp l$, $|\vec{n}| = 1$. Через точку О можно провести единственную плоскость, перпендикулярную вектору нормали $\vec{n}$.

Для введения соответствия между цилиндрической, сферической и декартовой прямоугольной системами координат точку О совмещяют с началом декартовой прямоугольной системы координат, луч *l* – с положительным направлением оси *x*, вектор нормали – с осью *z*.

Цилиндрическая и сферическая системы координат используются в тех случаях, когда уравнение кривой или поверхности в декартовой прямоугольной системе координат выглядят достаточно сложно, и операции с таким уравнением представляются трудоемкими.

Представление уравнений в цилиндрической и сферической системе позволяет значительно упростить вычисления, что будет показано далее



$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho; \quad OM_1 = r; \quad MM_1 = h;$$

Если из точки М опустить перпендикуляр MM_1 на плоскость, то точка M_1 будет иметь на плоскости полярные координаты (r, θ).

<u>Определение.</u> Цилиндрическими координатами точки М называются числа (r, θ, h), которые определяют положение точки М в пространстве.

<u>Определение.</u> Сферическими координатами точки М называются числа (r,φ,θ), где φ - угол между ρ и нормалью.

Связь цилиндрической и декартовой прямоугольнойсистемами координат.

Аналогично полярной системе координат на плоскости можно записать соотношения, связывающие между собой различные системы координат в пространстве. Для цилиндрической и декартовой прямоугольной систем эти соотношения имеют вид:

$$h = z; \qquad x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Связь сферической системы координат с декартовой прямоугольной.

В случае сферической системы координат соотношения имеют вид:

$$z = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi; \quad x = \rho\sin\varphi\cos\theta; \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\theta = arctg\frac{y}{x}; \quad \varphi = arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}; \quad \cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

1. 5 Лекция № 5 (2 часа).

Тема: «Предел и непрерывность функции действительной переменной. Производная функции. Правила дифференцирования. Дифференциал. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя. Производные и дифференциалы высших порядков»

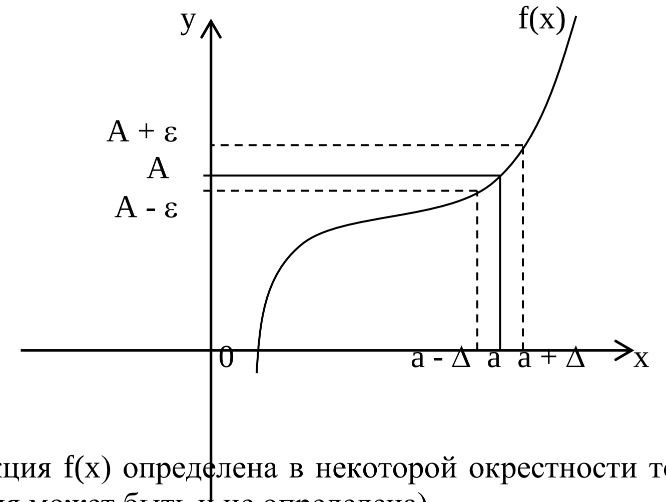
1.12.1 Вопросы лекции:

1. Предел и непрерывность функции действительной переменной.
2. Производная функции. Правила дифференцирования. Дифференциал.
3. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя.
4. Производные и дифференциалы высших порядков»

1.12.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Предел и непрерывность функции действительной переменной.

<u>Предел функции в точке.</u>



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

<u>**Определение.**</u> Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

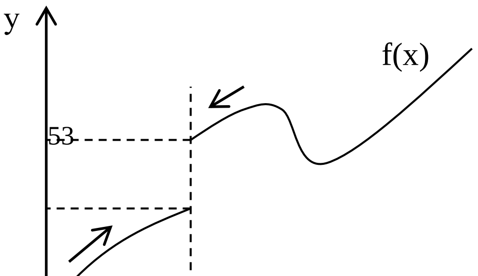
верно неравенство $$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

<u>**Определение.**</u> Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



A$_2$

A$_1$

0 a x

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A$_1$ и A$_2$ называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

<u>Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.</u>

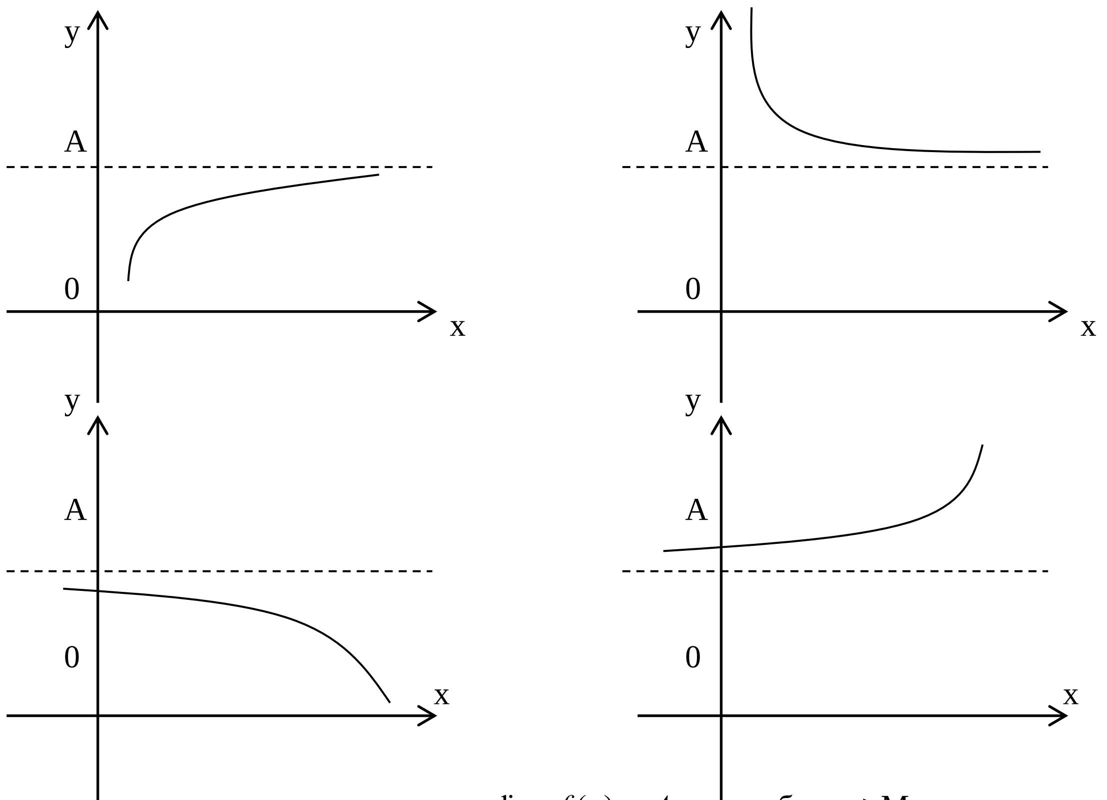
<u>**Определение.**</u> Число A называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

<u>Основные теоремы о пределах.</u>

<u>**Теорема 1.**</u> $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Непрерывность функции в точке.

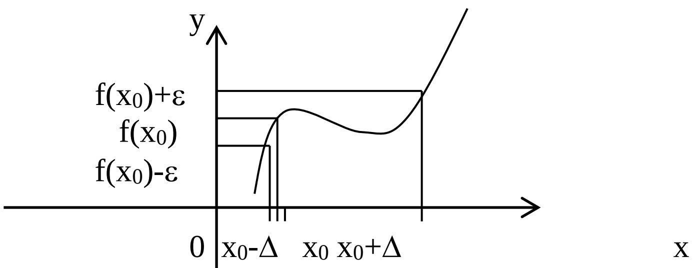
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

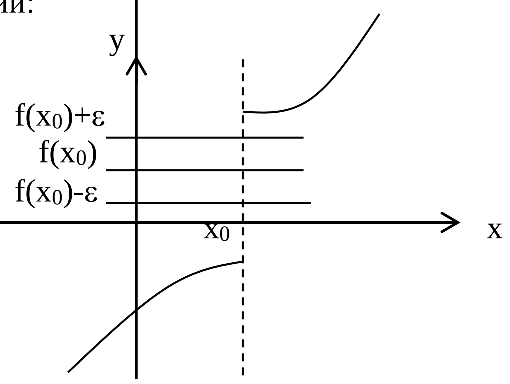
Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

<u>Свойства непрерывных функций.</u>

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:
Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

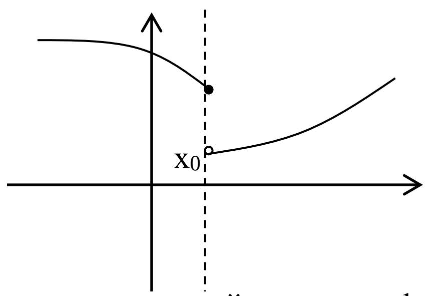
Непрерывность элементарных функций.

<u>Точки разрыва и их классификация.</u>

Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней.

Если односторонний предел $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

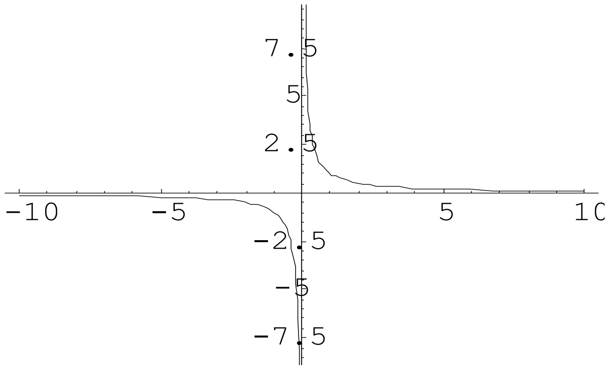
<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x)=\begin{cases}1, & x - \text{рациональное число}\\ 0, & x - \text{иррациональное число}\end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = $\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

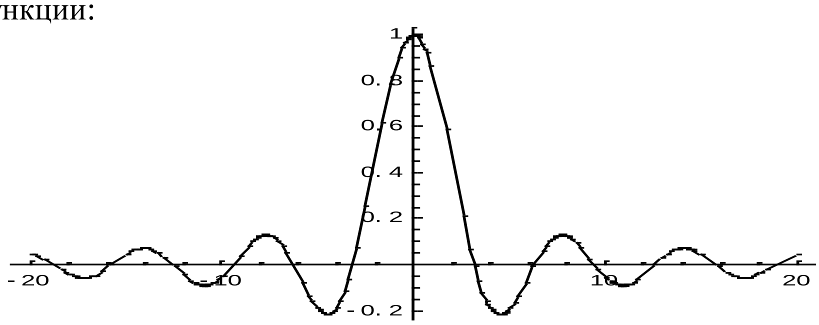


<u>Пример.</u> f(x) = $\dfrac{\sin x}{x}$

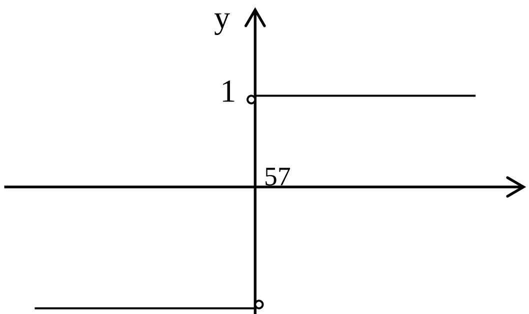
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0\\ 1, & при \quad x = 0\end{cases}$$

График этой функции:



<u>Пример.</u> f(x) = $\operatorname{sgn} x = \begin{cases}1, & при \quad x > 0\\ 0, & при \quad x > 0\\ -1, & при \quad x < 0\end{cases}$



0 x

-1

Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

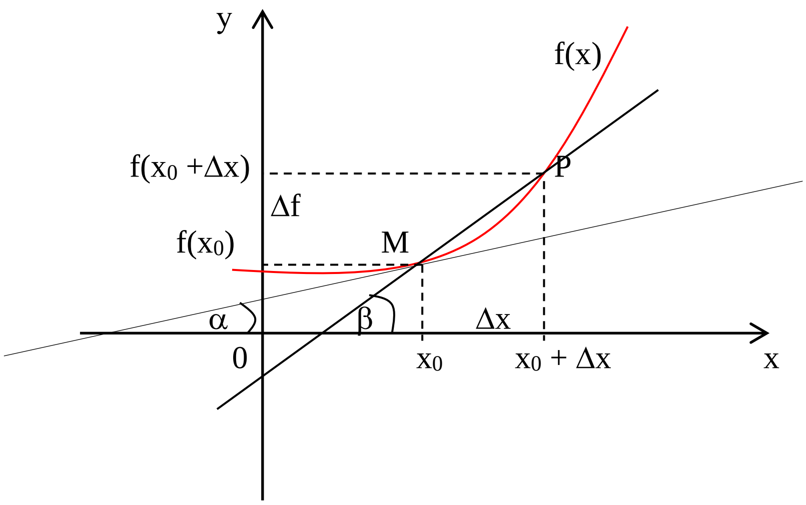
Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

1. Наименование вопроса № 1. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке $(x_0, f(x_0))$.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

<u>Односторонние производные функции в точке.</u>

<u>Определение.</u> Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке x = x_0 называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad\qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке x = x_0, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

<u>Например:</u> f(x) = $|x|$- имеет в точке x = 0 и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

<u>Теорема.</u> (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

2. Наименование вопроса № 2. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала.

<u>Основные правила дифференцирования.</u>

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) *(г ±м)′= г′±м′* 2) *(г·м)′= г·м′+ г′·м* 3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ б если $м \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

<u>Производные основных элементарных функций.</u>

1)C′ = 0; 2)$(x^m)' = mx^{m-1}$; 3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ 5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ 7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 8) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$ 9) $(\sin x)' = \cos x$ 10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ 13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ 16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

<u>Производная сложной функции.</u>

<u>Теорема.</u> *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f. Тогда* $y' = f'(u) \cdot u'$

<u>Логарифмическое дифференцирование.</u>

$\left(\ln|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Отношение $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле $f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных и показательно-степенных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x, f(x)>0. Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$$

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Дифференциал функции.

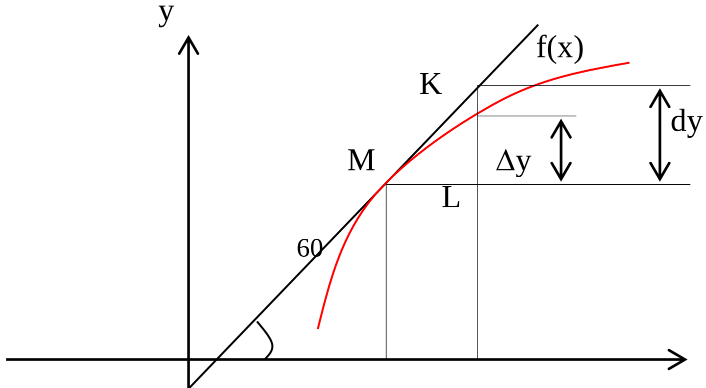
Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$. Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции. Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$. Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



α

x x + Δx x

Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если *u = f(x)* и *v = g(x)*- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$ 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала.

1. Наименование вопроса № 1. Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, их применение.

Теорема Ролля.(Ролль (1652-1719)- французский математик)

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю: f′(ε) = 0.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна оси Ox. Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

1) Если функция f(x) на отрезке [a, b] удовлетворяет теореме Ролля, причем f(a) = f(b) = 0, то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что f′(ε) = 0. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция f(x) имеет производную (n-1)-го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная (n – 1) – го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа. (Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик)

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε :a < ε < b, такая, что $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon)$.

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ. Если функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой y = f(x) касательная параллельна секущей, соединяющей точки А и В. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

<u>Определение.</u> Выражение $f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)(b-a)$ называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений.**

<u>Теорема Коши.</u> (Коши (1789-1857)- французский математик)

Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и g′(x) ≠ 0 на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при g(x) = x) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций.

2. Наименование вопроса № 2. Правило Лопиталя. Производные и дифференциалы высших порядков.

<u>Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя. </u>(Лопиталь (1661-1704) – французскийматематик)

К неопределенностям относятся $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty\cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty-\infty$

<u>Теорема (правило Лопиталя).</u> *Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1. 6 Лекция № 6 (2 часа).

Тема: «Формула Тейлора Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие, достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика**»**

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Формула Тейлора Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений
2. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

3. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика

1.15.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений.

Формула Тейлора. Тейлор (1685-1731) – английский математик

Теорема Тейлора. 1) *Пусть функция f(x) имеет в точке x = a и некоторой ее окрестности производные порядка до (n+1) включительно.{ Т.е. и все предыдущие до порядка n функции и их производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности}.*

2) Пусть x- любое значение из этой окрестности, но $x \neq a$.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε, что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- это выражение называется **формулой Тейлора**, а выражение:

$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$ называется **остаточным членом в форме Лагранжа**.

2. Наименование вопроса № 2. Условия монотонности функции.

Признак монотонности функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$ на (a,b). Тогда функция $f(x)$ является строго возрастающей (строго убывающей) на интервале (a,b).

2. Наименование вопроса № 2 Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия.

Экстремумы непрерывных функций

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такая $\delta -$окрестность этой точки, что для всех $x \neq x_0$ из $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)(f(x_0) < f(x))$.

Точки локального минимума и локального максимума называются точками локального экстремума.

Необходимые условия экстремума. Пусть функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и x_0- точка экстремума. Тогда либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Точки (из области определения функции), в которых производная равна нулю или не существует, называются **критическими точками** функции. Точки экстремума функции следует искать среди критических точек. Точки, в которых производная равна нулю называются **стационарными**.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в критической точке x_0 и дифференцируема в ее окрестности. Если $f'(x) > 0$ при

$x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$ (при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «-«), то в точке x_0 функция имеет максимум. Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то в точке x_0 функция имеет минимум. Если же при переходе через точку x_0 производная не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть непрерывная функция в критической точке x_0 дважды дифференцируема. Если при этом $f''(x_0) < 0,$ то в точке x_0 функция имеет максимум, $f''(x_0) > 0,$ то в точке x_0 функция имеет минимум, если же $f''(x_0) = 0,$ то вопрос о наличии экстремума в точке x_0 остается открытым. В этом случае можно применит достаточное условие экстремума с участием высших производных.

2. Наименование вопроса № 2 Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

3. Наименование вопроса № 3. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Общее исследование и построение графика функции

Общее исследование функции заключается в определении основных свойств функции, которые уточняются методами дифференциального исчисления.

Общее исследование функций и построение их графиков удобно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции, исследовать функцию на **непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов, определить четность, нечетность, периодичность функции, точки пересечения с осями координат.**

2.Найти нули функции и определить интервалы знакопостоянства.

3. Найти асимптоты графика функции и выяснить взаимное расположение графика функции с асимптотами.

4. Исследовать функцию на экстремум, и монотонность.

5. Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, перегиб.

6. Используя результаты исследования, строится график функции.

При необходимости уточнить отдельные участки кривой следует дополнительно вычислить координаты нескольких точек.

7*. Выполнить процедуру исследования и построить график с компьютерной математикой, например с MathCAD.

Указанную схему исследования можно считать примерной. В частности эскиз графика можно изобразить после нахождения асимптот.

1. 7 Лекция № 7 (2 часа).

Тема: «Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции.
2. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
3. Формула Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

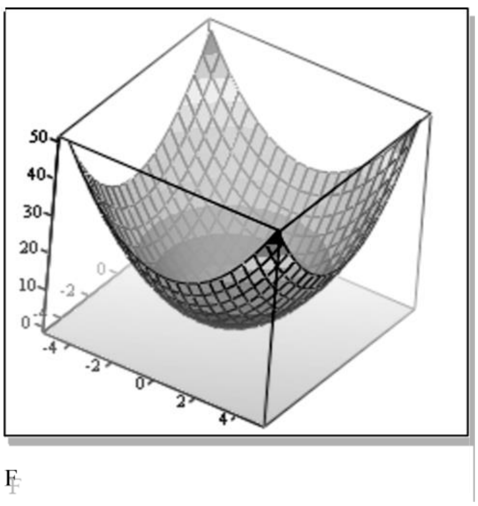
1. Наименование вопроса № 1. Функции нескольких переменных.

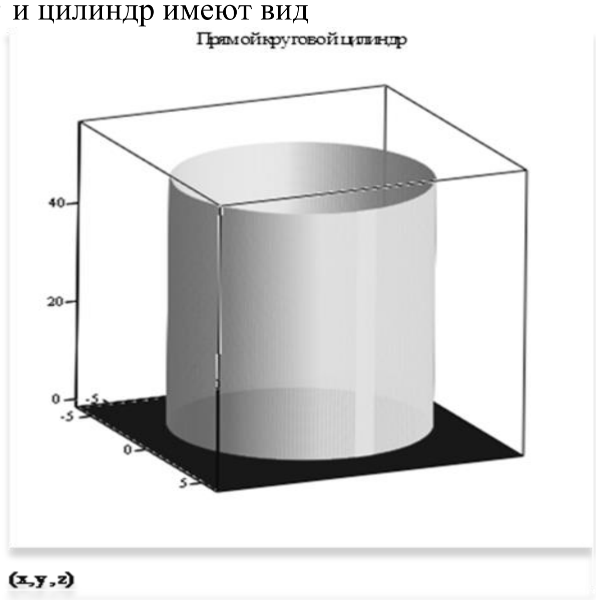
Определение: Переменная z называется функцией переменных x и y,если каждой паре значений x и y из некоторой области их изменения поставлено в соответствие определенное значение z. Функциональная зависимость *z* от x и *y* записывается в виде:

$$z = f(x, y).$$

Аналогичным образом определяются функции трех и более переменных. В этой работе используются только функции двух переменных, поэтому все определения и задачи будут проиллюстрированы только такими функциями.

Функции двух переменных допускают геометрическую интерпретацию. Графиком функции z=f(x, y), определенной в области G, называется множество точек (x, y, z) пространства, у которых (x, y) принадлежат G и z=f(x, y). В наиболее простых случаях такой график представляет некоторую поверхность. Поверхности удобно изображать с MathCAD. Например, параболоид $z=x^2+y^2$ и цилиндр имеют вид





2. Наименование вопроса № 2. Предел и непрерывность функции. Функция z=f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$. Например, функция $z = \dfrac{xy-2}{x^2+y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением точки O(0,0), где она имеет разрыв.

Функция, непрерывная во всех точках области G, называется непрерывной данной области.

1. Наименование вопроса № 2. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала.

Частной производной функции нескольких переменных по какой-либо переменной в рассматриваемой точке, называется обычная производная по этой переменной, считая другие переменные фиксированными (постоянными). Так, для функции двух переменных z=f(x, y) в точке $A_0(x_0, y_0)$ частные производные определяются следующим образом:

$$Z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$Z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta Z_x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

если эти пределы существуют.

Из определения частных производных следует, что правила их вычисления остаются такими же, как и для функций одной переменной, только необходимо помнить по какой переменной ищется производная.

Пример 1. а) $z = 2x + y^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 2; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$

б) $z = arctg\frac{x}{y}, z_x = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2}(\frac{x}{y})'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}, z_y = -\frac{x}{x^2 + y^2}$.

Дифференциал функции z=f(x, y), найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остается постоянной, называется **частным дифференциалом.** По определению

$d_x Z_x = f'_x(x, y)dx; \ dZ_y = f'_y(x, y)dx, \ \text{где } dx = \Delta x, \ dy = \Delta y$ – произвольные приращения (дифференциалы) независимых переменных.

Полным приращением функции z=f(x, y) называется разность

$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x, y).$

Главная часть полного приращения функции z=f(x, y) линейно зависящая от приращения независимых переменных Δx и Δy, называется полным дифференциалом функции z и обозначается dz .

Если функция имеет непрерывные частные производные в точке (x, y), то полный дифференциал существует и равен $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

2. Наименование вопроса № 2. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.

1. Наименование вопроса № 3. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Уравнение z=f(x,y) определяет значение z в каждой точке области G, которую называют также полем скаляра z.

Вдоль каждой из линий f(x,y) = z_1, f(x,y) = z_2 и т.д., где z_1 и z_2 постоянные, скаляр z остается постоянным. Эти линии называются изолиниями или линиями уровня.

Производная $\frac{\partial z}{\partial \bar{a}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$ называется производной от функции z=f(x,y) в направлении $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j}$, здесь углы α и β – это углы, образованные вектором $\bar{a}$ с осями OX и OY соответственно, причём $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$.

Градиентом скалярного поля z=f(x,y) называется вектор $gradz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \bar{j}$. Другое обозначение: $gradz = \nabla z$ (оператор «Набла»).

Градиент – есть вектор, определяющий направление наибыстрейшего возрастания скаляра z, и длина этого вектора равна скорости такого возрастания.

3. Наименование вопроса № 3. Формула Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

Точка $M_0(x_0;y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции z=f(x,y), если для всех точек M(x;y), отличных от $M_0(x_0;y_0)$ и принадлежащих достаточно малой её окрестности, выполняется неравенство $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$, $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$. Максимум или минимум функции называется экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум функции, называется точкой экстремума функции.

Необходимые условия экстремума: если точка $M_o(x_0,y_0)$ является точкой экстремума функции f(x,y), то $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$,или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки, для которых эти условия выполнены, называются критическими.

Точки экстремума всегда являются критическими, но критическая точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия экстремума.

Введём обозначения $A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$; $B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$; $C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$; $\Delta = AC - B^2$.

Достаточные условия экстремума: пусть функция z=f(x,y) имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0;y_0)$. Тогда

а) если $\Delta>0$, то точка $M_0(x_0;y_0)$ является точкой экстремума для данной функции причем точка M_o будет точкой максимума при A<0 (C<0) и точкой минимума при A>0 (C>0);

б) если $\Delta<0$, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремума нет.

в) если $\Delta=0$, то этот признак экстремума не применим. В этом случае необходимо дополнительное исследование.

Дифференцируемая функция в ограниченной замкнутой области G достигает своего наибольшего (наименьшего) значения либо на границе этой области, либо в стационарной точке, лежащей внутри области G.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

1. 8 Лекция № 8 (часа).

Тема: «Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Комплексные числа. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Табличные интегралы.
3. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.
5. Определенный интеграл, его свойства.

6. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства

Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$ 2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$ 3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Табличные интегралы.

	Интеграл	Значение		Интеграл	Значение
1	$\int tgxdx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgxdx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos xdx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$tgx + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-ctgx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$

2. Наименование вопроса № 2. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

<u>Методы интегрирования.</u> Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

3. Наименование вопроса № 3. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

Интегрирование элементарных дробей.

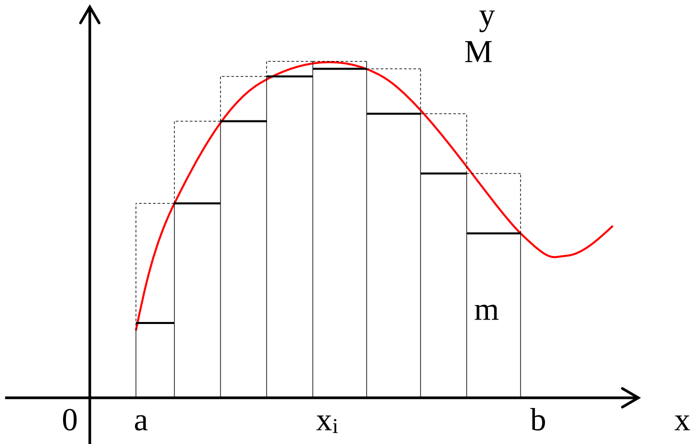
Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$ m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и $b^2 - 4ac < 0$.

Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

4. Наименование вопроса № 4. Определенный интеграл, его свойства.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_0, x_1] \to m_1, M_1; \quad [x_1, x_2] \to m_2, M_2; \quad \ldots \quad [x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n.$$

Составим суммы: $\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**. Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad \underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной. Обозначим *max*Δx_i – наибольший отрезок разбиения, а *min*Δx_i – наименьший. Если *max*$\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности. Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что *max*$\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>Определение:</u> Если для функции f(x) существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b]. Также верны утверждения: $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$ $\quad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

<u>Теорема:</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

6. Наименование вопроса № 6. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x).$

<u>Теорема:</u> Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

<u>Теорема:</u> (Теорема Ньютона – Лейбница). Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница. Применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов. Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

1. 9 Лекция № 9 (2 часа).

Тема: «Геометрические и механические приложения определенного интеграла. Приближённые вычисления интегралов. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие *n*-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.**»**

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

2. Приближённые вычисления интегралов.

3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

4. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие *n*-кратного интеграла

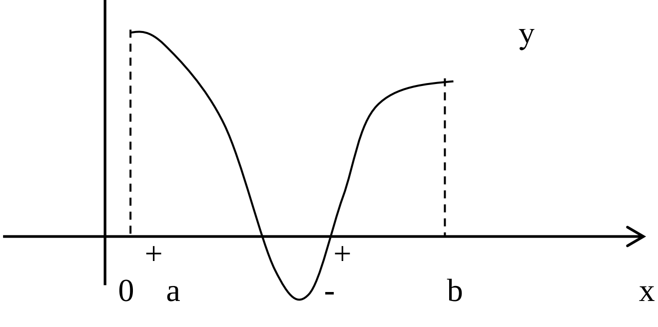
5. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты

6. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление.Поверхностные интегралы. Их свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

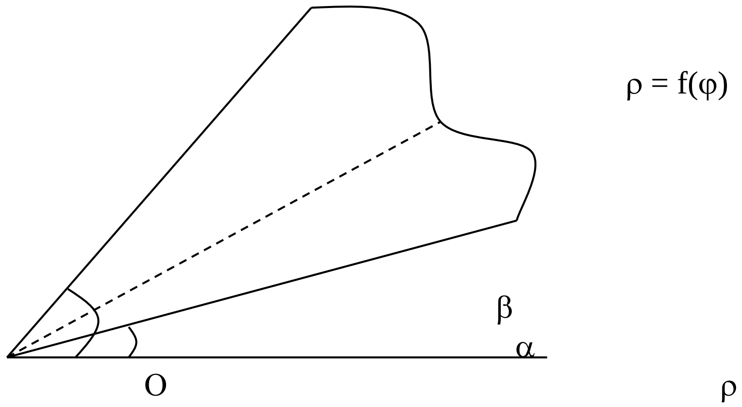
<u>Геометрические приложения определенного интеграла.Вычисление площадей плоских фигур.</u>



Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ox, т.е. f(x) < 0, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. f(x) > 0, то площадь имеет знак “+”. Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

<u>Нахождение площади криволинейного сектора.</u>



Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид ρ = f(φ), где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси. Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$$

2. Наименование вопроса № 2. Приближённые вычисления интегралов.

3**. Наименование вопроса № 1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.**

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале [a, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

<u>Определение:</u> Если существует конечный предел $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции f(x) на интервале [a, ∞).

Обозначение: $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**. Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

<u>Теорема:</u> Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int_a^\infty \varphi(x)dx \ge \int_a^\infty f(x)dx$.

<u>Теорема:</u> Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ тоже расходится.

<u>Теорема:</u> Если $\int_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$. В этом случае интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

<u>Интеграл от разрывной функции.</u>

Если в точке x = c функция либо неопределена, либо разрывна, то

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx$$

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_a^c f(x)dx$ - сходится, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует, то $\int_a^c f(x)dx$ - расходится.

Если в точке x = a функция терпит разрыв, то $\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to a+0}\int_b^c f(x)dx$. Если функция f(x) имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx /$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько. Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

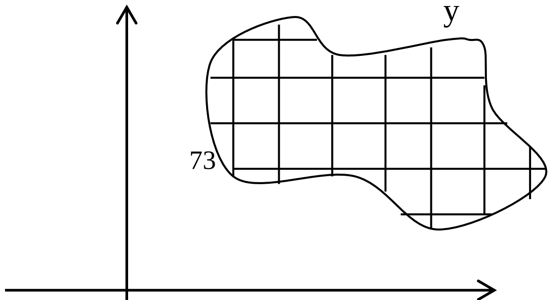
4. Наименование вопроса № 4. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие *n*-кратного интеграла.

<u>Кратные интегралы.</u>

Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производится неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов. Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения двойных интегралов.

<u>Двойные интегралы.</u>

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой f(x, y) = 0.



0 x

Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ. С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения наобязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера. Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ. Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

<u>Определение:</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)dxdy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем: $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y. Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} \sum\sum_{\Delta} f(x, y)\Delta y\Delta x$$

<u>Условия существования двойного интеграла.</u>

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл* $\iint_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ *существует.*

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл* $\iint_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ *существует.*

<u>Свойства двойного интеграла.</u>

1) $\iint\limits_{\Delta}[f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]dydx=\iint\limits_{\Delta}f_1(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta}f_2(x,y)dydx-\iint\limits_{\Delta}f_3(x,y)dydx$

2) $\iint\limits_{\Delta}kf(x,y)dydx=k\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx$ 3) Если Δ = $\Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx=\iint\limits_{\Delta_1}f(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta_2}f(x,y)dydx$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx=f(x_0,y_0)\cdot S$$

5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то $\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx\ge 0$.

6) Если а$_1$(чб н) ≤ а$_2$(чб н)б то $\iint\limits_{\Delta}f_1(x,y)dydx\le\iint\limits_{\Delta}f_2(x,y)dydx$ ю

7) $\left|\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx\right|\le\iint\limits_{\Delta}|f(x,y)|dydx$.

Вычисление двойного интеграла.

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ ≤ ψ, тогда*

$$\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy$$

5. Наименование вопроса № 5. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

6. Наименование вопроса № 6. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Их свойства и вычисление.Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Определение. Кривая $\vec{r}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\gamma(t)\vec{k}$ $(a\le t\le b)$ называется **непрерывной кусочно – гладкой**, если функции φ, ψ и γ непрерывны на отрезке [a,b] и отрезок [a,b] можно разбить на конечное число частичных отрезков так, что на каждом из них функции φ, ψ и γ имеют непрерывные производные, не равные нулю одновременно.

Если определено не только разбиение кривой на частичные отрезки точками, но порядок этих точек, то кривая называется **ориентированнной** кривой.

Ориетированная кривая называется **замкнутой**, если значения уравнения кривой в начальной и конечной точках совпадают.

$$\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$$

Рассмотрим в пространсве XYZ кривую AB, в каждой точке которой определена произвольная функция $f(x,y,z)$. Разобьем кривую на конечное число отрезков и рассмотрим произведение значения функции в каждой точке разбиения на длину соответствующего отрезка

$$f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

Сложив все полученные таким образом произведения, получим так называемую **интегральную** сумму функции *f(x, y, z)*

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой на частичные отрезки существует предел интегральных сумм, то этот предел называется **криволинейным интегралом от функции *f(x, y, z)* по длине дуги AB** или **криволинейным интегралом первого рода**.

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds$$

Криволинейные интегралы второго рода.

Пусть AB – непрерывная кривая в пространстве XYZ (или на плоскости XOY), а точка P(x, y, z) – произвольная функция, определенная на этой кривой. Разобьем кривую точками $M(x_i, y_i, z_i)$ на конечное число частичных дуг. И рассмотрим сумму произведений значений функции в каждой точке на длину соответствующей частичной дуги.

$$\sum_{i=1}^{n} P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i \ ; \quad M(\alpha,\beta,\gamma) \in \Delta x_i$$

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой AB интегральные суммы имеют конечный предел, то этот предел называется **криволинейным интегралом по переменной *x* от функции *P(x, y, z)* по кривой AB в направлении от A к B.**

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i$$

Криволинейный интеграл второго рода, т.е. интеграл по координатам отличается от криволинейного интеграла первого рода, т.е. по длине дуги тем, что значение функции при составлении интегральной суммы умножается не на длину частичной дуги, а на ее проекцию на соответствующюю ось. (В рассмотренном выше случае – на ось OX).

1. 10 Лекция № 10 (2 часа).

Тема: «Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости.

Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.

Гармонический анализ**.** Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье по ортогональным системам. Полнота и замкнутость системы. Тригонометрические ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Формула обращения. Свойства преобразования Фурье»

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Числовые ряды.
2. Степенные ряды.
3. Гармонический анализ**.**

1.10.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Числовые ряды.

Рассмотрим выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

называемое бесконечным рядом, где $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ — члены ряда.

Ряд называется *числовым*, если членами ряда являются числа, и *функциональным*, если членами ряда являются функции. Сумма конечного числа первых n членов называется *n –ой частичной суммой ряда*:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$, то его называют *суммой ряда* и ряд называется *сходящимся*. Если предел не существует, то *ряд расходится* и суммы не имеет.

Отметим следующие *свойства рядов*.

1. На сходимости ряда не сказывается отбрасывание конечного числа его членов.

2. Сходимость ряда не нарушится, если все члены умножить на одно и то же ненулевое число.

3. Сумма (разность) сходящихся рядов есть ряд сходящийся.

Необходимый признак сходимости рядов

Если ряд сходится, то предел n-ого члена равен нулю при неограниченном возрастании n, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\cdot \qquad (2)$$

Условие (2) является необходимым, но не достаточным условием сходимости, поэтому если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Сформулируем достаточные признаки сходимости некоторых рядов и вернемся к решению примера.

В первую очередь рассмотрим числовые ряды.

Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.

*Числовые з***накоположительные ряды**

Рассмотрим два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (3)$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (4)$$

называемых *знакоположительными*. Для них справедливы следующие признаки сходимости.

Признаки сравнения

*Признак 1***.** Если, начиная с некоторого *n,* выполняется условие $u_n \leq v_n$ и ряд (4) сходится, то ряд (3) тоже сходится.

*Признак 2***.** Если, начиная с некоторого *n*, выполняется условие $u_n \geq v_n$, и ряд (4) расходится, то ряд (3) тоже расходится.

*Признак 3***.** Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$, то ряды (3) и (4) ведут себя одинаково, т.е. сходятся и расходятся одновременно.

При использовании этих признаков нужно сравнивать исследуемый ряд с рядом, сходимость или расходимость которого уже известна.

Для сравнения обычно выбирают один из следующих рядов:

I. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ — гармонический ряд, он расходится.

II. $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ $(a\neq 0)$ — геометрическая прогрессия, при $|q|<1$ ряд сходится, при $|q|\geq 1$ расходится.

III. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$ — ряд Дирихле (обобщенный гармонический ряд), при $p>1$ сходится, при $p\leq 1$ расходится.

Признак Даламбера

Если в знакоположительном ряде $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ признак Даламбера ответа на вопрос о сходимости ряда не дает и надо использовать другие признаки.

Радикальный признак Коши

Если в знакоположительном ряде $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Интегральный признак Коши

Если $u_n=f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x\geq a\geq 1$, то ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ и интеграл $\int_a^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости.

Знакочередующиеся ряды

Ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ (5)

называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные.

Составим ряд из абсолютных значений ряда (5):

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \qquad (6)$$

Если ряд (6) сходится, то ряд (5) тоже сходится и называется *абсолютно сходящимся*.

Из расходимости ряда (6) не следует расходимость ряда (5).

Если ряд (6) расходится, а ряд (5) сходится, то он называется *сходящимся условно*.

Ряд (6) является знакоположительным рядом и вопрос о его сходимости решается с помощью признаков, рассмотренных ранее.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

Знакочередующимся называется ряд

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n-\ldots, \qquad (7)$$

где $u_n\geq 0$ для $\forall\, n$.

Для решения вопроса о сходимости знакочередующегося ряда используют признак сходимости Лейбница.

Признак Лейбница.

Если для знакочередующегося ряда (7) выполнены условия:

1. $u_n \ge u_{n+1} \ge u_{n+2} \ge \ldots$ (начиная с некоторого *n*),
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд (7) сходится.

2. Наименование вопроса № 2. Степенные ряды.

Функциональным называется ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, членами которого являются зависящие от x функции. Множество значений аргумента x, при которых ряд сходится, называется областью сходимости ряда. Частным случаем функционального ряда является степенной ряд:

$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$, (8) где a_n и x_0 — вещественные числа.

Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости.

Для ряда (8) существует такой интервал (называемый интервалом сходимости) $|x-x_0|<R$ с центром в точке $x=x_0$, внутри которого ряд (8) сходится абсолютно, а при $|x-x_0|>R$ ряд расходится. Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда. Радиус сходимости R в частном случае может быть равен 0 или ∞. На концах интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для выяснения вопроса о сходимости ряда на концах интервала сходимости достаточно применить к ряду известные признаки сходимости, считая x фиксированным и равным $x = x_0 \pm R$.

Пример 12. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение. Применим к ряду признак сходимости Даламбера и рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\dfrac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Если $\dfrac{|x+1|}{2}<1$, то исходный ряд сходится абсолютно, т.е. при $|x+1|<2$ или на интервале $-3<x<1$.

Если $\dfrac{|x+1|}{2}>1$, то ряд расходится, т.е. при $-\infty<x<-3,\ 1<x<\infty$.

Проверим сходимость на концах интервала сходимости. При $x=-3$ получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница неабсолютно (см. пример 9).

При $x=1$ получаем гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1)^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

который расходится. Окончательный ответ: ряд сходится при $-3\le x<1$.

Пример 13. Определить область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

Решение. Применим к ряду признак сходимости Даламбера и рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x-2|^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\dfrac{|x-2|^{2n}}{2n}}=|x-2|^2.$$

Исходный ряд сходится абсолютно, если $|x-2|^2<1$, то есть при $1<x<3$. Ряд расходится, если $|x-2|^2>1$, то есть при $-\infty<x<1,\ 3<x<\infty$.

Рассмотрим поведение ряда на концах интервала сходимости. При $x=1$ получаем числовой ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1-2)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$.

Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака сходимости Лейбница: $\frac{1}{2}\ge\frac{1}{4}\ge\frac{1}{8}\ge\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$. Поэтому ряд сходится (сходится условно, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, а умножение всех членов ряда на постоянное число, отличное от нуля, не меняет его сходимости).

При $x=3$ получаем такой же сходящийся ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3-2)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$. Окончательный ответ: ряд сходится при $1\le x\le 3$.

Пример 14. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение. Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=|x|\cdot 0.$$

Неравенство $|x|\cdot 0<1$ выполняется при всех значениях x, поэтому область сходимости ряда $-\infty<x<\infty$.

Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.

Ряд $c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$ называется рядом Тейлора для функции f, где $C_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ называются коэффициентами Тейлора для функции.

Теорема 1. Если функция f является суммой степенного ряда в окрестности точки а, то этот ряд единственный и является рядом Тейлора для данной функции.

Теорема 2. Если функция f аналитическая в точке а, то ее можно разложить в ряд по степеням $z-a$ в круге $|z-a|<R$, где R - расстояние от точки а до ближайшей к ней особой точки z^*, т.е. точки, в которой нарушается аналитичность функции.

3. Гармонический анализ.

Определение. Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+...$$

или, короче, $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции sin*nx* и cos*nx* также периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке [-π; π], а следовательно, и на любом отрезке в силу периодичности, и его сумма равна *f(x)*.

Определим коэффициенты этого ряда. Для решения этой задачи воспользуемся следующими равенствами:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n, \quad m=0,1,2,..\\ \pi, & m=n, \quad m,n=1,2,...\end{cases}, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n, \quad m,n=1,2,...\end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0, \quad m=0,1,2,..., \quad n=1,2,...$$

Справедливость этих равенств вытекает из применения к подынтегральному выражению тригонометрических формул. Т.к. функция *f(x)* непрерывна на отрезке [-π; π], то существует интеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx=\pi a_0$$

Такой результат получается в результате того, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx=0$.

Получаем: $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$. Далее умножаем выражение разложения функции в ряд на cos*nx* и интегрируем в пределах от -π до π.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos^2 nx+b_n\cos nx\sin nx)dx=\pi a_n$$

Отсюда получаем: $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx; \quad n=1,2,...$.

Аналогично умножаем выражение разложения функции в ряд на sin*nx* и интегрируем в пределах от -π до π. Получаем: $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx, \quad n=1,2,...$

Выражение для коэффициента a_0 является частным случаем для выражения коэффициентов a_n.

Таким образом, если функция *f(x)* – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции *f(x).*

Ряды Фурье.

(Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик)

Определение. **Рядом Фурье** для функции *f(x)* называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции *f(x)* сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье.

Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.

Теорема. (Теорема Дирихле) *Если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке [-π;π] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-π;π] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$*, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке [-π;π].

Теорема. *Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке [-π;π] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. *При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке [-π;π].

Разложение в ряд Фурье непериодической функции.

Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом T = 2π на отрезке [-π;π].

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx dx = \left\{\begin{matrix} u = x^3; & dv = \sin nx dx; \\ du = 3x^2 dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3 \cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \cos nx dx; \\ du = 2x dx; & v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx \right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \sin nx dx; \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x \cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{6\pi \cos \pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} \right)\right) = -\frac{2\pi^2 \cos \pi n}{n} + \frac{12 \cos \pi n}{n^3} = (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right)$$

Получаем:

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx .$$

Построим графики заданной функции и ее разложения в ряд Фурье, ограничившись первыми четырьмя членами ряда.

Ряды Фурье для функций любого периода.
Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Интеграл Фурье.

Пусть функция *f(x)* на каждом отрезке [-*l*,*l*], где *l* – любое число, кусочно – гладкая или кусочно – монотонная, кроме того, *f(x)* – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

Тогда функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n}{l} x + b_n \sin\frac{\pi n}{l} x \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{\pi n}{l} t dt, \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{\pi n}{l} t dt, \quad n = 1,2,...$$

Если подставить коэффициенты в формулу для f(x), получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{\pi n}{l} t dt \cos\frac{\pi n}{l} x + \int_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{\pi n}{l} t dt \sin\frac{\pi n}{l} x \right) =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{\pi n}{l} (t - x) dt$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, можно доказать, что $\lim_{l \to \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt = 0$ и

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{\pi n}{l} (t - x) dt$$

Обозначим $u_n = \frac{\pi n}{l}$; $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}$; $\frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi}$; При $l \to \infty$ $\Delta u_n \to 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n \int_{-l}^{l} f(t) \cos u_n (t - x) dt$$

Можно доказать, что предел суммы, стоящий в правой части равенства равен интегралу

$$\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t - x) dt$$

Тогда $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t - x) dt$ - **двойной интеграл Фурье.**

Окончательно получаем:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt$$

- представление функции f(x) **интегралом Фурье**.

Двойной интеграл Фурье для функции f(x) можно представить в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dt$$

Преобразование Фурье. Формула обращения. Свойства преобразования Фурье.

Преобразование Фурье.

Определение. Если *f(x)* – любая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на каждом отрезке, то функция

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}dx$$

называется **преобразованием Фурье функции *f(x).*** Функция *F(u)* называется также **спектральной характеристикой функции *f(x).*** Если f(x) – функция, представимая интегралом Фурье, то можно записать:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{iux}du$$

Это равенство называется **обратным преобразованием Фурье**

Интегралы $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos uxdx$ и $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin uxdx$ называются соответственно **косинус - преобразование Фурье и синус – преобразование Фурье.**

Косинус – преобразование Фурье будет преобразованием Фурье для четных функций, синус – преобразование – для нечетных.

Преобразование Фурье применяется в функциональном анализе, гармоническом анализе, операционном исчислении, теории линейных систем и др.

1. 11 Лекция № 11 (2 часа).

Тема: «Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Система линейных дифференциальных уравнений. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Наименование вопроса № 2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

2. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.

4. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
5. Система линейных дифференциальных уравнений. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений

1.11.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимые переменные, искомую функцию (или дифференциал) и ее производные. Обыкновенное дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$F[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)] = 0 \qquad (1)$$

Здесь $x-$ независимая переменная, $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)-$ искомая функция и ее производные вплоть до производной порядка n.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в уравнение (число n в формуле (1)). Так, уравнение $y'' + y' = \cos x$ является дифференциальным уравнением второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения называется решение, содержащее столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$y = y(x; C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad (2)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n -$ произвольные постоянные, или *постоянные интегрирования.*

Если решение уравнения (1) получено в неявном виде

$$\varphi(x; C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \qquad (3)$$

то такое решение называется *общим интегралом уравнения* (1).

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего выбором конкретных значений произвольных постоянных.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (1) называется задача отыскания решения $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего следующим начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots\ y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}. \qquad (4)$$

Число начальных условий равно порядку уравнения, что позволяет определить все произвольные постоянные в общем решении (2).

График каждого частного решения в плоскости (x, y) представляет линию, называемую *интегральной кривой,* а совокупность всех интегральных кривых образует семейство интегральных кривых.

Рассмотрим уравнение (1) в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y^{n}(x) = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (5)$$

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x, y, ..., y^{(n-1)})$ определена и имеет непрерывные частные производные по переменным $y, ..., y^{(n-1)}$, то в этой окрестности задача Коши имеет единственное решение.

Особым решением дифференциального уравнения называется решение, в каждой точке которого нарушаются условия теоремы существования и единственности. Оно не может быть получено из общего подбором значений произвольных постоянных.

2. Наименование вопроса № 2. Однородные и линейные уравнения.

Уравнения вида *y' = f(x).*

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале a < x < b. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную С.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ } при \text{ } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$ Получаем: $X(x)dx + Y(y)dy = 0;$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$, $\quad y\cos y dy = -2x dx$, $\quad \int y\cos y dy = -2\int x dx$

(Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям):

$$\int y\cos y dy = \begin{Bmatrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{Bmatrix} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$, $\quad y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Однородные уравнения.

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными. Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Уравнения, приводящиеся к однородным.

Линейные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке $a < x < b$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0)* применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где *P* и *Q* – функции от *x* или постоянные числа, а *n* – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнения в полных дифференциалах (тотальные).

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C$.

3. Наименование вопроса № 3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши.

Определение. Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \quad .... \quad , \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$, *то какова бы не была точка (*$x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$*) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, *определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений.

Наименование вопроса № 3. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

<u>Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.</u>

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

……………………………………………………………

$$y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

<u>Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k – 1* включительно.</u>

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0$. В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на *k* единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z',..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно *k* раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2,..., C_n).$$

<u>Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.</u>

Это уравнения вида $F(y, y',..., y^{(n)}) = 0.$ Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy},..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2,..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2,..., C_{n-1}) = 0.$$

4. Наименование вопроса № 4. Дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$.

Т.к. $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то $L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n)$.

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ ***называется*** *характеристическим многочленом* ***дифференциального уравнения.***

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx} F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad ... \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad ... \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad ...x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ - многочлен степени *m*.

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Здесь *Q(x)*- многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.
Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

где число *r* показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше *m*, где *m*- большая из степеней m_1 и m_2.

5. Наименование вопроса № 5. Системы линейных дифференциальных уравнений.

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \end{cases}$$

где x- независимая переменная, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

Теорема. (Теорема Коши). *Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ... $f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *то для любой точки* $(x_0.y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ *этой области существует единственное решение*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0 . y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$.

Определение. Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Определение. Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \qquad (2)$$

Решения системы (2) обладают следующими свойствами:

1) Если *y, z, u* – решения системы, то *Cy, Cz, Cu* , где *C = const* – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему (2) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно *k*. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (2):

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$
$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$
$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (2):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$

$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$
$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

1. 12 Лекция № 12 (2 часа).

Тема: «Случайные события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Случайные величины. Дискретные случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Нормальное распределение и его свойства**»**

1.12.1 Вопросы лекции:

1. **Случайные события.**

2. **Случайные величины.**

1.12.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Случайные события.

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение. Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Определение. Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С. Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Определение. **Относительной частотой** события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Операции над событиями.

Определение. **Элементарными исходами** опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 1: *Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Определение. **Противоположными** называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

Определение. Событие А называется **независимым** от события В, вероятность события

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

Теорема. (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$

Также можно записать: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события. Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A)=1-q_1q_2...q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$.

Условная вероятность.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

Определение. Событие А называется **независимым** от события В, вероятность события

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

Теорема. (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$

Также можно записать: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$. Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$;
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$;
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$;

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$$

Формула Бейеса. (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события А, т.е. условные вероятности $P(H_i/A)$.

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется **формулой Бейеса**.

Схема Бернулли..

Повторение испытаний. Формула Бернулли.

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события А**.

Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие А наступило ровно m раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие А наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события А в испытании с номером i. Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие А наступает ровно m раз, то остальные n-m раз это событие не наступает. Событие А может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли:**

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. *Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* P_n (k) *того, что событие А появится в п испытаниях ровно* k *раз, приближенно равна* (*тем точнее, чем больше п*) *значению функции*

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

при $x = (k-np)/\sqrt{npq}$.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = (k — np)/\sqrt{npq}$.

Интегральная теорема Лапласа. *Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* P_n (k_1, k_2) *того, что событие А появится в п испытаниях от* k_1 *до* k_2 *раз, приближенно равна*

$$P_n(k_1,k_2) \cong \Phi(x'') - \Phi(x')$$

где $x' = (k_1 — np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2—np)/\sqrt{npq}$.

Интеграл $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz,$ часто называют *функцией Лапласа.*

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-z^2/2}dz$ не выражается через элементарные функции. В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений x и для $x = 0$; для $x < 0$ пользуются той же таблицей [функция $\Phi(x)$ нечетна,т.е.
$\Phi(—x) = — \Phi(x)$]. В таблице приведены значения интеграла лишь до x=5так как для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$. Функцию $\Phi(x)$

2. Наименование вопроса № 2. Случайные.

Случайные величины.

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным. Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Определение. Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

Закон распределения дискретной случайной величины.

<u>Определение.</u> Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины. Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**. Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.** При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

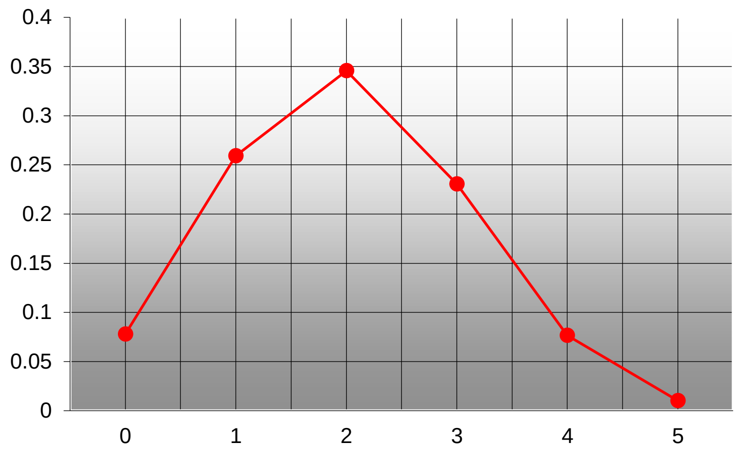
<u>Пример.</u> По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

Вероятности пяти попаданий из пяти возможных, четырех из пяти и трех из пяти были найдены по формуле Бернулли и равны соответственно:

$P_{5,5} = 0{,}01024$, $P_{4,5} = 0{,}0768$, $P_{3,5} = 0{,}2304$. Аналогично найдем:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456 \quad P_{1,5} = \frac{5!}{1!\cdot 4!}0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592,$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0!\cdot 5!}0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}6^5 = 0{,}0778$$



Представим графически зависимость числа попаданий от их вероятностей.

При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

Случайные непрерывные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства.

<u>Функция распределения.</u>

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. $X < x$, обозначим через F(x).

<u>Определение.</u> Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**.
Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

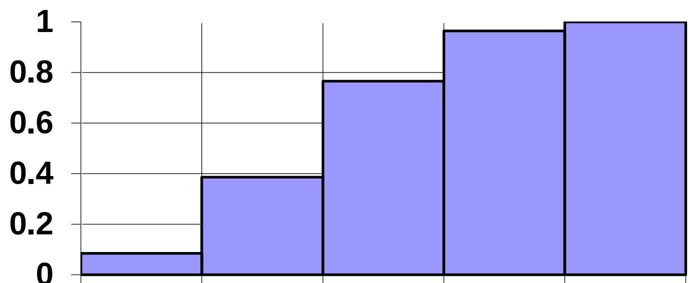
Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента *x*.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Так для примера, рассмотренного выше, функция распределения будет иметь вид:



	0	1	2	3	4
Функция распределения	0.084	0.386	0.766	0.964	1

<u>Свойства функции распределения..</u>

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2) F(x) – неубывающая функция.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ при } x_2 \ge x_1$$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (*a, b*) , равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

<u>Плотность распределения.</u>

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

<u>Определение.</u> Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения F(x).

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина Х в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

<u>Определение.</u> Случайная величина Х называется **непрерывной**, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси ОХ, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина Х примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

<u>Теорема.</u> *Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью ОХ, кривой распределения f(x) и прямыми *x=a* и *x=b.*

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

<u>Свойства плотности распределения.</u>

1) Плотность распределения – неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$

2) Несобственный интеграл от плотности распределения равен единице $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Нормальное распределение

<u>Нормальный закон распределения.</u>

<u>Определение.</u> Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$

Нормальный закон распределения также называется **законом Гаусса**.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины Х.

Найдем функцию распределения *F(x).*

$$F(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx$$

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** или **кривой Гаусса**. Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) Функция определена на всей числовой оси.

2) При всех x функция распределения принимает только положительные значения.

3) Ось ОХ является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента x, значение функции стремится к нулю.

4) Найдем экстремум функции.

$y'=-\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=0;\qquad x=m;$ Т.к. при $y'>0$ при $x<m$ и $y'<0$ при $x>m$, то в точке $x=m$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

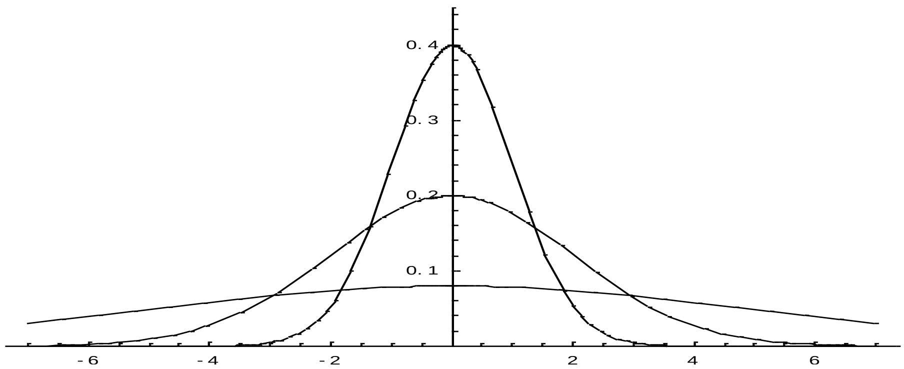
5) Функция является симметричной относительно прямой $x = a$, т.к. разность $(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате.

6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y''=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

При $x = m + \sigma$ и $x = m - \sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб. В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Построим график функции плотности распределения.



Построены графики при m =0 и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения σ = 1, σ = 2 и σ = 7. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается.

Если a > 0, то график сместится в положительном направлении, если a < 0 – в отрицательном.

При a = 0 и σ = 1 кривая называется **нормированной**. Уравнение нормированной кривой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функция Лапласа.

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Обозначим $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t;\quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha;\quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta;$ Тогда

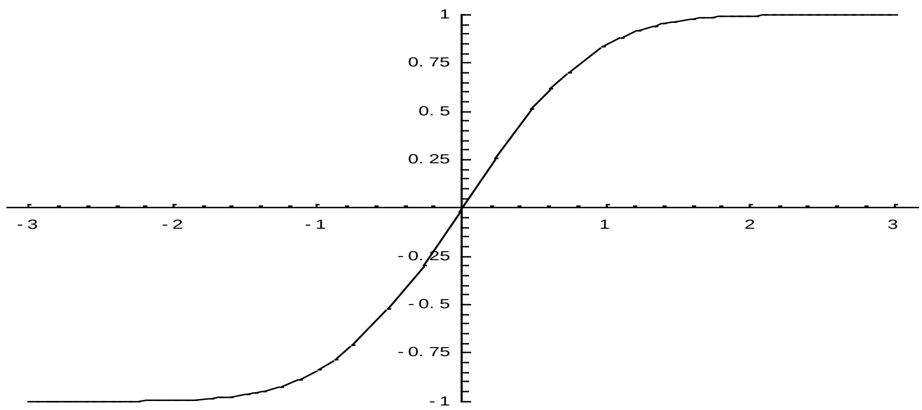
$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\left[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right]$$

Т.к. интеграл $\int e^{-t^2} dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

которая называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах. Ниже показан график функции Лапласа.



Свойства нормального распределения

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

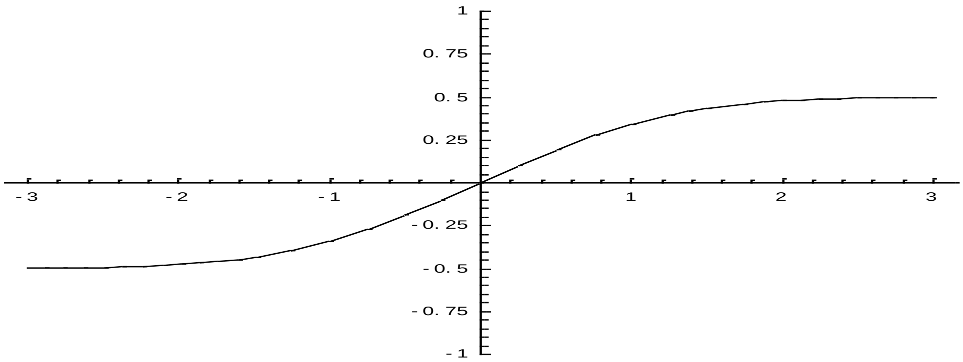
1) $\Phi(0) = 0$; 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; 3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцию Лапласа также называют **функцией ошибок** и обозначают erf x.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\overline{\Phi}(x)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt;$$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как **правило трех сигм**.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ:

$$P(|X-m|<\Delta)=\overline{\Phi}\left[\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right]-\overline{\Phi}\left[\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right]=\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]-\overline{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right]=2\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Если принять Δ = 3σ, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\overline{\Phi}(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидание на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Это правило называется **правилом трех сигм**.

Не практике считается, что если для какой – либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

1. 13 Лекция № 13 (2 часа).

Тема: «Статистическое описание результатов наблюдений. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.

Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

Статистические методы обработки результатов наблюдений. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения**»**

1.13.1 Вопросы лекции:

1. **Статистическое описание результатов наблюдений.**
2. **Статистические методы обработки результатов наблюдений.**

1.13.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Статистическое описание результатов наблюдений.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных - результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики - указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики - разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Краткая историческая справка

Математическая статистика возникла (XVII в.) и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX - начало XX в.) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пирсону и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, А. Н. Колмогоров, Н. В. Смирнов), а также английскими (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон) и американскими (Ю. Нейман, А. Вальд) учеными.

Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 - n_2 раз, x_k- n_k раз и $\sum n_i = n$ - объем выборки. Наблюдаемые значения x_i - называют *вариантами,* а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке,- *вариационным рядом.* Числа наблюдений называют *частотами,* а их отношения к объему выборки $n_i /n = W_i$ - *относительными частотами.*

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Заметим, что в теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике - соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x)= n_x/n,$$

где n_x - число вариант, меньших x; n - объем выборки. Таким образом, для того чтобы найти, например, $F^*(x_2)$, надо число вариант, меньших x_2, разделить на объем выборки:

$$F^*(x_2)= n_{x2}/n.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения.* Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события $X < x$, т.е. $F^*(x)$ стремится по вероятности к вероятности $F(x)$ этого события. Другими словами, при больших n числа $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого в том смысле, что $\lim\limits_{n\to\infty} P[|\,F(x) - F^*(x)\,| < \varepsilon] = 1(\varepsilon > 0)$.Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2; n_2), .. ., (x_k; n_k). Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им частоты n_j. Точки (x_i; n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1; W_1), (x_2; W_2), ... , (x_k; W_k). Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i а на оси ординат-соответствующие им относительные частоты W_i.

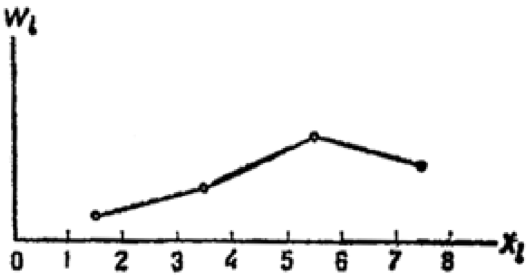


Рис. 20

Точки (x_i; W_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

На рис. 20 изображен полигон относительных частот следующего распределения:

X	1,5	3,5	5,5	7,5
W	0,1	0,2	0,4	0,3

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i - сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hn_i/h=n_i$ - сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.*

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению W_i/h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i/h. Площадь 1-го частичного прямоугольника равна $hW_i/h=W_i$ - относительной частоте вариант, попавших в 1-й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.*

Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал.

Наблюдавшиеся значения x_i ($i = 1, \ldots, n$) случайной величины X называют *вариантами,* а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом*.

Набор вариант x_i, полученных в результате n опытов, называется *выборкой* объема n.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i или относительных частот μ_i.

Несмещенной оценкой для среднего значения m служит выборочная средняя

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (28)$$

где n – объем выборки; x_i – варианты выборки.

Несмещенной оценкой для дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (29)$$

Несмещенной оценкой для среднего квадратичного отклонения служит стандартное отклонение

$$S = \sqrt{S^2}, \qquad (30)$$

т. е. корень квадратный из выборочной дисперсии S^2.

Доверительным интервалом называется интервал, который с заданной доверительной вероятностью γ покрывает оцениваемый параметр.

Для оценки среднего значения m случайной величины X, распределенной по нормальному закону, при неизвестной дисперсии σ^2 служит доверительный интервал

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{31}$$

где $\bar{x}$ – выборочное среднее; t_α находится по таблице распределения Стьюдента для α = 1 – γ по заданным n и γ [1];

S – оценка среднего квадратичного отклонения; n – объем выборки.

Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, их свойства.

Зависимые и независимые случайные величины.

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.*

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$$

Аналогичную теорему можно сформулировать и для плотности распределения:

Теорема. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих.*

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

Определение. Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин: $\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)][y_j - M(Y)] p(x_i, y_j)$

Для непрерывных случайных величин: $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y) dx dy$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y. Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов различных случайных величин.

Для того, чтобы устранить этот недостаток применятся другая характеристика – коэффициент корреляции.

<u>**Определение.**</u> **Коэффициентом корреляции** $\boldsymbol{r_{xy}}$ случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин.

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

<u>**Свойство:**</u> Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}$$

<u>**Свойство:**</u> Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$|r_{xy}| \le 1$$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Наряду с коэффициентом корреляции степень зависимости случайных величин можно охарактеризовать и другой величиной, которая называется **коэффициентом ковариации**. Коэффициент ковариации определяется формулой:

$$k(X,Y) = M(XY) - M(X)\cdot M(Y)$$

<u>Пример.</u> Задана плотность распределения системы случайных величин X и Y.

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1)}$$

Выяснить являются ли независимыми случайные величины X и Y.

Для решения этой задачи преобразуем плотность распределения:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2 + y^2(1 + x^2))} = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\frac{1}{\pi(1 + y^2)}$$

Таким образом, плотность распределения удалось представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от *x*, а другая – только от *y*. Т.е. случайные величины X и Y независимы. Разумеется, они также будут и некоррелированы.

<u>Линейная регрессия.</u>

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y – зависимые случайные величины. Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная.

$$Y \cong g(X) = \alpha X + \beta$$

<u>**Определение.**</u> Функция *g(X)* называется **наилучшим приближением** случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание

$M[Y-g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция *g(x)* называется **среднеквадратической регрессией** Y на X.

Теорема. *Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по формуле:*

$$g(X)=m_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x)$$

в этой формуле $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$, $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$, $r=\mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ – коэффициент корреляции величин *X* и *Y*.

Величина $\beta=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется **коэффициентом регрессии** *Y* на *X*.

Прямая, уравнение которой

$$y-m_y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x),$$

называется **прямой сренеквадратической регрессии** *Y* на *X*.

Величина $\sigma_y^2(1-r^2)$ называется **остаточной дисперсией** случайной величины *Y* относительно случайной величины *X*. Эта величина характеризует величину ошибки, образующейся при замене случайной величины *Y* линейной функцией $g(X)=\alpha X+\beta$.

Видно, что если $r=\pm 1$, то остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, ошибка равна нулю и случайная величина *Y* точно представляется линейной функцией от случайной величины *X*.

Прямая среднеквадратичной регрессии *X* на *Y* определяется аналогично по формуле:

$$x-m_x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)$$

Прямые среднеквадратичной регрессии пересекаются в точке (m_x, m_y), которую называют **центром совместного распределения** случайных величин *X* и *Y*.

Линейная корреляция.

Если две случайные величины *X* и *Y* имеют в отношении друг друга линейные функции регрессии, то говорят, что величины *X* и *Y* связаны **линейной корреляционной зависимостью**.

Теорема. *Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.*

2. Наименование вопроса №2. Статистические методы обработки результатов наблюдений.

Понятие о методе наименьших квадратов

В различных практических исследованиях приходится находить эмпирические функции по отдельным значениям этих функций, полученным на основании опытных данных (измерений). Один из способов получения таких функций–метод наименьших квадратов. Пусть, например, на основании эксперимента необходимо установить функциональную зависимость между температурой x и урожайностью y. По результатам измерений составляем таблицу:

x	x_1	…	x_i	…	x_n
y	y_1	…	y_i	…	y_n

Предположим, что эти точки на координатной плоскости находятся приблизительно на одной прямой. В данном случае естественно предположить, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся уравнением

$$y = a \cdot x + b$$

Так как точки (x_i, y_i), i=1… n лишь приблизительно лежат на одной прямой, то равенства $y_i - (ax_i + b) = 0$ будут выполняться приближенно и величины $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$ будут отличны от нуля.

Составим сумму $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$ и подберем параметры a и b так, чтобы функция S(a,b) принимала наименьшее значение, т.е. чтобы сумма квадратов погрешностей $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$ была наименьшей. Из необходимых условий экстремума следует:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i + b)\right]\cdot(-x_i)\right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i + b)\right]\cdot(-1)\right) = 0. \end{cases} \text{или} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем a и b и подставив их в уравнение $y = a \cdot x + b$ получим эмпирическую функцию исследуемой зависимости.

Задача. Экспериментально получены пять значений искомой функции y=f(x) при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию y=f(x) в виде $y = a \cdot x + b$.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Решение. Предварительно вычислим суммы:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1+2+3+4+5 = 15, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 0{,}5+1+1{,}5+2+3 = 8,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1{,}5 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3 = 30.$$

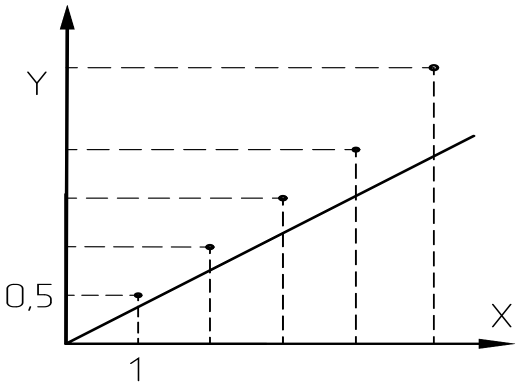
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 30 - a\cdot 55 - b\cdot 15 = 0, \\ 8 - a\cdot 15 - b\cdot 5 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 15b + 55a = 30, \\ 5b + 15a = 8. \end{cases}$$

Решив систему уравнений найдём a=0,6, b= –0,2.Следовательно, эмпирическая функция определяется формулой

$$y = 0{,}6x - 0{,}2.$$

Построим график этой зависимости и нанесем на него экспериментальные точки (облако точек).



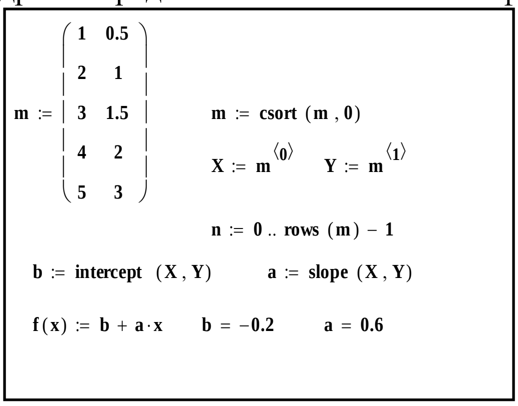
Ответ: y = 0,6x – 0,2.

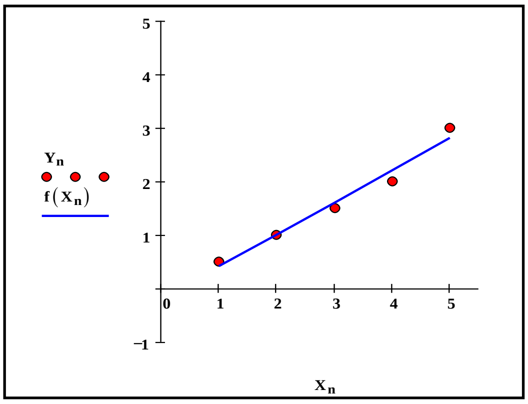
Нахождение эмпирической функции с MathCAD

Пусть задана таблица экспериментальных значений из **задачи № 5**.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Процедура нахождения эмпирической функции в MathCAD методом наименьших квадратов предполагает использование функций MathCAD.





Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии среднеквадратичной регрессии по не сгруппированным данным

Пусть изучается система количественных признаков (X, Y). В результате n независимых опытов получены и пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n).

Найдем по данным наблюдений выборочное уравнение прямой линии среднеквадратичной регрессии Y на X вида

$$Y = \rho_{yx}x + b. \qquad (*)$$

Угловой коэффициент прямой линии регрессии Y на X называют выборочным коэффициентом регрессии Y на X и обозначают через ρ_{yx}; он является оценкой коэффициента регрессии β .

Назовем отклонением разность

$$Y_i - y_i \ (i = 1, 2. .... n),$$

где Y_i—вычисленная по уравнению (*) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i; y_i—наблюдаемая ордината, соответствующая x_i. Подберем параметры ρ_{yx} и b так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной (в этом состоит сущность метода наименьших квадратов).чтобы точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n), построенные по данным наблюдений, на плоскости xOy лежали как можно ближе к прямой (*).

Так как каждое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, то и сумма квадратов отклонений есть функция F этих параметров (временно вместо ρ_{yx} будем писать ρ):

$$F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2, \text{ или } F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)^2 .$$

Для отыскания минимума приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\frac{dF}{d\rho}=2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)x_i=0;$$
$$\frac{dF}{db}=2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)=0.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим систему двух линейных уравнений относительно ρ и b*):

$$\left(\sum x^2\right)\rho+\left(\sum x\right)b=\sum xy;\quad \left(\sum x\right)\rho+nb=\sum y. \qquad (**)$$

Решив эту систему, найдем искомые параметры:

$$\rho_{yx}=\left(n\cdot\sum xy-\sum x\cdot\sum y\right)/\left(n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right);$$
$$b=\left(\sum x^2\cdot\sum y-\sum x\cdot\sum xy\right)/\left(n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right). \qquad (***)$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y = \rho_{xy}x + C,$$

где ρ_{xy} —выборочный коэффициент регрессии X на Y.

Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения

Применение критериев согласия (алгоритм)

Рассказать студентам об основных принципах статистической проверки гипотез. Напомнить понятия *статистической гипотезы* (простой и сложной), *нулевой* и *конкурирующей* гипотезы, *ошибок первого* и *второго рода*, *уровня значимости*, *статистического критерия*, *критической области*, *области принятия гипотезы*. Кроме того, напомнить понятия *наблюдаемого значения* критерия и *критической точки*.

Напомнить критерии для проверки гипотез о вероятности события, о математическом ожидании, о сравнении двух дисперсий. Напомнить критерий «*хи-квадрат»* К. Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения. Рассказать о порядке выполнения работы «Статистическая обработка результатов измерений»:

А) По данной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n строится *статистический ряд*

y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m

k_1	k_2	k_3	$\cdots$	k_m

Здесь $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ — элементы выборки, записанные в порядке возрастания, k_i — число повторений элемента y_i в выборке. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{m} k_i = n.$

Б) При большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы, и строится *группированная выборка*, а затем *группированный статистический ряд*. Для этого отрезок $[a,b]$, содержащий все элементы выборки, разбивается на N интервалов одинаковой длины $h = \frac{b-a}{N}$. В зависимости от объема выборки число интервалов группировки N берется от 6 до 20. Находятся концы интервалов $\xi_i = a + (i-1)h$ $(i = 1,2,\ldots,N+1)$, середины интервалов

$z_j = \frac{1}{2}(\xi_j + \xi_{j+1})$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ и соответствующие *эмпирические частоты* — количество n_j элементов выборки, попавших в j-ый интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу). Очевидно, что $\sum_{j=1}^{N} n_j = n.$

Также строится *группированный статистический ряд относительных частот* $w_j = \frac{n_j}{n}$ $(j = 1,2,\ldots,N)$.

В) Строится график *выборочной функции распределения* $\overline{F}(x)$, где $\overline{F}(x) = 0$ при $x \le z_1$,

$$\overline{F}(x) = \frac{n_1 + \ldots + n_i}{n} = \sum_{j=1}^{i} w_j \quad \text{при} \quad z_i < x \le z_{i+1} \quad (i = 1,2,\ldots,N-1)$$

и $\overline{F}(x) = 1$ при $x > z_N$.

Г) Строится *гистограмма относительных частот* — ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ и высотами $h_j = \frac{w_j}{h}$ $(j = 1,2,\ldots,N)$.

Д) Находится оценка математического ожидания — *выборочное среднее*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} n_j z_j,$$

оценка дисперсии — *исправленная выборочная дисперсия*

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N} n_j (z_j - \overline{x})^2,$$

исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{s^2}$.

Е) Находятся *теоретические частоты* $n_j^{/} = np_j$, где

$$p_j = \Phi\left(\frac{\xi_{j+1} - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{\xi_j - \overline{x}}{s}\right), \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся по таблицам.

Ж) Для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности сначала составляется расчетная таблица:

Номер интервала	Границы интервала	Эмпирические частоты	Теоретические частоты		
j	ξ_j, ξ_{j+1}	n_j	$n_j^{/}$	$(n_j - n_j^{/})^2$	$\dfrac{(n_j - n_j^{/})^2}{n_j^{/}}$
1 2 … N					

З) Если $n_j < 5$ или $n_j^{/} < 5$ при некотором j, то j -ый интервал объединяется с соседним, при этом эмпирические и теоретические частоты суммируются. После объединения получаются r интервалов $(r \le N)$, в каждом из которых $n_j \ge 5$ и $n_j^{/} \ge 5$.

И) По расчетной таблице находится *наблюдаемое значение* статистики «хи-квадрат» (Пирсона):

$$\chi^2_{набл} = \sum_{j=1}^{r} \frac{(n_j - n_j^{/})^2}{n_j^{/}}.$$

К) По заданному *уровню значимости* α и *числу степеней свободы* $k = r - 3$ находится из таблиц *критическая точка* $\chi^2(\alpha, k)$. Если $\chi^2_{набл} \le \chi^2(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении случайной величины X и поэтому она принимается. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2(\alpha, k)$, то гипотезу отвергают.

Л) Если гипотеза принимается, то с помощью таблиц строится график плотности

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2s^2}}$$

случайной величины X (распределенной по нормальному закону). Этот график строится в тех же осях и масштабе, что и гистограмма относительных частот.

Проверка гипотез о равенстве долей и средних

Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (независимые выборки)

Пусть генеральные совокупности Х и У распределены нормально, причем их дисперсии известны (например, из предшествующего опыта или найдены теоретически). По независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n и m, извлеченным из этих совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Требуется по выборочным средним при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные средние (математические ожидания) рассматриваемых совокупностей равны между собой, т. е.

$$H_0: M(X) == M(У).$$

Учитывая, что выборочные средние являются несмещенными оценками генеральных средних, т. е. $M(\bar{X}) = M(X)$ и $M(\bar{Y}) = M(Y)$, нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0: M(\bar{X}) = M(\bar{Y}).$$

Таким образом, требуется проверить, что математические ожидания выборочных средних равны между собой. Такая задача ставится потому, что, как правило, выборочные средние оказываются различными. Возникает вопрос: значимо или незначимо различаются выборочные средние?

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. генеральные средние одинаковы, то различие выборочных средних незначимо и объясняется случайными причинами и, в частности, случайным отбором объектов выборки.

Например, если физические величины А и В имеют одинаковые истинные размеры, а средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$ результатов измерений этих величин различны, то это различие незначимое.

Если нулевая гипотеза отвергнута, т. е. генеральные средние неодинаковы, то различие выборочных средних значимо и не может быть объяснено случайными причинами, а объясняется тем, что сами генеральные средние (математические ожидания) различны. Например, если среднее арифметическое $\bar{x}$ результатов измерений физической величины А значимо отличается от среднего арифметического $\bar{y}$ результатов измерений физической величины В, то это означает, что истинные размеры (математические ожидания) этих величин различны.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{D(x)/n + D(y)/m}},$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах $\bar{x}$ и $\bar{y}$ принимают различные, наперед неизвестные значения.

Пояснение: по определению среднего квадратического отклонения,

$$\sigma(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{D(\bar{X} - \bar{Y})}.$$

На основании свойств дисперсии

$$D(\bar{X} - \bar{Y}) = D(\bar{X}) + D(\bar{Y}), \quad D(\bar{X}) = D(X)/n, \ D(\bar{Y}) = D(Y)/m.$$

Следовательно,

$$\sigma(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}.$$

Критерий Z - нормированная нормальная случайная величина. Действительно, величина Z распределена нормально, так как является линейной комбинацией нормально распределенных величин $\bar{X}$ и $\bar{Y}$; сами эти величины распределены нормально как выборочные средние, найденные по выборкам, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей; Z - нормированная величина потому, что M (Z) = 0; при справедливости нулевой гипотезы σ(Z) = 1, поскольку выборки независимы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № 1 (2 часа).

Тема: «Приближённое вычисление интегралов»

2.1.1 Цель работы: сформировать умения и навыки использования простейших численных методов (приближённых вычислений интегралов).

2.1.2 Задачи работы: изучить метод трапеций приближённых вычислений интегралов.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.
3. Open Office.

2.1.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы № 1

Задание. Вычислить $\int_0^2 ln(2x+1)dx$

а) сначала по формуле Ньютона - Лейбница,
б) затем приближенно по формуле Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей. Вычисления производить с округлением до четвертого десятичного знака.
в) затем вычислить с Open Office (MathCAD);
г) сравнить полученные результаты, вычислив абсолютную и относительную погрешности

Решение.

а) Сначала вычислим интеграл по формуле Ньютона - Лейбница, применив формулу интегрирования по частям. Полагаем

$$u = \ln(2x+1); \quad dv = dx. \text{ Тогда } du = \frac{2dx}{2x+1}; \quad v = \int dx = x.$$

Подставляя найденные значения в формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^2 ln(2x+1)\, dx = x\,ln(2x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2xdx}{2x+1} = 2\,ln5 - \int_0^2 \frac{(2x+1)-1}{2x+1}dx = 2\,ln5 -$$

$$-\int_0^2 \left(1-\frac{1}{2x+1}\right) dx = 2ln5 - \int_0^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2dx}{2x+1} = 2ln5 - x\Big|_0^2 + \frac{1}{2}ln|2x+1|\Big|_0^2 = 2ln5 - 2 + +\frac{1}{2}\ln 5 = \frac{5\ln 5 - 4}{2}.$$

$$\int_0^2 \ln(2x+1)dx = \frac{5\ln 5 - 4}{2}.$$

Учитывая, что $\ln 5 = 1{,}6094$ получим, что по формуле Ньютона - Лейбница

$$\int_0^2 \ln(2x+1)dx = 2{,}0236.$$

б) Делим интервал интегрирования $[0;2]$ на 10 равных частей, находим длину одной части

$h = \frac{2-0}{10} = 0{,}2$, точки деления x_i и значения подынтегральной функции $y = \ln|2x+1|$ в этих точках:

$x_0 = 0$	$y_0 = \ln 1 = 0$
$x_1 = 0{,}2$	$y_1 = \ln 1{,}4 = 0{,}3365$
$x_2 = 0{,}4$	$y_2 = \ln 1{,}8 = 0{,}5878$
$x_3 = 0{,}6$	$y_3 = \ln 2{,}2 = 0{,}7885$
$x_4 = 0{,}8$	$y_4 = \ln 2{,}6 = 0{,}9555$
$x_5 = 1$	$y_5 = \ln 3 = 1{,}0986$
$x_6 = 1{,}2$	$y_6 = \ln 3{,}4 = 1{,}2238$
$x_7 = 1{,}4$	$y_7 = \ln 3{,}8 = 1{,}3350$
$x_8 = 1{,}6$	$y_8 = \ln 4{,}2 = 1{,}4351$
$x_9 = 1{,}8$	$y_9 = \ln 4{,}6 = 1{,}5261$
$x_{10} = 2$	$y_{10} = \ln 5 = 1{,}6094$.

Формула параболических трапеций (Симпсона) n - число четное

$$\int_a^b ydx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})\right).$$

Следовательно,

$$\mathrm{I} = \int_0^2 \ln(2x+1)dx \approx \frac{0{,}2}{3}\left((y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right).$$

$$I \approx \frac{0,2}{3}\left(\left(0+1,6094\right)+4\left(0,3365+0,7885+1,0986+1,3350+1,5261\right)+2\cdot\left(0,5878+\right.\right.$$

$$\left.\left.+0,9555+1,2238+1,4351\right)=\frac{0,2}{3}\left(1,6094+4\cdot 5,0847+2\cdot 4,2022\right)=\right.$$

$$=\frac{0,2}{3}\left(1,6094+20,3388+8,4044\right)=\frac{0,2\cdot 30,3526}{3}=2,0235\ .$$

Абсолютная ошибка этого результата составляет $\Delta=\left|2,0235-2,0236\right|=0,0001$.

Относительная ошибка составляет: $\delta=\frac{0,0001\cdot 100\%}{2,0236}0,0049\%$.

Задания лабораторной работы № 1

Найти: а) точное значение интеграла по формуле Ньютона – Лейбница; б) приближенное значение интеграла по формуле трапеций, разбивая отрезок интегрирования на 8 равных частей и производя вычисления с округлением до четвертого десятичного знака; в) вычислить с MathCAD; г) относительную погрешность в процентах.

1. $\int_{-1}^{7}\sqrt[3]{9x+1}\,dx$. **2.** $\int_{-2}^{6}\sqrt[3]{9x+10}\,dx$. **3.** $\int_{-3}^{5}\sqrt[3]{9x+19}\,dx$. **4.** $\int_{-4}^{4}\sqrt[3]{9x+28}\,dx$. **5.** $\int_{-5}^{3}\sqrt[3]{9x+34}\,dx$.

6. $\int_{0}^{8}\sqrt[3]{9x-8}\,dx$. **7.** $\int_{1}^{9}\sqrt[3]{9x-17}\,dx$. **8.** $\int_{2}^{10}\sqrt[3]{9x-26}\,dx$. **9.** $\int_{3}^{11}\sqrt[3]{9x-35}\,dx$. **10.** $\int_{4}^{12}\sqrt[3]{9x-44}\,dx$.

2.2 Лабораторная работа № 2 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами»

2.2.1 Цель работы: сформировать умения и навыки решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами**.**

2.2.2 Задачи работы: освоить правило построения общего решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами, структуру общего решения ЛНДУ и метод неопределённых коэффициентов отыскания частных решений специального вида ЛНДУ**.**

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. ПК.
2. Windows.
3. Open Office.

2.2.4 Описание (ход) работы: пример выполнения задания работы № 2.

Линейные неоднородные с постоянными коэффициентами и правой специальной частью (ЛНДУ).

Пример. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

$$y''-2y'+y=2\cos x-x+2,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$$

Решение: структура общего решения уравнения $y=y_{одн}+y^*$.

Составим характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$, $k_1=k_2=1$ и $y_{одн}=e^x(c_1+c_2x)$.

Для данной задачи $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=2\cos x-x+2$, где $f_1(x)=2\cos x$, $f_2(x)=-x+2$.

Найдем частное решение для $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Можно представить: $f_1(x)=2\cos x=e^{0x}\left(2\cos x+0\sin x\right)$.
$f_2(x)=-x+2=e^{0x}\left(\left(-x+1\right)\cos 0x+\sin 0x\right)$.

Для $f_1(x)$ $\alpha=0;\ \beta=1;\ \alpha+\beta i=i;\ ч=0;\ s=0.$ Тогда $\begin{array}{l} y_1^*=x^0e^{0x}\left(A\cos x+B\sin x\right). \\ y_1^*=A\cos x+B\sin x. \end{array}$

Подставим это решение в уравнение, а для этого найдем первую и вторую производную

1	$y_1^*=A\cos x+B\sin x$
-2	$y_1^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$
1	$y_1^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$.

$$\cos x(A-2B-A)+\sin x(B+2A-B)=2\cos x$$
$$-2B\cos x+2A\sin x=2\cos x.$$

Сократим на 2 и приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$

$-B=1;\quad B=-1.$

$A=0;\quad A=0.$

Итак $y_1^*=-\sin x.$

Для $f_2(x)=-x+2=e^{ox}((-x+1)\cos ox+\sin ox)$ имеем

$\alpha=0, \beta=0, \alpha+\beta i=0; r=0, s=\max\{1;0\}=1.$

$M_1(x)=A_1x+A_2$

$N_1(x)=B_1x+B_2.$

Тогда $y_2^*=x^0e^{0x}((A_1X+A_2)\cos ox+(B_1x+B_2)\sin x)$.

Упрощая, получим $y_2^*=A_1x+A_2$

Находим производные $\begin{array}{l} y_2^{*\prime}=A_1 \\ y_2^{*\prime\prime}=0. \end{array}$

Подставим в уравнение $\begin{array}{l} -2A_1+A_1x+A_2=-x+2 \\ xA_1+A_2-2A_1=-x+2. \end{array}$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем A_1 и A_2

$\begin{cases} A_1=-1, \\ A_2-2A_1=2 \end{cases}\qquad \begin{array}{l} A_1=-1 \\ A_2+2=2\Rightarrow A_2=0. \end{array}$

Итак $y_2^*=-x$.

Общее решение уравнения $y=e^x(c_1+c_2x)-x-\sin x$.

Учитывая начальные условия $y(0)=1, y'(0)=2$,

найдём c_1 и $c_2,$ Для этого найдём y'

$y'=e^x(c_1+c_2x)+e^xc_2-x-\cos x.$

Итак $\begin{cases} 1=e^0(c_1+c_2\cdot 0)-0-\sin 0, \\ 2=e^0(c_1+c_2\cdot 0)+e^0c_2-0-\cos 0. \end{cases}$

Или $\begin{cases} 1=c_1, \\ 2=c_1+c_2-1, \end{cases}\qquad \begin{array}{l} c_1=1, \\ c_2=2. \end{array}$

Частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, есть

$y=e^x(1+2x)-x-\sin x.$

Ответ: $y=e^x(1+2x)-x-\sin x.$

Задания лабораторной работы № 2

Задание. Найти общее решение ДУ, частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

Вариант 1

1. Найти общее решение уравнения $y' - y = 0$.

2. Найти общее решение уравнения $y' - y = 2xe^{x}$, $y(0) = 1$.

3. Найти решение уравнения $y'' - y = (x+1)e^{-2x}$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения $y' - 2y = 0$.

2. Найти общее решение уравнения $y' - 2y = 2xe^{2x}$, $y(0) = 1$

3. Найти решение уравнения $y'' - 9y = (2x-1)e^{-2x}$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

Вариант 3

1. Найти общее решение уравнения $y' - 3y = 0$.

2. Найти общее решение уравнения $y' - 3y = 3x^2e^{3x}$, $y(0) = 1$

3. Найти решение уравнения $y'' + y' - 2y = (x-1)e^{-x}$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие № 1 (2 часа).

Тема: «Матрицы и определители»

3.1.1 Задание для работы:

1. Числовые матрицы. Виды матриц.
2. Операции над матрицами.
3. Определители n-го порядка и их свойства.
4. Разложение определителя по строке (столбцу).
5. Обратные матрицы. Алгоритмы нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.
6. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые матрицы. Виды матриц.

2. Операции над матрицами.

Задача 1.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $2A + 3B$.

Решение. $2A + 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2(-1) & 2\cdot 2 & 2\cdot 7 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 0 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-1) & 3\cdot(-3) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 2 & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} -2+3 & 4-3 & 14-9 \\ 6+0 & 0+6 & 8+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 23 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A^{T} - 2B$.

Решение.

$$A^{T}-2B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 8 & -4\end{pmatrix}^{T}-2\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -1 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-14 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}.$$

Задача 1.3. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 8\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot(-B)$.

Решение. В соответствии с правилом размерностей произведение $A\cdot(-B)$ существует, так как $[3\times 2][2\times 2]=[3\times 2]$, и матрица $A\cdot(-B)$ будет иметь размер $[3\times 2]$:

$$A\cdot(-B)=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -8\\ 1 & 0\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}2\cdot 3+(-3)\cdot 1 & 2\cdot(-8)+(-3)\cdot 0\\ 0\cdot 3+1\cdot 1 & 0\cdot(-8)+1\cdot 0\\ 5\cdot 3+4\cdot 1 & 5\cdot(-8)+4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -16\\ 1 & 0\\ 19 & -40\end{pmatrix}.$$

Задача 1.4. Найти $A\cdot B\cdot C$, если $A=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Решение. Произведение $A\cdot B\cdot C$ существует, так как $[3\times 1][1\times 3][3\times 2]=[3\times 2]$ и будет матрицей размером 3×2. Для вычисления произведения $A\cdot B\cdot C$ здесь удобно воспользоваться свойством $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ и сначала найти матрицу $B\cdot C$, а затем $A\cdot(B\cdot C)$:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot(-1)+3\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Задача 1.5. Найти матрицу $(A\cdot B)^{T}$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. С учетом свойства $(A\cdot B)^{T}=B^{T}\cdot A^{T}$ данную задачу можно решить двумя способами:

а) $(A\cdot B)^{T}=\left(\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{T}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot(-3)+(-3)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-3)\cdot 0 & 2\cdot(-2)+(-3)\cdot 1\\ 1\cdot(-3)+4\cdot 2 & 1\cdot 1+4\cdot 0 & 1\cdot(-2)+4\cdot 1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}-12 & 2 & -7\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}-12 & 5\\ 2 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix};$$

б) так как $B^{T}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; $A^{T}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, то $B^{T}\cdot A^{T}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}(-3)\cdot 2+2\cdot(-3) & (-3)\cdot 1+2\cdot 4\\ 1\cdot 2+0\cdot(-3) & 1\cdot 1+0\cdot 4\\ (-2)\cdot 2+1\cdot(-3) & (-2)\cdot 1+1\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 5\\ 2 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}.$$

1.1.4. Задачи для самостоятельной работы. Вычислить.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. **2.** $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ и $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Найти $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & 8 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответы. 1. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. **3.** -2. **4.** $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 51 \\ -3 & -4 & 17 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -7 & 3 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 13 & 11 & 7 & -4 \\ 9 & 24 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

3. Определители *n*-го порядка и их свойства.

1. $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-7) \cdot 3 = 31$.

Определение 2. Определителем третьего порядка матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{pmatrix}$,

называется число, равное $\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{vmatrix} = \mathbf{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3} - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3$

Запомнить формулу легко в виде так называемого правила треугольников. В соответствии с ним со знаком «плюс» берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали (рис. 1.1). Члены со знаком «минус» определяются аналогично, но относительно побочной диагонали (рис.1.1).

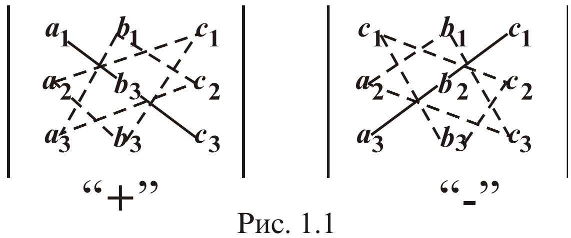


Рис. 1.1

Определители 3-го порядка можно вычислить и другим способом – по правилу Саррюса.

Правило Саррюса. В соответствии с правилом Саррюса из матрицы А нужно составить новую таблицу, приписав к матрице А справа сначала первый, а потом второй ее столбцы. Затем нужно перемножить элементы новой таблицы в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1.2 (перемножаются элементы в направлении стрелок), и составить из получившихся шести произведений алгебраическую сумму. При этом знаки произведений элементов, указанных стрелками со знаком «-», изменяются на противоположные.

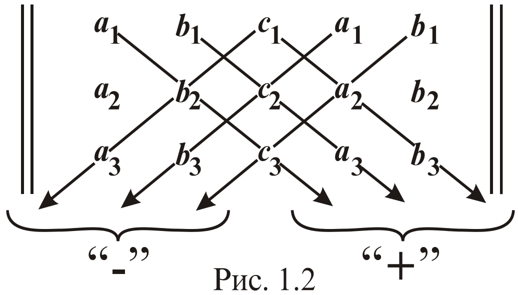


Рис. 1.2

Нетрудно проверить, что при вычислении определителя **третьего порядка** и по правилу треугольников, и по правилу Саррюса получается правая часть формулы (1.10).

Пример 1.1. Вычислить определитель
а) по правилу треугольников, б) по правилу Саррюса:

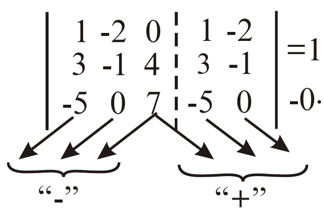
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 7 + (-2)\cdot 4\cdot(-5) + 0\cdot 3\cdot 0 - 0\cdot(-1)\cdot(-5) - (-2)\cdot 3\cdot 7 - 1\cdot 4\cdot 0 =$

$= -7 + 40 + 42 = 75;$

б)



$=1\cdot(-1)\cdot 7+(-2)\cdot 4\cdot(-5)+0\cdot 3\cdot 0-$
$-0\cdot(-1)\cdot(-5)-1\cdot 4\cdot 0-(-2)\cdot 3\cdot 7=75.$

Пример 1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти $M_{21}; A_{21}; M_{22}; A_{22}; A_{32}$.

Решение.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3;\ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot 3 = -3;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12;\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-12) = -12;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Соответствие знаков миноров и алгебраических дополнений с одинаковыми индексами определяется схемой (рис. 1.3).

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Рис. 1.3

(Нетрудно составить такую схему для определителя любого порядка, так как знаки чередуются как в строках, так и в столбцах.)

Решение типовых задач

Задача 1.6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Определитель равен нулю в соответствии со свойством 6: вторая строка пропорциональна третьей.

2. Разложение определителя по строке (столбцу).

Задача 1.7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Данный определитель 3-го порядка можно было бы вычислить по правилу треугольника или по правилу Саррюса. Покажем, что вычисления можно выполнить проще, если использовать свойства определителей. Преобразуем определитель так, чтобы в некоторой строке (столбце) часть элементов обратилась в нуль. Нули в строке (столбце) удобно получать с помощью единиц, поэтому получим их в первом столбце, содержащем единицы. Для этого выберем вторую строку (можно третью) в качестве рабочей. Умножив все ее элементы на (-2) и прибавив их к соответствующим элементам первой строки, получим 0 на месте элемента a_{11}. Аналогично, умножив вторую строку на (-1) и сложив ее с третьей, получим 0 на месте элемента a_{31}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{разложим} \\ \text{по первому} \\ \text{столбцу} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Ответ: 7.

Замечания. Если нули хотят получить в **столбце**, то в качестве **рабочей** должна выступать **некоторая строка;** если же нули получают в какой-либо **строке**, то в качестве **рабочего** должен выступать некоторый **столбец**.

Выполняемые преобразования над строками (столбцами) удобно и целесообразно записывать в «поле комментария».

Продемонстрируем предложение второго замечания на следующей задаче.

Задача 1.8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{Поле комментария} \\ \begin{vmatrix} 1\,\text{стр. - рабочая} \\ 2\,\text{стр.} = 2\,\text{стр.} + (\text{-}2) \cdot 1\,\text{стр.} \\ 4\,\text{стр.} = 4\,\text{стр.} + 3 \cdot 1\,\text{стр.} \end{vmatrix} \end{matrix} = = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -5 & 9 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3\text{стб.} - \text{рабочий} \\ 2\text{стб.} = 2\text{стб.} + (-3) \cdot 3\text{стб.} \\ 1\text{стб.} = 1\text{стб.} + 2 \cdot 3\text{стб.} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 10 & -10 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = = -1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -10 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$ Здесь использованы сокращения: стр. – строка, стб. – столбец. Последний определитель второго порядка равен нулю как определитель с пропорциональными столбцами. **Ответ:** 0.

1.2.5. Задачи для самостоятельной работы

Вычислить определители.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 7 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответы. 1. -6. **2.** -9. **3.** $a^2 + b^2$. **4.** 1. **5.** 0. **6.** 6. **7.** -6. **8.** -52. **9.** 44. **10.** 140.

4. Обратные матрицы. Алгоритмы нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

Алгоритм нахождения обратной матрицы приведем на примере матрицы 3-го порядка.

1. Находим определитель $|A|$. Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует. Вычисления завершаются. Если же $|A| \neq 0$, то продолжаем нахождение обратной матрицы.

2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A.

3. Составляем из алгебраических дополнений присоединенную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} & \mathbf{A_{13}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} & \mathbf{A_{23}} \\ \mathbf{A_{31}} & \mathbf{A_{32}} & \mathbf{A_{33}} \end{pmatrix}.$$

4. Транспонируем матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{31}} \\ \mathbf{A_{12}} & \mathbf{A_{22}} & \mathbf{A_{32}} \\ \mathbf{A_{13}} & \mathbf{A_{23}} & \mathbf{A_{33}} \end{pmatrix}.$$

5. Формируем обратную матрицу A^{-1}:

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|}\tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{A_{11}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A_{21}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A_{31}}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{\mathbf{A_{12}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A_{22}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A_{32}}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{\mathbf{A_{13}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A_{23}}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A_{33}}}{|\mathbf{A}|} \end{pmatrix}. \qquad (1.23)$$

Пример 1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1). $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. 2). $A_{11} = -3$; $A_{12} = -5$; $A_{21} = 2$; $A_{22} = 1$.

3). $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4). $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. 5). $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 \\ -5/7 & 1/7 \end{pmatrix}$.

Проверка.

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 \\ -5/7 & 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. **Ответ:** $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение.

1). $|A|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6\neq 0$. 2). $A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6$; $A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0$;

$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=0$; $A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=8$; $A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$;

$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$; $A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3$; $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$.

3). $\tilde{A}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 8 & 3 & 1\\ -10 & -3 & 1\end{pmatrix}$. 4). $\tilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}6 & 8 & -10\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 5). $A^{-1}=\frac{1}{6}\tilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}1 & 4/3 & -5/3\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$.

Проверка.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4/3 & -5/3\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 4/3-3/2+1/6 & -5/3+3/2+1/6\\ 0 & 0+1/2+3/6 & 0-1/2+3/6\\ 0 & 0-1/2+3/6 & 0+1/2+3/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$ **Ответ:** $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/3 & -5/3\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$.

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы

Систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и определителем основной матрицы A системы, отличным от нуля, можно решать с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим СЛАУ 3-го порядка

$$\begin{cases}\mathbf{a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1},\\ \mathbf{a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2},\\ \mathbf{a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3}.\end{cases} \tag{1.24}$$

Используя правила умножения матриц, эту систему можно записать в матричной форме

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}+a_{12}+a_{13}}\\ \mathbf{a_{21}+a_{22}+a_{23}}\\ \mathbf{a_{31}+a_{32}+a_{33}}\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{x_1}\\ \mathbf{x_2}\\ \mathbf{x_3}\end{pmatrix}}_{\mathbf{X}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\ \mathbf{b_2}\\ \mathbf{b_3}\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \tag{1.25}$$

или $A\cdot X=B$, где A – матрица системы, X - вектор-столбец переменных x_1,x_2,x_3; B - вектор-столбец свободных членов уравнения (1.24).

Умножая матричное равенство $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, будем иметь $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, но $A^{-1} \cdot A = E$, $EX = X$ и окончательно $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$. (1.26)

Формула (1.26) справедлива для СЛАУ любого порядка n.

Пример 3. Решить с помощью обратной матрицы систему из примера 1.4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Находим обратную матрицу A^{-1}.

1). $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. 2). $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$. 3). $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 4). $\tilde{A}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычисляем по формуле (1.23) вектор X^0 решения СЛАУ:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 \\ 1+0+0 \\ -1+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

5. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.

В теории систем линейных алгебраических уравнений широкое применение находит понятие ранга матрицы. Приведем определение ранга матрицы и способы его вычисления.

Пусть дана произвольная матрица А. Если в ней есть строка, состоящая из одних нулей, то такую строку называют **нулевой.** Выполним элементарные преобразования над строками матрицы А, аналогичные описанному прямому ходу метода Гаусса при приведении СЛАУ к ступенчатому виду.

Определение 5. Рангом матрицы А называется количество ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной из А с помощью элементарных преобразований над строками.

Привести матрицу к ступенчатому виду можно различными способами. Однако независимо от последовательности и конкретного набора элементарных преобразований над матрицей А получающиеся ступенчатые матрицы будут содержать одинаковое количество ненулевых строк. Иначе говоря, **элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.** Обозначается ранг матрицы через $\mathrm{rang}A$ или $\mathrm{rg}A$.

Пример 1.10. Найти ранг матрицы А

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение. Получаем последовательно нули в 1, 2, 3-м столбцах:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -1 & -1\\ 0 & -5 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

В последней матрице одна строка нулевая и три – ненулевые. Следовательно, ранг матрицы А равен 3 $(\mathrm{rg}A=3)$.

Ответ: $\mathrm{rg}A=3$.

Свойство. Ранг любой матрицы равен наибольшему порядку миноров этой матрицы, отличных от нуля. Такой ненулевой минор называют **базисным**. Это свойство иногда берут в качестве эквивалентного определения ранга матрицы и используют для вычисления ранга.

Задачи для самостоятельной работы

Найти A^{-1}, если матрица A имеет следующий вид:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. 3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

Решить с помощью обратной матрицы системы:

5. $\begin{cases} x+2y=4,\\ 3x+y=12.\end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=8,\\ 5x_1+x_2-2x_3=-1,\\ 2x_2+4x_3=1.\end{cases}$ 7. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2,\\ 2x_1+x_2=-1,\\ -x_1+2x_2-x_3=1.\end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x+3y+2z=5,\\ -x+z=0,\\ 2x+y-z=2.\end{cases}$ 9. $\begin{cases} 4x+y+z=-1,\\ -2x+y+3z=3,\\ x+2y+4z=1.\end{cases}$

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **5.** $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. $X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.** $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}$. **8.** $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. **9.** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.1.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:
- освоили понятия о матрице и определителе и их свойствах;
- приобрели умения и навыки выполнения операций над матрицами, вычисления определителей.

3.2 Практическое занятие № 2 (2 часа).

Тема: «Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера**»**

3.4.1 Задание для работы:

1. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

Δ = det A, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30. \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60. \qquad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90. \qquad x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$$

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}; \qquad \textit{Ответ: } x = 0;\ y = 0;\ z = -2.$$

3.2.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили решение систем *n* линейных алгебраических уравнений методом о правилу Крамера;
- приобрели умения и навыки решения систем *n* линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера.

3.3 Практическое занятие № 3 (2 часа).

Тема: «Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения»

3.4.1 Задание для работы:

1. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

2. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит из двух этапов. На первом, называемом **прямым ходом,** СЛАУ приводят к **ступенчатому виду**. На втором этапе, называемом **обратным ходом**, последовательно находят неизвестные. Поясним идею метода Гаусса на примерах.

Пример 1.6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Прямой ход. Каждый шаг прямого хода заключается в исключении очередной неизвестной x_i из всех уравнений начиная с $(i+1)$-го.

В данном примере исключим сначала x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого умножим первое уравнение на (–3) и сложим со вторым, затем умножим первое уравнение на (–4) и сложим с третьим. Получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -x_2 + 4x_3 = 5; \\ -5x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases}$$

Теперь исключим переменную x_2 из последнего уравнения. Умножим второе уравнение на (-5) и сложим с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -x_2 - 4x_3 = 5; \\ -11x_3 = -22. \end{cases}$$

Получена система, эквивалентная исходной. Но она приведена к треугольному виду и из нее легко находится решение.

2. Обратный ход. Из последнего уравнения имеем $x_3 = \dfrac{-22}{-11} = 2$, из второго $x_2 = (5 - 4\cdot 2)/(-1) = 3$ и из первого $x_1 = x_3 - x_2 = 2 - 3 = -1$.**Ответ:** $x_1 = -1$; $x_2 = 3$**;** $x_3 = 2$

Мы уже обращали внимание на то, что элементарные преобразования СЛАУ затрагивают лишь коэффициенты системы. Поэтому удобнее записывать коэффициенты системы в расширенную матрицу и работать далее с ней.

Пример 1.7. Решить систему из примера 1.4 методом Гаусса.

Решение.

1. Прямой ход. Формируем расширенную матрицу и, последовательно получая нули в первом и втором столбцах с помощью элементарных преобразований, приводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь при переходе от первой матрицы ко второй в качестве рабочей выступила первая строка. С ее помощью получены нули в первом столбце во второй и третьей строках. При переходе от второй матрицы к третьей рабочей является вторая строка; умножив ее на (-2) и сложив с третьей, получили нуль в позиции a_{32}.

2. Обратный ход. Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ \quad -x_2 \quad\quad = \ 1; \\ \quad\quad\quad x_3 = \ 1. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений имеем $x_2 = 1;\ \ x_3 = 1$.

Из первого $x_1 = -1 - x_2 - x_3 = -1 - 1 - 1 = -3$. **Ответ:** $x_1 = -3,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 1$.

2. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Метод Гаусса позволяет устанавливать совместность и несовместность СЛАУ, а для совместной и неопределенной СЛАУ находить множества решений. Проиллюстрируем эти качества метода Гаусса вновь на примерах.

Пример 1.8. Решить систему из примера 1.5 методом Гаусса.

Решение. 1. Прямой ход. Переставим сразу в расширенной матрице первую и третью строки

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 3 & 1 & -2 & | & 7 \\ 2 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 4 & -14 & | & 4 \\ 0 & 2 & -7 & | & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 2 & -7 & | & 2 \\ 0 & 4 & -14 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 2 & -7 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

При переходе от первой матрицы ко второй нули в первом столбце получены: во второй строке прибавлением к ней первой строки, предварительно умноженной на (-3); в третьей строке – прибавлением к ней первой строки, умноженной на (-2). При переходе от второй матрицы к третьей переставлены вторая и третья строки.

2. Обратный ход. Последней матрице соответствует система из двух уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1; \\ \quad 2x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, т.е. является совместной, но неопределенной. Находится множество решений следующим образом. Переменные x_1, x_2, находящиеся в углах ступеньки, остаются в левой части уравнений, а переменная x_3 объявляется свободной и переносится в правые части уравнений вместе со своими коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 4c; \\ \quad 2x_2 = 2 + 7c. \end{cases}$$

Здесь $x_3 = c$, c – произвольное число (параметр).

Последняя система является определенной, но относительно параметра c. Из второго уравнения имеем $x_2 = 1 + 7/2 \cdot c$, из первого $x_1 = x_2 + 1 - 4c = 1 + 7/2 \cdot c + 1 - 4c = 2 - 1/2 \cdot c$.

Ответ: $x_1 = 2 - c/2$; $x_2 = 1 + 7c/2$; $x_3 = c$, где c – произвольное число $(c \in \mathbf{R})$.

Из рассмотренного примера следует, что если в результате прямого хода СЛАУ приводится к ступенчатому (трапециевидному) виду с числом уравнений, меньшим, чем число неизвестных, то она имеет бесконечное множество решений.

Пример 1.9. Исследовать систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 7x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Прямой ход

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & -8 & 5 & 3 \end{array}\right) (2)(-7) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & 6 & -2 & -25 \end{array}\right) (2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Последней матрице отвечает система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \\ -3x_2 + x_3 = 10; \\ 0 = -5. \end{cases}$$

Очевидно, она несовместна, так как $0 \neq -5$. **Ответ:** СЛАУ несовместна.

Правило. Если на некотором шаге прямого хода все элементы некоторой строки расширенной матрицы равны нулю, кроме последнего элемента (элемента в столбце свободных членов), то система несовместна.

Задачи для самостоятельной работы

Следующие СЛАУ решить по правилу Крамера:

1. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 = 8, \\ 4x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + y = 12. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} -x + 5y = 2, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 3, \\ 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 32, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -9. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

Следующие системы исследовать с помощью метода Гаусса и найти их решения в случае совместности:

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 5. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - 7 = 0. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Найти ранги следующих матриц:

17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответы

1. $x_1 = 2; \quad x_2 = -5$. **2.** $x = 4, \quad y = 0$.
3. $x_1 = 0; \quad x_2 = 3$. **4.** $x = 11/7; \quad y = 5/7$.
5. $x_1 = 1/3; \quad x_2 = -1/3; \quad x_3 = 14/3$.
6. $x_1 = 1/2; \quad x_2 = -3/2; \quad x_3 = 1$. **7.** $x_1 = 5; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = -1$.
8. $x_1 = 2; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -2$. **9.** $x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1$.
10. $x_1 = 3; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 2$.
11. $x_1 = (9 - 7c)/5; \; x_2 = (1 + 2c)/5; \; x_3 = c, \; \mathbf{c} \in \mathbf{R}$.
12. $x_1 = 1; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1$. **13.** Система несовместна.
14. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **15.** $x_1 = 7c, \; x_2 = -2c, \; x_3 = -5c, \; c \in \mathbf{R}$.
16. $x_1 = 4c, \quad x_2 = -5c, \quad x_3 = -7c, \; c \in \mathbf{R}$. **17.** 3. **18.** 2.

3.3.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:
- освоили решение систем *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса; освоили понятие о совместность систем линейных алгебраических уравнений и критерии Кронекера-Капелли.
- приобрели умения и навыки решения систем *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, использования критерия Кронекера-Капелли для проверки совместность систем линейных алгебраических уравнений.

3.4 Практическое занятие № 4 (2 часа).

Тема: «Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов»

3.4.1 Задание для работы:

1. Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами.
2. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек
3. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.
4. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами.

Задача 2.1. В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 2.19) даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Найти векторы $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FC}$, если F – середина стороны AB, а E – середина стороны DC.

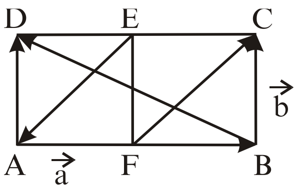


Рис. 2.19

Решение. Вектор $\overrightarrow{BD}$ можно найти двумя способами. По правилу параллелограмма как сумму векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\left(-\overrightarrow{AB}\right)=\vec{b}-\vec{a}.$$

С другой стороны, можно рассуждать так: вектор $\overrightarrow{BD}$ направлен из конца вектора $\overrightarrow{AB}$ в конец вектора $\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\right)$ и тогда по определению разности векторов $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Аналогично $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}=-1/2\,\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\left(-\overrightarrow{BC}\right)=-1/2\vec{a}-\vec{b}$,

$$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=1/2\,\overrightarrow{\mathbf{AB}}+BC=1/2\vec{a}+\vec{b}.$$

Ответ: $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$; $\overrightarrow{EA}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{FC}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.

2. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек

Задача 2.2. Вектор $\vec{a}=(3;2;-1)$ приложен в точке $A=(-1;2;4)$. Найти координаты точки B – конца вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, а также орт $\overrightarrow{a^0}$ вектора $\vec{a}$.

Решение. Пусть точка B имеет координаты $x; y; z$. В соответствии с формулой (2.9) получаем

$$(3,2,-1)=(x-(-1), y-2, z-4),$$

откуда, по определению равенства двух векторов, имеем $3=x+1$, $2=y-2$, $-1=z-4$ или $x=2,\quad y=4,\quad z=3$. Первая часть задачи решена.

Найдем $\overrightarrow{a^0}$. Поскольку $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}$ и $\overrightarrow{a^0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|},\dfrac{a_y}{|\vec{a}|},\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$,

то $\overrightarrow{a_0^0}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},-\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$. **Ответ:** $B(2;4;3)$, $\quad\overrightarrow{a^0}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},-\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

Задача 2.3. Выяснить, можно ли из векторов $\vec{a}=(-1;2)$; $\vec{b}=(2;0)$; $\vec{c}=(-7;6)$ выделить базис на плоскости. Если такой базис существует, разложить третий вектор по базису.

Решение. Как известно (п.2.4), всякие три вектора на плоскости линейно зависимы, т.е. заданные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в совокупности линейно зависимы. Базис на плоскости образуют два неколлинеарных вектора. Проверим, образуют ли базис векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По определению линейной независимости векторов в этом случае равенство $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = 0$ должно выполняться только для нулевых λ_1 и λ_2. Проверим, так ли это.

$$\lambda_1(-1{,}2) + \lambda_2(2{,}0) = (0{,}0)$$

или

$$(-\lambda_1 + 2\lambda_2,\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0) = (0{,}0),$$

откуда

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Значит, векторы $\vec{a}, \vec{b}$ линейно независимы, т.е. образуют базис на плоскости. Разложим теперь вектор $\vec{c}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где α и β – числа, подлежащие определению. Перепишем линейную комбинацию $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ в координатной форме

$$(-7{,}6) = \alpha(-1{,}2) + \beta(2{,}0) \text{ или } (-7{,}6) = (-\alpha + 2\beta,\ 2\alpha),$$

откуда получаем систему $\begin{cases} -\alpha + 2\beta = -7, \\ 2\alpha \qquad\ = 6. \end{cases}$

Решая ее, находим $\alpha = 3, \quad \beta = -2.$ Итак, $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. **Ответ:** базис $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$; $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

2.6.3. Задачи для самостоятельной работы

1. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Выразить через $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторы, совпадающие с медианами $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CL}$ треугольника.

2. В прямоугольнике $ABCD$ даны векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, совпадающие с диагоналями параллелограмма. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, совпадающие со сторонами прямоугольника.

3. Определить начало вектора $\vec{a} = (2;-3;-1)$, если его конец совпадает с точкой $B(1;-1;2)$. Найти также модуль и орт $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$.

4. В пространстве в прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(1;1;1)$, $B(-3;2;0)$. Найти расстояние от этих точек до начала координат и проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на координатные оси.

5. Даны две координаты $a_x = 4$, $a_y = -12$ вектора $\vec{a}$. Определить третью координату $\vec{a}_z$ при условии, что $|\vec{a}| = 13$.

6. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = (2;-3)$ и $\vec{q} = (9;4)$. Проверить, образуют ли они базис и, если образуют, найти разложение вектора $d = (49;14)$ по базису $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$.

7. Проверить, образуют ли базис векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

а) $\vec{a} = (-2;1;3)$, $\vec{b} = (0;2;1)$, $\vec{c} = (6;4;0)$, б) $\vec{a} = (1;0;1)$, $\vec{b} = (-1;2;1)$, $\vec{c} = (1;2;3)$.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не образуют базис, то найти линейную зависимость между ними.

ОТВЕТЫ

1. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CL}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$.

2. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$.

3. $A(-1;2;3)$, $|\vec{a}|=\sqrt{14}$, $\vec{a}^0=\frac{1}{\sqrt{14}}(2;-3;-1)$.

4. $\rho(O,A)=\sqrt{3}$, $\rho(O,B)=\sqrt{13}$, $Пр_{0x}AB=-4$, $Пр_{0y}AB=1$, $Пр_{0z}AB=-1$.

5. ± 3. 6. $\vec{d}=2\vec{p}+5\vec{q}$. 7. а) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис; б) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ линейно зависимы: $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$.

2. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.

Скалярное произведение векторов. Решение типовых задач

Задача 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, вычислить $(3\vec{a}-2\vec{b},\quad \vec{a}+2\vec{b})$.

Решение

$$(3\vec{a}-2\vec{b},\quad \vec{a}+2\vec{b})=3(\vec{a};\vec{a})+6(\vec{a};\vec{b})-2(\vec{b};\vec{a})-4(\vec{b};\vec{b})= =3|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2+4(\vec{a};\vec{b})=3\cdot 9-4\cdot 16+4|a|\cdot|b|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=$$

$=27-64+4\cdot 3\cdot 4\cdot(-1/2)=-61$. **Ответ:** -61.

Задача 2. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ будут перпендикулярны.

Решение. Предположим, что $(\vec{a}+\alpha\vec{b})\perp(\vec{a}-\alpha\vec{b})$, тогда

$$(\vec{a}+\alpha\vec{b},\vec{a}-\alpha\vec{b})=0\Rightarrow(\vec{a},\vec{a})-\alpha(\vec{a},\vec{b})+\alpha(\vec{b},\vec{a})-\alpha^2(\vec{b},\vec{b})=0 \quad\Rightarrow\ \Rightarrow|\vec{a}|^2-\alpha|\vec{b}|^2=9\Rightarrow 9-25\alpha^2=0,\quad \alpha^2=\frac{9}{25}\ \Rightarrow\ \alpha=\pm\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\alpha=\pm\frac{3}{5}$.

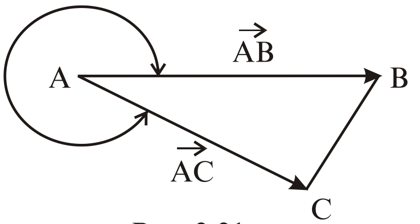


Рис. 2.21

Задача 3. Даны вершины треугольника $A(3;2;4)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Определить его внешний угол при вершине A (рис. 2.21).

Решение.

$\overrightarrow{AB}=(5-3;1-2;-1-4)=(2;-1;-5)$; $\overrightarrow{AC}=(1-3;-2-2;\ 1-4)=(-2;-4;-3)$;

$\cos\left(\overrightarrow{AB},\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2(-2)+(-1)(-4)+(-5)\cdot(-3)}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{4+16+9}}==\frac{15}{\sqrt{30}\sqrt{29}}=\sqrt{\frac{15}{58}}$. **Ответ:** внешний угол при вершине A равен $2\pi-\arccos\sqrt{\frac{15}{58}}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;-4)$, $\vec{b}=(6;-3;2)$. Вычислить: а) $(\vec{a},\vec{b})$, б) $\vec{a}^2$, в) $\sqrt{\vec{b}^2}$, г) $(2\vec{a}-3\vec{b};\vec{a}+2\vec{b})$, д) $(\vec{a}+\vec{b})^2$, е) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

2. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x},\vec{a})=3$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=12$. Вычислить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$

4. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=5\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ взаимно перпендикулярны?

5. Вычислить $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$, если $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$.

6. Вычислить $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, если $\vec{a}=(5;\,2;\,5)$, $\vec{b}=(2;\,-1;\,2)$.

7. Вычислить работу, производимую силой $\vec{F}=(3;-2;-5)$ при прямолинейном перемещении точки ее приложения из $A(2;-3;5)$ в точку $B(3;-2;-1)$.

8. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Найти внутренний угол φ_A при вершине A и внешний φ_B при вершине B.

Ответы

1. а) 22, б) 36, в) 7, г) -200, д) 129, е) 41. **2.** $\vec{x}=(1;\ 1/2;\ -1/2)$. **3.** $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=13$.

4. $\left(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2}\right)=\pi/3$. **5.** $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=-4$. **6.** $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=6$. **7.** $A=31$. **8.** $\varphi_A=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_B=\dfrac{3\pi}{4}$.

3. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов.

Векторное произведение. Решение типовых задач

Задача 2.7. Дано $|\vec{a}|=10,\ |\vec{b}|=2$ и $(\vec{a},\vec{b})=12$. Вычислить: $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$.

Решение. $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$, $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=0{,}8$,

$\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=10\cdot2\cdot0{,}8=16$. **Ответ:** $\left|[\vec{a};\vec{b}]\right|=16$.

Задача 2.8. Дано: $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Найти: а) $[\vec{a},\vec{b}]$, б) $[3\vec{a}-2\vec{b};\,\vec{a}+2\vec{b}]$.

Решение: а) $[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$. б)

$[3\vec{a}-2\vec{b};\,\vec{a}+2\vec{b}]=3[\vec{a},\vec{a}]+6[\vec{a},\vec{b}]-2[\vec{b},\vec{a}]-4[\vec{b},\vec{b}]=$
$=6[\vec{a},\vec{b}]+2[\vec{a},\vec{b}]=8[\vec{a},\vec{b}]=8(5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k})=40\vec{i}+8\vec{j}+56\vec{k}$. **Ответ:** а) $\left|[\vec{a};\vec{b}]\right|=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$;

б) $[3\vec{a}-2\vec{b};\,\vec{a}+2\vec{b}]=40\vec{i}+8\vec{j}+56\vec{k}$.

Задача 2.9. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1;-2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-1;-4;2)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(4;\,4;\,1)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-2;\,2)$.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|10\vec{i}-8\vec{j}-8\vec{k}\right|=\sqrt{57}$$. **Ответ:** $S_{\Delta ABC}=\sqrt{57}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$, вычислить:

а) $\left|\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right]\right|$, б) $\left|\left[3\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-2\vec{b}\right]\right|$.

2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны?

3. Даны точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=(2;-3;1)$ и $\vec{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

5. В пространстве $\mathbf{R}^3$ даны точки: $A(1;1;2)$, $B(3;1;-1)$, $C(0;-2;2)$, $D(3;4;-2)$. Найти координаты точки $M(x;y;z)$, если известно, что $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AC}$ и $|DM|=\sqrt{18}$.

6. К точке $M(2;-1;3)$ приложены две силы: $\vec{F}_1=(5;0;-2)$ и $\vec{F}_2=(-1;3;2)$. Найти момент равнодействующей этих сил относительно точки M_1, симметрично точке M относительно точки $O(0;0;0)$ начала координат. **Указание:** $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\parallel\vec{x}$.

Ответы: 1. а) 24; б) 60. **2.** $\vec{a}\parallel\vec{b}$. **3.** $S_\Delta=14$. **4.** $\vec{x}=(7;5;1)$. **5.** $M_1(0;1;-2)$; $M_2(6;7;-2)$. **6.** $\vec{M}=-18\vec{i}+24\vec{j}+20\vec{k}$.

Смешанное произведение векторов. Решение типовых задач

Задача 2.10. Определить ориентацию тройки векторов $\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle$, если $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{j}$.

Решение.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=1>0$$. В силу свойства 6 смешанного произведения тройка $\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle$ является правой. **Ответ:** правая тройка.

Задача 2.11. Вычислить объем треугольной пирамиды, заданной своими вершинами в декартовой прямоугольной системе координат: $A(-1;-3;1)$, $B(3;3;-2)$, $C(-1;4;2)$, $D(0;0;5)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(4;6;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(0;7;1)$, $\overrightarrow{AD}=(1;3;4)$,

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}|AB\cdot AC\cdot AD|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}4 & 6 & -3\\ 0 & 7 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot127=\frac{127}{6}$$. **Ответ:** $\frac{127}{6}$.

Задача 2.12. Определить, можно ли провести плоскость через данные четыре точки:

а) $A(3;2;-1)$, $B(1;2;-2)$, $C(-1;0;1)$, $D(1;1;1)$,

б) $A(-2;0;1)$, $B(3;1;2)$, $C(0;-1;3)$, $D(1;2;0)$.

Решение. Если четыре точки лежат в одной плоскости, то любые три вектора, построенные на этих точках, будут компланарны. В силу свойства 5 смешанное произведение таких векторов должно быть равно нулю:

а) $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-4;-2;2)$; $\overrightarrow{AD}=(-2;-1;2)$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & -1\\ -4 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$. Значит, через точки A, B, C, D в случае «а» плоскость провести нельзя;

б) $\overrightarrow{AB}=(5;1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(2;-1;2)$; $\overrightarrow{AD}=(3;2;-1)$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=0$. Точки A, B, C, D в данном случае лежат в одной плоскости.

Ответ: а) нельзя; б) можно.

Задачи для самостоятельной работы

1. Установить, компланарные ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если

а) $\vec{a}=(2;3;-1)$; $\vec{b}=(1;-1;3)$; $\vec{c}=(1;9;-11)$; б) $\vec{a}=(3;-2;1)$; $\vec{b}=(2;1;2)$; $\vec{c}=(3;-1;-2)$.

2. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;1)$ и $D(4;1;3)$ (система координат декартова прямоугольная).

3. Найти длину высоты тетраэдра ABCD, опущенной из вершины D, если заданы координаты вершин $A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$ в декартовой системе координат.

4. Найти расстояние от точки $D(1;-3;2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(2;2;-2)$, $B(-1;0;4)$ и $C(-2;1;3)$.

5. Можно ли тройку векторов $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ взять в качестве базиса трехмерного пространства, если $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(0;2;-4)$ и $\vec{c}=(-1;4;0)$.

Ответы. 1. а) компланарные; б) некомпланарные. **2.** $V=1$. **3.** $h=\frac{1}{\sqrt{11}}$. **4.** $\frac{29}{\sqrt{122}}$. **5.** Можно, т.к. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$.

3.4.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:
- освоили понятия о векторах и скалярах, линейных и нелинейных операциях над векторами, декартовых координатах векторов и точек;
- приобрели умения и навыки выполнения линейных и нелинейных операций над векторами, в том числе в координатной форме.

3.5 Практическое занятие № 5 (2 часа).

Тема: «Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Прямая и плоскость в пространстве. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Поверхности второго порядка**»**

3.5.1 Задание для работы:

1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.

2.Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

3. Прямая и плоскость в пространстве.

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.

Решение типовых примеров

Задача 1. Составить уравнение прямой L, проходящей через **заданную точку** $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей **заданный направляющий вектор** $\vec{q} = (l, m)$.

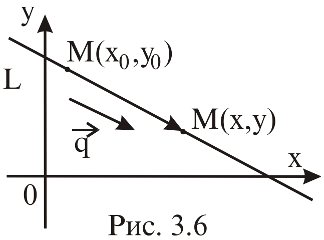


Рис. 3.6

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и образуем вектор $\overline{M_0M}$ (рис. 3.6). Точка M будет лежать на прямой L тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \parallel \vec{q}$. Но если $\overline{M_0M} \parallel \vec{q}$, то существует число $t \in R$ такое, что $\mathbf{\overline{M_0M} = t\vec{q}}$,

(3.7)

или в скалярной форме $(x - x_0,\ y - y_0) = t(l, m)$, откуда

$$\begin{cases} \mathbf{x = x_0 + tl,} \\ \mathbf{y = y_0 + tm.} \end{cases} \qquad (3.8)$$

Уравнения (3.7), (3.8) есть искомые **параметрические уравнения** прямой L в векторной (3.7) и скалярной (3.8) формах.

Исключая параметр t из уравнений (3.8), получаем уравнение $\mathbf{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}}$,

называемое **каноническим уравнением** прямой L, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей **заданный направляющий вектор** $\vec{q} = (l, m)$.

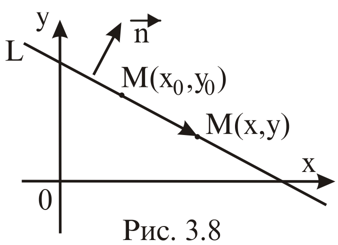


Рис. 3.8

Задача 2. Составить уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной к заданному вектору $\vec{n} = (A, B)$. **Решение.** Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка на искомой прямой L, не совпадающая с заданной точкой M_0. Образуем вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0).$$

По условию $\vec{n} \perp L$ и, значит, $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$ (рис. 3.8).

Из условия перпендикулярности векторов получаем искомое уравнение прямой L в векторной форме $\mathbf{\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0}$.

(3.12)

Перепишем его в скалярной форме $\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$.

(3.13)

Уравнения (3.12) в векторной форме и (3.13) в скалярной являются искомым уравнением прямой L, **проходящей** через **заданную точку** $M_0(x_0, y_0)$ и **перпендикулярной к заданному вектору** $\vec{n} = (A, B)$.

Рассмотрим конкретный пример. **Пример 3.2.** Составить уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(5; 1)$ параллельно прямой L_1: $3x + 2y + 5 = 0$.

Решение. По условию $L \parallel L_1$. Поэтому вектор нормали $\vec{n}_1 = (3; 2)$ прямой L_1 будет одновременно и вектором нормали прямой L. В результате задача свелась к рассмотренной выше задаче 2: составить уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(3;1)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (3; 2)$. В соответствии с (3.13) получаем окончательно

$L_1: \quad 3(x-5)+2(y-1)=0$, или $L_1: \quad 3x+2y-17=0$. **Ответ:** $L_1: \quad 3x+2y-17=0$.

Задача 3. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные не совпадающие точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

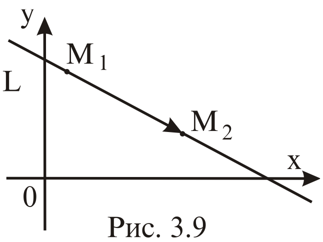


Рис. 3.9

Решение. Образуем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 3.9). Он параллелен прямой L, и, значит, его можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{q}$ этой прямой. В результате задача свелась к задаче 1: составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку $\mathbf{M_1}$ (или $\mathbf{M_2}$) и имеющей заданный направляющий вектор

$$\vec{\mathbf{q}} = \overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}} = (\mathbf{x_2 - x_1}; \quad \mathbf{y_2 - y_1}).$$

С учетом (3.3) получим **искомое уравнение**

$$\frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}} \tag{3.14}$$

прямой L, проходящей через две заданные точки.

Задача 4. Составить уравнение прямой L, отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки величиной a и b $(a \neq 0, \quad b \neq 0)$.

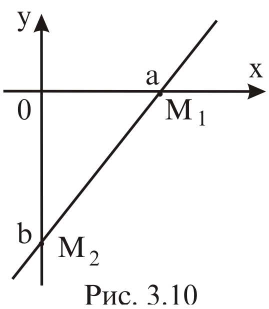


Рис. 3.10

Решение. Введем в рассмотрение точки $M_1(a; 0)$ и $M_2(0; b)$ (рис. 3.10). В соответствии с формулой (3.14) можем записать

$$L: \quad \frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \quad \text{или} \quad -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}.$$

Отсюда получаем **уравнение прямой в отрезках** $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} + \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1}$. (3.15)

Замечание. Параметр $a > 0$, если прямая L пересекает ось Ox в ее положительной части, и $a < 0$, если прямая L пересекает ось Ox в ее отрицательной части. Аналогично определяется знак параметра b, но относительно оси Oy. Так, на рис. 3.10 $a > 0$, $b < 0$.

Пример 3.3. Составить уравнения сторон треугольника ABC, а также уравнение высоты, опущенной из вершины B, если заданы координаты вершин $B(3; 4)$ и $C(6; 0)$, угловой коэффициент $k_{AB} = 3$ стороны AB и направляющий вектор $\vec{q}_{AC} = (5; 2)$ стороны AC.

Решение. Уравнение стороны BC составим как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки B и C:

$$L_{BC}: \quad \frac{x-3}{6-3} = \frac{y-4}{0-4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-4}.$$

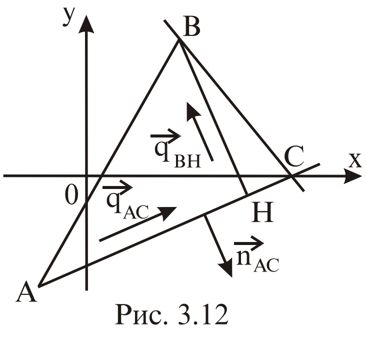


Рис. 3.12

Для стороны AB известны координаты точки B и угловой коэффициент $k_{AB} = \operatorname{tg}\alpha = 3$ (рис. 3.12). Поэтому ее уравнение удобно записать, используя формулу (3.16):

$$L_{AB}: \quad y-4 = 3(x-3) \Rightarrow 3x - y - 5 = 0.$$

Уравнение стороны AC можно записать как каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $C(6;0)$ с заданным направляющим вектором $\vec{q}_{AC} = (5;\,2)$:

$$L_{AC}: \quad \frac{x-6}{5} = \frac{y-0}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x - 5y - 12 = 0\,.$$

Вектор нормали $\vec{n}_{AC} = (2;-5)$ прямой AC можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{q}_{BH} = (2;\,-5)$ высоты BH $(\vec{n}_{AC} \perp AC$ и $\vec{g}_{BH} \perp AC)$. Тогда в соответствии с (3.9) получаем уравнение высоты BH:

$$L_{BH}: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} \quad \Rightarrow \quad -5x - 2y + 23 = 0\,.$$

Ответ. $L_{AB}: \quad 3x - y - 5 = 0$; $L_{AC}: \quad 2x - 5y - 12 = 0$; $L_{BC}: \quad \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{-4}$;

$L_{BH}: \qquad 5x + 2y - 23 = 0\,.$

2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Задача 5. Найти расстояние $\rho(M_0, L)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $L: \quad Ax + By + C = 0$.
Решение. Пусть точка $M_0 \notin L$. В противном случае $\rho(M_0, L) = 0$. Расстояние $\rho(M_0, L)$ находится по формуле

$$\boldsymbol{\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}\,. \qquad (3.18)$$

Так, если $M_0(5;6)$, а $L: -4x + 3y + 7 = 0$, то $\rho(M_0; L) = \dfrac{|-4\cdot 5 + 3\cdot 6 + 7|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \dfrac{5}{5} = 1$.

Пример 3.4. Установить взаимное расположение прямых

а) $2x + 3y + 1 = 0$ и $-6x + 4y - 1 = 0$;

б) $x + 3y - 5 = 0$ и $2x + 6y + 1 = 0$;

в) $-5x + y - 2 = 0$ и $15x - 3y + 6 = 0$

и в случае их пересечения найти угол между ними, а для параллельных прямых – расстояние между ними.

Решение: а) здесь $\vec{n}_1 = (2;\,3)$, $\vec{n}_2 = (-6;\,4)$. Очевидно $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, так как $\dfrac{2}{-6} \neq \dfrac{3}{4}$. Это означает, что прямые пересекаются. Найдем угол между ними. В соответствии с (3.20) имеем

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot(-6) + 3\cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}\sqrt{(-6)^2 + 4^2}} = \frac{0}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}\,.$$

Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны;

б) прямые $L_1: x + 3y - 5 = 0$ и $L_2: 2x + 6y + 1 = 0$ параллельны, поскольку коэффициенты A, B в уравнениях этих прямых пропорциональны: $1/2 = 3/6$.

Расстояние между прямыми L_1 и L_2 равно расстоянию от произвольной точки, лежащей, например, на прямой L_1, до второй прямой L_2. Зададим произвольно одну координату, например $x = -1$, точки на прямой L_1. Из уравнения L_1 находим $3y = 6$ или

$y = 2$, т.е. точка $M_0(-1;2) \in L_1$. Далее по формуле (3.18) находим расстояние $\rho(M_0, L_2) = \rho(L_1, L_2)$:

$$\rho(M_0, L_2) = \frac{|2 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{11}{2\sqrt{10}};$$

в) здесь $\frac{-5}{15} = \frac{1}{-3} = \frac{-2}{6}$, т.е. пропорциональны все коэффициенты A, B, C в уравнениях прямых L_1 и L_2. Значит, прямые L_1 и L_2 совпадают.

Ответ: а) прямые перпендикулярны; б) прямые параллельны: $\rho(L_1, L_2) = \frac{11}{2\sqrt{10}}$;

в) прямые L_1 и L_2 совпадают.

Задачи для самостоятельной работы

1. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4;2)$.

2. Определить точки пересечения линии $y = x^2 - 4x + 3$ с осями координат и построить ее.

3. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Ох и от точки $F(0;2)$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-5)$ и:

а) перпендикулярной к прямой $2x + 6y - 1 = 0$;

б) перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (-1;3)$;

в) проходящей через точку $M_1(-2;1)$.

5. Составить уравнения сторон квадрата $ABCD$, если известны координаты смежных вершин $A(2;1)$, $B(6;4)$.

Указание. Рассмотреть один из двух квадратов, а именно лежащий в верхней полуплоскости относительно стороны AB.

6. Найти угол между прямыми

$$L_1: \quad y = 3x + 6 \quad \text{и} \quad L_2: \quad 2x - 3y + 5 = 0.$$

7. Установить взаимное расположение прямых

а) $-4x + y + 3 = 0$ и $4x + 3y - 4 = 0$,

б) $3x - 5y + 1 = 0$ и $9x - 15y - 6 = 0$,

в) $x + 3y - 6 = 0$ и $-4x - 12y + 24 = 0$

,

в случае их пересечения найти угол между ними, а для параллельных прямых – расстояние между ними.

8. Найти основание F перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(-3;4)$ на прямую $L: \quad 2x - 3y - 6 = 0$.

9. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого $A(-4;2)$, $B(2;-5)$, $C(5;0)$.

10-11. Построить область, определяемую неравенствами

$$\begin{cases} 3x + y - 12 \le 0, \\ 5x + 8y - 40 \le 0, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y - 30 \le 0, \\ 5x + 2y - 40 \le 0, \\ x - 4y - 2 \le 0, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

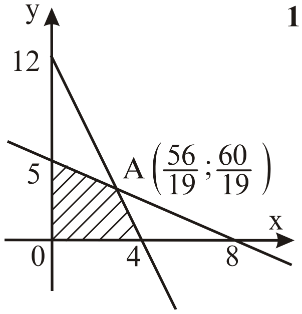
Ответы. 1. $2x - y + 5 = 0$. **2.** $(1;0);(3;0);(0;3)$. **3.** $y = x^2/4 + 1$. **4.** а) $3x - y - 14 = 0$; б) $-x + 3y + 18 = 0$; в) $6x + 5y + 7 = 0$. **5.** $AB:\ 3x - 4y - 2 = 0$; $CD:\ 3x - 4y + 23 = 0$; $DA:\ 4x + 3y - 11 = 0$; $BC:\ 4x + 3y - 36 = 0$. **6.** $\alpha = \arccos\left(9/\sqrt{130}\right)$.

7. а) прямые пересекаются: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{-13}{5\sqrt{17}}\right)$; б) прямые параллельные: $\rho(L_1, L_2) = 3/\sqrt{34}$;

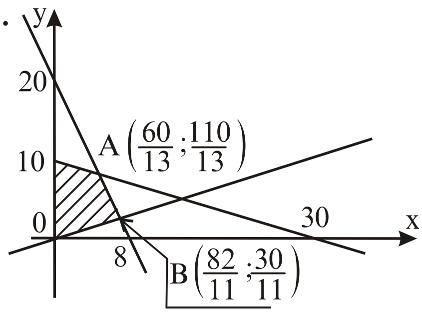
в) прямые совпадают: $\rho(L_1, L_2) = 0$. **8.** $F(9/13; -20/13)$.

9. $(1;-1)$ - точка пересечения медиан; $(8/3;-2)$ - точка пересечения высот.

10.



11.



2. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение плоскости и прямой в пространстве.
3. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Решение типового варианта

Задача №1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(2;-3), B(5;1),C(3;-4). Не находя координаты вершины D, найти:
1) уравнение стороны AD;
2) уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;
3) длину высоты BK;
4) уравнение диагонали BD;
5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Решение. Сначала построим чертеж. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $A(2;-3)$, $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Построим отрезки AB и BC.

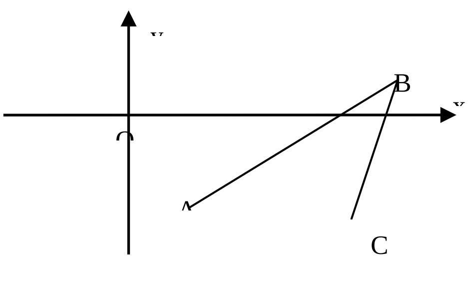


Рис. 1

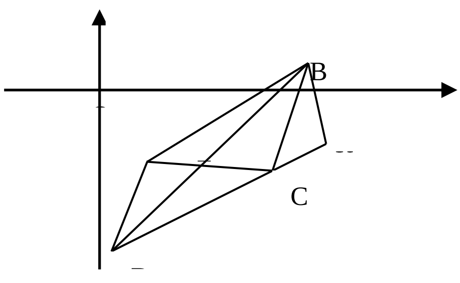


Рис. 2

Достроим полученный рисунок до параллелограмма и нанесем на чертеж высоту BK.

1) Составим уравнение прямой AD.

а) Предварительно найдем уравнение прямой BC. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (3.1)$$

По условию $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Подставим координаты точек B и C в уравнение (3.1): $\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-1}{-4-1}$, т.е. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-1}{-5}$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, то есть в виде $Ax+By+C=0$. Для этого в последнем уравнении избавимся от знаменателей $-5(x-5)=-2(y-1)$ и проведем преобразования, перенося все слагаемые в левую часть равенства: $-5x+2y+23=0$ или $5x-2y-23=0$.

Из этого уравнения выразим y: $-2y=-5x+23$; $y=\frac{5}{2}x-\frac{23}{2}$. Получили уравнение вида $y=kx+b$ - уравнение с угловым коэффициентом.

б) Воспользуемся тем фактом, что противоположные стороны параллелограмма параллельны. Составим искомое уравнение прямой AD как уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ в данном направлении, имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, (3.2)

где направление определяется угловым коэффициентом k.

Условие параллельности двух прямых $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ имеет вид

$$k=k_1 \qquad (3.3)$$

По условию задачи $A(2;-3)$, прямая BC: $y=\frac{5}{2}x-\frac{23}{2}$. Подставим координаты точки A в уравнение (3.2): $y+3=k(x-2)$. Так как прямая AD параллельна прямой BC, то в силу формулы (3.3) их угловые коэффициенты совпадают. Угловой коэффициент прямой BC равен $\frac{5}{2}$, следовательно, уравнение прямой AD имеет вид $y+3=\frac{5}{2}(x-2)$.

Запишем уравнение прямой AD в общем виде. Для этого раскроем скобки и все слагаемые перенесем в левую часть равенства: $-\frac{5}{2}x+y+8=0$. Умножим обе часть равенства на (-2) и получим общее уравнение прямой AD: $5x-2y-16=0$.

Запишем уравнение прямой AD в виде с угловым коэффициентом. Для этого выразим y из общего уравнения: $y=\frac{5}{2}x-8$.

2)Составим уравнение высоты BK, проведенной из вершины B на сторону AD как урав нение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AD. Условие пер пендикулярности двух прямых $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ имеет вид

$$k=-\frac{1}{k_1} \qquad (3.4)$$

Подставим координаты точки B в уравнение (3.2): $y-1=k(x-5)$. Так как высота BK перпендикулярна прямой AD, то их угловые коэффициенты связаны соотношением (3.4). Угловой коэффициент прямой AD равен $\frac{5}{2}$, следовательно, угловой коэффициент высоты BK равен $-\frac{2}{5}$ и уравнение прямой BK имеет вид $y-1=-\frac{2}{5}(x-5)$. Запишем уравнение высоты BK в общем виде: $2x+5y-15=0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y=-\frac{2}{5}x+3$.

3) Найдем длину высоты BK как расстояние от точки B до прямой AD.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую и определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (3.5)$$

Так как BK перпендикулярна AD, то длина BK может быть найдена с помощью формулы (3.5). По условию $B(5;1)$, прямая AD определяется уравнением $5x-2y-16=0$. В силу формулы (3.5) длина высоты BK равна $d=\frac{|5\cdot 5-2\cdot 1-16|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{|7|}{\sqrt{25+4}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$.

4)Найдем уравнение диагонали BD как уравнение прямой, проходящей через точки B и E, где E - середина отрезка AC.

а) Если $A(x_1;y_1)$ и $C(x_2;y_2)$, то координаты точки $E(x_0;y_0)$ - середины отрезка AC, определяются формулами

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (3.6)$$

По условию $A(2;-3), C(3;-4)$. В силу формул (3.6) имеем: $x_0=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$,

$y_0=\frac{-3-4}{2}=-\frac{7}{2}$. Следовательно $E(\frac{5}{2};-\frac{7}{2})$.

б) Так как точка пересечения диагоналей является их серединой, то точка E (середина отрезка AC) является точкой пересечения диагоналей и диагональ BD проходит через точку E.

Воспользуемся уравнением (3.1). По условию $B(5;1)$, $E(\frac{5}{2};-\frac{7}{2})$. В силу формулы (3.1) уравнение прямой BE (диагонали BD) имеет вид: $\frac{x-5}{\frac{5}{2}-5}=\frac{y-1}{-\frac{7}{2}-1}$ или $\frac{x-5}{-\frac{5}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{9}{2}}$.

Запишем это уравнение в общем виде: $9x-5y-40=0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y=\frac{9}{5}x-8$.

5)Найдем тангенс угла между диагоналями BD и AC.

а) Найдем уравнение диагонали AC как уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Воспользуемся уравнением (3.1). По условию $A(2;-3)$, $C(3;-4)$. Следовательно, $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+3}{-4+3}$. Общее уравнение диагонали AC имеет вид $x+y+1=0$, уравнение с угловым коэффициентом – вид $y=-x-1$, угловой коэффициент k_1 прямой AC равен -1 .

б) Уравнение диагонали BD имеет вид $y=\frac{9}{5}x-8$, ее угловой коэффициент $k_2=\frac{9}{5}$.

в) Тангенс угла φ между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется формулой

$tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$. Следовательно, $tg\varphi = \left|\dfrac{\frac{9}{5} - (-1)}{1 + \frac{9}{5}\cdot(-1)}\right| = \left|\dfrac{\frac{14}{5}}{-\frac{4}{5}}\right| = \dfrac{7}{2}$. Отсюда $\varphi = arctg\,\dfrac{7}{2}$.

Задача №2.Приведем решения простейших задач, входящих в это задание.

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;3;2)$, $B(-2;1;0)$, $C(4;2;-3)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.7)$$

Тогда уравнение плоскости ABC в силу уравнения (3.7) имеет вид $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -2-1 & 1-3 & 0-2 \\ 4-1 & 2-3 & -3-2 \end{vmatrix} = 0$ или $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, т.е. в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Для этого раскроем определитель по первой строке. $(x-1)\cdot(10-2) - (y-3)\cdot(15+6) + (z-2)\cdot(3+6) = 0$. После преобразований получим: $8x - 21y + 9z + 37 = 0$.

2) Найти нормальный вектор плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$.

Решение. Нормальный вектор $\overline{N}$ - это вектор, перпендикулярный плоскости. Если плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то нормальный вектор имеет координаты $\{A, B, C\}$.

Для плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$ нормальным является вектор $\overline{N} = \{2;3;-1\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\overline{N} = \{2;3;-1\}$ так же является нормальным вектором плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-\lambda\}$ будет являться нормальным вектором рассматриваемой плоскости.

3) Найти косинус угла между плоскостями $2x - 3y + z - 4 = 0$ и $x + 5y + 4z = 0$.

Решение. Угол φ между двумя плоскостями $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ представляет собой угол между их нормальными векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Для плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$ координаты нормального вектора $\overline{N}_1 = \{A_1;B_1;C_1\}$ определяются равенствами $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $C_1 = 1$. Для плоскости $x + 5y + 4z = 0$ -равенствами $A_2 = 1$, $B_2 = 5$, $C_2 = 4$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + (-3)\cdot 5 + 1\cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + 5^2 + 4^2}} =$$

$$\frac{2 - 15 + 4}{\sqrt{4 + 9 + 1}\cdot\sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{-9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{42}} = -\frac{9}{\sqrt{588}} = -\frac{9}{14\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

4) Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1;-2;5)$ параллельно плоскости P_1: $2x + 3y - z + 5 = 0$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (3.8)$$

Подставим в уравнение (3.8) координаты точки M_0: $A(x-1)+B(y+2)+C(z-5)=0$. Условие параллельности плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (3.9)$$

Так как плоскости P и P_1 параллельны, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости P можно взять нормальный вектор $\overline{N_1}=\{2;3;-1\}$ плоскости P_1, т.е. в формуле (3.9) отношение $\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{-1}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P_1 примет вид $2(x-1)+3(y+2)-(z-5)=0$. Запишем это уравнение в общем виде: $2x+3y-z+9=0$.

5) Найти расстояние от точки $M_0(1,3,-2)$ до плоскости P: $3x-2y+4z-5=0$.

Решение. Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $P: Ax+By+Cz+D=0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, и определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3.10)$$

Для плоскости $3x-2y+4z-5=0$ координаты нормального вектора $\overline{N}=\{A;B;C\}$ определяются равенствами $A=3$, $B=-2$, $C=4$. Следовательно,

$$d=\frac{|3\cdot1-2\cdot3+4\cdot(-2)-5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{16}{\sqrt{29}}.$$

6)Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;-2;3)$, $M_2(3;1;2)$

Решение. Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3.11)$$

Так как $M_1(1;-2;3)$, $M_2(3;1;2)$, то в силу (3.11) получим уравнения $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-3}{2-3}$ или $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

7) Найти направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$.

Решение. Направляющий вектор $\overline{s}$ - это вектор, параллельный прямой. Если прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$, то направляющий вектор $\overline{s}$ имеет координаты $\{p;q;r\}$.Для рассматриваемой прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$ направляющим вектором является вектор $\overline{s}=\{2;3;-2\}$. Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\overline{s}=\{2;3;-2\}$ так же является направляющим вектором прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-2\lambda\}$ будет являться направляющим вектором рассматриваемой прямой.

8)Найти косинус угла между прямыми $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$.

Решение. Угол φ между двумя прямыми $l_1:\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и $l_2:\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ представляет собой угол между их направляющими векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

Для прямой $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}_1=\{p_1;q_1;r_1\}$ определяются равенствами $p_1=2, q_1=-2,\ r_1=3$. Для прямой $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$ - равенствами $p_2=3,\ q_2=-4,\ r_2=1$. Значит, $\cos\varphi=\frac{2\cdot3+(-2)\cdot(-4)+3\cdot1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}=$ $\frac{6+8+3}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}=\frac{17}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$.

9) Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(3;2;-1)$ параллельно прямой $l_1:\ \frac{x-5}{4}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-6}{3}$

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$. Здесь $(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки, через которую проходит прямая. В канонические уравнения прямой l подставим координаты точки M_0. Получим: $\frac{x-3}{p}=\frac{y-2}{q}=\frac{z+1}{r}$.

Условие параллельности прямых $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и $\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ имеет вид

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2} \qquad (3.12)$$

Так как прямые l и l_1 параллельны, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять направляющий вектор $\bar{s}_1=\{4;-2;3\}$ прямой l_1, т.е. в формуле (3.12) отношение $\frac{p}{4}=\frac{q}{-2}=\frac{r}{3}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}$.

10) Найти угол между прямой l: $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ и плоскостью P: $2x-y+3z-4=0$.

Решение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Угол φ между прямой и плоскостью равен $\frac{\pi}{2}-\psi$, где ψ - угол между направляющим вектором $\bar{s}$ прямой и нормальным вектором $\bar{N}$ плоскости.

Угол φ между прямой $l: \dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ и плоскостью $P: Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой

$$\sin\varphi=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Для плоскости P: $2x-y+3z-4=0$ координаты нормального вектора $\overline{N}=\{A;B;C\}$ определяются равенствами $A=2$, $B=-1$, $C=3$. Для прямой l: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}=\{p;q;r\}$ - равенствами $p=5$, $q=3$, $r=-1$. Синус угла между прямой и плоскостью равен $\sin\varphi=\dfrac{2\cdot5+(-1)\cdot3+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{4}{\sqrt{490}}$. Следовательно, $\varphi=\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{490}}$.

11) Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1,-2,-3)$ перпендикулярно прямой l: $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z-0}{-2}$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Подставим в указанное уравнение координаты точки M_0. Получим: $A(x-1)+B(y+2)+C(z+3)=0$. Условие перпендикулярности плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и прямой $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ имеет вид

$$\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r} \tag{3.13}$$

Так как искомая плоскость P перпендикулярна прямой l, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости можно взять направляющий вектор $\bar{s}=\{4,1,-2\}$ прямой l, т.е. в формуле (3.13) отношение $\dfrac{A}{4}=\dfrac{B}{1}=\dfrac{C}{-2}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P примет вид $4\cdot(x-1)+1\cdot(y+2)+(-2)\cdot(z+3)=0$. Запишем это уравнение в общем виде: $4x+y-2z-8=0$.

12) Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(5;-3;2)$ перпендикулярно плоскости P: $x+4y-z=0$.

Решение. Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку, имеют вид $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$. Подставим в эти уравнения координаты точки M_0. Получим: $\dfrac{x-5}{p}=\dfrac{y+3}{q}=\dfrac{z-2}{r}$. Условие перпендикулярности прямой $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид $\dfrac{A}{p}=\dfrac{B}{q}=\dfrac{C}{r}$. Так как прямая l перпендикулярна плоскости P, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять нормальный вектор $\overline{N}=\{1;4;-1\}$ плоскости P, т.е. в формуле (3.13) отношение $\dfrac{1}{p}=\dfrac{4}{q}=\dfrac{-1}{r}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-1}$.

13) Найти координаты точки пересечения прямой l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости P: $x+2y-z+5=0$.

Решение. Координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ пересечения прямой $\begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ представляют собой решение системы

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases} \qquad (3.14)$$

Запишем параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-1+t \end{cases}$ и подставим выражения для x,y,z в уравнение плоскости P: $(1+2t)+2\cdot 3t-(-1+t)+5=0$. Отсюда $7t+7=0$; $t=-1$. Подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{cases}$. Следовательно, $M_0(-1;-3;-2)$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(1;2), B(-1;3),C(-4;-2). Не находя координаты вершины D, найти:

6) уравнение стороны AD;
7) уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;
8) длину высоты BK;
9) уравнение диагонали BD;
10) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Задача 2. Даны точки A(1;2;3), B(-1;3;5), C(2;0;4), D(3;-1;2). Найти:

1) общее уравнение плоскости ABC;
2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;
3) расстояние от точки D до плоскости ABC;
4) канонические уравнения прямой AB;
5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB;
6) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.

3.5.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные типовые задачи для прямой на плоскости, для плоскости и прямой в пространстве;
- приобрели умения и навыки решения основных типовых задач для прямой на плоскости, для плоскости и прямой в пространстве.

3.6 Практическое занятие № 6 (2 часа).

Тема: «Предел и непрерывность функции действительной переменной. Производная функции. Правила дифференцирования. Дифференциал. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя. Производные и дифференциалы высших порядков»

3.6.1 Задание для работы:

1. Предел функции действительной переменной.
2. Непрерывность функции действительной переменной.
3. Производная функции. Правила дифференцирования. Дифференциал.
4. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя. Производные и дифференциалы высших порядков

3.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Предел функции действительной переменной.

Решение типовых задач

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+1}{x^2+2x+3}=\left|\begin{matrix}\text{подставляем}\\ x=1\end{matrix}\right|=\dfrac{1-5+1}{1+2+3}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$. Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1}=\left|\begin{matrix}\text{подставляем} & \\ x=-1 & \text{получаем } \left(\dfrac{0}{0}\right)-\text{это неопределенность}\end{matrix}\right|$. Чтобы избавиться от такой неопределенности следует и в числителе, и в знаменателе выделить "ноль", то есть множители , которые и дают нули. В данном примере *(x+1)* обращается в *0* при x=-1, его и будем выделять, чтобы потом сократить.

1. $x^2-1=(x-1)\underline{(x+1)}$ 2. $x^2-5x-6=0$ (находим корни этого уравнения):

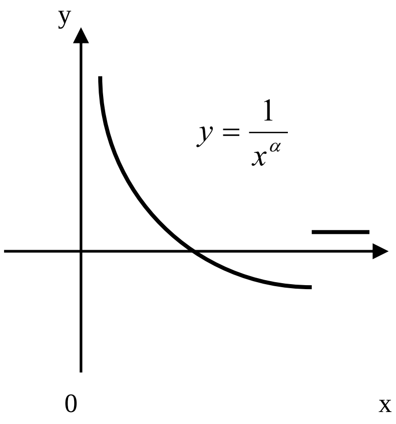
$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm7}{2}\Rightarrow\begin{matrix}x_1=6\\ x_2=-1\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad x^2-5x-6=(x-6)\underline{(x+1)};$$

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-6)\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-6}{x-1}\left|\begin{matrix}\text{подставляем}\\ x=-1\end{matrix}\right|=\dfrac{-1-6}{-1-1}=\dfrac{7}{2}$. Отв: $\dfrac{7}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+3x-1}{4x^3+2x+5}=\left|\begin{matrix}\text{при} \quad \text{подстановке} & \\ x=\infty \quad \text{получаем} & \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)-\text{это неопределенность}\end{matrix}\right|$.

Чтобы избавиться от такой неопределенности , следует и в числителе, и в знаменателе вынести за скобки наивысшую степень *x*.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+3x-1}{4x^3+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(1-4\overset{0}{\frac{1}{x}}+3\overset{0}{\frac{1}{x^2}}-\overset{0}{\frac{1}{x^3}}\right)}{\cancel{x^3}\left(4+2\underset{0}{\frac{1}{x^2}}+\underset{0}{\frac{5}{x^3}}\right)}=\frac{1}{4}.$$



…учили в ответе отношение коэффициентов … старших степенях x. Ответ : $\dfrac{1}{4}$.

4) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2-\sqrt{1-x}}{x+3}=\left|\dfrac{2-\sqrt{1-(-3)}}{-3+3}=\dfrac{0}{0}\right|$.

Для решения следует воспользоваться формулой сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Домножим числитель и знаменатель на $2+\sqrt{1-x}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to-3}\frac{\left(2-\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{2^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{4-(1-x)}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\cancel{3+x}}{\cancel{(x+3)}\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\left|\frac{1}{2+\sqrt{1-(-3)}}\right|=\frac{1}{4}.\qquad \textit{Ответ}:\frac{1}{4}.$$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)=|\infty-\infty|$.

Для решения применяем тот же прием, что и выше: домножаем числитель и знаменатель на сумму этих корней, чтобы получить разность квадратов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-3-\left(\cancel{x^2}-2x+1\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=4\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Как и в примере 3) вынесем за скобки x в первой степени, причем

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x^2\left(1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=x\sqrt{1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}\text{, тогда}$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(1-\overset{0}{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+2\underset{0}{\frac{1}{x}}-\underset{0}{\frac{3}{x^2}}}+\sqrt{1-2\underset{0}{\frac{1}{x}}+\underset{0}{\frac{1}{x^2}}}\right)}=4\frac{1}{1+1}=2$$

Ответ: 2.

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin15x}{tg13x}=\left|\dfrac{0}{0};\ \textit{применяем первый замечательный предел}:\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1\right|=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\overset{1}{\sin15x\cdot15x\cdot13x\cdot\cos13x}}{\underset{1}{15x}\cdot13x\cdot\underset{1}{\sin13x}}=\lim_{x\to0}\frac{15x}{13x}=\frac{15}{13}.$$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}\left|\textit{т.к.}\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{3}{3}=1,\quad \textit{то имеем неопределенность}\ (1)^{\infty}\right|$

Применяем второй замечательный предел: $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$. Выделяем в основании степени “единицу” так: прибавляем *1* и вычитаем *1*.

$$\frac{3x+4}{3x-2}+1-1=1+\frac{3x+4}{3x-2}-\underbrace{1}_{3x-2}=1+\frac{\cancel{3x}+4-\cancel{3x}+2}{3x-2}=1+\frac{6}{3x-2}.$$

В нашем случае $u=\dfrac{6}{3x-2}$, т.е. $\dfrac{1}{u}=\dfrac{3x-2}{6}$, поэтому

$$\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}}=e$$

Подставляем это в пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{1+\frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}}}_{e}{}^{\cdot\frac{6}{3x-2}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6}{3x-2}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x}{3x-2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}}=e^{\frac{12}{3}}=e^4.$$

Ответ: e^4.

2. Непрерывность функции действительной переменной.

Исследовать на непрерывность и построить график функции:

1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\langle -1 \\ x^2+1, & -1\le x\le 2 \\ 7-x, & x\rangle\, 2 \end{cases}$

Для исследования функции на непрерывность воспользуемся тем, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если выполняются равенства:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$$

Все элементарные функции, входящие в данную функцию, непрерывны на своих интервалах, поэтому проверять непрерывность будем в точках «склеивания».

<u>x=-1</u>

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<-1}}f(x)=\lim_{x\to -1-0}x=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>-1}}f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2+1)=(-1)^2+1=\underline{2}$$

$$f(-1)=(-1)^2+1=\underline{2}$$

Сравниваем эти три числа и видим, что первое равенство в (*) не выполняется. Следовательно, $x=-1$ - точка разрыва I рода, причем неустранимого (т.е. скачок).

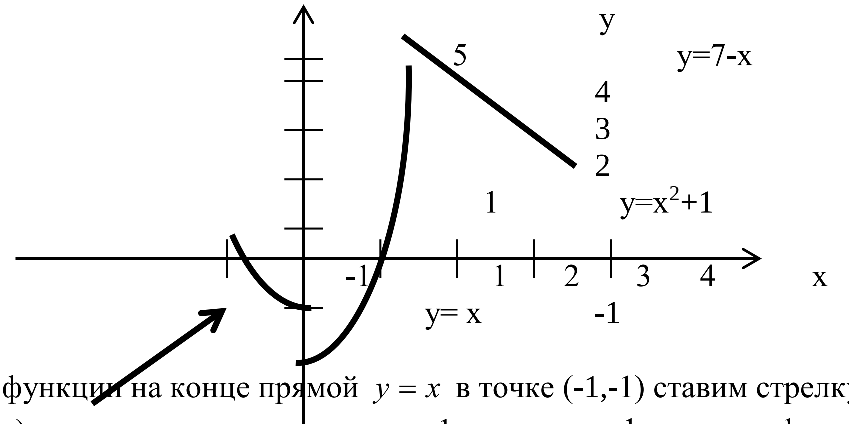
<u>x=2</u>

$$\lim_{\substack{x\to 2-0\\ x<2}}f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x^2+1)=2^2+1=\underline{5}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2-0\\ x>2}}f(x)=\lim_{x\to 2-0}(7-x)=7-2=\underline{5}$$

$$f(2)=2^2+1=\underline{5}$$

Сравниваем эти три числа и видим, что все равенства в (*) выполняются. Следовательно, в точке $x=2$ данная функция непрерывна.



На графике функции на конце прямой $y=x$ в точке (-1,-1) ставим стрелку, так как функция $f(x)=x$ при x, строго меньшем –1, а при $x=-1$ значение функции $f(x)$ вычисляется уже по другой формуле x^2+1. Причем в точках непрерывности никаких стрелок не ставится.

$$2)\ f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

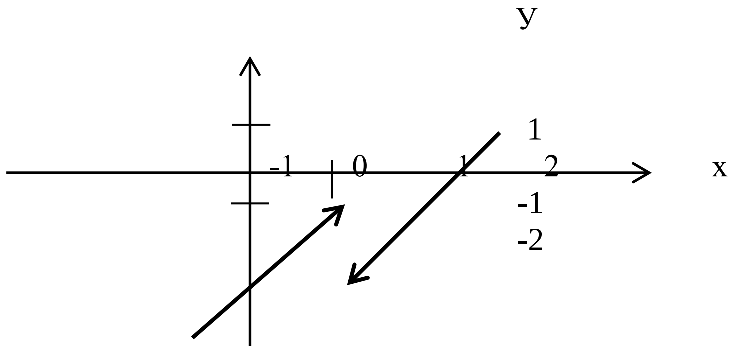
О.Д.З. $x \neq 1$.

Так как $x=1$ не входит в область допустимых значений (О.Д.З.) функции, то $x=1$ является точкой разрыва данной функции. Выясним с помощью односторонних пределов, разрыв какого рода терпит функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to 1-0\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1-0\\ x<1}}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\cancel{\lim_{x\to 1-0}}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}(x-2)=1-2=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1+0\\ x>1}} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\cancel{\lim_{x\to 1+0}}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}(x-2)=1-2=-1$$

Получили, что в (*) первое равенство выполняется, а функция $f(1)$ не существует, т.е. второе равенство не выполняется. Следовательно, x=1 – точка разрыва I рода, причем устранимого. На графике выкалывается точка (1,-1) стрелками, так как x=1 не входит в О.Д.З.



3) $f(x)=1-2^{\frac{1}{x+3}}$ О.Д.З. $x\neq -3$. Значит x=-3 - точка разрыва.

Определяем тип разрыва функции в этой точке. Для этого опять находим левый и правый пределы при $x\to -3$.

Левый предел.

$$\lim_{\substack{x\to -3-0\\ x<-3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -3-0\\ x<-3}}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|\begin{matrix}x+3\to -0\\ т.к.\ x<-3\end{matrix}\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to -\infty\right.$$

$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to 0\Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}\to (1-0)=1\right|=1$$

Правый предел.

$$\lim_{\substack{x\to -3+0\\ x>-3}} f(x)=\lim_{\substack{x-3+0\\ x>-3}}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|\begin{matrix}x+3\to +0\\ т.к.\ x>-3\end{matrix}\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to +\infty\Rightarrow\right.$$

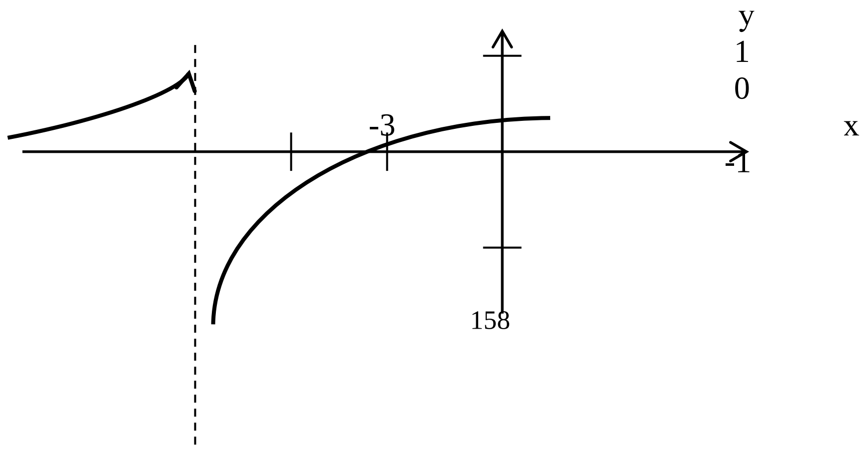
$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to \infty\Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}=(1-\infty)=-\infty\right|=-\infty$$

получился бесконечный предел, поэтому x=-3 – точка разрыва II рода.

Исследуем поведение функции при $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|x+3\to\infty\Rightarrow\frac{1}{x+3}\to 0\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to 1\Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}\to (1-1)=0\right|=0$$



Задачи для самостоятельной работы

ЗАДАНИЕ № 1. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+5x-1}{x+5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x^2-2x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-1}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+2x+3}{3x^2+x-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2+x-1}{x^3+2x-5}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{6x+1}-1}{3x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{4(1-\cos x)^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tg3x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 2x}$ 14) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$ 15) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x-4}{3x-5}\right)^{\frac{2x+3}{5}}$ 16) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+4}$

ЗАДАНИЕ 2. Исследовать на непрерывность и построить графики функций:

1) $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), x\le -1\\ (x+1)^3, -1<x<0\\ x, x\ge 0\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-x, x\le 0\\ -(x-1)^2, 0<x<2\\ x-3, x\ge 2\end{cases}$ 3) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 4) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$

1. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

2. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Решение типовых задач

Найти производные функций:

1) $y=e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

$$y'=(e^{x^3-5x^2+4x+12})'=\left|\begin{array}{l}\textit{Можно представить данную функцию как}\quad y=e^u,\\ \textit{где } u=x^3-5x^2+4x+12.\ \textit{Зная, что } \left(e^u\right)'=e^u\cdot u',\ \textit{получим}\end{array}\right|=$$

$$=e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(x^3-5x^2+4x+12\right)'=e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(3x^2-10x+4\right).$$ Ответ: $y'=\left(3x^2-10x+4\right)e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

2) $y=tg^3 5x$.

$$y'=\left[(tg5x)^3\right]'=\left|\begin{array}{l}\textit{Можно представить } y=u^3,\textit{где}\quad u=tg5x.\\ \textit{Причем } \left(u^3\right)'=3u^2\cdot u'\end{array}\right|=3(tg5x)^2\cdot(tg5x)'=$$

$$=3tg^2 5x\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5=15tg^2 5x\frac{1}{\cos^2 5x}.$$ Ответ: $y'=15\frac{tg^2 5x}{\cos^2 5x}$.

3) $y=3x\ln x$.

$$y'=3(x\cdot\ln x)'=\left|(u\cdot v)'=u'v+v'u;\quad (c\cdot u)'=cu'\right|=3\left[(x)'\cdot\ln x+x(\ln x)'\right]=3\left[1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right]=3(\ln x+1)$$

Ответ: $y'=3(\ln x+1)$.

4) $y=\frac{x^2-3+1}{2x}$.

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)' = \left|Правило:\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-3x+1\right)'x-(x)'\left(x^2-3x+1\right)}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)x-\left(x^2-3x+1\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2-3x-x^2+3x-1}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2}$$

Ответ: $y' = \dfrac{x^2-1}{2x^2}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1) $y = e^{\sin x}x^5 + \lg(5x+1)$ 2) $y = \dfrac{\cos^2 3x}{2x+3} - \arcsin 2x$ 3) $y = \sqrt{3x^2+1} + 2^{tgx}$ 4) $y = ctg^2 8x - 2x^3 + 1$

5) $y = arctg^3(\cos x)$ 6) $y = 3^{x^2}\sin 3x$ 7) $y = \dfrac{\arccos 2x}{x} - 8\sqrt{x} + 2x$ 8) $y = \lg(\sin 2x) + \cos 3x$

9) $y = 3^{\ln x} arcctg 2x$ 10) $y = \ln^2\dfrac{1}{x}$

1. Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталя.
2. Производные и дифференциалы высших порядков.

Решение типовых задач

В данных задачах необходимо найти $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функций, заданных неявно или параметрически.

Чтобы продифференцировать функцию, неявно заданную выражением $F(x,y)=0$, необходимо это выражение продифференцировать по x, считая y функцией от x и из полученного выражения найти $y`$.

Пример: Найти y' и y'' от функции $y - x - arctgy = 0$, заданной неявно.

Решение: На основании правила дифференцирования сложной функции имеем: $y' - 1 - \dfrac{y'}{1+y^2} = 0$.

Отсюда $y'\left(1-\dfrac{1}{1+y^2}\right)=1$, $y'\cdot\dfrac{1+y^2-1}{1+y^2}=1$, $y'\cdot\dfrac{y^2}{1+y^2}=1$, $y' = \dfrac{y^2+1}{y^2}$, или $y' = \dfrac{1}{y^2}+1$. Найдем y'' :

$y'' = \left(\dfrac{1}{y^2}+1\right)'$. $y'' = -\dfrac{2y\cdot y'}{y^4} = -\dfrac{2y'}{y^3}$. Подставляя вместо y' его значение, получим:

$y'' = -\dfrac{2\left(\dfrac{1}{y^2}+1\right)}{y^3}$, преобразуя, имеем: $y'' = -\dfrac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}$.

Если функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то ее производная $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Вторая ее производная $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y''$ находится по формуле: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{x'(t)}$.

Пример: Найти $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = \ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

Решение:

$$x'(t) = \left(arctg\right)_t' = \frac{1}{1+t^2}. \quad y'(t) = \left(\ell n\left(1+t^2\right)\right)_t' = \frac{\left(1+t^2\right)'}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dy}{dx} = y_x' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t.$$

Найдем $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{x'(t)} = \left(2t\right)_t' \cdot \dfrac{1}{x'(t)} = 2\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)} = 2\left(1+t^2\right)$. $\quad y_x' = \dfrac{dy}{dx} = 2t.$

$\begin{cases} x = arctg\, t, \\ \dfrac{dy}{dx} = 2t. \end{cases}$ **Ответ**: $\begin{cases} x = arctgt, \\ \dfrac{dy}{dx} = 2t. \end{cases}$ $\begin{cases} x = arctgt, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\left(1+t^2\right). \end{cases}$

Задача . Найти пределы функций по правилу Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2+x-2} =$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$) = $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x^2-6x+5)'}{(x^2+x-2)'} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x-6}{2x+1} = -\dfrac{4}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2+x-2} =$ (неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$)=

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-6x+5)'}{(x^2+x-2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-6}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-6)'}{(2x+1)'} = \frac{2}{2} = 1$$

3.6.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные задачи по теме «Предел и непрерывность. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически»;
- приобрели умения и навыки решения основных задач по теме «Предел и непрерывность. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически».

3.7 Практическое занятие № 7 (2 часа).

Тема: «Формула Тейлора Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие, достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика»

3.7.1 Задание для работы:

1. Формула Тейлора Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений.
2. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.
3. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика

3.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений

Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную $(n+1)-$го порядка. Тогда для любого x из указанной окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^2(x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где функция $R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора и в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0)), 0 < \Theta < 1.$$

Формулой Маклорена называют формулу Тейлора при $x_0 = 0.$ Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где $$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\Theta x), 0 < \Theta < 1.$$

Укажем разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций:

1) на любом отрезке $[-r; r], (r > 0)$ $\quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{N+1^{(x)}},$ (4)

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\cdot e^{\Theta x},(0<\Theta<1)\text{'}\ \left|R_{n+1}(x)\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\Theta x}$$

Например, при $x\in[0;1]$ $e^{\Theta x}<e^{x}<e<3,$ т.е. $\left|R_{n+1}(x)\right|<\frac{3\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)}$. (5)

2)На любом отрезке $[-r;r]$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+3}(x), \qquad (6)$$

$\left|R_{2n+3}(x)\right|\le\frac{r^{2n+3}}{(2n+3)!}$ или $\left|R_{2n+3}(x)\right|\le\frac{1}{(2n+3)!}$ при $x\in[-1;1]$ (7)

3) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+x\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x)$ (8)

Причем для $x\in(0;1]$ $\left|R_{n+1}(x)\ \right|\le\frac{1}{n+1}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача. Найти производные первого и второго порядков функций заданных: а) явно, б) параметрически , в) неявно.

2.1 $a)$ $y=sin^2 3x$; б) $x=\sqrt{t}$; $y=\sqrt[5]{t}$; в) $4x+5y=arcctgy$

2.2 а) $y=cos^2 4x$; б) $x=e^{-5t}$; $y=e^{-2t}$; в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^3}{3}=1$

2**. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия.**

Решение типовых задач

Задача. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y=x^3+1{,}5x^2-18x+1$.

Решение. Функция определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси.

Находим производную: $y'=(x^3+1{,}5x^2-18x+1)'=3(x^2+x-6).$

Находим критические точки, которые будут стационарными:

$y'=0\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow x=-3$ или $x=2$

Область определения функции точками $x=-3$ и $x=2$ разбивается на 3 промежутка знакопостоянства производной. Далее выявляем знаки производной в каждом из промежутков. Результат удобно записать в таблицу:

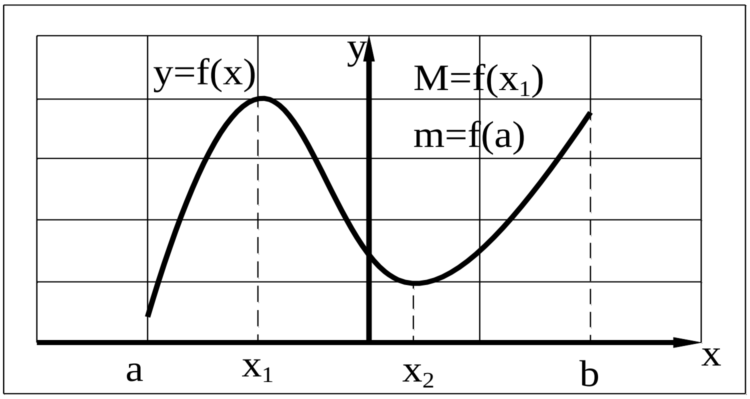
x / y	(-∞;-3)	(-3)	(-3;-2)	2	(2;+ ∞)
y’	+	0	-	0	+
Y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Пользуясь признаком монотонности функции и первым достаточным условием экстремума заключаем: в интервалах (-∞;-3) и (2;+ ∞) функция строго возрастает, а в интервале (-3;2) строго убывает, $x=-3$ является точкой максимума, $y_{\max}=y(-3)=41{,}5$, $x=2$ является точкой минимума и $y_{\min}=y(2)=-21.$

2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

Задание функции y=f(x) предполагает задание числовых множеств X – области определения, Y – области значений. Наибольший элемент во множестве Y называется наибольшим значением функции f(x) на множестве X и обозначается M= max f(x); наименьший элемент во множестве Y называется наименьшим значением функции и обозначается m = min f(x).

Имеет место следующая теорема Вейерштрасса: **Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то существуют наибольшее и наименьшее значения ее на этом отрезке.**



На рисунке для функции y=f(x) x_1 – точка максимума, в этой же точке функция имеет наибольшее значение M на отрезке [a,b], x_2 –точка минимума, но наименьшее значение функция имеет в точке a. Так, что наибольшее и наименьшее значения функции на множестве X не следует смешивать с максимумом и минимумом функции.

Можно указать следующее рабочее правило отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции y=f(x) на отрезке.

1. **Найти критические точки y=f(x) (f'(x)=0 либо f'(x) не существует), расположенные на отрезке [a,b];**
2. **Вычислить значения функции в концевых точках отрезка [a,b] и в выбранных критических точках;**
3. **Из найденных значений функций выбрать наибольшее значение M и наименьшее значение m.**

При решении задач на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на промежутках можно использовать также следующие утверждения.

Если функция y=f(x) монотонна на отрезке [a,b], то наибольшее и наименьшее значения ее достигаются в концевых точках отрезка (функция может быть непрерывной либо разрывной).

Если функция f(x) непрерывна на промежутке X, имеет только одну критическую (f'(x)=0 или f '(x) не существует) и она есть точка максимума (минимума), то в этой точке функция имеет соответственно наибольшее (наименьшее) значение.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке [-8;0,125].

Функция непрерывна на указанном отрезке и следовательно имеет наибольшее и наименьшее значения (по теореме Вейерштрасса). Отыскание их выполним по указанному правилу отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке.

1)Находим критические точки функции, расположенные внутри отрезка [-8;0,125]:

$y = 2x - 3\frac{2}{3}x^{-1/3} = 2\left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$; y = 0 при $x_1 = 1 \notin [-8;0,125]$, $x_2 = -1 \notin [-8;0,125]$; у не существует при $x_1 = 0 \notin [-8;0,125]$.

2)Вычислим значения функции в критических точках x = 0, x = –1 и в концевых точках отрезка x = –8, x = 0,125.

$f(-8) = 64 - 3 \cdot 4 = 52;\quad f(-1) = 1 - 3 = -2;\quad f(0) = 0;\quad f(0{,}125) = \frac{1}{64} - 3\frac{1}{4} = \frac{1}{64} - \frac{48}{64} = -\frac{47}{64}.$

3) Из найденных значений функции выбираем наибольшее M и наименьшее m: M = y(–8) = 52 , m = y(–1) = –2.

Задачи для самостоятельной работы

Задача № 1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

4.1 $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 47;$

4.2 $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 18;$

4.3 $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2;$

Задача № 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

1.1 $y = x^2 + \frac{4}{x-1} - 2, \left[1{,}5;3\right].$ **1.2** $y = -x^2 - \frac{4}{x-1} + 2, \left[1{,}5;4\right].$

3.7.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия экстремума функции, необходимые и достаточные условия экстремума; правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке;
- приобрели умения и навыки отыскания экстремума функции, наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

3.8 Практическое занятие № 8 (2 часа).

Тема: «Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Частные производные. Полный дифференциал.Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа**»**

3.24.1 Задание для работы:

1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции
2. Частные производные. Полный дифференциал.Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала. Производная по направлению. Градиент.

3. Формула Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

3.24.2 Краткое описание проводимого занятия:

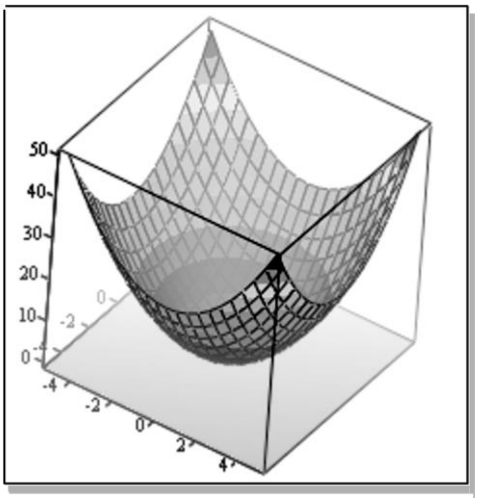
1. Функции нескольких переменных.

Переменная z называется функцией переменных x и y,если каждой паре значений x и y из некоторой области их изменения поставлено в соответствие определенное значение z. Функциональная зависимость *z* от x и *y* записывается в виде:

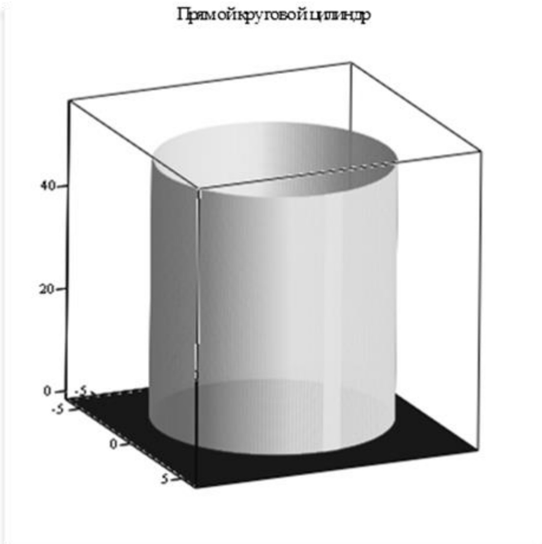
$$z = f(x, y).$$

Аналогичным образом определяются функции трех и более переменных. В этой работе используются только функции двух переменных, поэтому все определения и задачи будут проиллюстрированы только такими функциями.

Функции двух переменных допускают геометрическую интерпретацию. Графиком функции z=f(x, y), определенной в области G, называется множество точек (x, y, z) пространства, у которых (x, y) принадлежат G и z=f(x, y). В наиболее простых случаях такой график представляет некоторую поверхность. Поверхности удобно изображать с MathCAD. Например, параболоид $z=x^2+y^2$ и цилиндр имеют вид



F



(x,y,z)

2. Предел и непрерывность функции

Функция z=f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$. Например, функция $z = \frac{xy-2}{x^2+y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением точки O(0,0), где она имеет разрыв.

Функция, непрерывная во всех точках области G, называется непрерывной данной области.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) z: 1)\ z = \frac{x^2 y}{x^2+y^2},\ z = \frac{xy^2}{x^2+y^2},\ z = \frac{x^3}{x^2+y^2}.$

1. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала.

Решение типовых задач

Из определения частных производных следует, что правила их вычисления остаются такими же, как и для функций одной переменной, только необходимо помнить по какой переменной ищется производная.

Пример 1. а) $z = 2x + y^3$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2;\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$

б) $z = arctg\,\dfrac{x}{y}, \quad z_x = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}(\dfrac{x}{y})'_x = \dfrac{y}{x^2+y^2}, z_y = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

2. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала.

Задача № 2. Даны функция z=f(x,y) и точка $M_0(x_0, y_0)$. С помощью дифференциала вычислить приближенное значение функции в данной точке. Оценить относительную погрешность вычисления:

$$z = x^2 + 2xy - 3y^2,\ M_0(2{,}97;0{,}99).$$

Решение. Найдем частные производные и полный дифференциал в любой точке:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y, \quad dz = (2x + 2y)dx + (2x - 6y)dy.$$

Вычислим его в точке M(2;1) при приращениях

$dx = \Delta x = 1{,}97 - 2 = -0{,}3, \qquad dy = \Delta y = 0{,}99 - 1 = -0{,}01;$

$dz = (2\cdot 2 + 2\cdot 1)(-0{,}03) + (2\cdot 2 - 6\cdot 1)(-0{,}01) = -0{,}18 + 0{,}02 = -0{,}16.$

Найдём $z(M) = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 1^2 = 5$.

Тогда $\bar{z} = \bar{z}(M_0) = z(M) + dz = 5 - 0{,}16 = 4{,}84.$

Вычислим точное значение функции z в точке M_0:

$z = 1{,}97^2 + 2\cdot 1{,}97\cdot 0{,}99 - 3\cdot 0{,}99^2 = 3{,}8809 + 3{,}9006 - 2{,}9403 = 4{,}8412.$

Найдём относительную погрешность:

$$\delta = \left|\frac{\bar{z} - z}{\bar{z}}\right|\cdot 100\% = \left|\frac{4{,}8412 - 4{,}84}{4{,}8412}\right|\cdot 100\% \approx 0{,}025\%.$$

Ответ: приближённое значение $\bar{z} = 4{,}84$. Относительная погрешность $\delta \approx 0{,}025\%$.

Задачи для самостоятельной работы

Дана функция $z = f(x,y)$. Найти: 1) полный дифференциал dz; 2) частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 3) смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

1. $z = \dfrac{\operatorname{tg} x}{y}$. **2.** $z = \arccos\dfrac{y}{x}$. 3. $z = \ln\sqrt{x^2 + 4y}$.

3. Дана функция $z = \dfrac{xy}{x+y}$. Показать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

1. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Решение типовых задач

Задача 1. Дана функция $z = 3x^2 - 5xy + 7y$, точка A(2,1) и вектор $\bar{a} = \{4;3\}$. Найти: **1)** ∇z в точке A ; **2)** производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

Решение. **1)** По определению градиента $\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\bar{j}$.Градиент в точке А вычислим по формуле:

$$\nabla z\big|_A = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_A \cdot\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_A \cdot\bar{j}\,.$$

Найдём частные производные в точке А:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_A = 6x-5y\big|_A = 6\cdot 2-5\cdot 1 = 7\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_A = -5x-7\big|_A = -5\cdot 2-7=-3\,.$$

Следовательно $\nabla z\big|_A = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_A \cdot\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_A \cdot\bar{j} = 7\bar{i}-3\bar{j}$.

2) Производную от функции z по направлению вектора $\bar{a}$ в точке А определим из соотношения:

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\bigg|_A = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_A \cdot\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_A \cdot\cos\beta\,,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ представляют собой направляющие косинусы заданного вектора $\bar{a}(a_x, a_y)$ и вычисляются по формулам $\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}$; $\cos\beta = \frac{a_y}{|a|}$, где $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Тогда $|\bar{a}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\beta = \frac{3}{5}$;

$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\bigg|_A = 7\cdot\frac{4}{5} - 3\cdot\frac{3}{5} = \frac{28}{5}-\frac{9}{5} = 3\frac{4}{5}$. Ответ: $\nabla z\big|_A = 7\bar{i}-3\bar{j}$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\bigg|_A = 3\frac{4}{5} = 3{,}8$.

Задачи для самостоятельной работы

Дана функция z = f(x,y), точка $A(x_0,y_0)$, вектор $\vec{a}$. Найти grad z и его численное значение в точке А, производную в точке А по направлению вектора $\vec{a}$.

3.1 $z = 2x^2 + xy;\quad A(-1;1);\quad \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}.$

3.2 $z = 5x^2y + 3xy^2;\quad A(1;-1);\quad \vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j}.$

3.3 $z = 3x^2y - xy^3;\quad A(-1;1);\quad \vec{a} = \vec{i} - \vec{j}.$

1. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

2. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Решение типовых задач

Пример. Найти экстремум функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

Решение: функция z определена на всей плоскости xoy . Находим частные производные 1-го порядка.

$z'_x = 3x^2 - 6y$

$z'_y = 24y^2 - 6x$

Решая систему $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$, находим критические точки.

$$\begin{cases} 3x^2-6y=0 \\ 24y^2-6x=0 \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ 4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 = x \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ x^4-x=0 \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ x\ \ \left(x^3-1\right)=0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 0;\ y_1 = 0;\ x_2 = 1;\ y_2 = \frac{1}{2}$ Критические точки $M_1(0;0)$ $M_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Чтобы установить наличие экстремума в критических точках, вычисляем значение $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$, где $A = f''_{xx}(M), B = f''_{xy}(M), C = f''_{yy}(M)$. M -критическая точка.

При этом: 1) если $\Delta > 0$, то M - есть точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) точка максимума, а при $A > 0$ (или $C > 0$) точка минимума.

2) если $\Delta < 0$, то в точке M нет экстремума.

3) если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M требуется дальнейшее исследование, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

Найдем $z''_{xx} = 6x$ $z''_{xy} = -6$ $z''_{yy} = 48y$.

Для точки $M_1(0;0)$ получим $A = 0$, $B = -6$, $C = 0$, $\Delta = AC - B^2 = -36 < 0$, следовательно, в точке $M_1(0;0)$ нет экстремума.

Для точки $M_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$ имеем $A = 6$, $B = -6$, $C = 24$. $\Delta = AC - BC^2 = 6 \cdot 24 - 36 = 144 - 36 = 108 > 0$

Т.к. $A = 6 > 0$ (и $C = 24 > 0$) то точка M_2 есть точка минимума.

$$z_{\min} = z(M_2) = 1^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 1 + 1 - 3 + 5 = 4 \qquad z_{\min} = z(M_2) = 4$$

Задачи для самостоятельной работы

Данную функцию $z = f(x, y)$ исследовать на экстремум.

1. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$. **2.** $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

3. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4;\ D: 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1.$

4. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4;\ D: 0 \le x \le x^2 \le 0 \le y \le 4.$

3.8.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия о функции нескольких переменных, предела и непрерывности функции;
- приобрели умения и навыки решения простейших задач по теме «функции нескольких переменных, предел и непрерывности функции»

- освоили понятия частных производных, полного дифференциала, его связь с частными производными, инвариантность формы полного дифференциала, геометрические приложения, приближённые вычисления с помощью дифференциала;
- приобрели умения и навыки вычисления производных и дифференциала.
- освоили понятия об экстремумах функций нескольких переменных, условном экстремуме;
- приобрели умения и навыки исследования экстремум функций нескольких переменных.

3.9 Практическое занятие № 9 (2 часа).

Тема: «Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов»

3.9.1 Задание для работы:

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы.
2. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
3. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.
4. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов

3.9.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы.

Решение типовых задач

Задание1. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{x^2dx}{(5+4x^3)^4}=\left|\begin{array}{l}\text{Делаем замену переменных. Так как } x^2 - \text{это почти производная } x^3,\\ \text{то за } t \text{ можно взять } x^3, \text{а лучше } t=5+4x^3, \text{тогда } dt=d(5+4x^3)=\\ =(5+4x^3)'dx=12x^2dx. \text{ Выразим отсюда } x^2dx=\frac{1}{12}dt.\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{12}dt}{t^4}=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{t^4}=\frac{1}{12}\int t^{-4}dt=\frac{1}{12}\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+c=-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{t^3}+c=-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3}+C.$$

Можно проверить, что интеграл найден верно. Для этого воспользуемся формулой $\left(F(x)\right)'=f(x)$.

$$\left(-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3}+c\right)'=-\frac{1}{36}\left((5+4x^3)^{-3}\right)'=-\frac{1}{36}\cdot(-3)(5+4x^3)^{-4}(5+4x^3)'=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^4}\cdot 12x^2=$$

$$=\frac{x^2}{(5+4x^3)^4}-\text{получили подынтегральную функцию.}$$

Ответ: $I=-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3}+C$

1. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

Решение типовых задач

Применяя формулу интегрирования по частям, мы не сразу находим первообразную, а заданный интеграл приводим к другому (формула (*)), и если этот интеграл проще заданного или табличный, то формула применена правильно.

1) Найти $\int x^2\cdot\sin 3xdx$

Обозначим $u=x^2$; $dv=\sin 3xdx$. Найдем $du=2xdx$; $v=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x$. Подставляя в формулу (*), получим $\int x^2\cdot\sin 3xdx=-x^2\cdot\frac{1}{3}\cos 3x-\int\cdot 2x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+ +\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx$

.

К последнему интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям.

Положим $u=x$; $dv=\cos 3xdx$. Тогда $du=dx$; $v=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x$. По формуле (*), получим:

$$\int x^2\cdot\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3xdx\right)= =-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+c.$$

$$\mathrm{I}=\int x^2\sin 3x dx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+c.$$

2. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

2) Найти: $\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\mathrm{I}$.

Подынтегральная дробь неправильная: степень числителя выше степени знаменателя (5>4).Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\ x^5+2x^3+4x+4 & x^4+2x^3+2x^2 \\ x^5+2x^4+2x^3 \qquad\quad & \overline{x-2} \\ \hline -\ \ -2x^4+4x+4 & \\ -2x^4-4x^3-4x^2 & \\ \hline 4x^3+4x^2+4x+4 & \end{array}$$

Подынтегральная дробь будет иметь вид: $\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\cdot\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$.

Тогда

$\mathrm{I}=\int\left((x-2)+4\cdot\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)\right)dx=\frac{(x-2)^2}{2}+4\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{(x-2)^2}{2}+4\mathrm{I}_1,$ где $\mathrm{I}_1=\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

Разложим знаменатель подынтегральной функции $x^4+2x^3+2x^2$ на множители:

$x^4+2x^3+2x^2=x^2\left(x^2+2x+2\right)$.

Напишем схему разложения данной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2x+2}\Rightarrow$$

$$x^3+x^2+x+1=A_1x\left(x^2+2x+2\right)+A_2\left(x^2+2x+2\right)+\left(M_1x+N_1\right)x^2$$

$$x^3+x^2+x+1=A_1x^3+2A_1x^2+2A_1x+A_2x^2+2A_2x+2A_2+M_1x^3+N_1x^2$$

$$x^3+x^2+x+1=x^3\left(A_1+M_1\right)+x^2\left(2A_1+A_2+N_1\right)+x\left(2A_1+2A_2\right)+2A_2.$$

Составим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A_1+M_1=1 \\ x^2 & 2A_1+A_2+N_1=1 \\ x & 2A_1+2A_2=1 \\ x^0 & 2A_2=1 \end{array}$$

$2A_2=1\ \Rightarrow A_2=\frac{1}{2}.\quad 2A_1+2A_2=1\Rightarrow 2A_1+2\cdot\frac{1}{2}=1,\quad \begin{array}{l}2A_1+1=1,\\ A_1=0,\end{array}\quad A_1+M_1=1\Rightarrow M_1=1-A_1=1-0=1,$

$M_1=1$, $2A_1+A_2+N_1=1\Rightarrow N_1=1-2A_1-A_2$, $N_1=1-2\cdot 0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $N_1=\frac{1}{2}$, $A_1=0$; $A_2=\frac{1}{2}$; $M_1=1$; $N_1=\frac{1}{2}$.

Подставим найденные значения A_1, A_2, M_1, N_1 в схему разложения:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{1/2}{x^2}+\frac{x+1/2}{x^2+2x+2}.$$

Подставляя в интеграл и интегрируя, получим:

$$\mathrm{I}_1=\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx==-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\mathrm{I}_3.$$

Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=\left(x+1\right)^2+1.$

Заменим переменную x, полагая $x+1=t$, тогда

$$x=t-1,$$
$$dx=dt.$$

$$\mathrm{I}_3=\int\frac{2\left(t-1\right)+1}{t^2+1}\cdot dt=\int\frac{2t-2+1}{t^2+1}dt=\int\frac{2t-1}{t^2+1}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}.$$

Применяя формулы $\int\frac{u'}{u}dx=\ln|u|+c$ **и** возвращаясь к переменной x, получим

$\mathrm{I}_3=\ln\left|x^2+2x+2\right|-\mathrm{arctg}\left(x+1\right)$

Окончательно:

$$\mathrm{I}=\frac{\left(x-2\right)^2}{2}+4\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+2\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(x+1\right)\right)+c=\frac{\left(x-2\right)^2}{2}-\frac{2}{x}+$$
$$+2\ln\left|x^2+x+2\right|-2\,\mathrm{arctg}\left(x+1\right)+c.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы

а) $\int\frac{x+2}{\left(2x+3\right)\cdot\left(x+1\right)^2}\;dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$; в) $\int\left(x^2+1\right)\sin x\;dx$.

4. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.

Решение типовых задач

Вычислить $\int\limits_0^4\frac{3\,dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[4]{2x+1}}$.

Вводим новую переменную интегрирования, полагая, что $\sqrt[4]{2x+1}=t.$ Отсюда находим $2x+1=t^4$, $x=\frac{t^4-1}{2}$, $dx=\frac{4t^3}{2}dt=2t^3dt.$ Находим новые пределы интегрирования при $x_1=0$, $t_1=\sqrt[4]{2\cdot 0+1}=1$;

при $x_2=4$, $t_2=\sqrt[4]{2\cdot 4+1}=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$. Подставляя, получим:

$\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{3\cdot 2t^3dt}{t^2+t}=6\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^3dt}{t\left(t+1\right)}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{t+1}$. Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\frac{t^2}{t+1}=\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}=\frac{\left(t+1\right)\left(t-1\right)+1}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}.$$

Тогда $\mathrm{I} = 6 \cdot \int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \cdot \left(\frac{t^2}{2} - t + ln(t+1) \right) \Bigg|_1^{\sqrt{3}} = 6 \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} - \sqrt{3} + ln\left(\sqrt{3}+1\right) \right) -$

$$- 6\left(\frac{1}{2} - 1 + ln\, 2 \right) = 6 \cdot \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3} + ln\left(\sqrt{3}+1\right) \right) + 3 - 6\, ln\, 2 = 6 \cdot \frac{4 - 2\sqrt{3} + 2\, ln \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}}{2} =$$

$$= 3\left(4 - 2\sqrt{3} + 2\, ln \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} \right).$$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить определенные интегралы.

31. $\int\limits_0^2 \ln\left(x^2+4\right)\, dx$. **32.** $\int\limits_0^1 \mathrm{x}^3 \,\mathrm{arctgx}\ \mathrm{x}$. **33.** $\int\limits_0^1 3x^2 \arcsin x\ dx$. **34.** $\int\limits_{-1}^0 (2x+3)\ e^{-2x} dx$.

3.9.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия о первообразной, неопределенном интеграле, его свойствах; табличных интегралах;
- приобрели умения и навыки нахождения простейших неопределенных интегралов, первообразных с помощью табличных интегралов.

- освоили методы замены переменной и интегрирования по частям в неопределенном интеграле; методы интегрирования рациональных функций, интегрирования некоторых иррациональных и трансцендентных функций;
- приобрели умения и навыки вычисления интегралов методом замены переменной и интегрирования по частям, от рациональных функций, некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

- освоили понятия определенного интеграла, его свойства, формулу Ньютона-Лейбница;
- приобрели умения и навыки вычисления определенного интеграла.

3.10 Практическое занятие № 10 (2 часа).

Тема: «Геометрические и механические приложения определенного интеграла. Приближённые вычисления интегралов. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие *n*-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов**»**

3.10.1 Задание для работы:

1. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

2. Приближённые вычисления интегралов.

3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

4.Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие n-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.
5. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

3.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

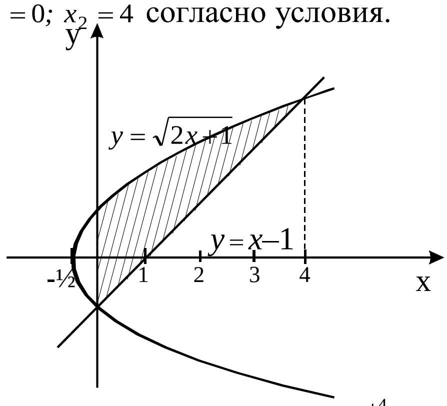
Решение типовых задач

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+1;\ \ x-y-1=0;\ x=0$.

Решая совместно данные уравнения $\begin{cases} y^2=2x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$, найдем точки пересечения этих линий

$$\begin{cases} y^2=2x+1 \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &(x-1)^2=2x+1 \\ &x^2-2x+1=2x+1 \qquad\qquad x(x-4)=0 \\ &x^2-4x=0 \qquad x_1=0 \qquad\quad x_2=4. \end{aligned}$$

Изобразим в плоскости ХОУ фигуру, ограниченную данными линиями, причем $x_1=0;\ x_2=4$ согласно условия.



$$S=\int_0^4\left(\sqrt{2x+1}-(x-1)\ dx\right)= \quad =\int_0^4(2x+1)^{1/2}dx-\int_0^4(x-1)\ dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4(2x+1)^{1/2}d(2x+1)-$$

$$-\int_0^4(x-1)\ d(x-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4-\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_0^4=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\Bigg|_0^4-\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{1^3}\right)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}(27-1)-\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}26-4=\frac{14}{3}=4\frac{1}{2}\ \text{(ед.}^2\text{)}.$$

2. Приближённые вычисления интегралов.

2. Вычислить определенные интегралы сначала по формуле Ньютона – Лейбница, а затем приближенно по формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей. Вычисления производить с округлением до четвертого десятичного знака. Сравнить полученные значения интеграла.

1. $\int_1^4 \ln(3x-2)\ dx$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=\frac{x^2}{2}-x+1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+3x+6$.

2. $\int_2^5 \ln(3x-5)\ dx$.

3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

Решение типовых задач

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}.$$

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2+4x+9}$. Вычислим отдельно $\int_1^{b}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int_1^{b}\frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)+5}=\int_1^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+5}=$

$=\int_1^{b}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Big|_1^b=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{(b+2)}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Тогда $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{(b+2)}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3}{\sqrt{5}}$. Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{e}\frac{dx}{x(\ln x)^2}.$$

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ при $x=1$ неограниченна (т.е. терпит разрыв).

$\int_1^{e}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{\frac{1}{x}dx}{(\ln x)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_{1+\varepsilon}^{e}\right)=$

$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{\ln e}+\frac{1}{\ln|1+\varepsilon|}\right)=\infty$. Следовательно, данный несобственный интеграл расходится.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

1. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}$. **2.** $\int_0^{\infty}x^2e^{-x^3}dx$. **3.** $\int_0^{3}\frac{dx}{(x-3)^2}$.

4. $\int_2^{4}\frac{dx}{x^2-4}$. **5.** $\int_5^{\infty}\frac{dx}{x^2-8x+17}$. **6.** $\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

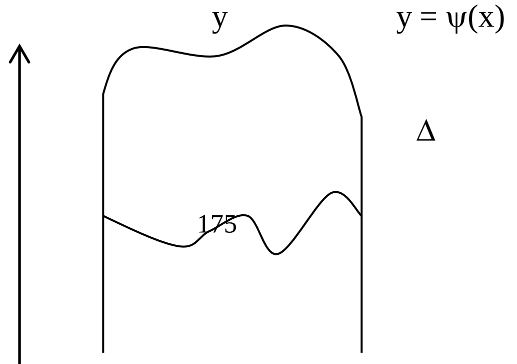
4. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие *n*-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

Решение типовых задач

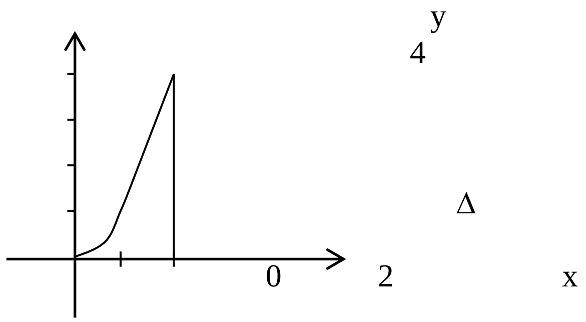
Вычисление двойного интеграла.

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ ≤ ψ, тогда*

$$\iint_{\Delta}f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy$$



Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$.



$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2}(x-y)dy = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 =$$
$$= 4 - 3{,}2 = 0{,}8$$

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, $x = \Phi(y)$, $x = \Psi(y)$ $(\Phi(y) \le \Psi(y))$, то*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$,

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интегралы: 1). $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$. 2). $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$. 3). Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями $xy=1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

5. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Их свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Решение типовых задач

Вычисление криволинейных интегралов второго рода производится путем преобразования их к определенным интегралам по формулам:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

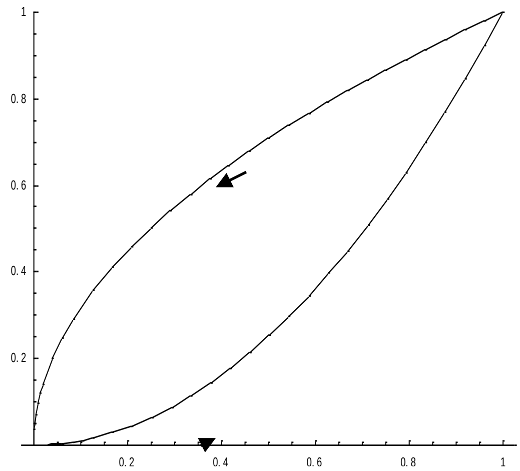
$$\int_{AB} R(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]dt$$

В случае, если AB – плоская кривая, заданная уравнением *y = f(x),* то

$$\boxed{\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x, f(x) + Q(x, f(x)) f'(x)\right]dx}$$

<u>Пример.</u> Вычислить криволинейный интеграл $\int_L x^2 ydx + x^3 dy$. L – контур, ограниченный параболами $y^2 = x; \quad x^2 = y$. Направление обхода контура положительное.



Представим замкнутый контур *L* как сумму двух дуг $L_1 = x^2$ и $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint_L x^2 ydx + x^3 dy = \int_{L_1} x^2 ydx + \int_{L_1} x^3 dy + \int_{L_2} x^2 ydx + \int_{L_2} x^3 dy = \int_0^1 x^4 dx + \int_0^1 x^3 \cdot 2xdx + \int_1^0 x^2 \sqrt{x} dx +$$

$$+ \int_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}} dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интеграл 1) $\int_L x^2 ydx + x^3 dy$. L: $y = x^3, 0 \le x \le 1$, 2) $\int_L xy^2 dx + x^2 dy$. L: $y = x, -1 \le x \le 2$.

Вычислить интеграл $\int_L 3x^2 ydx + x^3 dy$ по 1) L1: $y = x, 0 \le x \le 1$, 2) L2: $y = x^2, 0 \le x \le 1$. 3) L3: $y = x^3, 0 \le x \le 1$, сравнить значения интегралов, сделать вывод. Направление обхода контура положительное.

3.10.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили геометрические и механические приложения определенного интеграла, элементы численного интегрирования;
- приобрели умения и навыки в использовании геометрических и механических приложения определенного интеграла, численного интегрирования.

- освоили понятия о несобственных интегралах с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства;
- приобрели умения и навыки вычисления несобственных интегралах с бесконечными пределами и от неограниченных функций.

- освоили понятия о двойном и тройном интегралах, их свойствах, сведении кратного интеграла к повторному, замене переменных в кратных интегралах; полярных, цилиндрических и сферических координатах;
- приобрели умения и навыки вычисления кратных интегралов.

- освоили понятия о криволинейных и поверхностных интегралах, их свойствах и вычислении, геометрических и механических приложениях;
- приобрели умения и навыки вычисления криволинейных интегралов.

3.11 Практическое занятие № 11 (2 часа).

Тема: «Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости. Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.

Гармонический анализ**.** Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье по ортогональным системам. Полнота и замкнутость системы. Тригонометрические ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Формула обращения. Свойства преобразования Фурье**»**

3.11.1 Задание для работы

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости. Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
2. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости.Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.
3. Гармонический анализ**.** Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье по ортогональным системам. Полнота и замкнутость системы. Тригонометрические ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Формула обращения. Свойства преобразования Фурье

3.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые ряды.

2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.

Решение типовых задач

Признак Даламбера

Если в знакоположительном ряде $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ признак Даламбера ответа на вопрос о сходимости ряда не дает и надо использовать другие признаки.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n)!}$.

Решение. Поскольку $u_n=\frac{5^n}{(2n)!}$, то $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(2(n+1))!}=\frac{5\cdot5^n}{(2n+2)!}=\frac{5\cdot5^n}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}$. (Напомним, что $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$). Теперь найдем предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5\cdot5^n}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}}{\frac{5^n}{(2n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{(2n+1)(2n+2)}=0$

Так как 0<1, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

Радикальный признак Коши

Если в знакоположительном ряде $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

***Пример*.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(2n+1)}\right)^n$.

Решение. Поскольку общий член ряда содержит n-ую степень, применим радикальный признак Коши.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}<1$, следовательно, ряд сходится.

Интегральный признак Коши

Если $u_n=f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x\ge a\ge1$, то ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ и интеграл $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример . Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. При $x\ge2$ функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна, т.е. удовлетворяет условию интегрального признака Коши. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_2^{\infty}f(x)dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{\infty}=\infty\cdot$$

Из расходимости интеграла следует расходимость исходного ряда.

Задачи для самостоятельной работы

Исследовать сходимость ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{(2n-1)^3}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Признак сходимости Лейбница

Если для знакочередующегося ряда выполнены условия:

1. $u_n \geq u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \ldots$ (начиная с некоторого n), 2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака сходимости Лейбница: $u_n = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, поэтому ряд сходится. Он сходится условно, т.к. ряд, составленный из абсолютных значений, является гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{2^n}$.

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных значений $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$. Применим к нему признак сходимости Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, этот ряд сходится, поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

Задачи для самостоятельной работы

Исследовать сходимость ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{e^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{(2n-1)^3}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

2. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости.

Решение типовых задач

Пример . Определить область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

Решение. Применим к ряду признак сходимости Даламбера и рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x-2|^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\dfrac{|x-2|^{2n}}{2n}}=|x-2|^2.$$

Исходный ряд сходится абсолютно, если $|x-2|^2<1$, то есть при $1<x<3$. Ряд расходится, если $|x-2|^2>1$, то есть при $-\infty<x<1,\ 3<x<\infty$.

Рассмотрим поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1-2)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}.$$

Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака сходимости Лейбница: $\frac{1}{2}\geq\frac{1}{4}\geq\frac{1}{8}\geq\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$. Поэтому ряд сходится (сходится условно, т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, а умножение всех членов ряда на постоянное число, отличное от нуля, не меняет его сходимости).

При $x=3$ получаем такой же сходящийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3-2)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}.$$

Окончательный ответ: ряд сходится при $1\leq x\leq 3$.

Задачи для самостоятельной работы

Определить область сходимости ряда.

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot x^n}{n}$. 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^{2n}}{2n}$.

4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$. 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{n^2+1}$.

Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.

Решение типовых задач

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд.

1. Существует также способ разложения в степенной ряд **при помощи алгебраического деления.** Это – самый простой способ разложения, однако, пригоден он только для разложения в ряд алгебраических дробей.

Пример. Разложить в ряд функцию $\frac{1}{1-x}$.

Суть метода алгебраического деления состоит в применении общего правила деления многочленов:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,1 & 1-x \\
\underline{\ 1-x\ } & 1+x+x^2+x^3+\ldots \\
\quad x & \\
\quad -\,\underline{x-x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad -\,\underline{x^2-x^3} & \\
\qquad\qquad x^3 & \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

2. Разложение при помощи рядов Тейлора и Маклорена.

Если применить к той же функции формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

то получаем: $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\quad f'(0) = 1$;

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}; \quad f'''(0) = 3!;$$

………………………………

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}; \quad f^{(n)}(0) = n!;$$

Итого, получаем: $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

3. Рассмотрим способ разложения функции в ряд **при помощи интегрирования.**

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до x.

$$\int_0^x df(x) = \int_0^x f'(x)dx; \qquad f(x)\Big|_0^x = \int_0^x f'(x)dx; \; f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx;$$

Пример. Разложить в ряд функцию $f(x) = \ln(1+x)$.

Разложение в ряд этой функции по формуле Маклорена было рассмотрено выше. Теперь решим эту задачу при помощи интегрирования.

При $f(0) = 0$, $\quad f'(x) = \frac{1}{1+x}$ получаем по приведенной выше формуле:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+x}$ может быть легко найдено способом алгебраического деления аналогично рассмотренному выше примеру.

Задачи для самостоятельной работы

Разложить в ряд Маклорена функции

1. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$, 2. $f(x)=\sin x^2$, 3. $f(x)=e^{-x^2}$

3. Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье по ортогональным системам. Полнота и замкнутость системы. Тригонометрические ряды Фурье.

Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+...$$

или, короче, $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если функция *f(x)* – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке $[-\pi;\pi]$ или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx;\quad n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\quad n=1,2,...$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции *f(x).*

<u>Определение.</u> Рядом Фурье для функции *f(x)* называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции *f(x)* сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье.

<u>Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.</u>

<u>Теорема.</u> (Теорема Дирихле) *Если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок $[-\pi;\pi]$ можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке $[-\pi;\pi]$.

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке $[-\pi;\pi]$ или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. *При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке [-π;π].

<u>Пример.</u> Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом Т = 2π на отрезке [-π;π].

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx dx = \left\{\begin{matrix} u = x^3; & dv = \sin nx dx; \\ du = 3x^2 dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \cos nx dx; \\ du = 2x dx; & v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x\sin nx dx\right) = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \sin nx dx; \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos \pi n}{n} + \frac{6\pi\cos \pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)\right) = -\frac{2\pi^2\cos \pi n}{n} + \frac{12\cos \pi n}{n^3} = (-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Получаем:

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx.$$

Задачи для самостоятельной работы

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, заданную на интервале-периоде.

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -1 < x < 0, \\ -1 & \text{при } 0 \le x \le 1. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при} -\pi \le x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \le x < \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = x^2$ при $-1 \le x < 1$.

Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Формула обращения.

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux\right]du$$

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos ut dt$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin ut dt$$

- представление функции f(x) **интегралом Фурье**.

Двойной интеграл Фурье для функции f(x) можно представить в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dt$$

Преобразование Фурье.

Определение. Если *f(x)* – любая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на каждом отрезке, то функция

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}dx$$

называется **преобразованием Фурье функции *f(x)*.**

Функция *F(u)* называется также **спектральной характеристикой функции *f(x)*.**

Если f(x) – функция, представимая интегралом Фурье, то можно записать:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{iux}du$$

Это равенство называется **обратным преобразованием Фурье**

Интегралы $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos uxdx$ и $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin uxdx$ называются соответственно **косинус - преобразование Фурье и синус – преобразование Фурье.**

2. Свойства преобразования Фурье.

Косинус – преобразование Фурье будет преобразованием Фурье для четных функций, синус – преобразование – для нечетных.

Преобразование Фурье применяется в функциональном анализе, гармоническом анализе, операционном исчислении, теории линейных систем и др.

3.11.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия о числовых рядах, сходимости и сумме ряда, признаках сходимости рядов с неотрицательными членами;
- приобрели умения и навыки исследования сходимости рядов по необходимому признаку и рядов с неотрицательными членами.

- освоили понятия об абсолютной и условной сходимости, освоили признак Лейбница, свойства абсолютно сходящихся рядов;
- приобрели умения и навыки исследования рядов на абсолютную и условную сходимость.

- освоили понятия о функциональных и степенных рядах ряды, их свойствах, области сходимости;
- приобрели умения и навыки отыскания области сходимости степенных рядов.

- освоили понятия о рядах Тейлора и Маклорена, разложении функций в степенные ряды;
- приобрели умения и навыки разложения функций в степенные ряды.

- освоили понятия о рядах Фурье по ортогональным системам, полноте и замкнутости системы, тригонометрических рядах Фурье;
- приобрели умения и навыки разложения функций в тригонометрический ряд Фурье.

- освоили понятия об интеграле Фурье, преобразовании Фурье и его свойствах;
- приобрели умения и навыки простейших преобразований Фурье.

3.12 Практическое занятие № 12 (2 часа).

Тема: **«**Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка**»**

3.36.1 Задание для работы

1.Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

2. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.
3.Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка

3.36.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Определение. **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Пример. Простейший случай равноускоренного движения материальной точки. Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V*, которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t)\cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины.

<u>Определение.</u> Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

<u>Определение.</u> Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

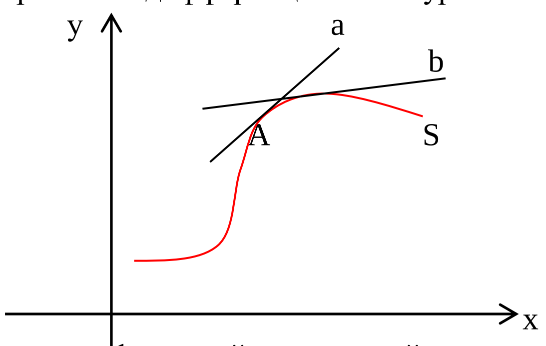
<u>Пример.</u>

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2 y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



Линия S, которая задается функцией, являющейся каким- либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная y' является **угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.**

В любой точке A(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки А можно наглядно изобразить **поле направлений** кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

<u>Определение.</u> Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется **полем направлений.**

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

<u>Определение.</u> Линии равного наклона в поле направлений называются **изоклинами**.

Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков равна единице.
2. Найти уравнение движения парашютиста массой m, если сила сопротивления воздуха f пропорциональна скорости движения с коэффициентом k.
3. Найти уравнение кривой, проходящей через точку A(0; 5), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой точке ее равен ординате этой точки, увеличенной в 7 раз.
4. За какое время вытечет вода из цилиндра радиуса R и высотой H, стоящего вертикально, через отверстие радиуса r в дне. Указания: истечение жидкости подчиняется закону Торричелли: $V = 0.6\sqrt{2gH}$.

2. Однородные и линейные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

Решение типовых задач

Решить дифференциальные уравнения: 1) $2x\sqrt{y^2-2}\,dx - x^2 ydy = 3ydy$.

Переносим второе слагаемое в правую часть и выносим ydy за скобку

$2x\sqrt{y^2-2}\,dx = y(3+x^2)dy$. Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на множители, «лишние» при дифференциалах. При dx «лишним», т.е. не зависящим от x, является $\sqrt{y^2-2}$, а при dy «лишним» будет $(3+x^2)$.

$$\frac{2x\sqrt{y^2-2}\,dx}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} = \frac{y(3+x^2)dy}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} \Rightarrow \quad \frac{2xdx}{3+x^2} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}} .$$

Теперь можно проинтегрировать, так левая часть зависит только от x, а правая зависит только от y:

$$\int \frac{2xdx}{3+x^2} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}} . \qquad (*)$$

Находим интегралы по отдельности.

$$\int \frac{2xdx}{3+x^2} = \begin{vmatrix} t = 3+x^2 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + \ln c = \ln tc = \ln c(3+x^2),$$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}} = \begin{vmatrix} t = y^2-2 \\ dt = 2ydy \\ \dfrac{dt}{2} = ydy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{y^2-2}.$$

Подставляем найденные интегралы в (*) : $\ln c(x^2+3) = \sqrt{y^2-2}$. Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Можно его записать по – другому: $\ln(3+x^2) + c_1 = \sqrt{y^2-2} \quad \Rightarrow \sqrt{y^2-2} - \ln(3+x^2) = c$. Ответ: $\sqrt{y^2-2} = \ln c(x^2+3)$.

2) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{xe^x}, \quad y(1) = 0.$

Так как y и y' присутствуют в диф уравнении только в первых степенях, то это линейное ДУ 1-го порядка. Так как даны начальные условия, то следует после нахождения общего решения ДУ найти частное решение, удовлетворяющее этому начальному условию, то есть решить так называемую задачу Коши.

Ищем общее решение ДУ методом Бернулли, т.е. в виде $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$. Подставляем в исходное уравнение $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{xe^x}$.

Группируем первое и третье слагаемые и выносим за скобки v, получаем

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + v'u = \frac{1}{xe^x}. \qquad (*)$$

Ищем такую функцию $u = u(x)$, чтобы скобка была равна нулю. $u' + \frac{u}{x} = 0$ - это ДУ с разделяющимися переменными. Заменяем $u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$, $du = -\frac{u}{x}dx$. Здесь «лишний» множитель u при dx, делим на него обе части уравнения $\frac{du}{u} = -\frac{u}{u} \cdot \frac{dx}{x}$,

$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln u = -\ln x \Rightarrow \ln u = \ln x^{-1} \Rightarrow u = \frac{1}{x}$.

Нашли функцию u, при которой выражение в скобках равно нулю. Подставляем найденное u в (*), получаем $v \cdot 0 + v' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{xe^x} \Rightarrow \frac{v'}{x} = \frac{1}{xe^x} \Big| \cdot x$. Получили

$v' = e^{-x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} e^{-x} \Rightarrow dv = e^{-x}dx$. Интегрируем обе части уравнения.

$\int dv = \int e^{-x}dx$, $v = -e^{-x} + c$. Получили общее решение ДУ $y = u \cdot v = \frac{1}{x} \cdot \left(c - e^{-x}\right)$;

$y = \frac{c}{x} - \frac{1}{xe^x}$ - общее решение.

Замечание. *Здесь первое слагаемое* $\frac{c}{x}$ *является общим решением линейного однородного уравнения* $y' + \frac{y}{x} = 0$, *а второе слагаемое* $-\frac{1}{xe^x}$ *является частным решением исходного линейного неоднородного уравнения* $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{xe^x}$. *Сделаем проверку общего решения линейного однородного дифуравнения* y_0. $y_0 = \frac{c}{x} \Rightarrow y_0' = c\left(x^{-1}\right)' = -\frac{c}{x^2}$. *Подставляем в* $y' + \frac{y}{x} = 0$, *получаем* $-\frac{c}{x^2} + \frac{c}{x \cdot x} = 0$, *т.е. верное равенство* $\Rightarrow y_0 = \frac{c}{x}$ *- общее решение линейного однородного (с нулевой правой частью) дифуравнения.*

Теперь сделаем проверку для частного решения $\tilde{y} = -\frac{1}{xe^x} = -x^{-1}e^{-x}, \tilde{y}' = -\left(x^{-1}e^{-x}\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x}\right) = \frac{1}{x^2e^4} + \frac{1}{xe^x}$. *Подставляем в исходное ДУ* $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{xe^x}$,

$\frac{1}{x^2e^x} + \frac{1}{xe^x} + \left(-\frac{1}{xe^x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{xe^x}$, $\frac{1}{x^2e^x} + \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{x^2e^x} = \frac{1}{xe^x}$. *Получили верное равенство, т.е. именно такая функция* $y = -\frac{1}{xe^x}$ *при прохождении через данное* *дифференциальное уравнение дала правую часть* $\dfrac{1}{xe^x}$*, что и доказывает, что найденное* $\tilde{y}$ *является частным решением исходного дифуравнения.*

Теперь приступим к решению задачи Коши. Подставим данное начальное условие в полученное общее решение $y = \dfrac{c}{x} - \dfrac{1}{xe^x}$, $y(1) = 0$, $0 = \dfrac{c}{1} - \dfrac{1}{1e^1} \Rightarrow 0 = c - \dfrac{1}{e} \Rightarrow c = \dfrac{1}{e} = 0$.

Найденное c подставляем в общее решение. $y = \dfrac{1}{xe} - \dfrac{1}{xe^x}$ - решение задачи Коши. Можно его записать по - другому $y = \dfrac{1}{x}\left(e^{-1} - e^{-x}\right)$. Ответ: $y = \dfrac{1}{x}\left(e^{-1} - e^{-x}\right)$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$,

2) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$,

3) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 1$,

4) $y' - y \cdot ctgx = 2x\sin x$,

5) $\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$,

6) $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$,

7) $y' + y \cdot tgx = \cos^2 x$,

8) $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$,

3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Решение типовых задач

1).Решить ДУ, допускающие понижение порядка: а) $xy''' + y'' = 1$.

ДУ третьего порядка. В этом уравнении отсутствует неизвестная функция $y = y(x)$ и ее первая производная y'. Понижаем порядок дифуравнения заменой $y'' = z$, тогда $y''' = z'$. Исходное уравнения теперь запишется как $xz' + z = 1 \Rightarrow xz' = 1 - z$ - дифуравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными.

$$x\frac{dz}{dx} = 1 - z\Big| \cdot dx \Rightarrow xdz = (1-z)dx\Big|:x(1-z) \Rightarrow \frac{dz}{1-z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dz}{1-z} = \int\frac{dx}{x}$$

$$-\ln|z| + \ln c_1 = \ln|x|,\quad \ln\frac{c_1}{z} = \ln|x| \Rightarrow \frac{c_1}{z} = x \Rightarrow z = \frac{c_1}{x}.$$

Подставляем $z = y''$, получаем $y'' = \dfrac{c_1}{x}$. Так как $y' = \int y''dx$, то $y' = \int\dfrac{c_1}{x}dx = c_1\ln|x| + c_2$.

Так как $y = \int y'dx$, то $y = \int\left(c_1\ln|x| + c_2\right)dx$. Найдем сначала с помощью формулы интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$:

$$\int\ln|x|dx = \begin{vmatrix} u = \ln|x| & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix} = x\ln|x| - \int x\frac{dx}{x} = x\ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x.$$

$$y = c_1\int\ln|x|dx + c_2\int dx = c_1\left(x\ln|x| - x\right) + c_2x + c_3 = c_1x\ln|x| - c_1x + c_2x + c_3 = c_1x\ln|x| + (c_2 - c_1)x + c_3$$

Обозначим $c_2 - c_1$ другой константой, пусть это будет c_2, тогда $y = c_1x\ln|x| + c_2x + c_3$.

Ответ: $y = c_1x\ln|x| + c_2x + c_3$.

Замечание. Так как исходное уравнение было 3-го порядка, то и найденная функция содержит три произвольных константы.

Задачи для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1) $yy'' - (y')^2 = 0$, 2) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$, 3) $xy'' - y' = 0$, 4) $3y \cdot y'' + (y')^2 = 0$,

3.12.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия о физических задачах, приводящих к дифференциальным уравнениям, о ДУ первого порядка, изоклинах, Задаче Коши;
- приобрели умения и навыки геометрически истолковывать ДУ 1-го порядка, строить простейшие математические модели на основе ДУ.

- освоили понятия об основных классах уравнений 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах;
- приобрели умения и навыки интегрирования основных классов уравнений 1-го порядка.

- освоили понятия о ДУ высших порядков, задаче Коши, понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений, о ДУ, допускающих понижение порядка;
- приобрели умения и навыки интегрировать простейшие ДУ высших порядков и решать задачу Коши.

3.13 Практическое занятие № 13 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Система линейных дифференциальных уравнений. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений»

3.13.1 Задание для работы

1. Дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами.

2. Система линейных дифференциальных уравнений. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений.

3.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами однородные.

2. Дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами неоднородные.

Решение типовых задач

Решить линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1.$$

Линейные дифуравнения с постоянными коэффициентами решаем в два этапа.

Сначала решается уравнение с нулевой правой частью.

$$I.\ y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение, заменяя y'' *на* r^2, y' *на* r, *вместо* y *пишем 1.*

$$r^2 - 3r + 2 = 0,\ r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},\ r_1 = 2,\quad r_2 = 1.$$

Запишем фундаментальные решения $y_1 = e^{r_1 x} = e^{2x}$, $y_2 = e^{r_2 x} = e^x$. *Запишем общее решение однородного уравнения* $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$. *Теперь находим частное решение* $\tilde{y}$ *исходного уравнения.*

$$II.\quad y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1 \quad (*)$$

Ищем $\widetilde{y} = Ax^2 + Bx + C$ *, так как правая часть представляет собой многочлен второго порядка. Ищем* A, B, C *, «прогоняя» функцию* $\widetilde{y}$ *через исходное дифуравнение. Находим*

$y' = (\widetilde{y})' = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B, \quad y'' = (y')' = (2Ax + B)' = 2A.$. *Подставляем все в (*).*

$2A - 3(2Ax + B) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2 - 4x + 1,$

$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2 - 4x + 1$.

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{array}{l|l} x^2: & 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \\ x^1: & -6A + 2B = -4 \Rightarrow -6 + 2B = -4 \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B = 1 \\ x^0: & 2A - 3B + 2C = 1 \Rightarrow 2 - 3 + 2C = 1 \Rightarrow 2C = 2 \Rightarrow C = 1 \end{array}$$

Подставляем в $\widetilde{y} \Rightarrow \quad \widetilde{y} = x^2 + x + 1$. *Так как общее решение линейного дифуравнения* $y = y_0 + \widetilde{y}$ *, то* $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$, 2) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

3) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \cdot \sin 6x$. 4) $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$, 5) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.

6) $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$, 7) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

8) $y'' - 3y' = x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{2}{7}$,

2. Системы линейных дифференциальных уравнений. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений.

Решение типовых задач

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}.$$

Решение. Сведем предложенную систему к одному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами второго порядка. Для этого продифференцируем первое уравнение системы по *t:*

$x'' = -7x' + y'$ и заменим y' воспользовавшись для этого вторым уравнением системы:

$x'' = -7x' - 2x - 5y, \quad y = x' + 7x$. Окончательно $x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x)$.

$x'' + 12x' + 37x = 0$ - однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 12k + 27 = 0; \quad k_{1,2} = -6 \pm i$

Следовательно, решение: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Из первого уравнения $y = x' + 7x$, поэтому $y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$;

$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$.

Ответ: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t); \; y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$, 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$.

3.13.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:
- освоили понятия о методах интегрирования линейных ДУ второго и высших порядков с постоянными коэффициентами;
- приобрели умения и навыки интегрирования линейных ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

- освоили методы интегрирования простейших систем ДУ, понятие о качественной теории ДУ;
- приобрели умения и навыки интегрирования простейших систем ДУ.

3.14 Практическое занятие № 14 (2 часа).

Тема: «Случайные события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Случайные величины. Дискретные случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Нормальное распределение и его свойства**»**

3.14.1 Задание для работы

1. **Случайные события.** Вероятность. Элементарная теория вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.
2. **Случайные величины.** Дискретные случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Нормальное распределение и его свойства

3.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Понятие случайного события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей. Методы вычисления вероятностей Решение типовых задач

Задача 1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и набрал их наудачу, помня, что они различны. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Для решения задачи используем классическое определение вероятности. Событие А – номер набран верно.

P(A)= $\frac{m}{n}=\frac{1}{90}$, где $m=1$, так как только один вариант набора верен, всего таких вариантов $n=A_{10}^2=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!}=90$. Ответ: P(A)= $\frac{1}{90}$.

Задача 2. Круговая мишень состоит из трёх зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35 и 0,4. Найти вероятность:

а) попадания в первую или третью зоны;

б) промаха по мишени.

Решение. События: A_1 - попасть в первую зону; A_2 - попасть во вторую зону; A_3 - попасть в третью зону; А – попасть в первую или третью зоны; В – промах по мишени.

а) Так как события A_1 и A_3 несовместны, используем теорему сложения для несовместных событий . P(A)= $P(A_1)+P(A_3)=$0,1+0,4=0,5.

б) События A_1, A_2 и A_3 независимы используем формулу умножения вероятностей для независимых событий Р(В)= $P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})$ =(1-0,1)·(1-0,35)·(1-0,4)=0,9·0,65·0,6=0,351. Ответ: Р(А)=0,5; Р(В)=0,351.

<u>Задача 3.</u> В ящике находятся пять одинаковых приборов, причем три из них неработающих. Наудачу достают два прибора. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных приборов окажутся:

а) один неработающий прибор;

б) два неработающих прибора;

в) хотя бы один неработающий прибор.

Решение: а) определим событие А = {один неработающий прибор}. Число благоприятных для события А исходов равно m(А) = 3·2 = 6. Общее число возможных исходов составит $n = C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2} = 10$. Тогда Р(А)= $\frac{m(A)}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6$;

б) определим событие В = {два неработающих прибора}. Число благоприятных для события В исходов равно $m(B) = C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3.$

Общее число исходов $n = C_5^2 = 10,$ потому что условия опыта те же. Тогда $P(B) = \frac{m(B)}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3;$

в) определим событие С = {хотя бы один неработающий прибор}. В этом случае удобно перейти к дополнительному событию $\overline{C}$ = {ни одного неработающего прибора} = {оба работающих прибора}. Число благоприятных исходов для события $\overline{C}$ равно $m(\overline{C}) = 1,$ так как только одним способом можно выбрать два работающих прибора из двух работающих.

Число всех исходов n = 10, так как условия опыта остались прежними. Тогда Р($\overline{C}$) = $\frac{m(\overline{C})}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

Для вероятности исходного события С, используя свойства вероятности, получим

Р(С) = 1 – Р($\overline{C}$) = 1 – 0,1 = 0,9.

<u>Задача 4.</u> В первой коробке 5 красных и 3 зеленых карандаша, а во второй – 3 красных и 4 зеленых. Из первой коробки наудачу достают 3 карандаша, а из второй – 2 карандаша. Найти вероятность того, что среди взятых карандашей будут:

а) все карандаши красного цвета;

б) все карандаши одного цвета.

Решение: а) определим события:

К = {все карандаши красного цвета};

$К_1$ = {красные карандаши из первой коробки};

$К_2$ = {красные карандаши из второй коробки}.

Событие К наступит, если наступят одновременно события и $К_1$, и $К_2$, т. е. К = $К_1 \cdot К_2$. Так как коробки различные, то события $К_1$ и $К_2$ – независимые. Тогда по теореме умножения получим

Р(К) = Р($К_1 \cdot К_2$) = Р($К_1$) · Р($К_2$). Р($К_1$) = $\frac{m(K_1)}{n_1}$, так как все исходы равновозможные. $m(K_1) = C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!} = 10;$ $n_1 = C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$ Отсюда Р($К_1$) = $\frac{10}{56} = \frac{5}{28}$.

Аналогично находим $P(К_2) = \frac{m(К_2)}{n_2}$; $m(К_2) = C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!} = 3$; $n_2 = C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$.

Отсюда $P(К_2) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$. Окончательно получаем $P(К) = \frac{5}{28}\cdot\frac{1}{7} = \frac{5}{196}$;

б) определим события:

В = {все карандаши одного цвета};

К = {все карандаши красные};

З = {все карандаши зеленые}.

Событие В наступит, если наступит какое-либо одно из событий К или З, т. е. В = К + З. А так как события К и З несовместные, то по теореме сложения получим

$P(В) = P(К + З) = P(К) + P(З)$.

Используя формулу классической вероятности и теорему умножения, получим

$P(З) = P(З_1) \cdot P(З_2)$,

где $З_1$ = {зеленые карандаши из первой коробки}; $З_2$ = {зеленые карандаши из второй коробки}.

$P(З_1) = \frac{m(З_1)}{n_1} = \frac{1}{C_8^3} = \frac{1}{56}$; $P(З_2) = \frac{m(З_2)}{n_2} = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

Отсюда, получаем $P(З) = \frac{1}{56}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{196}$. Таким образом, с учетом ответа в пункте а) имеем

$P(В) = \frac{5}{196} + \frac{1}{196} = \frac{6}{196} = \frac{3}{98}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. В партии готовой продукции из 20 изделий имеется 8 повышенного качества. Наудачу отбирают пять изделий. Какова вероятность, что среди них будут: а) четыре повышенного качества; б) хотя бы одно повышенного качества; в) ни одного повышенного качества.

Задача 2. В первой урне a_1 красных, $в_1$ белых и c_1 черных шаров. Во второй a_2 красных, $в_2$ белых и c_2 черных шаров. Из первой урны взято m_1 шаров, а из второй – m_2. Определить вероятность того, что среди вынутых шаров будут: а) все шары одного цвета; б) один шар черного цвета. Исходные данные представлены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Вариант	a_1	$в_1$	c_1	a_2	$в_2$	c_2	m_1	m_2
0	5	3	2	0	3	2	2	1

Задача 3. В ящике 15 деталей, среди которых 10 - окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Найти вероятность того, что эти детали окрашены.

Задача 4. По предмету теория вероятностей и математическая статистика имеется 30 экзаменационных билетов. Студент выучил только 20. Каким ему выгоднее зайти на экзамен – первым или вторым?

Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Решение типовых задач

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий B_1, $B_2,\ldots B_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n)\,.$$

Эта формула **называется формулой полной вероятности**.

Задача 1. По цели произведено три последовательных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле p_1=0,3, при втором p_2=0,6, при третьем p_3=0,8. При одном попадании вероятность поражения цели r_1=0,4, при двух попаданиях r_2=0,7, при трех попаданиях r_3=1. Вычислить вероятность поражения цели при трех выстрелах.

Решение. Рассмотрим полную группу несовместных событий:

B_1 – было одно попадание;

B_2 – было два попадания;

B_3 – было три попадания;

B_4 – не было ни одного попадания.

Определим вероятность каждого события. По теоремам умножения и сложения вероятностей будем иметь

$$P(B_1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3 = 0{,}332\,.$$

$$P(B_2) = p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3 = 0{,}468\,.$$

$$P(B_3) = p_1p_2p_3 = 0{,}144\,.$$

$$P(B_4) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0{,}056\,.$$

Пусть событие A – цель поражена. Выпишем условные вероятности поражения цели при осуществлении каждого из событий B_1, B_2, B_3, и B_4.

$$P(A/B_1) = 0{,}4,\quad P(A/B_2) = 0{,}7,\quad P(A/B_3) = 1,\quad P(A/B_4) = 0\,.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) + P(B_4)P(A/B_4) = 0{,}6044$$

Ответ:0,6044

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий B_1, B_2,…B_n вероятности появления которых $P(B_1)$, $P(B_2)$,…, $P(B_n)$. Событие A может произойти только вместе с каким-либо из событий B_1, B_2,…B_n, которые будем называть гипотезами. Если событие A произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1)$, $P(B_2)$,…, $P(B_n)$:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Полученная формула **называется формулой Байеса**. Здесь $P(A)$ определяется формулой полной вероятности.

Задача 2. 30% приборов собирает специалист высокой квалификации и 70% специалист средней квалификации. Надежность работы прибора, собранного специалистом высокой квалификации, 0,9, надежность прибора, собранного специалистом средней квалификации, 0,8. Взятый прибор оказался надежным. Вычислить вероятность того, что он собран специалистом высокой квалификации.

Решение. Событие A – безотказная работа прибора; B_1 – прибор собран специалистом высокой квалификации; B_2 – прибор собран специалистом средней квалификации.

Вероятности гипотез равны: $P(B_1) = 0{,}3$, $P(B_2) = 0{,}7$.

Условные вероятности события A равны: $P(A/B_1) = 0{,}9$, $P(A/B_2) = 0{,}8$.

Полная вероятность события A: $P(A) = 0{,}3\cdot 0{,}9 + 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}83$.

Вычислим вероятность гипотезы B_1 при условии, что событие A произошло

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}9}{0{,}83} = 0{,}325\,.$$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Вычислить вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможные все предположения о первоначальном составе шаров.

Задача 2. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие попало, если вероятности попадания в цель каждым из орудий равны p_1=0,4, p_2=0,3, p_3=0,5.

Схема Бернулли.

Решение типовых задач

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p, то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях k раз, выражается формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } q=1\text{-}k.$$

В частности, отсюда $P_n(0)=q^n$, $P_n(1)=npq^{n-1}$, … , $P_n(n)=p^n$.

Пример 1. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Решение. Событие A – достали белый шар. Тогда вероятности $P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{3}$.

По формуле Бернулли требуемая вероятность

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Пример 2. Монета подбрасывается 5 раз в неизменных условиях. Успехом считается герб (событие А). Найти вероятность того, что герб появится 3 раза.

Решение. Для решения задачи используем формулу Бернулли (контент, п.3.1.1).

$$P_5(3) = C_5^3 (0,5)^3 \cdot (1-0,5)^{5-3} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} \cdot (0,5)^5 = 0,3125.$$

Ответ: вероятность того, что герб выпадет 3 раза из 5 равна 0,3125.

Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа

Формула Пуассона

При большом числе испытаний n и малой вероятности p формулой Бернулли пользоваться неудобно, например, $0,95^{1000}$ вычислить трудно. В этом случае для вычисления вероятности того, что в n испытаниях (n – велико) событие произойдет k раз используют формулу Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda=np$=const – среднее число появлений события в n испытаниях.

Пример 3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течении времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

Решение. N=1000, p=0,002, $\lambda=np$=2, k=3. Искомая вероятность

$$P_{1000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{2^3}{2e^2} = 0,18.$$

Формулы Муавра – Лапласа

Пример 4. Стрелок выполнил 400 выстрелов. Найти вероятность 325 попаданий, если вероятность при каждом выстреле 0,8.

Решение. Воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа

$$P_{400}(325) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\varphi\left(\frac{325 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = \frac{1}{8} \cdot \varphi\left(\frac{5}{8}\right) = 0{,}125 \cdot \varphi(0{,}625) = 0{,}125 \cdot 0{,}327 = 0{,}0409.$$

Значения функции $\varphi(x)$ берём из таблицы. Ответ: вероятность того, что стрелок попадёт 325 раз 400 равна 0,0409.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Задача 2. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6. Он собирается произвести 10 выстрелов. Найти вероятность того, что он попадёт в цель три раза.

Задача 3. Найти вероятность того, что при подбрасывании игральной кости 5 очков появится два раза.

Задача 4. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути повреждено меньше трех изделий.

1. Случайные дискретные величины. Функция распределения и ее свойства.

Решение типовых задач

Задание 1 Из коробки, содержащей 25 конфет, среди которых 6 шоколадных, наудачу выбраны три конфеты. Случайная величина X – число шоколадных конфет среди отобранных. Записать ряд распределения СВ X, найти функцию распределения F(x) (и построить ее график), математическое ожидание, дисперсию. Построить многоугольник распределения.

Решение. Случайная величина X – дискретная и принимает значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятность каждого значения по формуле классической вероятности.

P(X = 0) = P (все три конфеты не шоколадные) = $= \frac{C_{19}^3}{C_{25}^3} = \frac{969}{2300} \approx 0{,}42;$

P(X = 1) = P (одна из трех конфет шоколадная) = $= \frac{C_6^1 C_{19}^2}{C_{25}^3} = \frac{1026}{2300} \approx 0{,}45;$

P(X = 2) = P (две конфеты из трех шоколадные) = $= \frac{C_6^2 C_{19}^1}{C_{25}^3} = \frac{285}{2300} \approx 0{,}12;$

P(X = 3) = P (все три конфеты шоколадные) = $= \frac{C_6^3}{C_{25}^3} = \frac{20}{2300} \approx 0{,}01.$

Ряд распределения СВ X имеет следующий вид:

X	0	1	2	3
P	0,42	0,45	0,12	0,01

Проверка: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}42 + 0{,}45 + 0{,}12 + 0{,}01 = 1.$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}42, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}87, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}99, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения F(x) представлен на рис. 2.

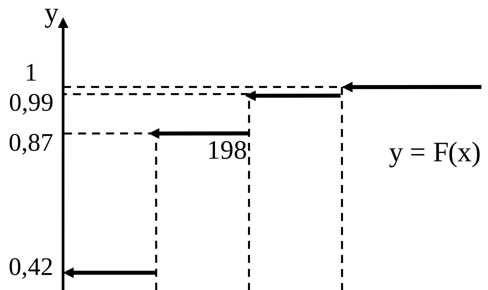


Рис. 2

Многоугольник распределения СВ X представлен на рис. 3.

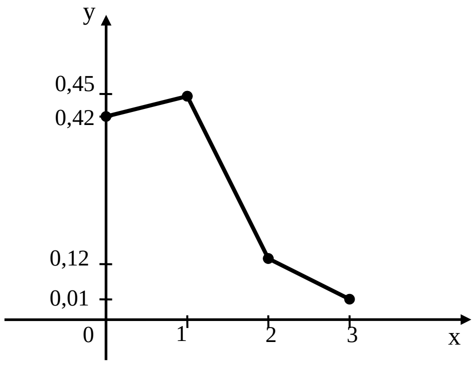


Рис. 3

2. Математическое ожидание и дисперсия случайной дискретной величины.
Математическое ожидание СВ X:

$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}42 + 1 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}01 = 0{,}72.$

Дисперсия СВ X:

$D(X) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - 0{,}72)^2 p_i = (0 - 0{,}72)^2 \cdot 0{,}42 + (1 - 0{,}72)^2 \cdot 0{,}45 +$
$+(2 - 0{,}72)^2 \cdot 0{,}12 + (3 - 0{,}72)^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}5.$

Задачи для самостоятельной работы

Задание. Для заданной СВ X записать ее ряд распределения, найти функцию распределения (и построить ее график), математическое ожидание, дисперсию. Построить многоугольник распределения.

В урне 3 черных и 7 белых шаров. Из урны пять раз наудачу извлекают шар (с возвращением перед каждым извлечением). Случайная величина X – число вынутых белых шаров.

1. Случайные непрерывные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства.

Решение типовых задач

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, заданную а некотором интервале (a, b). Закон распределения вероятностей для такой величины должен позволять находить вероятность попадания ее значения в любой интервал (x_1, x_2).

Функция распределения непрерывной случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения $x \in (a, b)$ вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Как любая вероятность $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.
3. $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
4. $P(X = x_1) = 0$.
5. Если все возможные значения случайной величины X находятся на интервале (a, b), то $F(x)=0$ при $x \le a$ и $F(x)=1$ при $x \ge b$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины X называют производную от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Плотность распределения непрерывной случайной величины X обладает свойствами:

1. $f(x) \ge 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
3. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения случайной величины $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.
4. $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 2, \\ (x-2)^2 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения этой случайной величины и вероятность попадания ее в интервал (1; 2,5).

По определению $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < 2, \\ 2(x-2) \quad \text{при} \quad 2 < x < 3, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$

Требуемая вероятность будет $P(1 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$.

2. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величин

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Аналогично тому, как это было сделано для дискретной случайной величины, определим числовые характеристики непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ называется выражение

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

Если случайная величина X может принимать значения только на конечном отрезке $[a, b]$, то $M[X] = \int\limits_{a}^{b} x f(x)dx$.

Дисперсия непрерывной случайной величины X вычисляется согласно равенству:

$$D[X] = M\left[X - M(X)\right]^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M[X]\right)^2 f(x)dx,$$

или

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(M[X]\right)^2 \cdot$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, указанные для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин

Среднеквадратичным отклонением случайной величины X называется число, равное корню квадратному из дисперсии:

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}\ .$$

Значение случайной величины X, при котором плотность распределения $f(x)$ имеет наибольшее значение называется модой $M_0[X]$.

Медианой $M_e[X]$ непрерывной случайной величины X, называют ее значение, определяемой равенством

$$P(X<M_e[X])=P(X>M_e[X])$$

или

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx=\int_{M_e}^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x\le 0,\\ x-\dfrac{1}{4}x^3 \quad \text{при} \ 0<x<2,\\ 0 \quad \text{при} \ x\ge 2. \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение величины X.

Воспользуемся отношениями:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}=\frac{16}{15}\cdot$$

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}\cdot$$

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\frac{4}{3}-\frac{256}{225}=\frac{44}{225}\cdot \qquad \sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\frac{2\sqrt{11}}{15}\cdot$$

2. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2} \quad \text{при} \ 1<x\le 2,\\ 0 \quad \text{при} \ x>2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения этой величины.

Воспользуемся формулой $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x\le 1$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0\cdot$

Если $1<x\le 2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^x\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}t\right)\Bigg|_0^x=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right).$$

Если x>2, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{2}^{x}0dx=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\Big|_0^2=1\cdot$$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x\le 1,\\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right) \ \text{при} \ 1<x\le 2,\\ 1 \ \text{при} \ x>2.\end{cases}$$

3. Случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le -2\\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, -2<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение меньше 0.

Решение. Для решения задачи воспользуемся одним из свойств функции распределения $P(\xi<0)=F_\xi(0)-F_\xi(-\infty)=0{,}5.$ Ответ: вероятность того, что ξ меньше 0 равна 0,5.

Нормальное распределение и его свойства.

Решение типовых задач

Задание. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m = 11 и σ = 1. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения:

а) из интервала [5,13];

б) меньшее 5;

в) большее 13;

г) отличающееся от своего среднего *m* по абсолютной величине не больше чем на 6.

Решение:

а) вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал [a, b] определяется формулой:

$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$, где Ф(x) – функция Лапласа.

Отсюда получаем

$P(5 \le X \le 13) = \Phi\left(\frac{13-11}{1}\right) - \Phi\left(\frac{5-11}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(-6) == 0{,}4772 + 0{,}4999 = 0{,}9771;$

б) вероятность того, что случайная величина X принимает значения, меньшие a, определяется формулой

$P(X < a) = \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) + 1$. Отсюда получаем

$P(X < 5) = \Phi\left(\frac{5-11}{1}\right) + 1 = \Phi(-6) + 1 = -0{,}4999 + 1 = 0{,}5001;$

в) вероятность того, что случайная величина X принимает значения, большие b, определяется формулой

$P(X > b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$

Отсюда получаем $P(X > 13) = 1 - \Phi\left(\frac{13-11}{1}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}4772 = 0{,}5228;$

г) вероятность отклонения случайной величины X от среднего m не более чем на ε находится по формуле

$$P(|X-m|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$ Отсюда получаем

$$P(|X-11|<6)=2\Phi\left(\frac{6}{1}\right)=2\Phi(6)=2\cdot 0{,}4999=0{,}9998.$$

Задачи для самостоятельной работы

Задание. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения:

а) из интервала [a, b];

б) меньшее a;

в) большее b;

г) отличающееся от своего среднего m по абсолютной величине не больше, чем на ε.

Значения параметров заданы в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Вариант	m	σ	a	b	ε
0	1	3	-1	5	2
1	2	4	1	8	3
2	3	5	-1	11	4

3.14.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятие случайного события, вероятности; освоили элементарную теорию вероятностей, методы вычисления вероятностей;
- приобрели умения и навыки вычисления вероятностей по формуле классической вероятности.

- освоили понятие условной вероятности; освоили формулу полной вероятности и формулу Байеса;
- приобрели умения и навыки вычисления вероятностей по формуле полной вероятности и формуле Байеса.

- освоили понятие о случайной дискретной величине, функции распределения и ее свойствах, математическом ожидании и дисперсии случайной дискретной величины;
- приобрели умения и навыки составления закона распределения ДСВ, функции распределения, нахождения математического ожидания и дисперсии ДСВ.

- освоили понятия случайные непрерывные величины, функции распределения, плотности вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства; математического ожидания и дисперсии случайной непрерывной величины;
- приобрели умения и навыки решения задач на НСВ.

- освоили понятия нормального распределения и его свойства;
- приобрели умения и навыки решения задач, связанных с нормальным распределением.

3.15 Практическое занятие № 15 (2 часа).

Тема: «Статистическое описание результатов наблюдений. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.

Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

Статистические методы обработки результатов наблюдений. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения»

3.15.1 Задание для работы

1. Статистическое описание результатов наблюдений. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.

Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

2. Статистические методы обработки результатов наблюдений. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения

3.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Статистическое описание результатов наблюдений. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.

Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

Решение типовых задач

Задание 1. По списку на предприятии числится 20 рабочих, которые имеют следующие разряды: 1,5,2,4,3,4,6,4,5,1,2,2,3,4,5,3,4,5,2,1.

Составьте сгруппированный ряд распределения рабочих по разрядам. Определите средний разряд рабочего, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Решение**.** Построение сгруппированного ряда для дискретного признака: составим таблицу, в которой перечислим варианты и их частоты.

x_i^*	1	2	3	4	5	6
n_i	3	4	3	5	4	1

Для определения выборочных характеристик воспользуемся формулами приведёнными в § 9.5.

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 3 + 4\cdot 5 + 5\cdot 4 + 6\cdot 1) = 3{,}3.$$

$$D_B = \frac{1}{20}(1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 1) - 3{,}3^2 = 2{,}21.$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{2{,}21} = 1{,}49.$$

Ответ: средний разряд рабочего равен 3,3 при среднем квадратическом отклонении 1,49.

Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Задание 2. Задана выборка: 2, 0, 2, 0, 3, 2, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1.

По заданной выборке:

а) составить вариационный ряд и статистический закон распределения;

б) построить полигон;

в) составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

г) вычислить несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S;

д) найти доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}8$.

Решение: а) вариационный ряд: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Объем выборки n = 20.

Статистический закон распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	7	4	1	1
μ_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

где n_i – частота; μ_i – относительная частота; i = 1, 2, …, 6;

б) полигон частот выборки приведен на рис. 4.

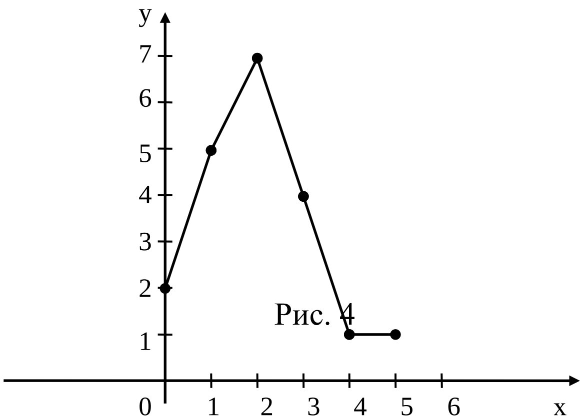


Рис. 4

Изображаем точки с координатами (x_i, n_i) и соединяем их отрезками;

в) эмпирическая функция распределения $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}1, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}35, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}70, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}9, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}95, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

При построении графика функции $F^*(x)$ откладываем значения в (0;1) (рис. 5);

Рис. 5

г) выборочное среднее $\overline{x}$ вычисляем как среднее арифметическое всех выборочных значений

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1) = 2.$$

Несмещенная выборочная дисперсия S^2 равна

$$S^2 = \frac{1}{20-1}((0-2)^2 \cdot 2 + (1-2)^2 \cdot 5 + (2-2)^2 \cdot 7 + (3-2)^2 \cdot 4 +$$

$$+ (4-2)^2 \cdot 1 + (5-2)^2 \cdot 1) = \frac{1}{19}(8 + 5 + 4 + 4 + 9) = 1{,}58.$$

Стандартное отклонение S равно $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1{,}58} = 1{,}26;$

д) так как объем выборки n = 20, по таблице распределения Стьюдента найдем t_α, для $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}2$ и $k = n - 1 = 19$, $t_\alpha = 1{,}33$.

Доверительный интервал для среднего m вычислим по формуле

$$\overline{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}};$$

$$2 - 1{,}33\frac{1{,}26}{\sqrt{20}} \le m \le 2 + 1{,}33\frac{1{,}26}{\sqrt{20}};$$

$$1{,}63 \le m \le 2{,}37.$$

Задачи для самостоятельной работы

Задание. По заданной выборке

а) составить вариационный ряд и статистический закон распределения;

б) построить полигон;

в) составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

г) вычислить несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\overline{x}$, S^2, S;

д) найти доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью γ.

52, 34, 49, 44, 45, 45, 37, 36, 46, 36; $\gamma = 0{,}8$.

Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал.

Решение типовых задач

Задание. Для определения потерь зерна при уборке проведено 100 измерений случайным образом. Средняя величина потерь составила 1,8 ц с одного гектара посевов при среднем квадратическом отклонении 0,5 ц с га. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых может находиться средняя величина потерь с 1 га.

Решение. В этой задаче требуется построить доверительный интервал для математического ожидания при известном среднем квадратическом отклонении.

$a \in (1{,}8 - \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{10}; 1{,}8 + \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{10}) = (1{,}702; 1{,}898).$

Параметр t_β определяем из равенства: $\Phi_0(t_\beta) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475 \Leftrightarrow t_\beta = 1{,}96.$ Для нахождения t_β используем таблицу 12.2.

Ответ: средняя величина потерь находится в границах (1,702;1,898).

Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.

Задачи для самостоятельной работы

Задание 1. Взято 16 проб молока, поступивших на реализацию из акционерного сельскохозяйственного предприятия. Средняя жирность молока составила 3,7% при среднем квадратическом отклонении 0,5%. Какова вероятность того, что средняя жирность молока всех партий не выйдет за пределы от 3,6% до 3,8%?

Задание 2. С помощью случайной выборки изучалось время открытия банковского счёта в различных банках. На основании 60 наблюдений установлено, что в среднем на выполнение этой операции затрачивалось 0,5 часа, при среднем квадратическом отклонении 0,12 часа. Считая время выполнения производственной операции нормально распределённой случайной величиной, определить границы, в которых находится среднее время открытия счёта с доверительной вероятностью 0,9.

Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

Рассказать студентам, что такое корреляционный и регрессионный анализ. Объяснить, что статистическое исследование наличия или отсутствия зависимости между случайными величинами производится с помощью выборочного коэффициента корреляции. Выделение линейной части этой зависимости производится с помощью выборочного коэффициента регрессии и выборочного уравнения (линейной) регрессии.

Напомнить, что если в результате осуществления некоторого эксперимента наблюдаются две величины X и Y, то *выборочный корреляционный момент* $\mu^*_{x,y}$ величин X и Y определяется формулой:

$$\mu^*_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

где $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ — n пар наблюденных значений, полученных в n независимых повторениях эксперимента, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. *Выборочный коэффициент корреляции* $r^*_{x,y}$ равен:

$$r^*_{x,y} = \frac{\mu^*_{x,y}}{\sigma^*_x \cdot \sigma^*_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

где

$$\sigma^*_x = \sqrt{D^*(X)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

$$\sigma^*_y = \sqrt{D^*(Y)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}.$$

Выборочный коэффициент регрессии Y *на* x:

$$\rho^*_{y/x} = r^*_{x,y}\frac{\sigma^*_y}{\sigma^*_x} = \frac{\mu^*_{x,y}}{(\sigma^*_x)^2}.$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y *на* x имеет вид:

$$y - \bar{y} = \rho^*_{y/x}(x - \bar{x}) \quad \text{или} \quad \frac{y-\bar{y}}{\sigma^*_y} = r^*_{x,y}\frac{x-\bar{x}}{\sigma^*_x},$$

выборочное уравнение прямой линии регрессии X *на* y:

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma^*_x} = r^*_{x,y}\frac{y-\bar{y}}{\sigma^*_y} \quad \text{или} \quad \frac{y-\bar{y}}{\sigma^*_y} = \frac{1}{r^*_{x,y}}\frac{x-\bar{x}}{\sigma^*_x}.$$

Отметить, что эти уравнения можно вывести с помощью метода наименьших квадратов.

Напомнить, что в качестве оценки отклонения найденного значения $r^*_{x,y}$ от точного значения $r_{x,y}$ коэффициента корреляции берется среднее квадратическое отклонение, приближенно равное:

$$\sigma^*_r = \frac{1-(r^*_{x,y})^2}{\sqrt{n}}.$$

Доверительный интервал для $r_{x,y}$ имеет вид:

$$r^*_{x,y} - t_\gamma \cdot \frac{1-(r^*_{x,y})^2}{\sqrt{n}} < r_{x,y} < r^*_{x,y} + t_\gamma \cdot \frac{1-(r^*_{x,y})^2}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, проверка гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции может быть осуществлена с помощью проверки условия

$$|\, r^*_{x,y} \,| < t_\gamma \cdot \frac{1-(r^*_{x,y})^2}{\sqrt{n}}.$$

2. Статистические методы обработки результатов наблюдений. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения

Понятие о методе наименьших квадратов

В различных практических исследованиях приходится находить эмпирические функции по отдельным значениям этих функций, полученным на основании опытных данных (измерений). Один из способов получения таких функций–метод наименьших квадратов. Пусть, например, на основании эксперимента необходимо установить функциональную зависимость между температурой х и урожайностью у. По результатам измерений составляем таблицу:

x	x_1	…	x_i	…	x_n
y	y_1	…	y_i	…	y_n

Предположим, что эти точки на координатной плоскости находятся приблизительно на одной прямой. В данном случае естественно предположить, что между х и у существует линейная зависимость, выражающаяся уравнением

$$y = a \cdot x + b$$

Так как точки (x_i, y_i), i=1… n лишь приблизительно лежат на одной прямой, то равенства $y_i - (ax_i + b) = 0$ будут выполняться приближенно и величины $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$ будут отличны от нуля.

Составим сумму $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$ и подберем параметры a и b так, чтобы функция S(a,b) принимала наименьшее значение, т.е. чтобы сумма квадратов погрешностей $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$ была наименьшей. Из необходимых условий экстремума следует:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i + b)] \cdot (-x_i) \right) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i + b)] \cdot (-1) \right) = 0. \end{cases} \text{или} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - n \sum_{i=1}^{n} x = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем a и b и подставив их в уравнение

$$y = a \cdot x + b$$

получим эмпирическую функцию исследуемой зависимости.

Задача. Экспериментально получены пять значений искомой функции y=f(x) при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию y=f(x) в виде $y = a \cdot x + b$.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Решение. Предварительно вычислим суммы:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2 + 3 = 8,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 30.$$

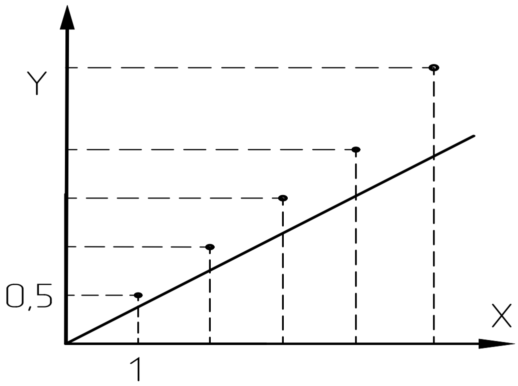
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 30 - a \cdot 55 - b \cdot 15 = 0, \\ 8 - a \cdot 15 - b \cdot 5 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 15b + 55a = 30, \\ 5b + 15a = 8. \end{cases}$$

Решив систему уравнений найдём a=0,6, b= –0,2.Следовательно, эмпирическая функция определяется формулой

$$y = 0{,}6x - 0{,}2.$$

Построим график этой зависимости и нанесем на него экспериментальные точки (облако точек).



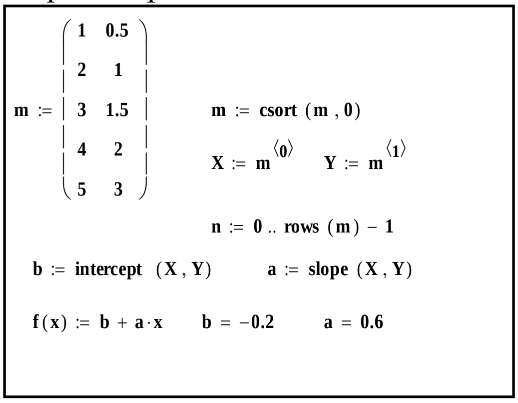
Ответ: y = 0,6x – 0,2.

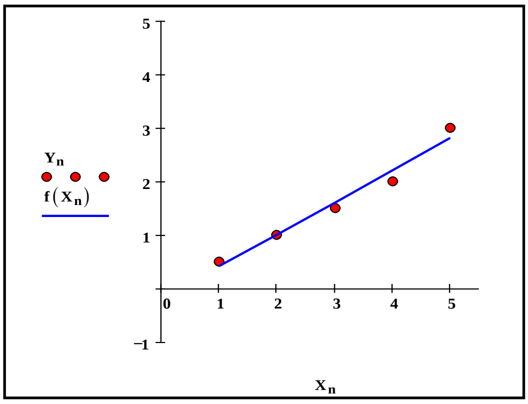
Нахождение эмпирической функции с MathCAD

Пусть задана таблица экспериментальных значений из **задачи № 5**.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Процедура нахождения эмпирической функции в MathCAD методом наименьших квадратов предполагает использование функций MathCAD.





2. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии среднеквадратичной регрессии по не сгруппированным данным

Пусть изучается система количественных признаков (X, Y). В результате n независимых опытов получены и пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n).

Найдем по данным наблюдений выборочное уравнение прямой линии среднеквадратичной регрессии Y на X вида

$$Y = \rho_{yx}x + b. \qquad (*)$$

Угловой коэффициент прямой линии регрессии Y на X называют выборочным коэффициентом регрессии Y на X и обозначают через ρ_{yx}; он является оценкой коэффициента регрессии β .

Назовем отклонением разность

$$Y_i - y_i \ (i = 1, 2. .... n),$$

где Y_i—вычисленная по уравнению (*) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i; y_i—наблюдаемая ордината, соответствующая x_i. Подберем параметры ρ_{yx} и b так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной (в этом состоит сущность метода наименьших квадратов).чтобы точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n), построенные по данным наблюдений, на плоскости хОу лежали как можно ближе к прямой (*).

Так как каждое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, то и сумма квадратов отклонений есть функция F этих параметров (временно вместо ρ_{yx} будем писать ρ):

$$F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2 \text{, или } F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)^2 .$$

Для отыскания минимума приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\frac{dF}{d\rho}=2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)x_i=0;$$

$$\frac{dF}{db}=2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)=0.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим систему двух линейных уравнений относительно ρ и b*):

$$\left(\sum x^2\right)\rho+\left(\sum x\right)b=\sum xy; \quad \left(\sum x\right)\rho+nb=\sum y. \qquad (**)$$

Решив эту систему, найдем искомые параметры:

$$\rho_{yx}=\left(n\cdot\sum xy-\sum x\cdot\sum y\right)/\left(n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right);$$
$$b=\left(\sum x^2\cdot\sum y-\sum x\cdot\sum xy\right)/\left(n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right). \qquad (***)$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y = \rho_{xy}\, x + C,$$

где ρ_{xy} —выборочный коэффициент регрессии X на Y.

Пример. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным n = 5 наблюдений:

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Решение. Составим расчетную табл. 11. Найдем искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (***):

ρ_{xy} = (5·26,975— 15·8,15)/(5·57,5—15^2) ==0,202;

Ь= (57,5·8,15—15·26,975)/62,5= 1,024.

(Для простоты записи вместо $\sum_{i=1}^{n}$ условимся писать $\sum$.

Таблица 11

x_i	y_i	x^2_i	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875

5,00	2.25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x_i^2 = 57{,}50$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$

Напишем искомое уравнение регрессии:

$$Y = 0{,}202x + 1{,}024.$$

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения Y_i согласуются с наблюдаемыми значениями y_i найдем отклонения Y_i—y_i. Результаты вычислений приведены в табл. 12.

Таблица 12

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	—0,024
1,50	1,327	1,40	—0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,183
5,00	2,034	2,25	- 0,216

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения.

Применение критериев согласия (алгоритм)

Рассказать студентам об основных принципах статистической проверки гипотез. Напомнить понятия *статистической гипотезы* (простой и сложной), *нулевой* и *конкурирующей* гипотезы, *ошибок первого* и *второго рода*, *уровня значимости*, *статистического критерия*, *критической области*, *области принятия гипотезы*. Кроме того, напомнить понятия *наблюдаемого значения* критерия и *критической точки*.

Напомнить критерии для проверки гипотез о вероятности события, о математическом ожидании, о сравнении двух дисперсий. Напомнить критерий «*хи-квадрат»* К. Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения. Рассказать о порядке выполнения работы «Статистическая обработка результатов измерений»:

А) По данной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n строится *статистический ряд*

y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
k_1	k_2	k_3	$\cdots$	k_m

Здесь $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ — элементы выборки, записанные в порядке возрастания, k_i — число повторений элемента y_i в выборке. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{m} k_i = n.$

Б) При большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы, и строится *группированная выборка*, а затем *группированный статистический ряд*. Для этого отрезок $[a,b]$, содержащий все элементы выборки, разбивается на N интервалов одинаковой длины $h = \frac{b-a}{N}$. В зависимости от объема выборки число интервалов группировки N

берется от 6 до 20. Находятся концы интервалов $\xi_i = a + (i-1)h$ $(i = 1,2,\ldots, N+1)$, середины интервалов

$z_j = \frac{1}{2}(\xi_j + \xi_{j+1})$ $(j = 1,2,\ldots, N)$ и соответствующие *эмпирические частоты* — количество n_j элементов выборки, попавших в j-ый интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу). Очевидно, что $\sum_{j=1}^{N} n_j = n.$

Также строится *группированный статистический ряд относительных частот* $w_j = \frac{n_j}{n}$ $(j = 1,2,\ldots, N)$.

В) Строится график *выборочной функции распределения* $\overline{F}(x)$, где $\overline{F}(x) = 0$ при $x \le z_1$,

$\overline{F}(x) = \frac{n_1 + \ldots + n_i}{n} = \sum_{j=1}^{i} w_j$ при $z_i < x \le z_{i+1}$ $(i = 1,2,\ldots, N-1)$

и $\overline{F}(x) = 1$ при $x > z_N$.

Г) Строится *гистограмма относительных частот* — ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ и высотами $h_j = \frac{w_j}{h}$ $(j = 1,2,\ldots, N)$.

Д) Находится оценка математического ожидания — *выборочное среднее*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} n_j z_j,$$

оценка дисперсии — *исправленная выборочная дисперсия*

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N} n_j (z_j - \overline{x})^2,$$

исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{s^2}$.

Е) Находятся *теоретические частоты* $n_j^{/} = np_j$, где

$$p_j = \Phi\left(\frac{\xi_{j+1} - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{\xi_j - \overline{x}}{s}\right), \quad j = 1,2,\ldots, N.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся по таблицам.

Ж) Для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности сначала составляется расчетная таблица:

Номер интервала	Границы интервала	Эмпирические частоты	Теоретические частоты		
j	ξ_j, ξ_{j+1}	n_j	$n_j^{/}$	$(n_j - n_j^{/})^2$	$\frac{(n_j - n_j^{/})^2}{n_j^{/}}$
1 2 … N					

З) Если $n_j < 5$ или $n_j^{/} < 5$ при некотором j, то j-ый интервал объединяется с соседним, при этом эмпирические и теоретические частоты суммируются. После объединения получаются r интервалов $(r \le N)$, в каждом из которых $n_j \ge 5$ и $n_j^{/} \ge 5$.

И) По расчетной таблице находится *наблюдаемое значение* статистики «хи-квадрат» (Пирсона):

$$\chi^2_{набл} = \sum_{j=1}^{r} \frac{(n_j - n_j^{/})^2}{n_j^{/}}.$$

К) По заданному *уровню значимости* α и *числу степеней свободы* $k = r - 3$ находится из таблиц *критическая точка* $\chi^2(\alpha, k)$. Если $\chi^2_{набл} \le \chi^2(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении случайной величины X и поэтому она принимается. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2(\alpha, k)$, то гипотезу отвергают.

Л) Если гипотеза принимается, то с помощью таблиц строится график плотности

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$$

случайной величины X (распределенной по нормальному закону). Этот график строится в тех же осях и масштабе, что и гистограмма относительных частот.

Решение типовых задач

Задание. Результат прочности на сжатие (случайная величина ξ) – 200 образцов бетона – представлены в виде сгруппированного ряда:

Интервалы прочности кг/ $см^2$	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
n_i	10	26	56	64	30	14

Требуется проверить основную гипотезу о нормальном законе распределения прочности образцов бетона на сжатие. Уровень значимости принять q = 0,01.

Решение. В качестве основной гипотезы будем рассматривать гипотезу H_0: $\xi \in N(\bar{x}; \sigma_B)$. Для её проверки воспользуемся критерием Пирсона, алгоритм использования которого изложен в § 11.2.

Начнём решение задачи с определения выборочных характеристик.

$$\bar{x} = \frac{1}{200}(195\cdot 10 + 205\cdot 26 + 215\cdot 56 + 225\cdot 64 + 235\cdot 30 + 245\cdot 14) = 221.$$

$$D_B = \frac{1}{200}((195-221)^2\cdot 10 + (205-221)^2\cdot 26 + (215-221)^2\cdot 56 + (225-221)^2\cdot 64 +$$
$$+ (235-221)^2\cdot 30 + (245-221)^2\cdot 14) = 152.$$

$$\boldsymbol{\sigma}_B = \sqrt{152} = 12{,}33.$$

Для определения $\chi^2_{набл}$ составим таблицу.

Интервалы, I_k	Частоты, n_k	$p_k = \Phi_0(\frac{x_{k+1} - \overline{x}}{\sigma_B}) - \Phi_0(\frac{x_k - \overline{x}}{\sigma_B})$	$\frac{(n_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}$
-∞-200	10	0,0446	0,13
200-210	26	0,1421	0,21
210-220	56	0,2814	0,0013
220-230	64	0,2992	0,289
230-240	30	0,1709	0,511
240-+∞	14	0,0614	0,241

Например, $p_1 = \Phi_0(\frac{200 - 221}{12.33}) - \Phi_0(-\infty) = 0{,}5 - 0{,}4554 = 0{,}0446.$

$\chi^2_{набл} = 0{,}13 + 0{,}21 + 0{,}0013 + 0{,}289 + 0{,}511 + 0{,}241 = 1{,}3823.$

Для определения критической точки воспользуемся таблицей 12.4 критических точек распределения хи-квадрат. Так как неизвестные параметры распределения были заменены их точечными оценками, число степеней свободы будет на 3 меньше числа интервалов, то есть $k = 6 - 3 = 3$. Итак, $\chi^2_{кр} = \chi^2_3(0{,}01) = 11{,}3.$

Так как $\chi^2_{набл} = 1{,}3823 < 11{,}3 = \chi^2_{kp}$, то гипотеза H_0 принимается.

Ответ: данные согласуются с гипотезой о нормальном законе распределения.

Задачи для самостоятельной работы

Задание 1. Распределение работников предприятия по стажу их работы на данном предприятии представлено интервальным рядом:

Стаж работы, лет	До 1	1-5	5-10	10-15	15-20	20-25
Число работников	8	12	16	14	10	5

На уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о том, что данная генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения.

Задание 2. Из нормальной генеральной совокупности сельскохозяйственных предприятий, рассматриваемых по показателю урожайности пшеницы, с известным средним квадратическим отклонением σ = 9,4 и генеральной средней a_0 = 38,1, извлечена выборка объёма n = 50. По ней найдена выборочная средняя $\overline{x}$ = 42. Требуется при уровне значимости α=0,05 проверить основную гипотезу H_0: $a = a_0$=38,1 при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq 38{,}1$.

Проверка гипотез о равенстве долей и средних.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $Z_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: M (X) = M (Y) о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе H_1:

M (X) ≠ M (Y), надо вычислить наблюденное значение критерия

$Z_{НАБЛ} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$ и по таблице функции Лапласа найти критическую точку по равенству $\Phi_{z_{КР}} = (1-\alpha)/2$.

Если $|Z_{набл}| < z_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|Z_{набл}| > z_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n==60 и m =50, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}$ =1250 и $\bar{y}$ =1275. Генеральные дисперсии известны: D(X)=120, D(У) = 100. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: M(X) = M(Y), при конкурирующей гипотезе H_1: M (X) ≠ M (Y).

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{НАБЛ} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} = \frac{1250 - 1275}{\sqrt{120/60 + 100/50}} = -12{,}5.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид M (X) ≠ M (Y), поэтому критическая область - двусторонняя. Найдем правую критическую точку:

$\Phi(z_{кр})=(1—\alpha)/2=(1—0,01)/2=0,495$.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим $z_{кр}$ = 2,58. Так как $|Z_{набл}| > z_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

Второй случай. Нулевая гипотеза H_0: M (X) = M (Y). Конкурирующая гипотеза H_1: M (X) > M (Y).

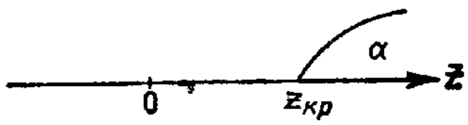


Рис. 26

Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне значимости а проверить нулевую гипотезу H_0: M (X) = M (Y) о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе H_1: M (X) > M (Y), надо вычислить наблюдавшееся значение критерия

$Z_{НАБЛ} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$ и по таблице функции Лапласа найти критическую точку из равенства $\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2$.

Если $Z_{набл} < z_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} > z_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Пример 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n =10 и m ==10, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}$ =14,3 и $\bar{y}$ = 12,2. Генеральные дисперсии известны: D(X) = 22, D(Y) = 18. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: M (X) = M (Y), при конкурирующей гипотезе H_1: M (X) > M (Y).

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{НАБЛ} = \frac{14,3-12,2}{\sqrt{22/10+18/10}} = 1,05.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид М (X) > М (Y), поэтому критическая область - правосторонняя.

По таблице функции Лапласа находим $z_{кр}$ = 1,64. Так как $Z_{набл} < z_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, выборочные средние различаются незначимо.

Третий случай. Нулевая гипотеза H_0: М (X) = М (Y). Конкурирующая гипотеза H_1: М (X) > М (Y).

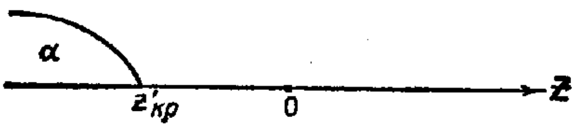


Рис. 27

Правило 3. При конкурирующей гипотезе H_1: М (X) > М (Y) надо вычислить $Z_{набл}$ и сначала по таблице функции Лапласа найти «вспомогательную точку» $z_{кр}$ по равенству $\Phi(z_{кр}$ = (1—2α)/2, а затем положить $z'_{кр} = -z_{кр}$

Если $Z_{набл} < -z_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} > -z_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Задачи для самостоятельной работы

Задание (пример 3). По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n = 50 и m = 50, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}$ = 142 и $\bar{y}$ =150. Генеральные дисперсии известны: D(X) = 28,2, D(Y) = 22,8. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: М (X) = М (Y), при конкурирующей гипотезе H_1: М (X) > М (Y).
Решение. Подставив данные задачи в формулу для вычисления наблюдаемого значения критерия, получим $Z_{набл} = -8$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид М (X) < М (Y), поэтому критическая область - левосторонняя.
Найдем «вспомогательную точку» $z_{кр}$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2 = (1-2\cdot 0,01)/2 = 0,49.$$

По таблице функции Лапласа находим $z_{кр}$ =2,33. Следовательно, $z'_{кр} = -z_{кр} = -2,33$.

Так как $Z_{набл} < -z_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная средняя $\bar{x}$ значимо меньше выборочной средней $\bar{y}$.

3.15.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятия студенты:

- освоили понятия о статистических оценках, погрешностях оценки, доверительной вероятности и доверительном интервале;
- приобрели умения и навыки по заданной выборке:

а) составлять вариационный ряд и статистический закон распределения; б) строить полигон; в) составлять эмпирическую функцию распределения и строить ее график; г) вычислять несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S; д) находить доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью γ.

- освоили понятия о функциональной зависимости и регрессии, коэффициенте корреляции, корреляционном отношении, их свойствах и оценках;

- приобрели умения и навыки нахождения выборочного коэффициента регрессии и выборочного уравнения (линейной) регрессии.

- освоили определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов;
- приобрели умения и навыки определения параметров уравнения регрессии методом наименьших квадратов.

- освоили понятия о критериях согласия, о проверке гипотезы о значении параметров нормального распределения, о проверке гипотезы о виде распределения;
- приобрели умения и навыки проверки гипотезы о виде распределения;

- освоили понятия об элементах проверки гипотез о равенстве долей и средних;
- приобрели умения и навыки проверки гипотез о равенстве долей и средних.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

Семинарские занятия не предусмотрены РУП.