ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Техносферная и информационная безопасность**»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.07.02 Теория погрешностей

Направление подготовки: 20.03.01 Техносферная безопасность
Профиль подготовки: «БЖД в техносфере»
Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. **Конспект лекций.**

1.1 Лекция № 1

Тема: «Абсолютные и относительные погрешности»

1 Вопросы лекции:

1. Определение абсолютной и относительной погрешности численного результата.
2. Основные составляющие абсолютной погрешности.

2.Краткое содержание вопросов

1.1. Абсолютные и относительные погрешности

Абсолютная погрешность D - это разность между измеренным X и истинным Xи значениями измеряемой величины. Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины: D = X - Xи .

Поскольку истинное значение измеряемой величины определить невозможно, вместо него на практике используют действительное значение измеряемой величины Xд. Действительное значение находят экспериментально, путем применения достаточно точных методов и средств измерений. Оно мало отличается от истинного значения и для решения поставленной задачи может использоваться вместо него. При поверке за действительное значение обычно принимают показания образцовых средств измерений. Таким образом, на практике абсолютную погрешность находят по формуле D » X – Xд . *Относительная погрешность* d — это отношение абсолютной погрешности измерения к истинному (действительному) значению измеряемой величины (она обычно выражается в процентах) :

$$\delta = \frac{\Delta}{X_и} \cdot 100 \approx \frac{\Delta}{X_д} \cdot 100$$

.

1.2. Погрешности инструментальные и методические, отсчитывания и установки

Инструментальными (приборными или аппаратурными) погрешностями называются такие, которые принадлежат данному средству измерений, могут быть определены при его испытаниях и занесены в его паспорт.

Эти погрешности обусловлены конструктивными и технологическими недостатками средств измерений, а также следствием их износа, старения или неисправности. *Инструментальные погрешности*, обусловленные погрешностями применяемых средств измерений, были рассмотрены в главе 3.

Однако, кроме инструментальных погрешностей, при измерениях возникают еще и такие погрешности, которые не могут быть приписаны данному прибору, не могут быть указаны в его паспорте и называются *методическими,* т.е. связанными не с самим прибором, а с методом его использования.

Методические погрешности могут возникать из-за несовершенства разработки теории явлений, положенных в основу метода измерений, неточности соотношений, используемых для нахождения оценки измеряемой величины, а также из-за

несоответствия измеряемой величины и ее модели.
Рассмотрим примеры, иллюстрирующие методическую погрешность измерения. Объектом исследования является источник переменного напряжения, амплитудное значение которого *Um* нужно измерить. На основании предварительного изучения объекта исследования за его модель принят генератор напряжения синусоидальной формы. Используя вольтметр, предназначенный для измерений действующих значений переменных напряжений, и зная соотношение между действующим и амплитудным значениями синусоидального напряжения, получаем результат измерения в виде $Um = \sqrt{2} \times Uv$, где *Uv* - показание вольтметра. Более тщательное изучение объекта могло бы выявить, что форма измеряемого напряжения отличается от синусоидальной и более правильное соотношение между значением измеряемой величины и показанием вольтметра $Um = k \times Uv$, где k ¹ $\sqrt{2}$. Таким образом, несовершенство принятой модели объекта исследования приводит к методической погрешности измерения $DU = \sqrt{2} \times Uv - k \times Uv$.

Эту погрешность можно уменьшить, либо рассчитав значение *k* на основе анализа формы кривой измеряемого напряжения, либо заменив средство измерений, взяв вольтметр, предназначенный для измерений амплитудных значений переменных напряжений [11].

Очень часто встречающейся причиной возникновения методических погрешностей является то обстоятельство, что, организуя измерения, мы вынуждены измерять (или сознательно измеряем) не ту величину, которая должна быть измерена, а некоторую другую, близкую, но не равную ей [6].

Ri

Примером такой методической погрешности может служить погрешность измерения напряжения вольтметром с конечным сопротивлением (рис. 4.1).

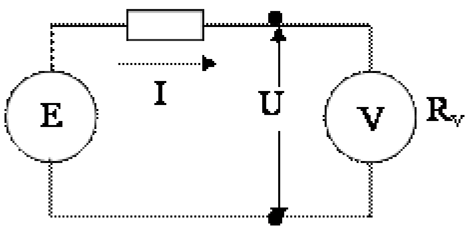


Рис. 4.1

Вследствие шунтирования вольтмет-ром того участка цепи, на котором измеряется напряжение, оно оказывается меньшим, чем было до присоединения вольтметра. И действительно, напряжение, которое покажет вольтметр определится выражением $U = I \times Rv$. Если учесть, что ток в цепи $I = E/(Ri + Rv)$, то

$$U = E \cdot \frac{R_v}{R_i + R_v} < E .$$

Поэтому для одного и того же вольтметра, присоединяемого поочередно к разным участкам исследуемой цепи, эта погрешность различна: на низкоомных участках она ничтожна, а на высокоомных может быть очень большой. Эта погрешность могла бы быть устранена, если бы вольтметр был постоянно подключен к данному участку цепи на все время работы устройства (как на щите электростанции), но это невыгодно по многим причинам.

Нередки случаи, когда вообще трудно указать способ измерения, исключающий методическую погрешность. Пусть, например, измерению подлежит температура раскаленных болванок, поступающих из печи на прокатный стан. Спрашивается, где разместить датчик температуры (например, термопару): под болванкой, сбоку или над болванкой? Где бы мы его ни поместили, мы не измерим внутренней температуры тела болванки, т.е. будем иметь существенную методическую погрешность, так как измеряем не то, что нужно, а то, что проще (не сверлить же в каждой болванке канал, чтобы поместить термопару в её центре).

Таким образом, основной отличительной особенностью методических погрешностей является то обстоятельство, что они не могут быть указаны в паспорте прибора, а должны оцениваться самим экспериментатором при организации выбранной методики измерений, поэтому он обязан четко различать фактически *измеряемую* им величину от *подлежащей измерению.*

Погрешность отсчитывания происходит от недостаточно точного отсчитывания показаний. Она обусловлена субъективными особенностями наблюдателя (например, погрешность интерполирования, т.е. неточного отсчета долей деления по шкале прибора) и вида отсчетного устройства (например, погрешность от параллакса). Погрешности отсчитывания отсутствуют при использовании цифровых измерительных приборов, что является одной из причин перспективности последних.

Погрешность установки вызывается отклонением условий измерения от нормальных, т.е. условий, при которых производилась градуировка и поверка средств измерений. Сюда относится, например, погрешность от неправильной установки прибора в пространстве или его указателя на нулевую отметку, от изменения температуры, напряжения питания и других влияющих величин.

Рассмотренные виды погрешностей в равной степени пригодны для характеристики точности как отдельных результатов измерений, так и средств измерений.

1.3. Систематические, прогрессирующие, случайные и грубые погрешности

Систематическая погрешность измерений Dc — составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины [2, 3].

Причины возникновения систематических погрешностей обычно могут быть установлены при подготовке и проведении измерений. Эти причины весьма разнообразны: несовершенство используемых средств и методов измерений, неправильная установка средства измерений, влияние внешних факторов (влияющих величин) на параметры средств измерений и на сам объект измерения, недостатки метода измерения (методические погрешности), индивидуальные особенности оператора (субъективные погрешности) и др. [7]. По характеру проявления систематические погрешности делятся на постоянные и переменные. К постоянным относятся, например, погрешности, обусловленные неточностью подгонки значения меры, неправильной градуировкой шкалы прибора, неправильной установкой прибора относительно направления магнитных полей и т.д. Переменные систематические погрешности обусловлены воздействием на процесс измерения влияющих величин и могут возникнуть, например, при изменении напряжения источника питания прибора, внешних магнитных полей, частоты измеряемого переменного напряжения и пр. Основная особенность систематических погрешностей состоит в том, что зависимость их от влияющих величин подчиняется определенному закону. Этот закон может быть изучен, а результат измерения - уточнен путем внесения поправок, если числовые значения этих погрешностей определены. Другим способом уменьшения влияния систематический погрешностей является применение таких методов измерения, которые дают возможность исключить влияние систематических погрешностей без определения их значений (например, метод замещения).

Результат измерений тем ближе к истинному значению измеряемой величины, чем меньше оставшиеся неисключенные систематические погрешности. Наличие исключенных систематических погрешностей определяет правильность измерений,

качество, отражающее близость к нулю систематических погрешностей [2, 7]. Результат измерения будет настолько правильным, насколько он неискажен систематическими погрешностями и тем правильнее, чем меньше эти погрешности.
Прогрессирующими (или дрейфовыми) называются непредсказуемые погрешности, медленно изменяющиеся во времени. Эти погрешности, как правило, вызываются процессами старения тех или иных деталей аппаратуры (разрядка источников питания, старение резисторов, конденсаторов, деформация механических деталей, усадка бумажной ленты в самопишущих приборах и т. п.). Особенностью прогрессирующих погрешностей является то, что они могут быть скорректированы путем введения поправки лишь в заданный момент времени, а далее вновь непредсказуемо возрастают. Поэтому в отличие от систематических погрешностей, которые могут быть скорректированы поправкой, найденной один раз на весь срок службы прибора, прогрессирующие погрешности требуют непрерывного повторения коррекции и тем чаще, чем меньше должно быть их остаточное значение. Другая особенность прогрессирующих погрешностей состоит в том, что их изменение во времени представляет собой нестационарный случайный процесс и поэтому в рамках хорошо разработанной теории стационарных случайных процессов они могут быть описаны лишь с оговорками.

Случайная погрешность измерения $\overset{0}{\Delta}$ — составляющая погрешности измерений, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Значение и знак случайных погрешностей определить невозможно, они не поддаются непосредственному учету вследствие их хаотического изменения, обусловленного одновременным воздействием на результат измерения различных независимых друг от друга факторов. Обнаруживаются случайные погрешности при многократных измерениях одной и той же величины (отдельные измерения в этом случае называются наблюдением) одними и теми же средствами измерения в одинаковых условиях одним и тем же наблюдателем, т.е. при равноточных (равнорассеянных) измерениях. Влияние случайных погрешностей на результат измерения учитывается методами математической статистики и теории вероятности.
Грубые погрешности измерений - случайные погрешности измерений, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях погрешности.

Грубые погрешности (промахи) обычно обусловлены неправильным отсчетом по прибору, ошибкой при записи наблюдений, наличием сильно влияющей величины, неисправностью средств измерений и другими причинами. Как правило, результаты измерений, содержащие грубые погрешности, не принимаются во внимание, поэтому грубые погрешности мало влияют на точность измерения. Обнаружить промах бывает не всегда легко, особенно при единичном измерении; часто трудно бывает отличить грубую погрешность от большой по значению случайной погрешности. Если грубые погрешности встречаются часто, мы поставим под сомнение все результаты измерений. Поэтому грубые погрешности влияют на годность измерений.
В заключение описанного деления погрешностей средств и результатов измерений на случайную, прогрессирующую и систематическую составляющие необходимо обратить внимание на то, что такое деление является весьма упрощенным приемом их анализа. Поэтому всегда следует помнить, что в реальной действительности эти составляющие погрешности проявляются совместно и образуют единый нестационарный случайный процесс.
Погрешность результата измерений при этом можно представить в виде суммы случайных $\overset{0}{\Delta}$ и систематических Dc погрешностей: D = Dc + $\overset{0}{\Delta}$. В погрешности измерений входит случайная составляющая, поэтому её следует считать случайной величиной.
Рассмотрение характера проявления погрешностей измерений показывает, нам, что

единственно правильный путь оценки погрешностей дает нам теория вероятностей и математическая статистика.

1.4. Вероятностный подход к описанию погрешностей

Законы распределения случайных погрешностей. Случайные погрешности обнаруживают при проведении ряда измерений одной и той же величины. Результаты измерений при этом, как правило, не совпадают между собой, так как из-за суммарного воздействия множества различных факторов, не поддающихся учету, каждое новое измерение дает и новое случайное значение измеряемой величины. При правильном проведении измерений, достаточном их числе и исключении систематических погрешностей и промахов можно утверждать, что истинное значение измеряемой величины не выходит за пределы значений, полученных при этих измерениях. Оно остается неизвестным до тех пор пока не определено теоретически вероятное значение случайной погрешности.

Пусть величину А измеряли *n* раз и наблюдали при этом значения a1, a2, a3,…,a*i*,...,an. Случайная абсолютная погрешность единичного измерения определяется разностью

$$Di = ai - A . \qquad (4.1)$$

Графически результаты отдельных измерений представлены на рис. 4.2.

При достаточно большом числе *n* одни и те же погрешности, если они имеют ряд дискретных значений, повторяются и поэтому можно установить относительную частоту (частость) их появления, т.е. отношение числа полученных одинаковых данных *mi* к общему числу проведенных измерении *n.* При продолжении измерений величины *А* эта частота не изменится, поэтому ее можно считать вероятностью появления погрешности при данных измерениях: *p(Ai) = mi / n.*
Статистическая зависимость вероятности появления случайных погрешностей от их значения называется *законом распределе- ния погрешностей или законом распределения вероятности*. Этот закон определяет характер появления различных результатов отдельных измерений. Различают два вида описания законов распределения: *интегральный* и *дифференциальный.*

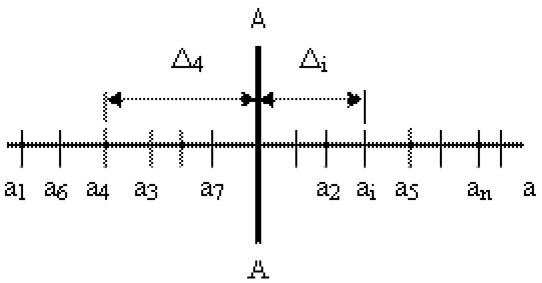


Рис. 4.2. Графическое изображение результатов измерений

Интегральным законом, или *функцией распределения вероятностей F(*D*)* случайной погрешности Di *в i-м* опыте, называют функцию, значение которой для каждого Dявляется вероятностью события *P(D)*, заключающегося в том, что случайная погрешность Diпринимает значения, меньше некоторого значения D, т.е. функцию *F(*D*) = P[*Di < D*]*. Эта функция при изменении Dот -¥ до +¥ принимает значения от 0 до 1 и является неубывающей. Она существует для всех случайных величин как дискретных, так и непрерывных (рис 4.3 а).

Если *F(D)* симметрична относительно точки *А,* соответствующей вероятности 0,5 , то распределение результатов наблюдения будет симметрично относительно истинного значения *А.* В этом случае целесообразно *F(D)* сдвинуть по оси абсцисс на значение DA, т.е. исключить систематическую составляющую погрешность *(DA = Dc)* и получить

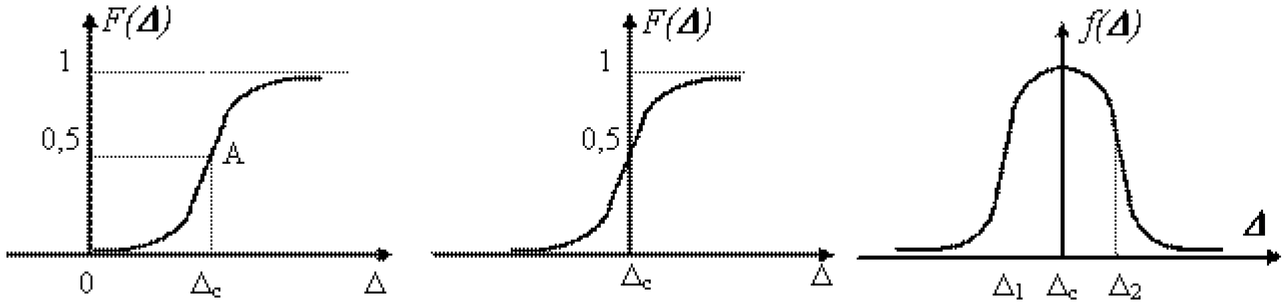
функцию распределения случайной составляющей погрешности *D* = $\overset{\circ}{\Delta}$ (рис. 4.3 б). Функция распределения вероятности погрешности *D* отличается от функции распределения вероятности случайной составляющей погрешности только сдвигом по оси абсцисс на значение систематической составляющей погрешности *Dc* .
Дифференциальным законом распределения вероятностей для случайной погрешности с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения *F(D)* называют функцию

$$f(\Delta) = \frac{dF(\Delta)}{d\Delta} = F'(\Delta)$$

. Эта зависимость есть *плотность распределения вероятностей.* График плотности распределения вероятностей может иметь различную форму в зависимости от закона распределения погрешностей. Для *F(D)*, изображенной на рис. 4.3 б, кривая распределения *f(D)* имеет форму, близкую к форме колокола (рис. 4.3 в). Вероятность появления случайных погрешностей определяется площадью, ограниченной кривой *f(D)* или её частью и осью абсцисс (рис. 4.3 в). В зависи мости от рассматриваемого интервала погрешности

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} f(\Delta)d\Delta$$

.



а) б) в)

Рис. 4.3. Функция распределения (а - $\Delta_c \neq 0$; б - $\Delta_c = 0$) и плотность распределения вероятностей (в) $\Delta_c = 0$

Значение *f(D)dD* есть элемент вероятности, равный площади прямоугольника с основанием *dD и* абсциссами *D1 , D2*, называемыми квантилями. Так как *F(+¥)=*1, то

справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1$$

,
т.е. площадь под кривой *f(D)* согласно правилу нормирования равна единице и отражает вероятность всех возможных событий.

В практике электрических измерений одним из наиболее распространенных законов распределения случайных погрешностей является *нормальный закон* (Гаусса).

Математическое выражение нормального закона имеет вид

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{\Delta^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)}$$

,

где *f(D)* – плотность вероятности случайной погрешности *D = ai - A*; s - среднее квадратическое отклонение. Среднее квадратическое отклонение может быть выражено через случайные отклонения результатов наблюдений Di (см. формулу (4.1)):

$$\sigma = \sqrt{(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2)/(n-1)}$$

Характер кривых, описанных этим уравнением для двух значений s, показан на рис. 4.4. Из этих кривых видно, что чем меньше s, тем чаще встречаются малые случайные погрешности, т.е. тем точнее выполнены измерения. В практике измерений встречаются и другие законы распределения, которые могут быть установлены на основании статистической обработки опытных данных. Некоторые из наиболее часто встречающихся законов распределения приведены в ГОСТ 8.011-84 «Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений».

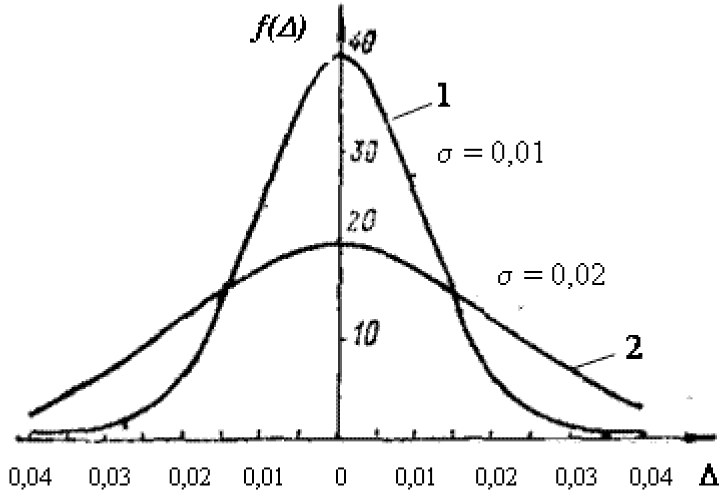


Рис. 4.4. Закон нормального распределения случайных погрешностей

Основными характеристи- ками законов распределения являются *математическое ожидание* и *дисперсия*.

Математическое ожидание случайной величины - это такое ее значение, вокруг которого группируются результаты отдельных наблюдений. Мате-матическое ожидание дискрет-ной случайной величины *M[X]* определяется как сумма произ-ведений всех возможных значений случайной величины на вероятность этих значений

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot P_i .$$

Для непрерывных случайных величин приходится прибегать к интегрированию, для чего необходимо знать зависимость плотности вероятности от *x* , т. е. *f(x),* где *x=D*. Тогда

$$M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx .$$

Это выражение означает, что математическое ожидание равно сумме бесконечно большого числа произведений всех возможных значений случайной величины *x* на бесконечно малые площади *f(x)dx,* где *f(x)* —ординаты для каждого *x,* а *dx* - элементарные отрезки оси абсцисс.

Если наблюдается нормальное распределение случайных погрешностей, то математическое ожидание случайной погрешности равно нулю (рис. 4.4). Если же рассматривать нормальное распределение результатов, то математическое ожидание будет соответствовать истинному значению измеряемой величины, которое мы обозначаем через *A*.

Систематическая погрешность при этом представляет собой отклонение математического ожидания результатов наблюдений от истинного значения *A* измеряемой величины: *Dc = M[X] – A*, а случайная погрешность – разность между результатом единичного наблюдения и математическим ожиданием: $\overset{\circ}{\Delta} = a_i - M[X]$.

Дисперсия ряда наблюдений характеризует степень рассеивания (разброса) результатов отдельных наблюдений вокруг математического ожидания:
D[X] =Dx=M[(ai – mx)2].
Чем меньше дисперсия, тем меньше разброс отдельных результатов, тем точнее выполнены измерения. Однако дисперсия выражается в единицах в квадрате измеряемой величины. Поэтому в качестве характеристики точности ряда наблюдений наиболее часто применяют среднее квадратическое отклонение (СКО), равное корню квадратному из дисперсии : $\sigma_x = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}$.

Рассмотренное нормальное распределение случайных величин, в том числе и случайных погрешностей, является теоретическим, поэтому описанное нормальное распределение следует рассматривать как «идеальное», т. е. как теоретическую основу для изучения случайных погрешностей и их влияния на результат измерений.

Далее излагаются способы применения этого распределения на практике с той или иной степенью приближения. Рассматривается также еще одно распределение (распределение Стьюдента), применяемое при небольших количествах наблюдений.

Оценки погрешностей результатов прямых измерений. Пусть было проведено *n* прямых измерений одной и той же величины. В общем случае в каждом из актов измерений погрешность будет разной:
Di = ai – A,
где Di - погрешность i-го измерения; *ai* - результат i-го измерения.
Поскольку истинное значение измеряемой величины *A* неизвестно, непосредственно случайную абсолютную погрешность вычислить нельзя. При практических расчетах приходится вместо *A* использовать его оценку. Обычно принимают, что истинное значение равно *среднему арифметическому значению ряда измерений:*

$$\overline{A} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}{n}. \qquad (4.2)$$

где *ai* - результаты отдельных измерений; *n* — число измерений.
Теперь аналогично выражению (4.1) можно определить отклонение результата каждого измерения от среднего значения $\overline{A}$ *:*

$$v_i = a_i - \overline{A} \qquad (4.3)$$

где ***vi*** - отклонение результата единичного измерения от среднего значения. Следует помнить, что сумма отклонений результата измерений от среднего значения равна нулю, а сумма их квадратов минимальна, т. е.

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{i=n} v_i^2 \to \min.$$

Эти свойства используются при обработке результатов измерений для контроля правильности вычислений.

Затем вычисляют оценку значения *средней квадратической погрешности* для данного ряда измерений

$$S = \sqrt{\frac{(a_i - \overline{A})^2 + (a_2 - \overline{A})^2 + \ldots + (a_n - \overline{A})^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}{n-1}}. \qquad (4.4)$$

Согласно теории вероятностей при достаточно большом числе измерений, имеющих независимые случайные погрешности, оценка *S* сходится по вероятности к s. Таким образом,

$$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{(a_i - \overline{A})^2 + (a_2 - \overline{A})^2 + \ldots + (a_n - \overline{A})^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}{n-1}}. \qquad (4.5)$$

Ввиду того что среднее арифметическое значение $\overline{A}$ также является случайной величиной, имеет смысл понятие среднеквадратического отклонения среднего арифметического значения. Эту величину обозначим символом scp. Можно показать, что для независимых погрешностей

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}{n \cdot (n-1)}}. \qquad (4.6)$$

Значение scp характеризует степень разброса $\overline{A}$. Как указывалось выше, $\overline{A}$ выступает оценкой истинного значения измеряемой величины, т.е. является конечным результатом выполняемых измерений. Поэтому scp называют также средней квадратической погрешностью результата измерений.

На практике значением s, вычисляемым по формуле (4.5), пользуются в том случае, если необходимо дать характеристику точности применяемого метода измерения: если метод точен, то разброс результатов отдельных измерений мал, т.е. мало значение s. Значение же scp , вычисляемое по (4.6), используется для характеристики точности результата измерений некоторой величины, т.е. результата, полученного посредством математической обработки итогов целого ряда отдельных прямых измерений.

При оценке результатов измерений иногда пользуются понятием *максимальной* или *предельной допустимой погрешности,* значение которой определяют в долях s или S . В настоящее время существуют разные критерии установления максимальной погрешности, т. е. границы поля допуска ±D, в которые случайные погрешности должны уложиться. Общепринятым пока является определение максимальной погрешности D = 3s (или 3*S*). В последнее время на основании информационной теории измерений профессор П. В. Новицкий рекомендует пользоваться значением D = 2s.

Введем теперь важные понятия *доверительной вероятности* и *доверительного интервала.* Как указывалось выше, среднее арифметическое значение $\overline{A}$, полученное в

результате некоторого ряда измерений, является оценкой истинного значения *A* и, как правило, не совпадает с ним, а отличается на значение погрешности. Пусть *Pд* есть вероятность того, что $\overline{A}$ отличается от *A* не более чем на D, т.е. $P(\overline{A}-D< A<\overline{A}+D)=Pд$. Вероятность *Pд* называется *доверительной вероятностью,* а интервал значений измеряемой величины от $\overline{A}$ -D до $\overline{A}$ +D - *доверительным интервалом.*
Приведенные выше неравенства означают, что с вероятностью *Pд* доверительный интервал от $\overline{A}$ -D до $\overline{A}$ +D заключает в себе истинное значение *A*. Таким образом, чтобы характеризовать случайную погрешность достаточно полно, надо располагать двумя числами — доверительной вероятностью и соответствующим ей доверительным интервалом. Если закон распределения вероятностей погрешностей известен, то по заданной доверительной вероятности можно определить доверительный интервал. В частности, при достаточно большом числе измерений часто бывает оправданным использование нормального закона, в то время как при небольшом числе измерений *(n* < 20), результаты которых принадлежат нормальному распределению, следует пользоваться распределением Стьюдента. Это распределение имеет плотность вероятностей, практически совпадающую с нормальной при больших *n,* но значительно отличающуюся от нормальной при малых *n.*
В табл. 4.1 приведены так называемые квантили распределения Стьюдента *½t(n)½Pд* для числа измерений *n* = 2 - 20 и доверительных вероятностей *P* = 0,5 - 0,999.
Укажем, однако, что обычно таблицы распределения Стьюдента приводятся не для значений *n* и *Pд ,* а для значений *m = n-1* и*a =1 – Pд ,* что следует учитывать при пользовании ими. Чтобы определить доверительный интервал, надо для данных *n* и *Pд* найти квантиль ½*t(n)*½Рд и вычислить величины *Aн* = $\overline{A}$ - *scp* × ½*t(n)*½Рд и *Aв* = $\overline{A}$ + *scp* × ½*t(n)*½Рд, которые будут являться нижней и верхней границами доверительного интервала.

После нахождения доверительных интервалов для заданной доверительной вероятности согласно выше приведенной методике делают запись результата измерения в виде $\overline{A}$ *; D = Dн ¸ Dв ; Pд ,*

где $\overline{A}$ - оценка истинного значения результата измерения в единицах измеряемой величины; D - погрешность измерения; Dв = +*scp* × ½*t(n)*½Рд и Dн = -*scp* × ½*t(n)*½Рд – верхняя и нижняя границы погрешности измерения; *Pд – доверительная вероятность* [14].

Таблица 4.1

n	**Значения квантилей распределения Стьюдента t(n) при доверительной вероятности *Pд***									
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0.99	0,995	0,999
2	1.000	1.376	1,963	3,080	6,310	12,71	31,80	63,70	127,3	637,2
3	0.816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,30	6,96	9,92	14,10	31,60
4	0.765	0.978	1,250	1,638	2,350	3,18	4,54	5,84	7,50	12,94
5	0.741	0.941	1,190	1,533	2,130	2,77	3,75	4,60	5,60	8,61
6	0,727	0.920	1,156	1,476	2,020	2,57	3,36	4,03	4,77	6,86
7	0,718	0.906	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
8	0.711	0.896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	4,03	5,40
9	0.706	0.889	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04

10	0,703	0.883	1,110	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
11	0.700	0.879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
12	0.697	0.876	1,088	1.363	1,796	2,20	2,72	3,11	3,50	4,49
13	0.695	0.873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	3,43	4,32
14	0.694	0.870	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
15	0.692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
16	0.691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
17	0.690	0.865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,02	3,25	4,02
18	0,689	0.863	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,22	3,96
19	0.688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
20	0.688	0.861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
¥	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

Оценка погрешностей результатов косвенных измерений. При косвенных измерениях искомая величина *A* функционально связана с одной или несколькими непосредственно измеряемыми величинами: *x, y,...,t.* Рассмотрим простейший случай определения погрешности при одной переменной, когда *A=F(x).* Обозначив абсолютную погрешность измерения величины *x* через ±Dx , получим *A*+D*A*= *F(x*±D*x).*

Разложив правую часть этого равенства в ряд Тейлора и пренебрегая членами разложения, содержащими Dx в степени выше первой, получим

A+DA » F(x) ± $\frac{dF(x)}{dx}$ Dx или DA » ± $\frac{dF(x)}{dx}$ Dx.

Относительная ошибка измерения функции определится из выражения

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \pm \frac{\Delta x}{x}\frac{dF(x)}{dx}$$.

Если измеряемая величина *A* является функцией нескольких переменных: *A=F(x, y,...,t),* то абсолютная погрешность результата косвенных измерений

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 \cdot \Delta t^2}$$.

Частные относительные погрешности косвенного измерения определяются по формулам $\delta_x = \pm \frac{\Delta x}{A} \cdot \frac{dF}{dx}$; $\delta_y = \pm \frac{\Delta y}{A} \cdot \frac{dF}{dy}$ и т. д. Относительная погрешность результата измерений

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \ldots + \delta_t^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{A}\right)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{A}\right)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta}{A}\right. \ldots}$$

.

Остановимся также на особенностях оценки результата косвенного измерения при наличии случайной погрешности.

Для оценки случайной погрешности результатов косвенных измерений величины *A* будем полагать, что систематические погрешности измерений величин *x, y,..., t* исключены, а случайные погрешности измерения этих же величин не зависят друг от друга.

При косвенных измерениях значение измеряемой величины находят по формуле $\overline{A} = f(\overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{t})$,

где $\overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{t}$ - средние или средние взвешенные значения величин *x, y,…, t* .

Для вычисления среднего квадратического отклонения значения $\overline{A}$ измеряемой величины *А* целесообразно использовать средние квадратические отклонения, полученные при измерениях *x, y,…, t* .

В общем виде для определения среднего квадратического отклонения s косвенного измерения служит следующая формула:

$$\sigma_A = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + \ldots + D_t^2}, \tag{4.7}$$

где *Dx ; Dy ;…; Dt* — так называемые частные погрешности косвенного измерения $D_x = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \sigma_x$; $D_y = \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \sigma_y$; …; $D_t = \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \sigma_t$; $\frac{\partial A}{\partial x}$; $\frac{\partial A}{\partial y}$; … ; $\frac{\partial A}{\partial t}$ — частные производные *А* по *x, y,…, t ;* sx; *sy ,…, st , …*— средние квадратические отклонения результатов измерений величин *x, y,…, t* .

Рассмотрим некоторые частные случаи применения уравнения (4.7), когда функциональная зависимость между косвенно и непосредственно измеряемыми

величинами выражается формулой *А = k×xa×yb×zg ,* где *k* - числовой коэффициент (безразмерный).

В этом случае формула (4.7) примет следующий вид:

$$\frac{\sigma_A}{A} = \sqrt{\alpha^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}.$$

Если *a = b = g = 1* и *А = k×x×y×z,* то формула относительной погрешности упрощается до вида

$$\frac{\sigma_A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}.$$

Эта формула применима, например, для вычисления среднего квадратического отклонения результата измерения объема по результатам измерения высоты, ширины и глубины резервуара, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда.

4.5. Правила суммирования случайных и систематических погрешностей

Погрешность сложных измерительных приборов зависит от погрешностей отдельных его узлов (блоков). Погрешности суммируются по определенным правилам.

Пусть, например, измерительный прибор состоит из *m* блоков, каждый из которых обладает независимыми друг от друга случайными погрешностями. При этом известны абсолютные значения средних квадратических sk или максимальных *Mk* погрешностей каждого блока.

Арифметическое суммирование $\sum_{k=1}^{m} \sigma_k$ или $\sum_{k=1}^{m} M_k$ дает максимальную погрешность прибора, которая имеет ничтожно малую вероятность и поэтому редко используется для оценки точности работы прибора в целом. Согласно теории ошибок результирующая погрешность sрез и *Мрез* определяется сложением по квадратическому закону $\sigma_{рез} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sigma_k^2}$ или $M_{рез} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} M_k^2}$.

Аналогично определяется и результирующая относительная погрешность

измерения: $$\delta_{рез} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \delta_п^2}. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) можно использовать для определения допустимых погрешностей отдельных блоков разрабатываемых приборов с заданной общей погрешностью измерения. При конструировании прибора обычно задаются равными погрешностями для отдельных входящих в него блоков. Если существует несколько источников погрешностей, которые на конечный результат измерения влияют неодинаково (или прибор состоит из нескольких блоков с разными погрешностями), в формулу (4.8) следует ввести весовые коэффициенты *ki* :

$$\delta_{рез} = \sqrt{(k_1 \cdot \delta_1)^2 + (k_2 \cdot \delta_2)^2 + \ldots + (k_m \cdot \delta_m)^2}, \quad (4.9)$$

где d1, d2, … , dm — относительные погрешности отдельных узлов (блоков) измерительного прибора; *k1, k2, ... , km* - коэффициенты, учитывающие степень влияния случайной погрешности данного блока на результат измерения.

При наличии у измерительного прибора (или его блоков) также и систематических погрешностей общая погрешность определяется их суммой:

$\delta_{общ} = \sum \delta_{c(i\mu)} + \sqrt{\sum \delta_i^2}$, где dc(im) - систематическая погрешность от воздейст- вия на *i*-й блок m-го фактора; di - случайные погрешности для *i*-го блока.

Суммирование погрешностей, имеющих взаимную корреляционную связь, основано на следующем положении теории вероятностей: дисперсия суммы двух коррелированных случайных величин, характеризующихся дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 и коэффициентом корреляции *r*12, определяется выражением

$$\sigma_\Sigma^2 = \sigma_1^2 + 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Из этого следует, что средняя квадратическая результирующая погрешность вычисляется по формуле

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (4.10)$$

На практике обычно пользуются двумя крайними случаями формулы (4.10); при *r12* » ±1, когда составляющие погрешности суммируются алгебраически:

$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$ = s1+ s2 и при *r*12 » 0, когда погрешности суммируются геометрически: $\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Такой же подход справедлив и для большего числа составляющих.

При оценке влияния частных погрешностей следует учитывать, что точность измерений в основном зависит от погрешностей, больших по абсолютной величине, а некоторые наименьшие погрешности можно вообще не учитывать. Частная погрешность оценивается на основании так называемого *критерия ничтожной погрешности,* который заключается в следующем. Допустим, что суммарная погрешность dрез определена по формуле (4.8) с учетом всех *m* частных погрешностей, среди которых некоторая погрешность di имеет малое значение. Если суммарная погрешность d¢рез, вычисленная без учета погрешности di, отличается от dрез не более чем на 5 %, т.е. dрез-d¢рез< 0,05×dрез или 0,95×dрез<d¢рез , то di можно считать ничтожной погрешностью. Принимая во внимание, что (d¢рез)2 = d2рез - d2i , легко установить критерий ничтожной погрешности: di £ 0,3×dрез . Это означает, что если частная погрешность меньше 30 % общей погрешности, то этой частной погрешностью можно пренебречь. В случае нескольких погрешностей критерий ничтожности их совокупности имеет

вид $\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_i^2} \le 0{,}3 \cdot \delta_{рез}$.

В практике технических расчетов часто пользуются менее строгим критерием - в эти формулы вводят коэффициент 0,4.

1.6. Формы представления результатов измерения

Результат измерения имеет ценность лишь тогда, когда можно оценить его интервал неопределенности, т.е. степень достоверности. Поэтому результат измерений должен содержать значение измеряемой величины и характеристики точности этого значения, которыми являются систематические и случайные погрешности. Количественные показатели погрешностей, способы их выражения, а также формы представления результатов измерений регламентируются ГОСТ 8.011-72 «Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений». Рассмотрим основные формы представления результатов измерений.

Погрешность результата прямого однократного измерения зависит от многих факторов, но в первую очередь определяется погрешностью используемых средств измерений. Поэтому в первом приближении погрешность результата измерения можно принять равной погрешности, которой в данной точке диапазона измерений характеризуется используемое средство измерений.

Погрешности средств измерений изменяются в диапазоне измерений. Поэтому в каждом случае, для каждого измерения необходимо произвести вычисления погрешности результата измерений, используя формулы (3.19) – (3.21) нормирования погрешности соответствующего средства измерений. Вычисляться должна как абсолютная, так и относительная погрешности результата измерения, так как первая из них нужна для округления результата и его правильной записи, а вторая — для однозначной сравнительной характеристики его точности.

Для разных характеристик нормирования погрешностей СИ эти вычисления производятся по-разному, поэтому рассмотрим три характерных случая.

1. Класс прибора указан в виде одного числа *q,* заключенного в кружок. Тогда относительная погрешность результата (в процентах) g = *q,* а абсолютная его погрешность D*x* = *q*×*x*/100.

2. Класс прибора указан одним числом *p* (без кружка). Тогда абсолютная погрешность результата измерения D*x* = *p*×*xk* /100, где *xk* — предел измерения, на котором оно производилось, а относительная погрешность измерения (в процентах) находится по

формуле $\delta = \frac{\Delta x}{x} = p \cdot \frac{x_k}{x}$,

т е. в этом случае при измерении, кроме отсчета измеряемой величины *x* обязательно должен быть зафиксирован и предел измерений *xk* , иначе впоследствии нельзя будет

вычислить погрешность результата.
3. Класс прибора указан двумя числами в виде *c/d*. В этом случае удобнее вычислить относительную погрешность *d* результата по формуле (3.21), а уже затем найти абсолютную погрешность как $Dx = d \times x/100$.
После проведения вычислений погрешности используют одну из форм представления результата измерений в следующем виде: *x; ±D* и *d*, где *x* – измеренное значение; *D* – абсолютная погрешность измерения; *d* -относительная погрешность измерения. Например, производится следующая запись: «Измерение произведено с относительной погрешностью d = … %. Измеренное значение $x = (A \pm D)$, где *A* – результат измерений». Однако более наглядно указать пределы интервала неопределенности измеряемой величины в виде: $x = (A\text{-}D)¸(A+D)$ или $(A\text{-}D) < x < (A+D)$ с указанием единиц измерения. Другая форма представления результата измерения устанавливается в следующем виде: *x*; *D* от *Dн* до*Dв; P,* где *x* – результат измерения в единицах измеряемой величины; *D , Dн , Dв* – соответственно погрешность измерения с нижней и верхней её границами в тех же единицах; *P* – вероятность, с которой погрешность измерения находится в этих границах. ГОСТ 8.011-72 допускает и другие формы представления результатов измерения, отличающиеся от приведенных форм тем, что в них указывают раздельно характеристики систематической и случайной составляющих погрешности измерения. При этом для систематической погрешности указывают её вероятностные характеристики. В этом случае основными характеристиками систематической погрешности являются математическое ожидание M*[Dxc*], среднеквадратическое отклонение s[*Dxc*] и ее доверительный интервал. Выделение систематической и случайной составляющих погрешности целесообразно, если результат измерения будет использован при дальнейшей обработке данных, например, при определении результата косвенных измерений и оценке его точности, при суммировании погрешностей и т. п.

Любая из форм представления результата измерения, предусмотренная ГОСТ 8.011-72, должна содержать необходимые данные, на основании которых может быть определен доверительный интервал для погрешности результата измерения. В общем случае доверительный интервал может быть установлен, если известны вид закона распределения погрешности и основные числовые характеристики этого закона.

1.2 Лекция № 2

Тема: «Пять задач, которые необходимо решать при работе с приближенными числами. Приближенные числа и действия над ними. Абсолютная погрешность величины, зависящей от нескольких переменных»

1 Вопросы лекции:

1. Метод Чебышева.
2. Метод Ньютона
3. Метод итераций.
4. Ускорение сходимости. Преобразование Эйткена.
5. Локализация корней уравнения
6. Погрешность математической модели.
7. Погрешность численного метода.
8. Вычислительная погрешность
9. Влияние внешних условий.

10. Зависимость от влияния характера изменения измеряемых величин

2.Краткое содержание вопросов

Приближенные числа и действия над ними

Пусть $\boldsymbol{X}$ – некоторая величина, истинное значение которой известно или неизвестно и равно $\mathbf{x^*}$. Число $\mathbf{x}$, которое можно принять за значение величины $\boldsymbol{X}$, мы будем называть ее приближенным значением или просто приближенным числом. Число $\mathbf{x}$ называют приближенным значением по недостатку, если оно меньше истинного значения ($\mathbf{x} < \boldsymbol{x^*}$), и по избытку, если оно больше ($\mathbf{x} > \boldsymbol{x^*}$). Например, число 3,14 является приближенным значением числа π по недостатку, а 2,72 – приближенным значением числа e по избытку.

Абсолютная погрешность приближенного числа есть абсолютная величина разности между истинным значением величины и данным ее приближенным значением.

$$\Delta \mathbf{x} = |\boldsymbol{x^*} - \mathbf{x}|$$

Поскольку истинное значение величины обычно остается неизвестным, неизвестной остается также и абсолютная погрешность. Вместо нее приходится рассматривать *оценку* абсолютной погрешности, так называемою *предельную абсолютную погрешность*, которая означает число, не меньшее абсолютной погрешности (далее, в том случае, если это не принципиально, будем под абсолютной погрешностью понимать именно предельную абсолютную погрешность).

Абсолютная погрешность приближенного числа не в полной мере характеризует его точность. Действительно, погрешность в 0,1 г слишком велика при взвешивании реактивов для проведения микро-синтеза, допустима при взвешивании 100 г колбасы, и не может быть замечена при измерении массы, например, железнодорожного вагона. Более информативным показателем точности приближенного числа является его *относительная погрешность*.

Относительной погрешностью $\boldsymbol{\delta x}$ приближенного значения величины $\boldsymbol{X}$ называют абсолютную величину отношения его абсолютной погрешности к истинному значению этой величины. Часто эту относительную погрешность выражают в процентах. С учетом положительности абсолютной погрешности можно записать:

$$\boldsymbol{\delta x} = \Delta \mathbf{x} / |\boldsymbol{x^*}|$$

Ввиду того, что фактически вместо абсолютной погрешности приходится рассматривать предельную, относительную погрешность также заменяют *предельной относительной погрешностью*, которая означает число, не меньшее относительной погрешности. Более того, при отыскании предельной относительной погрешности приходится заменять неизвестное истинное значение величины $\boldsymbol{x^*}$ приближенным – $\boldsymbol{x}$. Последняя замена обычно не отражается на величине относительной погрешности ввиду близости этих значений и малости абсолютной погрешности.

$$\boldsymbol{\delta x} = \Delta \mathbf{x} / |\boldsymbol{x}|$$

Например, для приближенного значения $\pi = 3{,}14$ предельная абсолютная погрешность составляет 0,0016, а относительная – 0,00051 или 0,051%. Выражение относительной погрешности в процентах иногда называют процентной погрешностью.

Правила записи приближенных чисел

Приближенные числа принято записывать таким образом, чтобы форма записи числа указывала на его абсолютную погрешность, которая не должна превосходить половины единицы последнего разряда, сохраняемого при записи. Например, запись 3,1416 означает, что абсолютная погрешность этого приближенного числа не превосходит 0,00005. Для числа 370 абсолютная погрешность не превосходит 0,5. Если это число имеет большую точность, например если абсолютная погрешность меньше 0,05, то следует писать уже не 370, а 370,0. Таким образом, приближенные числа $37 \cdot 10^1$; 370; 370,0; 370,00 имеют различную степень точности: их предельные абсолютные погрешности составляют соответственно 5; 0,5; 0,05 и 0,005.

Для больших чисел абсолютные погрешности могут иметь порядок единиц, десятков, сотен и т. п. Сохраняя и для таких чисел упомянутое выше правило, не следует выписывать все его цифры. Так, число двести семьдесят пять тысяч с абсолютной погрешностью, не превосходящей 500, надо писать в виде $275 \cdot 10^3$. Запись вида 275 000 применять нельзя, ибо она означала бы предельную абсолютную погрешность 0,5.

Если абсолютная погрешность величины $\boldsymbol{X}$ не превышает одной единицы разряда последней цифры приближенного числа $\boldsymbol{x}$, то говорят, что у числа $\boldsymbol{x}$ все знаки верные. Цифры числа, соответствующие разрядам, меньшим чем абсолютная погрешность называют сомнительными.

Приближенные числа следует записывать, сохраняя только верные знаки. Если, например, абсолютная погрешность числа 12400 равна 100, то это число должно быть записано, например, в виде $124 \cdot 10^2$ или $0{,}124 \cdot 10^5$. Оценить погрешность приближенного числа можно, указав, сколько верных значащих цифр оно содержит. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны числа. Например, в числе 0,0645 – 3 значащие цифры, а у числа 34,5400 – 6 значащих цифр.

Высказанные правила записи приближенных чисел применяются для записи исходных данных, полученных в результате измерений, и в математических таблицах. Абсолютная погрешность при этом не выписывается, и всегда предполагается, что она не превосходит половины единицы последнего разряда, сохраняемого при записи. В указанной форме записи все цифры, таким образом, являются верными.

В окончательных результатах расчета принято записывать числа с одной сомнительной цифрой (т. е. сохраняя следующую за верной). При этом следует указывать предельную абсолютную погрешность, выписывая ее с одной значащей цифрой, если это цифра 2, 3,... 9, либо двумя, если эта цифра 1 Для этого погрешность округления числа прибавляют к предельной абсолютной погрешности и результат округляют в сторону увеличения).

Округление приближенных чисел

Если приближенное число содержит лишние (или сомнительные) знаки, то его следует округлить, отбрасывая излишние цифры и руководствуясь следующим известным правилом округления: если первая из отброшенных цифр 4 или меньше, то последняя оставшаяся цифра сохраняется без изменения; если первая из отброшенных цифр 5 или больше, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу. Исключением из этого правила является случай, когда отбрасывается только пятерка или же пятерка с нулями. Здесь принято сохранять последнюю оставшуюся цифру без изменения, если она четная, и увеличивать ее на единицу до четной, если она была нечетная.

При проведении вычислений рекомендуется сохранять максимальное число значащих цифр для всех промежуточных результатов. Округляется только конечный результат в соответствии с оцененной предельной абсолютной погрешностью. Если погрешность результата не оценивается, то можно руководствоваться следующими общими правилами округления результатов действий:

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.

3. При возведении в квадрат или куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания).

4. При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа (последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа).

Абсолютная и относительная погрешность вычисления функции одной переменной

Важной проблемой при проведении вычислений с использованием приближенных чисел является вопрос о влиянии погрешности исходных данных на погрешность полученного результата. Установим основные свойства распространения абсолютной и относительной погрешности. Для начала рассмотрим случай вычисления функции одного аргумента, который является приближенным числом. Решение этих задач дается следующей основной теоремой.

Теорема. Предельная абсолютная погрешность вычисления функции равна произведению абсолютной величины ее производной на предельную абсолютную погрешность аргумента.

Доказательство. Пусть число **x** является приближенным значением величины **X** с абсолютной погрешностью **Δx**.

$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} \pm \Delta \boldsymbol{x}$, или можно записать $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}$, если считать, что величина **Δx** является знаковой, то есть, может быть как положительным, так и отрицательным числом, потому что **x** может быть приближением как по недостатку, так и по избытку. Обозначим абсолютную погрешность функции через **Δy**

$$\Delta y = \left| y^* - y \right| = \left| f(x^*) - f(x) \right| = \left| f(x + \Delta x) - f(x) \right|$$

Ввиду малости **Δx** мы можем заменить приращение функции ее дифференциалом. Тогда получим

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x = f(x) + f'(x)\Delta x$$

, откуда

$$\Delta y = \left| f'(x) \right| \cdot \left| \Delta x \right|$$

, что и требовалось доказать.

Рассмотрим *относительную погрешность* вычисления функции одной переменной. Обозначим предельную относительную погрешность аргумента через δx, а функции – δy, тогда, учитывая, что $\Delta x = \delta x \cdot \left| x \right|$, получим

$$\delta y = \frac{\Delta y}{\left| y \right|} = \frac{\Delta y}{\left| f(x) \right|} = \frac{\left| f'(x) \right|}{\left| f(x^*) \right|} \left| \Delta x \right| = \left| x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \delta x$$

Так как по правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{d \ln(f(x))}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

, то полученное выражение можно записать так:

$$\delta y = \left| x \cdot \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta x$$

В таком виде выражение удобно для приложения к легко логарифмируемым функциям.

Рассмотрим, например, погрешность вычисления степенной функции:

$$f(x) = x^n$$

$$\delta y = \left| x \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n} \right| \delta x = |n| \delta x$$

, т. е. предельная относительная погрешность степени равна предельной относительной погрешности основания, умноженной на абсолютную величину показателя степени.

Абсолютная и относительная погрешность вычисления функции нескольких переменных

Полученные результаты легко обобщаются на случай функций нескольких аргументов

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Delta y = \left| f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|$$

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Абсолютная погрешность результата вычисления функции нескольких приближенных чисел равна сумме произведений модуля частной производной функции на абсолютную погрешность приближенного числа.

Для относительной погрешности вычисления функции нескольких приближенных чисел получим выражение, так же аналогичное случаю функции одной переменной:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i}{\left| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \{ \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \}}{\partial x_i} x_i \right| \delta x_i$$

Абсолютная и относительная погрешность вычисления суммы и разности приближенных чисел

Рассмотрим несколько примеров функций частного вида:

$$y = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$$

$$\left|\frac{\partial y}{x_1}\right| = \left|\frac{\partial y}{x_2}\right| = \ldots = \left|\frac{\partial y}{x_n}\right| = 1$$

, таким образом, $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$

т. е. *предельная абсолютная погрешность* как суммы, так и разности нескольких приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

При определении *относительной погрешности* суммы и разности результаты будут различны.

Для суммы **n** положительных чисел относительная погрешность будет равна

$$\delta(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \left|\frac{\Delta(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}\right| = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} =$$

$$\frac{x_1 \cdot \delta x_1 + x_2 \cdot \delta x_2 + \ldots + x_n \cdot \delta x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

Как видно, величина относительной погрешности в этом случае зависит не только от погрешностей слагаемых, но и от величины приближенных чисел. Можно воспользоваться следующими приемом для оценки границ относительной погрешности суммы.

Выберем из всех относительных погрешностей наибольшую

$$\delta_{\max} = \max_i (\Delta x_i)$$

и тогда можно записать

$$\delta(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \le \frac{x_1 \cdot \delta_{\max} + x_2 \cdot \delta_{\max} + \ldots + x_n \cdot \delta_{\max}}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \delta_{\max}$$

Таким образом, предельная относительная погрешность суммы положительных чисел не превосходит максимальной относительной погрешности слагаемых, т.е. является оценкой сверху относительной погрешности суммы приближенных чисел.

Аналогично, если выбрать наименьшую из относительных погрешностей слагаемых, можно показать, что она будет являться оценкой снизу относительной погрешности суммы приближенных чисел.

Рассмотрим далее относительную погрешность вычисления разности двух приближенных чисел.

$$\delta(x_1 - x_2) = \left|\frac{\Delta(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}\right| = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|x_1 - x_2|}$$

Как видно, из полученного результата, относительная погрешность разности может очень существенно (в пределе неограниченно) возрастать при вычитании двух близких по значению чисел

$$x_1 \to x_2, \quad \delta(x_1 - x_2) \to 0$$

Пример

Рассмотрим вычисление массы образца как разности масс сосуда с образцом (x_1) и пустого сосуда (x_2)

$$x_1 = 1{,}245 \qquad \Delta x_1 = 0{,}0005$$
$$x_2 = 1{,}235 \qquad \Delta x_2 = 0{,}0005$$

Относительные погрешности примерно одинаковы и равны 0,04%.

Найдем массу навески как разность двух чисел

$$y = 1.245 - 1.235 = 0.010$$

Абсолютная погрешность $\Delta y = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001$ Таким образом, относительная погрешность результата составит

$$\delta y = \left|\frac{0.001}{0.01}\right| = 0.1 = 10\%$$

, что в 250 (!!!!) раз выше относительной погрешности исходных чисел.

Абсолютная и относительная погрешность вычисления произведения и частного приближенных чисел

Рассмотрим произведение нескольких приближенных чисел.

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Воспользуемся общей формулой для относительной погрешности, в логарифмическом виде, полученной ранее. Для этого найдем натуральный логарифм функции и, затем, частные производные логарифма функции по всем $\boldsymbol{x_i}$.

$\ln y = \ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n$, для всех i имеем $\left|\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}\right| = \frac{1}{x_i}$,

Поэтому, окончательно, получим:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \cdot \frac{1}{x_i} \right| \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i$$

То есть, *предельная относительная погрешность произведения приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.*

Для частного двух чисел вычисления будут аналогичными.

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

Находим натуральный логарифм и его частные производные

$\ln y = \ln x_1 - \ln x_2$,

$\left|\frac{\partial \ln y}{\partial x_1}\right| = \frac{1}{x_1}$, $\left|\frac{\partial \ln y}{\partial x_2}\right| = \frac{1}{x_2}$

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i$$

следовательно, *предельная относительная погрешность* частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

Пример. При определении силы сопротивления квадратной пластинки, поставленной перпендикулярно к воздушному потоку, пользуются формулой

$$P = kSv^2$$

где P — сила сопротивления, S — площадь пластинки, v — скорость воздушного потока и k — коэффициент пропорциональности. Зная, что величина k определена с относительной погрешностью 5%, S и v — с относительными погрешностями 1%, определим относительную погрешность величины P.

Согласно выражению для предельной относительной погрешности произведения имеем

$$\delta_P = \delta_k + \delta_S + \delta_{v^2} = \delta_k + \delta_S + 2\delta_v \text{, откуда } \delta_P = 8\%$$

Итак, для оценки погрешности мы получили следующие простые правила:

При сложении и вычитании *абсолютные* погрешности складываются

При умножении и делении *относительные* погрешности складываются;

При возведении в степень относительные погрешности умножаются на абсолютную величину показателя степени.

При отыскании значения функции абсолютная погрешность функции равна произведению абсолютной погрешности аргумента на абсолютную величину производной

Заметим еще, что при вычислении значений функции абсолютная погрешность может существенным образом зависеть от того, каким образом записана расчетная формула и какова последовательность операций в этой формуле. Формулы для вычислений надо стараться преобразовывать к такому виду, чтобы в них не было вычитания близких величин; последнее может привести к большой потере точности и большим относительным ошибкам.

Абсолютная погрешность величины, зависящей от нескольких переменных

Ни одно измерение не выполняется идеально точно, всегда по различным причинам существует **погрешность**, т.е. отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Причиной погрешности может стать несовершенство методики измерения, используемых средств измерений, органов чувств человека-оператора, а также влияние внешних условий.

Все погрешности, не связанные с грубыми ошибками (промахами, возникающими вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры), имеют случайную и систематическую составляющие. **Случайные погрешности** изменяют величину и знак при повторных измерениях одной и той же величины. Значение случайной погрешности измерения невозможно предвидеть и, следовательно, исключить. Для уменьшения их влияния проводят несколько измерений величины и берут среднее арифметическое из полученных значений.

Систематические погрешности остаются постоянными по величине и знаку или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. Систематические погрешности разделяются на методические (несовершенство метода измерений; в том числе влияние средств измерения на объект, свойство которого измеряется), инструментальные (зависящие от погрешности применяемых средств измерений), внешние (обусловленные влиянием условий проведения измерений) и субъективные (обусловленные индивидуальными особенностями оператора).

Различают абсолютную и относительную погрешность измерения.

Под **абсолютной погрешностью** измерения понимают разность между полученным в ходе измерения и истинным значением физической величины:

$$\Delta x = x_{изм} - x_{ист} \qquad (2.1)$$

Без сравнения с измеряемой величиной абсолютная погрешность ничего не говорит о качестве измерения. Одна и та же погрешность в 1 мм при измерении длины комнаты не играет роли, при измерении длины тетради уже может быть существенна, а при измерении диаметра проволоки совершенно недопустима.

Поэтому вводят относительную погрешность, показывающую, какую часть абсолютная погрешность составляет от истинного значения измеряемой величины. **Относительная погрешность** представляет собой отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_{ист}} 100\% \qquad (2.2)$$

Относительная погрешность обычно выражается в процентах.

Результат измерения величины принято записывать в виде:

$x_{изм}$ □ □x, □=…%.

При записи абсолютной погрешности ее величину округляют до двух значащих цифр, если первая их них является единицей, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях. При записи измеренного значения величины последней должна указываться цифра того десятичного разряда, который использован при указании погрешности.

Из формул (2.1) и (2.2) следует, что для нахождения погрешностей измерений необходимо знать истинное значение измеряемой величины. Поэтому этими формулами можно пользоваться только в тех редких случаях, когда проводятся измерения констант, значения которых заранее известны. Цель же измерений, как правило, состоит в том, чтобы найти не известное значение физической величины. Поэтому на практике погрешности измерений не вычисляются, а оцениваются.

В частности, относительную погрешность находят как отношение абсолютной погрешности не к истинному, а к измеренному значению величины:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_{изм}} 100\% \qquad (2.3)$$

Способы оценки абсолютной погрешности разные для прямых и косвенных измерений.

Максимальную абсолютную погрешность при прямых измерениях находят как сумму абсолютной инструментальной погрешности и абсолютной погрешности отсчета:

$$\Delta x = \Delta x_{приб} + \Delta x_{отсч} \qquad (2.4)$$

Погрешность отсчета является случайной и устраняется при многократных измерениях. Если же проводится одно измерение, она обычно принимается равной половине цены деления шкалы измерительного прибора.

Обратимся теперь к анализу **погрешностей средств измерения**. В зависимости от условий применения средств измерения различают основную и дополнительную погрешности. *Основная* погрешность – это погрешность средств измерений, используемых при нормальных условиях; *дополнительная* погрешность – это погрешность средств измерений, возникающая в результате отклонения значения одной или более влияющих величин от нормального значения.

Способ задания пределов допускаемой основной абсолютной погрешности измерительных средств определяется зависимостью погрешности от значения измеряемой величины. Если абсолютная погрешность измерительного прибора не зависит от измеряемой величины, то погрешность называется **аддитивной** и ее предел может быть выражен одним числом:

$$\Delta x_{макс\ приб} = \pm\ a \qquad (2.5)$$

Зона погрешности в этом случае ограничена двумя прямыми линиями, параллельными оси абсцисс (рис.**2.1а**). Источники аддитивной погрешности – трение в опорах, неточность отсчета, дрейф, наводки, вибрации и другие факторы. От этой погрешности зависит наименьшее значение величины, которое может быть измерено прибором.

Если погрешность прибора зависит от измеряемой величины, то она называется **мультипликативной** и предел допускаемой абсолютной погрешности выражается формулой $\Delta x_{макс\ приб} = \pm\ (a + вx)$, (2.6)

где $в$ – постоянная величина, $вx$ – предельное значение мультипликативной погрешности, a – предельное значение аддитивной погрешности.

Таким образом, мультипликативная погрешность прямо пропорциональна значению измеряемой величины x. Источники мультипликативной погрешности – действие влияющих величин на параметры элементов и узлов средств измерений. Зона погрешности при наличии аддитивной и мультипликативной составляющей показана на рисунке **2.1 б**.

Инструментальная погрешность электроизмерительных приборов определяется их классом точности. **Класс точности** (максимальная приведенная погрешность) – это отношение максимальной абсолютной погрешности прибора к пределу измерения величины (полному значению шкалы). Его, как и относительную погрешность, выражают в процентах. Класс точности показывает, сколько процентов максимальная инструментальная погрешность составляет от всей шкалы прибора:

$$\gamma = \frac{\Delta x_{\text{приб макс.}}}{x_{\text{макс.}}} 100\% \qquad (2.7)$$

ГОСТом установлено 8 классов точности измерительных приборов: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Зная класс точности прибора и предельное значение измеряемой величины, можно определить абсолютную и относительную инструментальную погрешность измерения:

$$\Delta x_{\text{приб макс.}} = \frac{x_{\text{макс.}} \gamma}{100\%} \qquad (2.8)$$

$$\delta = \frac{\Delta x_{\text{приб макс.}}}{x_{\text{изм}}} 100\% = \frac{x_{\text{макс}} \gamma}{x_{\text{изм}}} \qquad (2.9)$$

Из формулы (2.9) видно, что чем ближе значение измеряемой величины к пределу измерения, тем меньше относительная инструментальная погрешность.

У приборов, аддитивная составляющая погрешности которых преобладает над мультипликативной, класс точности выражается одним числом. К таким приборам относится большинство аналоговых стрелочных приборов. Относительная инструментальная погрешность в этом случае находится просто по формуле (2.9).

Класс точности средств измерения, у которых аддитивная и мультипликативная составляющие основной погрешности соизмеримы, обозначается двумя числами, разделенными косой чертой: c/d. Причем класс точности должен удовлетворять условию c/d>l. К приборам, класс точности которых выражается дробью, относятся цифровые показывающие приборы. Их максимальная относительная погрешность определяется по формуле:

$$\delta = c + d\left(\frac{x_{\text{макс}}}{x_{\text{изм}}} - 1\right) \qquad (2.10)$$

Таблица "Расчет погрешностей"

$f = \sin x$	$\delta_f = \mathrm{ctg}x \cdot \Delta x$
$f = x \pm y$	$\delta_f = \frac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$
$f = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\delta_f = \frac{\Delta x / x^2 + \Delta y / y^2}{1/x + 1/y}$
$f = x \cdot y$	$\delta_f = \delta_x + \delta_y$
$f = x^n$	$\delta_f = n \cdot \delta_x$
$f = \frac{x}{y}$	$\delta_f = \delta_x + \delta_y$
$f = \sqrt[n]{x}$	$\delta_f = \frac{1}{n} \cdot \delta_x$

Для сравнения погрешностей измерения цифровых и стрелочных измерительных приборов постройте самостоятельно график зависимости относительной погрешности измерения постоянного напряжения от его величины приборами АВО-63 и Щ4313 на пределе 2В.

Класс точности или максимальная инструментальная погрешность приборов обычно приводится в его паспорте. Для менее точных приборов, если в паспорте ничего не указано, максимальная инструментальная погрешность принимается равной половине цены или цене деления шкалы.

Для *прямых измерений* сначала оценивается абсолютная погрешность, а затем относительная. При оценке погрешности *косвенных измерений* величины поступают следующим образом. Сначала находят абсолютные погрешности величин, полученных в ходе прямых измерений. Затем вычисляют относительную погрешность исследуемой величины, пользуясь для этого одной из формул, приведенных в таблице "расчет погрешностей". Формула относительной погрешности зависит от того, по какой формуле находят значение измеряемой величины. И только после этого находят абсолютную погрешность измеряемой величины, выражая ее из формулы (2.3).

Метод Чебыщева

Метод Чебыщева - метод получения класса *итерационных алгоритмов* нахождения однократного действительного корня уравнения
$f(x)=0$, (1), где $f(x)$ - достаточно гладкая функция.
В основе метода лежит формальное представление обратной к $f(x)$функции $x=F(y)$по формуле Тейлора. Если α - достаточно точное приближение для корня x уравнения (1), $c_0=\beta=f(\alpha),\ f'(\alpha)\neq 0,$ то

$$x=F(y)=\alpha+\sum_{n\geq 1} d_n (y-\beta)^n, \qquad (2)$$

где коэффициенты d_n рекуррентно определяются из соотношения $x=F(f(x))$ через коэффициенты Тейлора c_n функции $f(x)=\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-\alpha)^n.$ Полагая в (2) y=0, получают соотношение

$$x=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}-$$
$$-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2-\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}\right)-$$
$$-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^4\left(\frac{5}{8}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3-\frac{5f''(\alpha)f'''(\alpha)}{12(f'(\alpha))^2}+\frac{f^{IV}(\alpha)}{24f'(\alpha)}\right)-\dots \quad (3)$$

Несколько членов справа в (3) дают формулы итерационного алгоритма; так при двух членах получается *Ньютона метод,* а при трех членах получается итерационный метод вида

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)},\quad n=0,1,\dots \quad (4)$$

С ростом числа учитываемых в (3) членов возрастает скорость сходимости x_n к x. Метод может быть распространен на функциональные уравнения .

Метод Ньютона

Метод Ньютона используется для нахождения корней функции $f(x) = 0$. Если необходимо найти минимум функции $f(x) \to \min$ методом Ньютона, то необходимо использовать данный.

Пусть дано уравнение $f(x)=0$, где *f(x)* определено и непрерывно в некотором конечном или бесконечном интервале $a \le x \le b$. Всякое значение ξ, обращающее функцию *f(x)* в нуль, то есть такое, что $f(\xi)=0$ называется **корнем уравнения** или нулем функции *f(x)*. Число *ξ* называется корнем *k*-ой кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией *f(x)* обращаются в нуль ее производные до *(k-1)* порядка включительно: $f(\xi)=f'(\xi)= \dots =f^{k-1}(\xi) = 0$. Однократный корень называется простым.
Приближенное нахождение корней уравнения складывается из двух этапов:

1. Отделение корней, то есть установление интервалов $[\alpha_i,\beta_i]$, в которых содержится один корень уравнения.
   1. $f(a)\cdot f(b)<0$, т.е. значения функции на его концах имеют противоположные знаки.
   2. $f'(x)$ сохраняет постоянный знак, т.е. функция монотонна (эти два условия достаточны, но НЕ необходимы) для единственности корня на искомом отрезке).
   3. $f''(x)$ сохраняет постоянный знак, т.е. функция выпукла вверх, либо – вниз.
2. Уточнение приближенных корней, то есть доведение их до заданной точности.

Метод итерцаий

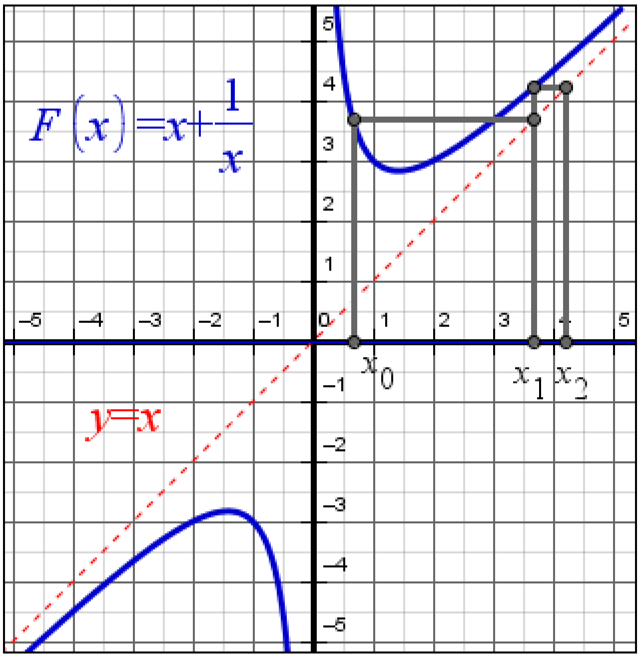
Это способ численного решения математических задач. Его суть – нахождение алгоритма поиска по известному приближению (приближенному значению) искомой величины следующего, более точного приближения. Применяется в случае, когда последовательность приближений по указанному алгоритму сходится.

Данный метод называют также методом последовательных приближений, методом повторных подстановок, методом простых итераций и т.п.

Поясним суть метода на примере решения уравнения
$f(x) = 0$. (1)

Будем вместо уравнения (1) рассматривать равносильное ему уравнение
$x = F(x)$, (2)
где $F(x) = f(x) + x$.

Пусть x_0 – произвольное число (начальное приближение искомого корня уравнения (1)). Рассмотрим последовательность
$x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1)$, …, $x_n = F(x_{n-1})$, …
Если эта последовательность имеет предел, то он и есть решение (корень) уравнения (2), а значит, и уравнения (1).



Процесс составления последовательных приближений наглядно показан на рис., где кривая – график функции $y = F(x)$, а прямая – биссектриса первого и третьего координатных углов (ее уравнение $y = x$).

Последовательность $\{x_n\}$ сходится, например, если выполнены оба условия:
$F(x) > x$; $0 < F'(x) < 1 - \varepsilon$,
где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число (в этом случае как раз и будет ситуация, изображенная на рис.).

Преобразование Эйткена

Идею преобразования поясним на простом примере. $\varepsilon^k = q\varepsilon^{k-1} = \ldots = q^k\varepsilon^0$, если $q < 1$ найдем предел *x* через три значения x^k .

$$\begin{aligned} x^k - X^* &= Aq^k, \quad x^{k-1} - X^* = Aq^{k-1} \\ q &= \frac{x^k - X^*}{x^{k-1} - X^*}, \quad q = \frac{x^{k+1} - X^*}{x^k - X^*}, \end{aligned}$$ т.е.

$$(x^k - X^*)^2 = (x^{k+1} - X^*)(x^{k-1} - X^*), \quad X^* = \frac{x^{k+1}x^{k-1} - (x^k)^2}{x^{k+1} - 2x^k + x^{k-1}}.$$

Построим теперь процесс

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x^k); \quad x'' = \varphi(x' = \varphi(\varphi(x^k)); \\ x^{k+1} &= \frac{x^k x'' - (x')^2}{x'' - 2x' + x^k}, \end{aligned}$$

это итерационный процесс для уравнения

$$x = \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}. \tag{7}$$

Рассмотрим порядок сходимости этого процесса

$$
\begin{aligned}
x^k &= X^* + \varepsilon^k = x + \varepsilon \\
\varphi(x^k) &= \varphi(x+\varepsilon) = x + \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \gamma\varepsilon^3 + \ldots \\
& \alpha = \varphi'(x), \beta = \frac{1}{2}\varphi''(x), \gamma = \frac{1}{6}\varphi'''(x) \\
\varphi(\varphi(x^k)) &= x + \alpha(\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \gamma\varepsilon^3 + \ldots) + \beta(\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \ldots)^2 + \\
& +\gamma(\alpha\varepsilon + \ldots)^3 + \ldots \\
x^k\varphi(\varphi(x^k)) &= (x+\varepsilon)[x + \alpha^2\varepsilon + \alpha\beta(1+\alpha)\varepsilon^3 + \\
& +\alpha(\gamma + 2\beta^2 + \alpha^2\gamma)\varepsilon^3] = \\
&= x^2 + x(1+\alpha^2)\varepsilon + (\alpha^2 + x\alpha\beta(1+\alpha))\varepsilon^2 + (\alpha\beta(1+\alpha) + \\
& +x\alpha(\gamma + 2\beta^2 + \alpha^2\gamma))\varepsilon^3 + \ldots \\
\varphi^2(x^k) &= (x + \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \gamma\varepsilon^3 + \ldots)^2 = x^2 + 2x\alpha\varepsilon + (\alpha^2 + 2\beta x)\varepsilon^2 + \\
& +2(\gamma x + \alpha\beta)\varepsilon^3 + \ldots \\
x^k\varphi(\varphi(x^k)) - \varphi^2(x^k) &= x[(1-\alpha)^2\varepsilon + \beta(\alpha+2)(\alpha-1)\varepsilon^2 + \\
& +(\gamma(\alpha-2) + 2\beta^2 + \alpha^2\gamma)\varepsilon^3] + \alpha\beta(\alpha-1)\varepsilon^3 + \ldots \\
\varphi(\varphi(x^k)) - 2\varphi(x^k) + x^k &= (\alpha-1)^2\varepsilon + \beta)(\alpha+2)(\alpha-1)\varepsilon^2 + \\
& +(\gamma(\gamma-2) + 2\alpha\beta^2 + \alpha^3\gamma)\varepsilon^3 + \ldots \\
x^{k+1} &= x\frac{[(1-\alpha^2 + \beta(\alpha+2)(\alpha-1)\varepsilon]}{[(1-\alpha^2 + \beta(\alpha+2)(\alpha-1)\varepsilon]} + \frac{\alpha\beta(\alpha-1)\varepsilon^3}{d\varepsilon} = \\
&= x + \frac{\alpha\beta(\alpha-1)\varepsilon^3}{d\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Теперь из (7) $\varepsilon^{k+1} \cong \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)\varphi''(x^*)}{\varphi'(x^*)-1}(\varepsilon^k)^2 = B(\varepsilon^k)^2$.

Мы рассматривали процесс первого порядка $\varphi^{(0)}(x^*) = 0, \;\; \varphi^{(1)}(x^*) \neq 0$, а получили процесс 2 -го порядка. Легко показать, что если процесс имеет порядок $r - \varphi^{(r-1)}(x) = 0, \varphi^{(r)} \neq 0$, то схема Эйткена имеет порядок (2*r*-1) . Более того, если процесс $x^{k+1} = \varphi(x^k)$ не сходится, то процесс (6) при выборе начального приближения так, чтобы $| B\varepsilon^0 | < 1$, будет сходиться.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОРНЕЙ

Отделить корень уравнения – это значит найти такой интервал, внутри которого имеется корень данного уравнения, причем этот корень является единственным на данном интервале.

При отделении (иначе локализации) корней необходимо:

1) выявить наличие и количество корней уравнения *f(x)*.

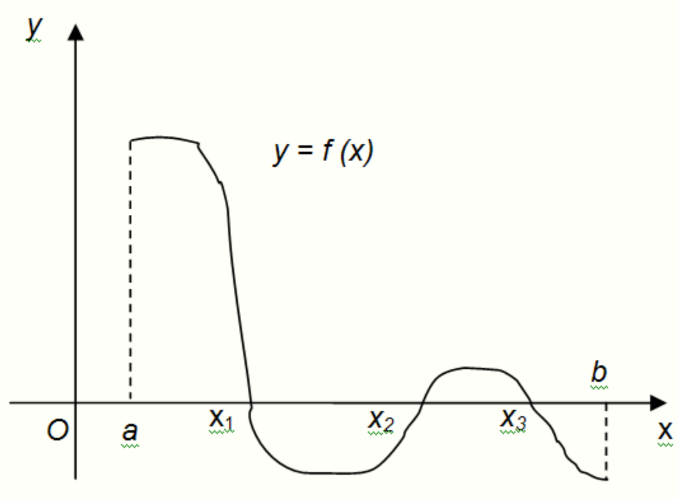
2) найти области их расположения;

3) получить отрезки $[a_i,b_i]$на которых имеется точно по одному корню.

Для функций общего вида нет универсального способа решения этих задач. Обычно для их решения используется ряд теорем математического анализа и некоторые специальные графические приёмы.

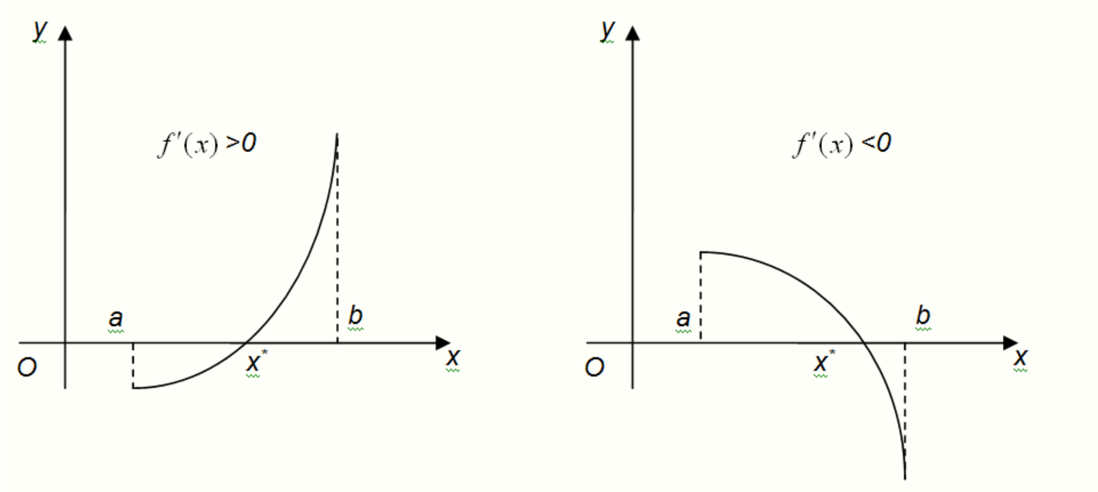
Аналитическое отделение корней основано на следующих теоремах:

Теорема1:Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и меняет на концах отрезка знак, т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то на отрезке $[a,b]$ содержится, по крайней мере, один корень уравнения.



Существование корня на отрезке.

Теорема 2: Если непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $y=f(x)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков $f(a)\cdot f(b)<0$, а производная $f'(x)$ сохраняет знак внутри отрезка $[a,b]$, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$



Существование единственного корня на отрезке.

Теорема 3: Если функция $y=f(x)$ является многочленом степени n и на концах отрезка $[a,b]$ меняет знак, т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то на отрезке $[a,b]$ имеется нечётное количество корней (если производная $f'(x)$ функции сохраняет знак на отрезке $[a,b]$, то корень единственный). Если на концах отрезка $[a,b]$ функция не меняет знак, т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то уравнение либо не имеет корней на отрезке $[a,b]$, либо имеет чётное количество корней.

При аналитическом методе исследований необходимо выявить интервалы монотонности функции $y=f(x)$. Для этого нужно определить критические точки ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, т. е. точки, в которых первая производная $f'(\xi)$ равна нулю или не существует. Тогда вся числовая ось разбивается на интервалы монотонности (ξ_i ,ξ_{i+1}) функции $y=f(x)$. На каждом из них следует определить знак производной $f'(x_i)$, где x_i€(ξ_i ,ξ_{i+1}), а затем выделить те интервалы монотонности, на которых функция меняет знак. На каждом из этих интервалов для поиска корня используются *методы уточнения корней*.

Так же для алгебраических уравнений есть несколько аналитических способов отделения корней: *правило знаков Декарта*, *метод Штурма*, *теорема Бюдана-Фурье*, и т.д. В основном эти методы позволяют определить количество корней в каком-то промежутке. Далее рассмотрим некоторые из них.

теорема Декарта. Для определения количества действительных корней уравнения $y=f(x)$ необходимо воспользоваться *теоремой Декарта*: число положительных корней уравнения $y=f(x)$ с учетом их кратности равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов a_1, a_2, ... ,a_n (при этом равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число.

Теорема Декарта не требует больших вычислений, но не всегда дает точное количество действительных корней уравнения $y=f(x)$.

*Замечание***.** Для определения количества отрицательных корней достаточно применить теорему Декарта к многочлену $f(-x)$.

Т.е. *правило знаков Декарта* звучит так:

Число действительных, положительных корней алгебраического уравнения

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

в точности равно числу переменных знаков у коэффициентов или на четное число меньше.

Число отрицательных действительных корней уравнения $f(x)=0$ в точности равно числу перемен знаков у коэффициентов уравнения $f(-x)=0$ или на четное число меньше.

теорема Штурма. Если уравнение $y=f(x)$ не имеет кратных корней на $[a,b]$, то точное число действительных корней дает теорема Штурма.

Предположим, что уравнение $y=f(x)$ не имеет кратных корней. Обозначим через $f_1(x)$ производную $f'(x)$; через $f_2(x)$ остаток от деления $f(x)$ на $f_1(x)$, взятый с обратным знаком; через $f_3(x)$ остаток от деления $f_1(x)$ на $f_2(x)$, взятый с обратным знаком и т.д., до тех пор, пока не придем к постоянной.

Полученную последовательность $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ назовем рядом Штурма.

Теорема Штурма: Число действительных корней уравнения $f(x)=0$, расположенных на отрезке $[a,b]$, равно разности между числом перемен знаков в последовательности $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ при $x=a$ и числом перемен знаков в последовательности $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ при $x=b$.

При построении таблицы знаков функции следует найти $f'(x)$ и прировнять к 0, и найти значение переменной . Затем построить таблицу знаков функции, подставляя значения близкие корням уравнения $f'(x)=0$.

*Замечание***.** Способ Штурма является наиболее совершенным способом отделения корней. Но использование теоремы Штурма на практике, связано с большой вычислительной работой при построении рядя Штурма.

Отметим, что при применении этих теорем необходимо определить границы корней. Это можно сделать следующим способом:

Все действительные корни уравнения $f(x)=0$, если они существуют, заключены в интервале $(-K_0,K_0)$, причем число K_0 определяется формулой:

$$K_0 = 1 + \frac{A}{a_0},$$

где A – наибольшее из чисел $|a_1|, |a_2|,\ldots,|a_n|$. Зная лишь верхнюю границу положительных корней любого многочлена, можно указать интервалы, в которых находятся его положительные и отрицательные корни. Вместе с многочленом $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

для которого число K_0 служит верхней границей его положительных корней, рассматривают многочлены:

$$\varphi_1(x) = x^n f(\frac{1}{x});$$
$$\varphi_2(x) = f(-x);$$
$$\varphi_3(x) = x^n f(-\frac{1}{x})$$

где $f(x)$ определяется формулой $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

Пусть верхними границами положительных корней этих многочленов будут соответственно числа K_1, K_2, K_3. Тогда все положительные корни многочлена $f(x)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{1}{K_1} < x < K_0,$$

а все отрицательные – неравенствам

$$-K_2 < x < -\frac{1}{K_3}.$$

Для положительных корней уравнения более точная верхняя граница может быть получена по формуле Маклорена

$$K' = 1 + \sqrt[m]{\frac{M}{a_0}}$$

где M – максимум модуля отрицательных коэффициентов уравнения, m – номер первого из отрицательных коэффициентов. Лучший результат по сравнению с приведенными двумя результатами дает метод Ньютона, согласно которому число $c>0$ будет верхней границей положительных корней уравнения $f(x)=0$, если $f(c)>0, f'(c)>0, \ldots, f^{(n-1)}(c)>0$

В связи с вышеизложенным сделаем несколько замечаний:

Замечание 1. Если в уравнении $f(x)$ отсутствуют отрицательные коэффициенты, то уравнение $f(x)=0$ не имеет положительных корней.

Если указываются границы, между которыми должны содержаться действительные корни многочлена, то этим вовсе не утверждается, что такие корни на самом деле существуют.

Замечание 2. Формула

$$K' = 1 + \sqrt[m]{\frac{M}{a_0}}$$

может быть получена в результате следующих рассуждений. Пологая $x>1$и заменяя каждый из коэффициентов a_1, a_2, …,a_{m-1} числом ноль, а каждый из коэффициентов a_m, a_{m+1}, …,a_n– числом М, мы можем лишь уменьшить значение многочлена, т.е.

$$f(x) \geq a x_0^n - M(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots + x + 1) = a_0 x^n - M\,\frac{x^{n-m+1} - 1}{x-1},$$

$$f(x) > a_0 x^n - \frac{Mx^{n-m+1}}{x-1} = \frac{x^{x-m+1}}{x-1}\left[a_0 x^{m-1}(x-1) - M\right].$$

Если

$$x > 1 + \sqrt[m]{\frac{M}{a_0}},$$

то, так как $a_0x^{m-1}(x-1)-M \geq a_0(x-1)^m-M$, выражение в квадратных скобках в формуле

окажется положительным, т.е. значение $f(x)$ будет строго положительным. Значения x, удовлетворяющие неравенству

$$x > 1 + \sqrt[m]{\frac{M}{a_0}},$$

не могут служить корнями для $f(x)$.

Замечание 3. Соотношения $f(c)>0, f'(c)>0,\ldots,f^{(n-1)}(c)>0$ получаются из формулы Тейлора:

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)^2\,\frac{f''(c)}{2!} + \ldots + (x-c)^n\,\frac{f^{(n)}}{n!}$$

Если, $x \geq c > 0$, то справа будет стоять строго положительное число, т.е. такие значения x не могут служить корнями для $f(x)$.

Замечание 4. Формулы

$b_o = a_o$

$b_n = a_n + x_0 \cdot b_{n-1}$ $(n=1,2,\ldots,k-1)$

$r= x_0 \cdot b_{n-1} + a_n = f(x_0)$.

получены из соотношения $f(x)=(x-c)q(x)+r$ сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x. Из последней формулы видно, что $f(x_0)=r$, т.е. значение многочлена $f(x)$ при $x=c$ равно значению остатка от деления этого многочлена на $x-c$.

Замечание 5. Если в некотором интервале оказывается несколько корней, для их отделения можно применять табличный способ, требующий вычисления значений многочлена $f(x)$ при различных значениях x. Эта задача решается наиболее просто с помощью, так называемой схемы Горнера. К.ок уже отмечалось выше, эта схема основана на том. При делении полинома

$$f(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

на x-x_0 коэффициенты частного

$$q(x) = b_o x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots b_{n-1},$$

и остаток r определяются формулами:

$b_o = a_o$

$b_n = a_n + x_0 \cdot b_{n-1}\ (n=1,2,\dots,k-1)$

$r= x_0 \cdot b_{n-1} + a_n = f(x_0)$.

Напомним, что вычисления при этом располагаются в виде схемы Горнера:

	a_o	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
x_0	b_o	$b_1 = x_0\, a_0 + a_1$	$b_2 = x_0\, b_1 + a_2$		$b_{n-1} = x_0 \cdot b_{n-2} + a_{n-1}$	$r = x_0\, b_{n-1} + a_n = f(x_0)$

Погрешность математической модели

Погрешность математической модели связана с приближенностью математического описания физического явления, обусловленной как сознательной его схематизацией с целью упрощения задачи, так и относительностью и ограниченностью существующих знаний об окружающем мире.

Оценка *погрешности математической модели процесса*, включающая погрешность метода, алгоритма и программы, для рассматриваемой области трехмерных задач нестационарной теплопроводности проводится по первому - третьему классам точных решений. При этом на телах классической формы и точных решений первого класса выявляется влияние на погрешность решения неравномерности сетки при произвольном сочетании указанных граничных условий, а по второму классу - точных решений только при идеальной теплоизоляции.

Результаты оценки *погрешности математической модели* и конкретной численной модели в существенной мере определяются характером поля температур, варьирование которого возможно при изменении численных значений параметров точных решений.

Однако на смену погрешностям макетирования приходят *погрешности математических моделей* и методов решения уравнений ММС.

Как следует из уравнения (11 23), корректирующее устройство вырабатывает сигнал и, пропорциональный отклонению Аю (т), компенсируя тем самым *погрешности математической модели* и поиска самого решения.

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые аспекты вопроса построения модели всего объекта, если известны модели его составных частей с некоторой погрешностью, и вопрос влияния погрешностей моделей составных частей на *погрешность математической модели объекта* в целом.

Иногда в литературе встречается несколько иная классификация погрешностей: неустранимой погрешностью называют лишь погрешность, являющуюся следствием неточности задания исходных данных, входящих в математическое описание задачи, а погрешность, являющуюся следствием несоответствия математического описания реальности, называют *погрешностью математической модели*.

Есть четыре источника погрешности результата: математическая модель, исходные данные, приближенный метод и округления при вычислениях. *Погрешность математической модели* связана с физическими допущениями и здесь рассматриваться не будет.

Заметим, что задача идентификации в алгоритме ставится как экстремальная. &), Q CD, где CD - область, в которой выбирают значения параметров математической модели; EQ - обобщенная оценка *погрешности математической модели*. Для нахождения mm EQ (С) применяют методы математического программирования, эвристического поиска, эволюционные и генетические алгоритмы

Необходимым условием окончания решения задачи с помощью ПМК является получение результатов с требуемой точностью. Численные результаты подавляющего большинства прикладных задач могут быть получены лишь приближенно. Источниками отклонения результата решения задач от точного значения (погрешности) являются погрешности математической модели и исходных данных, а также методические и операционные погрешности вычислений.

Погрешность численного метода

Погрешность численного метода обусловлена заменой исходных уравнений, описывающих принятую модель физического явления, другими аппроксимирующими уравнениями, позволяющими построить вычислительный алгоритм, а также приближенностью методов решения этих аппроксимирующих уравнений. Численные методы обычно строятся так, что они содержат некоторый параметр, при стремлении которого к определенному пределу погрешность сходящегося алгоритма стремится к нулю. Таким образом, значение погрешности численного метода можно регулировать, а выбирать ее целесообразно в 2 - 5 раз меньшей неустранимой погрешности. Если сходимость метода доказана, то представление о его точности дает сопоставление расчетов, выполненных при различных значениях параметра численного метода.

Для оценки *погрешности численных методов* в настоящее время разработано мпожество различных приемов и методов.

Замена исходного дифференциального уравнения разностным приводит к появлению *погрешности численного метода*, связанной с погрешностью аппроксимации. Для характеристики качества аппроксимации используется понятие ее порядка.

По причинам возникновения различают следующие основные виды погрешностей: *погрешность численного метода*, или вычислительного алгоритма; принципиальная, или методическая; инструментальная, пли приборная; неустранимая или наследственная.

Описанная методика вычисления с использованием сеточно-харак-теристического метода для моделирования адвекции хотя и удовлетворяет вышеперечисленным требованиям и является консервативной, но не позволяет исключить вычислительную диффузию, возникающую из-за *погрешностей численных методов*. Особенно ошибка заметна при расчетах для мгновенно действующего источника, а также для постоянного источника при различных направлениях ветра.

Предмет вычислительной математики - численные методы или, что то же самое, множества вычислительных алгоритмов и вопросы их обоснования: сходимость и скорость сходимости численных методов, устойчивость и *погрешность численных методов*, время реализации численных методов на ВМ, необходимая память ВМ и др. Цель настоящего добавления - изложение основных понятий и некоторых результатов вычислительной математики, которые неоднократно применяются в данной книге и в то же время имеют значительный самостоятельный интерес.

Заменяя заданную задачу близкой к ней приближенной, мы получим некоторую погрешность, которая и называется *погрешностью избранного численного метода*. В приведенном примере она имеет следующий смысл.

Практически сходящийся итерационный процесс прерывается при некотором значении n N, а полученная величина XN принимается за приближенное решение исходной задачи. Очевидно, что соответствующим выбором величины N, представляющей собой в рассматриваемом случае параметр численного метода, можно добиться любой близости приближенного решения XN к точному x, а *погрешность численного метода* в данном случае обусловлена конечностью числа итераций. [

Кривая нейтральной устойчивости вычисленная этим методом, окружена областью, соответствующей пределу точности, которую можно получить методом локального потенциала. Платтен [136] утверждает, что снижение точности вычислений при больших величинах произведения аЛе связано, по-видимому, с не самосопряженным характером уравнения Орра - Зоммерфельда (12.10), а не с *погрешностями численного метода*. Фактически Платтен отметил, что несамосопряженный вклад уравнения Орра - Зоммерфельда описывается величиной iaffieUD2W, роль которой возрастает с ростом ай. В связи с этим следует подчеркнуть, что сходимость, изучавшаяся в разд. Погрешность численного метода обусловлена заменой исходных уравнений, описывающих принятую модель физического явления, другими аппроксимирующими уравнениями, позволяющими построить вычислительный алгоритм, а также приближенностью методов решения этих аппроксимирующих уравнений. Численные методы обычно строятся так, что они содержат некоторый параметр, при стремлении которого к определенному пределу погрешность сходящегося алгоритма стремится к нулю. Таким образом, значение *погрешности численного метода* можно регулировать, а выбирать ее целесообразно в 2 - 5 раз меньшей неустранимой погрешности. Если сходимость метода доказана, то представление о его точности дает сопоставление расчетов, выполненных при различных значениях параметра численного метода.

В математике хаос принято определять несколько иным образом. Будем называть поведение решения математической модели хаотическим, если оно является неустойчивым по отношению к малым возмущениям. В качестве возмущений могут выступать малые изменения начальных данных, параметров модели, *погрешность численного метода* либо ошибка округления ЭВМ.

Не следует думать, что совершенное знание математики, численных методов и навыки работы с ЭВМ позволяют сразу решить любую прикладную математическую задачу. Во многих случаях требуется доводка методов, приспособление их к решению конкретных задач. При этом типична обстановка, когда используются методы, применение которых теоретически не обосновано, или теоретические оценки *погрешности численного метода* неприемлемы для практического использования вследствие их громоздкости; при выборе метода решения задачи и анализе результатов приходится полагаться на опыт предшествующего решения задач, на интуицию и сравнение с экспериментом и при этом приходится отвечать за достоверность результата. Поэтому для успеха в работе необходимы развитое неформальное мышление, умение рассуждать по аналогии, дающие основания ручаться за достоверность результата там, где с позиций логики и математики, вообще говоря, ручаться нельзя.

При решении задачи па ЭВМ мы всегда получаем не точное решение исходной задачи, а некоторое приближенное решение. Чем же обусловлена возникающая погрешность. Прежде всего, входные данные исходной задачи (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений) всегда задаются с некоторой погрешностью. *Погрешность численного метода*, обусловленную неточным заданием входных данных, принято называть неустранимой погрешностью. Далее, при замене исходной задачи дискретной задачей возникает погрешность, называемая погрешностью дискретизации или, иначе, погрешностью метода.

При решении задачи па ЭВМ мы всегда получаем не точное решение исходной задачи, а некоторое приближенное решение. Чем же обусловлена возникающая погрешность. Прежде всего, входные данные исходной задачи (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений) всегда задаются с некоторой погрешностью. *Погрешность численного метода*, обусловленную неточным заданием входных данных, принято называть неустранимой погрешностью. Далее, при замене исходной задачи дискретной задачей возникает погрешность, называемая погрешностью дискретизации или, иначе, погрешностью метода. Например, заменяя производную и (х) разностным отношением (и (х & х) - - и (х)) / Ах, мы допускаем погрешность дискретизации, имеющую при Да; - 0 порядок Л с. Наконец, конечная разрядность чисел, представляемых в ЭВМ, приводит к ошибкам округления, которые могут нарастать в процессе вычислений.

Введение этого термина было связано с численными результатами Лоренца, который получил простую трехмерную систему, описывающую ячеистую конвекцию. Оказалось, что нерегулярные аттракторы встречаются и в других системах, в частности, в системах с 3 / 2 степенями свободы. В самой окрестности не исключается существование устойчивых режимов, причем их может быть счетное множество. Подобные нерегулярные аттракторы были названы Афраймовичем и Шильниковым квазиаттракторами. В численных экспериментах устойчивые режимы в указанной окрестности трудно обнаружить по крайней мере по следующим причинам: 1) области притяжения этих режимов очень тонкие; 2) периоды этих движений очень большие; 3) существуют вычислительные погрешности и *погрешности численного метода*.

Вычислительная погрешность

Проведение численных расчётов на компьютере неизбежно связано с погрешностью округления, иначе говоря, с *вычислительной погрешностью*. Округления возникают в силу ограниченности разрядной сетки компьютера при представлении в нем вещественных чисел. Правила, по которым производятся округления при ручном счёте, просты, и с ними можно познакомиться, например, в [1, с. 29–32]; [2, с. 24–25]. Округления в ЭВМ производятся путём отбрасывания цифр, не помещающихся в разрядную сетку. Следует отметить, что встречаются задачи, которые очень чувствительны к погрешностям исходных данных. Эта чувствительность может быть охарактеризована понятием устойчивости, которое входит как составная часть в понятие *корректности*. Сформулируем его.

Задача называется *поставленной корректно*, если для любых значений входных данных из некоторого класса выполняются следующие условия:

1) решение задачи существует и единственно в рассматриваемом классе решений;

2) решение устойчиво относительно входных данных, т.е. малые изменения во входных данных приводят к малому изменению решения.

Если нарушается одно из условий или сразу оба, то задача называется *некорректно поставленной*. В литературе представлено много примеров некорректно поставленных задач. Достаточно сослаться на пример Уилкинсона [4, с. 26–27] отыскания действительных корней многочлена:

$$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-20) = x^{20} - 210 \cdot x^{19} + \dots$$

Если незначительно изменить коэффициент при x^{19} (увеличить на 2^{-23}), то в результате вычислений вместо корней

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_{20} = 20$$

получаются (при высокой точности расчётов) существенно иные корни. Этот пример иллюстрирует, что погрешность в исходных данных и погрешности округлений в процессе вычислений сильно искажают результат. Численные методы нецелесообразно применять к некорректно поставленным задачам. Эти задачи требуют особого рассмотрения, и для их решения разрабатываются свои методы.

Влияние внешних условий

<u>*По влиянию внешних условий*</u> различают основную и дополнительную погрешности СИ. *Основной* называется погрешность СИ, определяемая в нормальных условиях его применения. Для каждого СИ в нормативно-технических документах оговариваются условия эксплуатации - совокупность влияющих величин (температура окружающей среды, влажность, давление, напряжение и частота питающей сети и др.), при которых нормируется его погрешность. *Дополнительной* называется погрешность СИ, возникающая вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин.

<u>*В зависимости от влияния характера изменения измеряемых величин*</u> погрешности СИ делят на статические и динамические. <u>*Статическая погрешность*</u> - это погрешность СИ применяемого для измерения ФВ, принимаемой за неизменную. <u>*Динамической*</u> называется погрешность СИ, возникающая дополнительно при измерении переменной ФВ и обусловленная несоответствием его реакции на скорость (частоту) изменения измеряемого сигнала.

В связи с приведенными краткими характеристиками различных по природе погрешностей остановимся на попытках ввести некоторые термины, характеризующие результаты измерении, в зависимости от вида погрешностей.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

НЕ ПРЕДУСМОТРЕНО РУП

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие 1 (ПЗ-1) Погрешности измерений. Абсолютные и относительные погрешности. Погрешности инструментальные, методические, отсчитывания и установки. Систематические, прогрессирующие, случайные и грубые погрешности.

1) Определить класс точности магнитоэлектрического миллиамперметра с номинальным значением шкалы $I_{ном} = 10\,мА$ для измерения тока в интервале от1–го до 10 мА так, чтобы относительная погрешность измерения тока $\delta I_{отн}$ не превышала 1%.

Дано: $I_{ном} = 10\,мА$ $\delta I_{отн} \leq 1\%$ $1 \div 10\ мА$

К=?

Решение. Относительная погрешность измерения $\delta I_{отн}$ больше в начале шкалы прибора, так как значение абсолютной погрешности ΔI по всей шкале прибора примерно одно и то же. Поэтому ΔI определяется при $I = 1\,мА$:

$$\Delta I = \delta I_{отн} \cdot I = 0{,}01 \cdot 1 \cdot 10^{-3} A = 10^{-5} A$$.

Класс точности рабочего средства измерения находится по основной приведенной погрешности:

$$\delta_{осн} = \frac{\Delta I}{I_{ном}} = \frac{10^{-5}}{10 \cdot 10^{-3}} = 0{,}001$$

Вывод: класс точности выбранного прибора должен быть К=0,1.

2) Округляя точные числа A до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел.

Дано: $A = 0{,}1545$ $n = 3$

Найти: Δ, δ

Решение:

$A' = 0{,}155$ - приближенное значение числа А

Абсолютная погрешность: $\Delta = |A - A'| = |0{,}1545 - 0{,}155| = 0{,}0005$

Относительная погрешность: $\delta = \frac{\Delta}{A} \cdot 100\% = \frac{0{,}0005}{0{,}1545} \cdot 100\% = 0{,}324\%$

Ответ: $\Delta = 0{,}0005$; $\delta = 0{,}324\%$

3) При проведении измерительного эксперимента получены следующие значения величины: 11,65; 11,41; 11,57; 11,60; 11,50; 11,55; 11,58; 11,58; 11,61; 11,63. Требуется проанализировать полученные результаты наблюдений в целях выявления грубых погрешностей, используя критерий Диксона.

Решение:

1. Располагаем результаты наблюдений в вариационный возрастающий ряд:

11,41<11,50<11,55<11,57<11,58;11,58<11,60<11,61<11,63<11,65.

2. Записываем используемую для расчета формулу критерия Диксона:

$$K_Д = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$$.

3. Подставляем в формулу данные нашего эксперимента и рассчитываем Кд:

$$K_Д = \frac{11{,}65 - 11{,}63}{11{,}65 - 11{,}41} = \frac{0{,}02}{0{,}24} = 0{,}0833$$.

4. Зададимся значением q=0,10 (десятипроцентным уровнем значимости).

5. Используя табличные данные, выявим критическую область для рассчитанного критерия Кд.

Согласно табл. 2 приложения 3 при n=10 и q=0,15, zдикс =0,35.

6. Делаем вывод, что Кд < zдикс.

Ответ. Полученный ряд результатов наблюдений не имеет в своем составе грубых погрешностей даже при q=0,1. Дальнейшей обработке будет подвергаться весь массив данных.

3.2 Практическое занятие 2 (ПЗ-2) Абсолютная погрешность величины, зависящей от нескольких переменных. Приближенные числа и действия над ними. Пять задач, которые необходимо решать при работе с приближенными числами.

1) Пусть X – некоторая величина, истинное значение которой известно или неизвестно и равно x*. Число x, которое можно принять за значение величины X, мы будем называть ее приближенным значением или просто приближенным числом. Число x называют приближенным значением по недостатку, если оно меньше истинного значения ($x < x^*$), и по избытку, если оно больше ($x > x^*$). Например, число 3,14 является приближенным значением числа π по недостатку, а 2,72 – приближенным значением числа e по избытку.
Абсолютная погрешность приближенного числа есть абсолютная величина разности между истинным значением величины и данным ее приближенным значением.

$$\Delta x = |x^* - x|$$

Поскольку истинное значение величины обычно остается неизвестным, неизвестной остается также и абсолютная погрешность. Вместо нее приходится рассматривать оценкуабсолютной погрешности, так называемою предельную абсолютную погрешность, которая означает число, не меньшее абсолютной погрешности (далее, в том случае, если это не принципиально, будем под абсолютной погрешностью понимать именно предельную абсолютную погрешность).
Абсолютная погрешность приближенного числа не в полной мере характеризует его точность. Действительно, погрешность в 0,1 г слишком велика при взвешивании реактивов для проведения микро-синтеза, допустима при взвешивании 100 г колбасы, и не может быть замечена при измерении массы, например, железнодорожного вагона. Более информативным показателем точности приближенного числа является его относительная погрешность.
Относительной погрешностью δx приближенного значения величины X называют абсолютную величину отношения его абсолютной погрешности к истинному значению этой величины. Часто эту относительную погрешность выражают в процентах. С учетом положительности абсолютной погрешности можно записать:

$$\delta x = \Delta x \,/\, |x^*|$$

Ввиду того, что фактически вместо абсолютной погрешности приходится рассматривать предельную, относительную погрешность также заменяют предельной относительной погрешностью, которая означает число, не меньшее относительной погрешности. Более того, при отыскании предельной относительной погрешности приходится заменять неизвестное истинное значение величины x* приближенным – x. Последняя замена обычно не отражается на величине относительной погрешности ввиду близости этих значений и малости абсолютной погрешности.

$$\delta x = \Delta x \,/\, |x|$$

Например, для приближенного значения π = 3,14 предельная абсолютная погрешность составляет 0,0016, а относительная – 0,00051 или 0,051%. Выражение относительной погрешности в процентах иногда называют процентной погрешностью.

2) Известно, что приближенное значение ***a*** имеет ***n*** значащих цифр. Оценить абсолютную и относительную погрешность.

a=0,0359 n=2

$\Delta_a - ?\quad \delta_a - ?$

Решение:

$n=2 \quad \Rightarrow \quad r=-3$

$\Delta_a \le 10^{-3} \quad \delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = 0{,}03 = 3\%$

3.3 Законы распределения случайных погрешностей.

Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X – число появлений события А в трех опытах. Построить ряд и многоугольник распределения, функцию распределения случайной величины X. Найти: 1) вероятность событий: А={X<2}; В={$1 \le X \le 3$}; С={$1 < X \le 3$}; 2) математическое ожидание m_X, дисперсию D_X, среднее квадратическое отклонение σ_X случайной величины X.

Решение. Случайная величина X может принимать значения $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Соответствующие им вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 найдем, воспользовавшись формулой Бернулли. При n=3, $p = 0{,}4$; $q = 1 - p = 0{,}6$ имеем: $p_0 = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = (0{,}6)^3 = 0{,}216$;

$p_1 = P_3(1) = C_3^1 p q^2 = 3 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}432$;

$p_2 = P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot (0{,}4)^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$; $p_3 = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = (0{,}4)^3 = 0{,}064$.

Отсюда ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

(Контроль: $\sum_{i=0}^{3} p_i = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1$).

Многоугольник распределения случайной величины X представлен на рис.6.

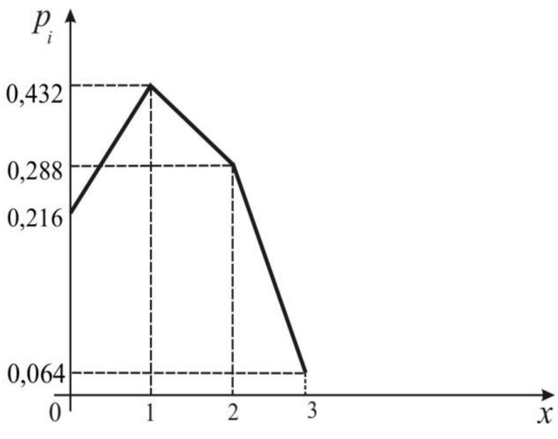


Рис. 6

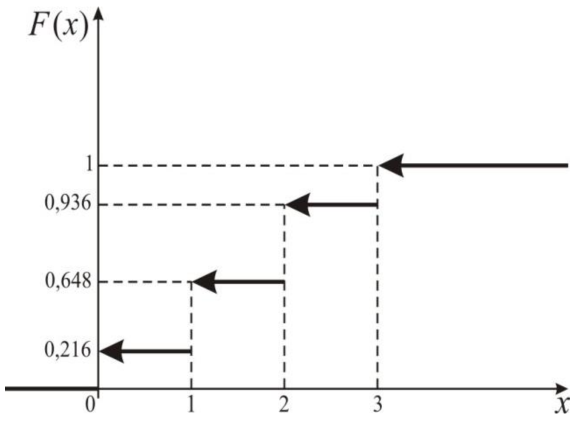


Рис. 7

Найдем функцию распределения F(x). По определению функции распределения имеем: если $x \le 0$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;

если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}216$;

если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$;

если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}936$;
если $3 < x$, то $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$
$= 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1$.

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x \le 0, \\ 0{,}216, & \textit{если} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}648, & \textit{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}936, & \textit{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 1, & \textit{если} \quad 3 < x. \end{cases}$$

График функции F(x) изображен на рис. 7.
1) Сначала вычислим искомые вероятности непосредственно:
$P(A) = P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$;
$P(B) = P(1 \le X < 3) = P(X=1) + P(X=2) = 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}72$;
$P(C) = P(1 < X \le 3) = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}288 + 0{,}064 = 0{,}352$.
Эти же вероятности найдем, воспользовавшись формулами:
$F(x) = P(X < x)$ и $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$. Тогда $P(A) = P(X < 2) = F(2) = 0{,}648$;
$P(B) = P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 0{,}936 + 0{,}216 = 0{,}72$;
$P(C) = P(1 < X \le 3) = P(1 \le X < 3) - P(X=1) + P(X=3) = F(3) - F(1) - P(X=1) + P(X=3) =$
$= 0{,}936 - 0{,}216 - 0{,}432 + 0{,}064 = 0{,}352.$

2) Найдем математическое ожидание случайной величины X. Используя формулу (3), получим $m_X = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2$. Вычислим дисперсию.
По формуле (6) имеем:
$D_X = \sum_{i=0}^{3} (x_i - m_X)^2 p_i = (0-1{,}2)^2 \cdot 0{,}216 + (1-1{,}2)^2 \cdot 0{,}432 + (2-1{,}2)^2 \cdot 0{,}288 + (3-1{,}2)^2 \cdot 0{,}064 =$
=0,72. Тогда среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0{,}72} = 0{,}85$

3.4 Практическое занятие 8 (ПЗ-8) Вероятностный подход к описанию погрешностей.

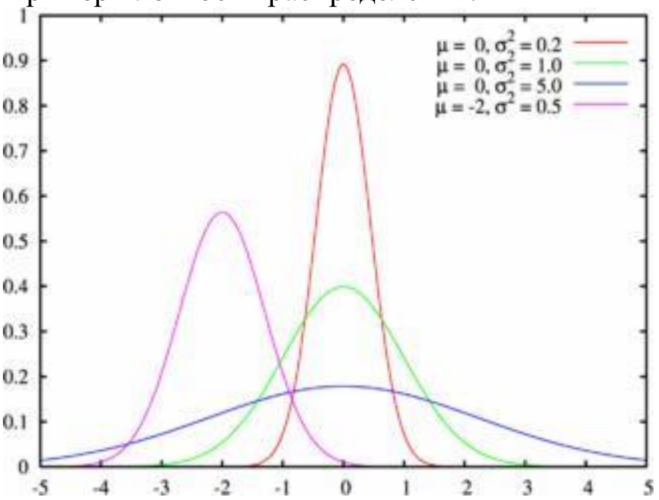
. Нормальное распределение или распределение Гаусса (непрерывное)

Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса, – распределение вероятностей, которое играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике. Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех. Ясно, что такая ситуация крайне распространена, поэтому можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение — отсюда и произошло одно из его названий.
Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Числовые характеристики: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma = \sigma$

Пример плотности распределения:



Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется стандартным или нормированным, а соответствующая нормальная кривая - стандартной или нормированной.

Функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал $(\alpha; \beta)$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X на величину δ от математического ожидания (по модулю).

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

НЕ ПРЕДУСМОТРЕНО РУП