ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.04

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Направление подготовки бакалавров: 20.03.01 Техносферная безопасность

Профиль подготовки: Безопасность жизнедеятельности в техносфере

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Организация самостоятельной работы

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование тем	Количество часов по видам самостоятельной работы				
		Промежуточная аттестация	Подготовка рефератов	Контрольные работы	Самостоятельное изучение вопросов	подготовка к занятиям
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	Раздел 1. Элементы линейной алгебры.	×	×	10	-	20
2	Раздел 2. Векторная алгебра (геометрические векторы).	×	×	5	-	8
3	Раздел 3. Элементы аналитической геометрии.	×	×	5	15	8
4	Раздел 4. Введение в анализ.	×	×	-	7	4
5	Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.	10	×	4	28	16
6	Раздел 6. Комплексные числа	×	×	-	6	-
7	Раздел 7. Интегральное исчисление функций одной переменной.	×	×	8	6	8
8	Раздел 8. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	×	×	6	6	8
9	Раздел 9. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.	15	×	-	13	8
10	Радел 10. Числовые и функциональные ряды	×	×	8	7	8
11	Раздел 11. Гармонический анализ	×	×	-	12	-
12	Раздел 12. Обыкновенные дифференциальные уравнения.	×	×	8	24	14
13	Раздел 13. Линейные уравнения и системы.	×	×	-	8	2
14	Раздел 14. Элементы дискретной математики.	20	×	-	21	-
15	Раздел 15 . Случайные события	×	×	-	7	4
16	Раздел 16. Случайные величины.	×	×	-	12	6
17	Раздел 17. Статистическое описание результатов наблюдений.	×	×	-	7	6
18	Раздел 18. Статистические методы обработки результатов наблюдений.	×	×	-	19	12
19	Раздел 19. Элементы теории функций комплексного переменного	×	×	-	24	-
20	Раздел 20. Уравнения математической физики	×	×	-	6	-
21	Раздел 21. Численные методы	25	×	-	12	-
22	**Итого: 496**	**70**	×	**54**	**240**	**132**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ (ПРОЕКТА)

Курсовые работы (проекты) не предусмотрены РУП.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ РЕФЕРАТА/ЭССЕ

Рефераты/Эссе не предусмотрены РПД.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Индивидуальные домашние задания выполняются в форме контрольной работы.

4.1 Темы индивидуальных домашних заданий (контрольных работ)

4.1.1. Контрольная работа №1по теме «Элементы аналитической геометрии: прямая на плоскости; плоскость и прямая в пространстве».

4.1.2. Контрольная работа №2 по теме «Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Ряды. Непрерывные случайные величины. Нормальное распределение и его свойства».

4.2 Содержание индивидуальных домашних заданий

4.2.1 Контрольная работа № 1 «Элементы аналитической геометрии: прямая на плоскости; плоскость и прямая в пространстве»

Вариант 1

1. Проверить, является ли прямоугольным треугольник с вершинами А (4; -5), В (7; 6) и С (-7; -2). Составить уравнения его сторон.
2. Через точку пересечения прямых $x-2y-4=0$ и $2x-3y-7=0$ провести прямую, составляющую с осью ОХ угол 45°.
3. К какой из двух прямых: $3x+5y-8=0$ и $5x\text{-}3y+15=0$ точка М(-1;2) находится ближе?
4. Показать, что отрезки прямых $2x-y+4=0, x\text{-}3y+5=0,$ $4x\text{-}2y+1=0$ и $2x+y\text{-}5=0$ образуют трапецию. Найти внутренние углы трапеции.
5. Дан тетраэдр с вершинами А(1; 3; 6), В (2; 2; 1), С (-1; 0; 1) и В (-4; 6; -3). Найти длину высоты, проведенной из вершины А, и угол между гранями BCD и ACB . Составить уравнение плоскости, проходящей через вершину А параллельно грани BCD.
6. Плоскость проходит через точку М (1; -3; 5) и отсекает на осях OY и OZ вдвое большие отрезки, чем на оси OX. Вычислить направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к этой плоскости.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ох перпендикулярно к плоскости $6x-5y+7z-10=0$.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0 \end{cases}$.

9. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} 2x-2y-z+1=0, \\ 3x-2y-2z=0 \end{cases}$ с плоскостью $x+2y+3z-29=0$ и угол между ними.
10. Дан треугольник с вершинами А (7; 2; -6), В (11; -3; 5), С (-3; 4; -2). Составить уравнение медианы, проведенной из вершины В. При каком значении m прямая $\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$ будет перпендикулярна построенной прямой?
11. Проверить, лежит ли прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ на плоскости $4x+3y-z+3=0$.

Вариант 2

1. Написать уравнения высот треугольника, вершины которого находятся в точках К (2; 5), А. (-4; 3), М (6; -2).
2. Найти угол наклона к оси ОХ и начальную ординату прямой $\frac{x}{-1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1$. Построить данную прямую.
3. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x-3y-5=0$ и $2x\text{-}3y+21=0$.
4. Даны уравнения сторон треугольника: $6x-5y+13=0\ (AB), 10x+3y-35=0\ (AC)$ и $x+2y+5=0\ (BC)$. Определить угол между медианами, проведенными из вершин А и В.
5. Плоскость α проходит через точки А (-1; 3; 4), В (-1; 5; 0) и С (2; 6; 1), плоскость β задана уравнением $3x+y+z-3=0$. Показать, что плоскости перпендикулярны, и выяснить, какая из них расположена ближе к началу координат.
6. Через точку М (-5; 16; 12) проведены две плоскости: одна из них содержит ось OX, другая - OY . Вычислить угол между этими плоскостями.
7. Через точку М (2; 3; -1) провести плоскость, параллельную плоскости $2x-3y+5z-4=0$. Составить для построенной плоскости уравнение в "отрезках".
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x-3y+2z+2=0, \\ x+3y+z+14=0 \end{cases}$.
9. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку А (1; -5; 3) и образует с осями координат OX и OY углы, соответственно равные 60° и 45°, а с осью OZ – тупой угол.
10. Показать, что прямые $\begin{cases} x=2-5t, \\ y=-9t, \\ z=-1+7t \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-32=0 \end{cases}$ взаимно перпендикулярны.
11. При каком значении A плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ будет параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$. При $A=4$ найти угол между ними.

Вариант 3

1. В параллелограмме ABCD даны вершины А (-1; 3), В (4; 6) и С (1;-5). Составить уравнения его сторон.
2. Какая зависимость существует между a и b , если угол наклона прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ к оси ОХ равен 45° ?
3. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $15x-8y-51=0$, и угол, образованный этим перпендикуляром с осью ОУ.
4. Дан треугольник с вершинами: А (-3; -5), В (9; 1) и С (-3; 5). Определить координа-

ты точки пересечения и острый угол между медианой, проведенной из вершины A, и высотой, проведенной из вершины C на сторону AB.

5. Плоскость α проходит через точки A (-1; 10; -3), (1; 1; -5) и C (5; 4; -2), плоскость β проходит через точку M (2; -3; -9) и отсекает на осях OX и OY отрезки a = 18, b = 27. Показать, что плоскости параллельны, и найти расстояние между ними.
6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (-3; 1; 2) параллельно векторам $\bar{a} = \{2;\ 5;\ -1\}$ и $\bar{b}\ \{4;\ 1;\ 2\}$. Найти угол между построенной плоскостью и плоскостью $18x + 8y + 11z - 10 = 0$.
7. Нормаль к плоскости составляет с координатными осями OX и OY угол α = 150° и β = 120°. Составить уравнение плоскости при условии, что расстояние P от начала координат до неё равно 5 ед. Указать особенность в расположении плоскости.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - z - 8 = 0 \end{cases}$.
9. Найти острый угол между прямыми, одна из которых задана уравнением $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-9}{-10}$, другая проходит через точки A (2; -5; 3) и B (13; 2; -5).
10. При каких значениях B и n прямая $\begin{cases} x = 5 - 3t, \\ y = 9 + 4t, \\ z = 2 + nt \end{cases}$ перпендикулярна плоскости $6x + By - 10z + 9 = 0$?
11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (-4; -7; 1) и параллельно прямой $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

Вариант 4

1. В треугольнике ABC известны вершины A (-3; -4), B (1; -2) и C (7; -2). Составить уравнения средней линии, параллельной AC , и медианы, проведенной из вершины B.
2. Составить уравнение прямой, если известно, что она проходит через точку A(-1; 4) параллельно прямой $\dfrac{x}{-5} + \dfrac{y}{2} = 1$.
3. Стороны треугольника выражаются уравнениями $x + 3y - 2 = 0\ (AB)$, $2x + y + 5 = 0\ (AC)$, $3x - 4 = 0\ (BC)$. Найти уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC и её длину.
4. Через начало координат провести прямые, образующие с прямой $5x - 6y + 2 = 0$ углы, тангенсы которых равны $\pm\dfrac{7}{6}$.
5. Написать уравнение плоскости, параллельной оси OX и проходящей через точки M (0; 1; 3) и N (2; 4; 5), и построить её. Найти расстояние точки A (3; 2; -5) до построенной плоскости.
6. При каком значении l плоскости α и β будут перпендикулярны? Плоскость α проходит через точки K (-1; $\dfrac{3}{2}$; 0), M (2; -1; 1), N (8; 1; -1). Плоскость β задана уравнением $3x + ly - 2z + 1 = 0$. При l = 3 найти острый угол между плоскостями α и β.
7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (-2; 7; 3) параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$. Полученное уравнение плоскости привести к нормальному виду.

8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0 \end{cases}$.
9. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0 \end{cases}$.
10. Даны вершины четырехугольника: A (-4; -3; -2), B (2; -2; -3), C (-8; -5; 1), D (4; -3; -1). Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.
11. Найти значение m, при котором прямая $\begin{cases} x=3+mt, \\ y=-1+4t, \\ z=5-9t \end{cases}$ параллельна плоскости $7x-3y+8z-10=0$. При m = -2 найти точку пересечения прямой с плоскостью.

Вариант 5

1. Даны вершины треугольника: A (4; 6), B (-4; 0) и C (-1; -4). Составить уравнения высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, и медианы, проведенной из вершины C.
2. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x-5y+20=0$.
3. Дана прямая $5x+12y+2=0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от неё на расстоянии 3 единиц.
4. Найти острый угол между прямой $9x+3y-7=0$ и прямой, проходящей через точки A (1; -1) и B (5; 7).
5. На оси OX найти точку, удаленную от плоскости, проходящей через точку M (1; 8; -1) перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{2; -1; -2\}$, на расстояние $d = \frac{2}{3}$.
6. Найти угол между плоскостями α и β, где α проходит через точки A (1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$), B (2; 0; 1) параллельно оси OZ , а β - через точки C (2; 2; 1), D (6; 1; 0) и E (-1; -1; 3).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору $\overline{N}$, направляющие косинусы которого соответственно равны $\mathbf{cos}\alpha = -\frac{1}{3}, \mathbf{cos}\beta = \frac{2}{3}$. Проверить, будет ли искомая плоскость перпендикулярна плоскости $4x+y-z=0$.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0 \end{cases}$.
9. Найти угол между прямой $\begin{cases} x+y+z-24=0, \\ 3x-y+z-26=0 \end{cases}$ и плоскостью $6x-3y-3z+5=0$.
10. Найти проекцию точки M (-6; 5; 7) на прямую $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=7-2t,. \\ z=4+t \end{cases}$
11. Доказать, что четырехугольник с вершинами A (3; 2; -3), B (2; 4; 6), C (8; 3; 4), D (9; 1; -5) есть параллелограмм. Найти длины его сторон.

Вариант 6

1. Даны вершин треугольника: A (2; -1), B (4; 5) и C (-3; 2).Составить уравнения высоты, опущенной из вершины B на сторону AC, в медианы, проведенной из вершины A.
2. Через точку A(1; 2) провести прямую, отсекающую на положительных полуосях координат равные отрезки.
3. Найти длину перпендикуляра, проведенного из начала координат к прямой

$x-y+8=0$, и угол, образованный этим перпендикуляром с осью OX .

4. Проверить, что прямые $y=3x-1$, $x-7y=7$ и $x+y-7=0$ служат сторонами равнобедренного треугольника.
5. Нормаль к плоскости составляет с координатными осями OY и OZ углы β = 60° и γ = 45°, а с осью OX - тупой угол. Составить уравнение плоскости при условии, что расстояние p от начала координат до неё равно 8 единицам. Найти расстояние от точки A (1; -1; $3\sqrt{2}$) до построенной плоскости.
6. Определить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью α, проходящей через точки A (0; 4; 1), B (6; 2; 0), C (3; 0; 2). Найти угол между плоскостью α и плоскостью XOY.
7. Показать, что параллелепипед, грани которого лежат в плоскостях $2x+4y-6z+13=0,\ 9x-3y+z-4=0,\ x+4y+3z-5=0$ является прямоугольным.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$.
9. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=t+2, \\ z=1-t \end{cases}$ с плоскостью $3x-2y+z-3=0$ и угол между ними.
10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (-3; 5; -1) и перпендикулярно прямой $\begin{cases} x-4y+5z-1=0, \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$.
11. Точки A (-4; 3; 7), B (2; -1; 5) и C (-2; -6; 11) являются тремя вершинами параллелограмма. Составить уравнение стороны CD.

Вариант 7

1. Даны вершины треугольника: A (-1; 2), B (3; -1) и C (0; 4). Через каждую из них провести прямую, параллельную противолежащей стороне.
2. Прямая проходит через точку A(-1; -9) и отсекает на отрицательной полуоси абсцисс отрезок, вдвое меньший, чем на отрицательной полуоси ординат. Составить уравнение этой прямой.
3. Известны уравнения сторон треугольника: $x+3y-3=0,\ 3x+y+11=0,\ x-y-3=0$. Найти длину высоты, которая проведена из вершины, лежащей на оси абсцисс.
4. Даны вершины четырехугольника: A (-9; 0), B (-3; 6), C (3; 4) и D (6; -3). Вычислить угол между диагоналями AC и BD.
5. Две из граней куба расположены на плоскостях $x+y+z-1=0$ и $2x+2y+2z-5=0$. Найти его объем.
6. Найти угол между плоскостью $3x-4y+5z-1=0$ и плоскостью, проходящей через точки M (1; 1; 1) и N (2; 3; -1) параллельно вектору $\bar{a}$ ={0; -1; 2}.
7. Составить уравнение плоскости ABC, где A (-3; -3; 1), B (-4; -2; -2), C (-5; -1; 0), и указать особенность в её расположении. Найти углы, образуемые перпендикуляром, опущенным из начала координат к плоскости, с координатными осями.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$.
9. Найти угол прямой $\begin{cases} y=3x-1, \\ 2z=-3x+2 \end{cases}$ с плоскостью $2x+y+z-4=0$.

10. При каком значении n прямые $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = -4t \end{cases}$ и $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{n}$ будут взаимно перпендикулярны?
11. Вершины четырехугольника находятся в точках A (-3; -5; -1), B (2; -20; 9), C (-6; 1; -2), D (-9; 10; -8). Показать, что ABCD есть трапеция и найти длины её оснований.

Вариант 8

1. Проверить, что четыре точки: A (-2; -2), B (-3; 1), C (7; 7) и D (3; 1) служат вершинами трапеции, и составить уравнение средней линии трапеции.
2. Какая зависимость существует между a и b, если угол наклона прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ к оси OX равен 30° ?
3. Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 1 = 0$ и $x + 3y - 7 = 0$ проведена прямая перпендикулярно первой из данных прямых. Каково расстояние полученной прямой от начала координат?
4. Определить острый угол, под которым пересекаются прямые AB и CD, если A (2; 4), B (4; 8), C (8; 3) и D (10; -2).
5. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x - y - 4z + 5 = 0$ и отстоящих от точки A (1; 2; 0) на расстоянии $\sqrt{21}$.
6. Найти угол между плоскостью, проходящей через точку M (3; 6; -2) и отсекающей на осях координат отрезки, связанные соотношением *а: в : с* =1:3:2, и плоскостью XOZ.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A (0; 2; 0), B ($\frac{1}{2}$; 0; 1) и C ($-\frac{1}{4}$; -1; 1).
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$.
9. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x + y - 3z + 1 = 0$ с прямыми $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}$ и $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$. Определить направляющие косинусы прямой.
10. При каком значении m прямые $\begin{cases} 3x - 4y + 5z - 18 = 0, \\ 6x - 5y + z - 27 = 0 \end{cases}$ и $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-4}{5}$ будут взаимно перпендикулярны? При m = 1найти угол между ними.
11. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку M (3; 1; -2) и прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

Вариант 9

1. Даны вершины треугольника: A (3; 0), B (0; 3) и C(-2; -1). Составить уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, и найти её длину.
2. Из пучка прямых а центром в точке O(2; -5) выбрать прямую, отсекающую на положительной полуоси ординат отрезок, равный 3 единицам. Полученное уравнение прямой привести к нормальному виду.
3. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ и параллельную прямой $5x + 8y = 0$.
4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку. M (-4; 1)и образующей угол $\alpha = \mathbf{arctg}\frac{16}{21}$ с прямой $5x - 4y = 15$.
5. Найти расстояние от точки пересечения плоскостей

$3x + y - 4z + 6 = 0,\ 2x - y + 3z - 9 = 0,\ x + 2y + 2z - 3 = 0$ до плоскости, проходящей через точку M (-1;-1; 1) перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{2; 1; -2\}$.

6. Дан тетраэдр с вершинами A (1; -2; 2), B (2; -3; -6),C (5; 1; 4) и D (0; -4; 4). Найти угол между гранями ABD и BCD.
7. Плоскость α проходит через точку M (-5; 4; 13) и отсекает на осях координат равные отрезки. Плоскость β задана уравнением, $mx + 3y - 4z + 1 = 0$. При каком значении m плоскости α и β будут перпендикулярны?
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$
9. Даны две вершины параллелограмма ABCD: C (-2; 3; -5) и D (0; 4; -7) и точка пересечения диагоналей M (1,2,-3; 5). Найти уравнение стороны AB и угол между диагоналями AC и BD.
10. При каких значениях B и C прямая $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$ перпендикулярна плоскости $5x + By + Cz + 2 = 0$?
11. При каких значениях A и C прямая $\dfrac{x+3}{7} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-1}{3}$ лежит в плоскости $Ax - 5y + Cz + 6 = 0$?

Вариант 10

1. Вершины четырехугольника имеют координаты P(1; 0), Q(2; $\frac{5}{3}$), R(5; 2) и S(6; -1). Найти точку пересечения его диагоналей.
2. Диагонали ромба равны 8 и 3 единицам. Написать уравнения сторон ромба, если большая диагональ лежит на оси OX, а меньшая - на оси OY . Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба.
3. Составить уравнение перпендикуляра, восстановленного в середине отрезка, соединяющего точки M (-1; 7) и N (3; -1). Какой угол образует он с положительным направлением оси OX?
4. Вычислить угол между прямыми $x + 4y + 3 = 0$ и $5y + 7 = 0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A (1; 0; -2) перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, где B (2; -1; 3), C (0; -3; 2). Указать особенности в расположении плоскости. Найти расстояние от точки D (6; -2; 13) до построенной плоскости.
6. При каком значении m угол между плоскостями α и β равен $\frac{\pi}{3}$? Плоскость α проходит через точки A $\left(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, B (-3; 1; 1) и C (2; 4; -7), плоскость β задана уравнением $x - y - mz - 1 = 0$.
7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки M (1; -1; 2), N (3; 1; -2) и перпендикулярной к плоскости XOY.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$.
9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M (1; 2; 3), если направляющий вектор $\overline{S}$ прямой образует с координатными осями OX и OZ углы $\alpha = 120°$, $\gamma = 45°$, а с осью OY - острый угол.

10. В плоскости XOZ найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную к прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$.
11. При каком значении C плоскость $2x+3y+Cz-3=0$ будет параллельна прямой $\begin{cases}2x+3y+z-10=0,\\ 4x-5y-z+24=0\end{cases}$. При C = -2 найти угол между ними.

Вариант 11

1. Показать, что точки M(4; 3), N (5; 0), P (-5; -6) и Q (-1; 0) являются вершинами трапеции. Найти уравнение высоты трапеции, её длину.
2. Найти угол наклона к оси OX .и начальную ординату прямой $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-3}=1$.
3. Определить, какие из уравнений прямой являются нормальными:

   1) $\frac{8}{17}x-\frac{15}{17}y-2=0$ 2) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=0$

   3) $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-4=0$ 4) $\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{15}{2\sqrt{10}}=0$
4. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если даны вершина прямого угла C(3; -1) и уравнение гипотенузы $3x-y+2=0$.
5. Найти такое число α, чтобы плоскость $ax+2ay+10z-2=0$ была параллельна плоскости $x+2y+5z-7=0$, и определить расстояние между ними.
6. Построить линии пересечения координатных плоскостей с плоскостью α, проходящей через точки A(1; 1; -1), B(3; -1; 1) и C(2; 3; 2), Найти угол между плоскостью α и плоскостью XOZ.
7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(1; 1; 1) параллельно векторам $\bar{a}$ ={0; 1; 2} и $\bar{b}$ = {-1; 0; l}.Указать особенность в расположении плоскости.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases}4x+y-3z+2=0,\\ 2x-y+z-8=0\end{cases}$.
9. Дан треугольник с вершинами A(3; -2; 5), B(-1.2; 3) и C(5; 4; -3). Найти угол между медианами, проведенными из вершин A, C, и их длины.
10. Найти проекцию точки M (1; 2; -3) на плоскость $6x-y+3z-41=0$.
11. Параллельны ли прямые $\begin{cases}x=2t+5,\\ y=-t+2,\\ z=t-7\end{cases}$ и $\begin{cases}x+3y+z+2=0,\\ z-y-3z-2=0\end{cases}$?

Вариант 12

1. Даны две вершины треугольника: A (-4; 3), B (4; -1) и точка пересечения высот M (3; 3). Найти третью вершину C.
2. Написать уравнение прямой, если длина нормали p = 2, а угол наклона её к оси OX равен 225°.
3. Показать, что прямые $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$ и $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ параллельны. Найти расстояние между ними. Построить указанные прямые.
4. Прямые AB и CD пересекаются в точке M(4; 2; 5) под углом 45°. Написать уравнение прямой CD, если координаты точки A(0; 5).
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и равноудаленной от точек A (2; 7; 3) и 3 (-1; 1; 0).

6. Плоскость α проходит через проекции точки М (2; 1; 2) на оси координат, а плоскость β через точки А (1; 2; 3), В (-2; 0; -1) и С (0; 1; 2). Найти угол между плоскостями α и β.
7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M(1; 2; 0) и N(2; 1; 1) параллельно вектору $\bar{a}=\{3;\,0;\,1\}$. Полученное уравнение привести к нормальному виду.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0, \\ x+7y-z-5=0 \end{cases}$.
9. Даны две вершины треугольника: А (-4; -1; 2) и В (3; 5; -16). Найти третью вершину С и угол при вершине А, зная, что середина стороны АС лежит на оси OY, а середина стороны ВС -на плоскости XOZ .
10. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$.
11. При каких значениях В и D прямая $\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $x+By+3z+D=0$?

Вариант 13

1. Даны координаты середин сторон треугольника: А(1; 2), В(7; 4), С(3; -4). Составить уравнения сторон треугольника.
2. Дано уравнение прямой $\dfrac{x+2\sqrt{5}}{4}+\dfrac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$. Написать уравнение в отрезках и нормальное уравнение.
3. Найти расстояние от точки пересечения прямых, заданных уравнениями $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{6}=1$ и $x-4y+8=0$ до прямой $x+2y+2=0$.
4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике АВС известны вершина острого угла А(2; 6) и уравнение противолежащего катета $BC: x-7y+15=0$. Составить уравнения двух других сторон.
5. Найти расстояние от точки М (0; -1; 1) до плоскости, проходящей через точки А(1; 4; -5) и В(4; 2; -3) и перпендикулярной плоскости $3x+5y-6z-8=0$.
6. Вычислить косинусы внутренних двугранных углов тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью, проходящей через точки А(2; 1; 8), В(-1; 3; 4) и С(3; 0; 12).
7. Дана плоскость $2x-2y+z-6=0$. Найти углы её нормали с осями координат. Проверить, проходит ли плоскость через одну из следующих точек: А(1; -2; 1), В(3; 2; 4), С $\left(\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{13}{3}\right)$, D$\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{3}\right)$.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0, \\ 2x-3y+z+6=0 \end{cases}$.
9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ с плоскостью $3x+5y-z-2=0$ и угол между ними.
10. При каком значении m прямые $\begin{cases} x+3z-5=0, \\ 2x+my+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+5t, \\ z=-1-6t \end{cases}$ будут взаимно перпендикулярны?
11. Три вершины трапеции находятся в точках А(3; -1; 2), В(1; 2; -1) и С(-1; 1; -3).

Найти уравнение средней линии трапеции, параллельной AB.

Вариант 14

1. Вершинами треугольника служат точки A(-8; 1), B(1; -2) и C(6; 3). Найти центр описанной около него окружности.
2. Через точку M (3; 2) провести прямую так, чтобы её отрезок, заключенный между осями координат, делился в данной точке пополам.
3. Составить уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k = -\frac{1}{2}$ и отстоящей от начала координат на расстояние $\sqrt{5}$.
4. Две прямые, проходящие через начало координат, образуют собой угол $\mathbf{arctg}(\frac{1}{3})$. Отношение угловых коэффициентов этих прямых равно $\frac{2}{7}$. Составить уравнения этих прямых.
5. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости, проходящей через точки M(3; 3; -4), N(5; 0; -2), P(4; 0; 0) и удаленных от неё на расстояние d = 4.
6. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось OX и составляющей угол 60° с плоскостью Y = X.
7. Определить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью, проходящей через точку M(-3; -6; 4) перпендикулярно вектору $\overline{N}$ ={2; -1; 6}.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0, \\ x + y + z + 10 = 0 \end{cases}$.
9. Найти острый угол между прямыми: $\begin{cases} x = t, \\ y = -7 + 2t, \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0, \\ z = 3x \end{cases}$
10. Показать, что треугольник с вершинами в точках A(1; -2; 1), B(3; -3; -1) и C(4; 0; 3) прямоугольный. Найти его периметр.
11. Прямая проходит через точки A(3; -1; 0) и B(x; -7; 3) и параллельна плоскости $2x + y + 4z - 5 = 0$. Определить абсциссу точки B и направляющие косинусы построенной прямой.

Вариант 15

1. Даны последовательные вершины параллелограмма: A(0; 0), B(1; 3), C(7; 1). Найти угол между его диагоналями и показать, что данный параллелограмм является прямоугольником.
2. При каком значении параметра a уравнения $3ax - 8y + 13 = 0$ и $(a+1)x - 2ay - 21 = 0$ изображают параллельные прямые?
3. Через точку P(-2; 1) проведена прямая так, что её расстояние от точки C(3; 1) равно 4. Найти угловой коэффициент этой прямой.
4. Построить треугольник, стороны которого заданы уравнениями: $x + y - 4 = 0, 3x - y = 0, x - 3y - 8 = 0$. Найти площадь треугольника.
5. Найти расстояние от точки M(2; 1; 1) до плоскости, проходящей через точку N(-1; -1; 2) и перпендикулярной плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
6. Через точку N(3; 9; -4) проведены две плоскости: одна из них содержит ось OY, другая – OZ. Вычислить угол между этими плоскостями.
7. Плоскость проходит через точки A(3; 1; 1), B(-7; $\frac{1}{2}$; 0) и C(-1; 1; $\frac{1}{2}$). Вычислить направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к этой плоскости.

8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0, \\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$.
9. Треугольник ABC образован пересечением плоскости $x + 2y + 4z - 8 = 0$ с координатными осями. Найти уравнения средней линии треугольника, параллельной плоскости XOY, и угол, который образует она с прямой $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z+1}{4}$.
10. Найти расстояние от точки M(2; -1; 3) до прямой $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{5}$.
11. При каких значениях m и n прямые $\begin{cases} mx - 3z + 8 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$ и $\dfrac{x-2}{n} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+2}{4}$ будут параллельны?

Вариант 16

1. Даны вершины треугольника: A(-1; 6), B(-5; -2) и C(1; 0). Показать, что этот треугольник прямоугольный. Найти центр описанной около него окружности и её радиус.
2. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $3x - 6y + 5 = 0$, а также координаты основания этого перпендикуляра.
3. Диагонали ромба длиной в 30 и 16 ед. приняты за оси координат. Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба.
4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 5y + 8 = 0$ и $3x\text{-}4y\text{-}7 = 0$ под углом в 45° к прямой $y = 4x + 3$.
5. На оси ОУ найти точку, равноудаленную от точки A (2; 0; 1) и от плоскости, проходящей через точку B (1; 1; 1) перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{1; 2; 2\}$.
6. Найти угол между плоскостями α и β, где α проходит через точку A $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ перпендикулярно оси OZ , а β - через точки B(2; -1; -1), C(-1; 0; 2) и D(0; -2; 0).
7. При каких значениях a, b, c плоскости $ax - y + 2z - 7 = 0,\ 3x + by - 3z + 6 = 0,\ x + 2y + cz - 2 = 0$ будут взаимно перпендикулярными?
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0, \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$.
9. Проверить, лежат ли на одной прямой следующие три точки: A(3; 0; 1), B(0; 2; 4) и C(1; $\frac{4}{3}$; 3).
10. При каком значении n прямые $\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0, \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = t, \\ y = 3 + 6t, \\ z = -2 - nt \end{cases}$ будут взаимно перпендикулярны? При n = -3 найти угол между ними.
11. Составить уравнения прямой, проходящей через точку M(3; -1; -4), пересекающей ось OY и параллельной плоскости $y + 2z = 0$.

Вариант 17

1. Даны вершены четырехугольника: A(2; 4), B(-3; 7), C(-6; 6), D(-1; 3). Доказать, что данный четырехугольник - параллелограмм.
2. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a и b , чтобы прямые $ax + by + 1 = 0,\ 2x\text{-}3y + 5 = 0$ и $x\text{-}1 = 0$ проходили через одну и ту же точку?
3. На оси абсцисс найти точку, которая отстоит от прямой $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$ на расстоянии 3 единиц.

4. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y = 3x + 5$ и вершину прямого угла (4; -1).
5. Дан тетраэдр с вершинами: K(1; 1; 2), L(-1; 1; 3), M(2; -2; 4), N(-1; 0; -2). Найти длину высоты, проведенной из вершины N, и угол между гранями KLM и LMN.
6. Из точки P(-1; 1; 4) опущен на плоскость перпендикуляр, основанием которого является точка Q(2; 1; 3). Составить уравнение плоскости в нормальном виде и указать особенности в её расположении.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OZ перпендикулярно плоскости, проходящей через точку A(6; -1; 2) и отсекающей на оси абсцисс отрезок a = -3, а на оси аппликат - отрезок c = 4.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.
9. Дан треугольник с вершинами A(1; 2; -4), B(4; 0; -10) и C(-2; 6; 8). Найти угол между медианой, проведенной из вершины A, и стороной BC.
10. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.
11. При каком значении p прямые $\begin{cases} y + pz = 0, \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$ и $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{1}$ будут параллельны?

Вариант 18

1. Три вершины параллелограмма имеют следующие координаты: A(-6; -4), B(-4; 8), C(-1; 5), причем A и C - противоположные вершины. Определить координаты четвертой вершины параллелограмма и уравнения его диагоналей.
2. Даны две точки: A(-3; 1) и B(3; -7). На оси ординат найти такую точку M, чтобы прямые AM и BM были перпендикулярны друг другу.
3. На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от прямой $3x - 4y + 12 = 0$.
4. Найти острый угол между прямой $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ и прямой, проходящей через точки A(-3; 8), B(1; $\frac{8}{3}$). Построить указанные прямые.
5. Определить, при каких значениях m и n плоскости $3x + my + 2z - 7 = 0$ и $nx - 4y - 4z + 3 = 0$ будут параллельны, и найти расстояние между ними.
6. Написать уравнение плоскости, параллельной оси OY и отсекающей на осях OX и OZ отрезки, равные 2 и 3 ед. Найти угол между построенной плоскостью и плоскостью $4x - 3y - z + 2 = 0$.
7. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четыре точки: A(1; -1; 1), B(0; 2; 4), C(1; 3; 3) и D(4; 0; -3).
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.
9. Найти угол между прямыми, одна из которых задана уравнением $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$, другая проходит через точку A(1; 2; 3) и точку пересечения указанной прямой с плоскостью $3x - y + 2z - 5 = 0$.
10. Найти направление прямой, одновременно перпендикулярной к оси OZ и к прямой, проходящей через две точки: A(1; -1; 4) и B(-3; 2; 4).

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(-3; 1; 0) и через прямую $\begin{cases} x+2y-z+4=0, \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$.

Вариант 19

1. Противоположные вершины ромба находятся в точках B(-2; 2) и D(0; -3). Составить уравнения диагоналей этого ромба.
2. При каком значении m прямые $mx+(1-m)y-3=0$, $2x-3y-5=0$ и $7x+5y$-$2=0$ проходят через одну точку? Найти эту точку.
3. Через точку P (5; 0) провести касательную к окружности $x^2+y^2=9$.
4. Через точку A (-3; -5) проходят прямые: AC, параллельная оси OY , и A B, образующая угол $\alpha = \mathbf{arctg}\frac{1}{2}$ с осью OX. Найти угол между указанными прямыми.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(4; 6; -3), B(-2; -1; 7) и отсекающей равные отрезки на осях OY и OZ. Найти расстояние от точки C(5; -7; 8) до построенной плоскости.
6. Найти угол между плоскостями α и β, где α проходит через точку A(5; -1; 3) параллельно плоскости YOZ, а β - через точки B(0; 1; 1), C(1; 0; -2), D(4; -2; -3).
7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M(1; 2; 0) и N(2; 1; 1) перпендикулярно плоскости $-x+y-1=0$. Указать особенность в расположении плоскости.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z-8=0 \end{cases}$.
9. Найти угол между прямой, лежащей в плоскости XOY и образующей с осью OX угол 30°, и прямой, лежащей в плоскости XOZ и образующей с осью OX угол 60°.
10. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $\begin{cases} y=1, \\ z+1=0 \end{cases}$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.
11. Прямая проходит через точки A(x; 5; 9), B(2; y; 21) и параллельна прямой $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$. Определить абсциссу точки A, ординату точки B и направляющие косинусы прямой AB.

Вариант 20

1. Даны вершин треугольника: A(4; -1), B($\frac{2}{5}$; $\frac{31}{5}$) и C($-\frac{16}{5}$; $-\frac{23}{5}$). Показать, что этот треугольник прямоугольный и равнобедренный.
2. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $2x+3y-1-0$ и отсекающей на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 4 единицам.
3. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от прямых $x+3y+2=0$ и $3x$-$y+1=0$.
4. Стороны треугольника выражаются уравнениями: $x+3y-2=0$, $2x+y+5=0$, $3x-4=0$. Найти внутренние углы треугольника и его вершины.
5. Найти расстояние от точки пересечения плоскостей $7x-5y-31=0$, $4x+11z+43=0$, $2x+3y+4z+20=0$ до плоскости, проходящей через точку $M\left(\frac{1}{4};\ -\frac{1}{4};\ -\frac{3}{5}\right)$ параллельно плоскости $20x-4y-5z+7=0$.

6. Найти угол между плоскостями α и β, где α. проходит через точку M(3; -1; -2) параллельно плоскости XOZ , а β отсекает на осях координат отрезки a = 2, b = -4, $c = \frac{1}{2}$.
7. Принадлежат ли одной плоскости четыре точки: A(3; 1; 0), B (0; 7; 2), C(-1; 0; -5) и D(4; 1; 5)?
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0 \end{cases}$.
9. Треугольник образован пересечением плоскости $3x - y + 4z - 12 = 0$ с координатными плоскостями. Найти угол наклона медианы треугольника, проведенной из вершины, лежащей на оси OZ, к плоскости XOY.
10. Даны вершины треугольника: A(4; 1; -2), B(2; 0; 0) и C(-2; 3; -5). Составить уравнение его высоты, опущенной из вершины B на противолежащую сторону.
11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(3; 5; 1) параллельно прямой $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -3t, \\ z = -3 \end{cases}$.

Вариант 21

1. Дан четырехугольник с вершинами: A(-2; -3), B(-1; 4), C(3; 3) и D(6; -1). Найти точку пересечения его диагоналей.
2. При каком значении параметра a прямые $(3a + 2)x + (1 - 4a)y + 8 = 0$ и $(5a - 2)x + (a + 4)y - 7 = 0$ окажутся перпендикулярными?
3. Через начало координат и точку M (1; 3) проходят две параллельные прямые. Найти их уравнения, если известно, что расстояние между этими прямыми равно $\sqrt{5}$.
4. Прямая AB отсекает на положительных полуосях OX и OY отрезки, соответственно равные 8 и 12 ед. Прямая CD проходит через точку C (-2; 0) и отсекает на оси OY отрезок b = 3. Найти угол между прямыми.
5. Найти абсциссу точки A(x; 1; 8) при условии, что расстояние от неё до плоскости, проходящей через точки B(7; 2; 4), C(7; -1; -2) и D(-5; -2; -1), равно 3 ед.
6. Найти угол между плоскостями α и β, где α проходит через точки $A(\frac{1}{2}; -2; \frac{3}{2})$ и $B(2; -\frac{1}{2}; 1)$ параллельно оси OY, а β задана уравнением $x - y + 7z - 1 = 0$.
7. Нормаль к плоскости составляет с координатными осями OX и OZ углы $\alpha = \gamma = 60°$, а с осью OY - острый угол. Составить уравнение плоскости при условии, что она проходит через точку M (1; 1; -1). Проверить, будет ли искомая плоскость параллельна плоскости $3x + \sqrt{18}y + 3z + \sqrt{6} = 0$.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0, \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$.
9. Найти отношение, в котором координатная плоскость XOY делит отрезок между точками A(-1; -4; 4) и B(1; 2; -5). Определить точку пересечения прямой AB с плоскостью XOY и угол между ними.
10. Проверить, что четырехугольник, вершины которого находятся в точках A(5; 2; 6), B(6; 4; 4), C(4; 3; 2) и D(3; 1; 4) есть квадрат.
11. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0, \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ параллельно прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}$.

Вариант 22

1. Даны вершины треугольника: A(2; 1), B(-2; 3), C(0; 3).Найти уравнения медиан треугольника и их длины.
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(2; -3)параллельно прямой $\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$.
3. По какой линии должна двигаться точка, начальное положение которой определено координатами (3; 8), чтобы кратчайшим путем дойти до прямой $y=-\frac{1}{2}-1$? В какой точке она достигнет этой прямой и как велик будет пройденный путь?
4. В параллелограмме ABCD известны уравнения сторон $x+y+1=0$ (AB), $2x+3y-6=0$ (AD) и точка C(7; 1). Найти углы, образованные диагональю AC со сторонами AB и AD.
5. Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси ОУ отрезок b = -3 и перпендикулярной к вектору $\overline{N} = \{5; -1; 2\}$. Найти расстояние от точки A(-2; -4; 3) до построенной плоскости.
6. Через точку A(-2; 4; 8) проведены две плоскости: одна из них содержит ось OX , другая - OZ. Вычислить угол между этими плоскостями.
7. Плоскость α проходит через точки A(x; 1; 2), B(-2; 1; 1), C(2; -1; -2); плоскость β задана уравнением $4x-2y+z+5=0$. Определить абсциссу точки A так, чтобы плоскости были перпендикулярными.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x+5y-z+11=0, \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$.
9. Вершины треугольника находятся в точках A(1; -2; 8), B(0; 0; 4) и C(6; 2; 0). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B параллельно стороне AC, и определить внутренние углы треугольника.
10. Найти расстояние от точки M(1; 3; 5) до прямой, по которой пересекаются плоскости $2x+y+z-1=0, 3x+y+2z=0$.
11. Даны точки A(-3; -2; -3), B(-2; -5; -1), C(-4; α; β). При каких значениях α и β точка C лежит на прямой AB? Найти направляющие косинусы прямой AB.

Вариант 23

1. Даны две вершины: A(-6; -5) и B(2; 4) параллелограмма ABCD и точка M(3; 1) пересечения его диагоналей. Найти координаты вершин C и D и уравнения сторон параллелограмма.
2. Через точку пересечения прямых $x-2y-5=0$ и $2x\text{-}3y\text{-}8=0$ провести прямую, параллельную прямой $3x-2y+2=0$.
3. Проверить, что прямые $2x+\sqrt{5}y-15=0$ и $\sqrt{11}x-5y+30=0$ касаются одного и того же круга с центром в начале координат, и вычислить радиус этого круга.
4. Даны координаты вершин треугольника: A (-4; 0), B (5; -6), C (0; 6). Определить вид треугольника и найти внутренние углы треугольника.
5. На оси OZ найти точку, равноудаленную от точки A (2; 3; 4) и от плоскости, проходящей через точку B (1; 5; 0) параллельно плоскости $2x+3y+z+15=0$.
6. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки O (0; 0; 0), M (0; 2; -2) и N (2; 2; 2) и плоскостью YOZ .
7. Нормаль к плоскости α составляет с координатными осями равные острые углы. Составить уравнение плоскости при условии, что расстояние от начала координат до неё равно 4 ед. Определить, при каком значении m плоскость α будет перпендикулярна плоскости β: $2x-my+4z+3=0$.

8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$.

9. На осях координат отложены от начала координат отрезки, соответственно равные 1, 2 и 3 ед.; концы этих отрезков соединены прямыми. Найти точку пересечения и угол между плоскостью полученного треугольника и прямой, проходящей через точки A(0; 4; -2), B (3; -1; 2).

10. Составить уравнения прямой, проходящей через точку M(-4; 3; -8) перпендикулярно двум прямым: $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{-4}$ и $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-1}{5}$.

11. При каком значении n прямая $\begin{cases} 3x + ny + z + 3 = 0, \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x - y - 2z + 3 = 0$?

Вариант 24

1. Даны вершины четырехугольника A(-4; -2), B(-3; 1), C(4; 3), D(5; -3). Показать, что середины сторон этого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

2. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $5x - 4y - 20 = 0$, восстановленных в точках пересечения её о осями координат.

3. Даны уравнения оснований трапеции: $2x + y - 5 = 0,\ 4x + 2y - 7 = 0$. Найти её высоту.

4. Прямая задана уравнением $\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 3 = 0$. Показать, что данное уравнение является нормальным и найти острый угол между указанной прямой и осью OX.

5. Найти расстояние от точки K (3; -2; 1) до плоскости, проходящей через точки M (5; -4; 3) и N (-2; 1; 8) и перпендикулярной плоскости YOZ.

6. Плоскость α проходит через точки A (0; 0; z), B (3; -2; 0), C (3; 0; 1). Плоскость β задана уравнением $x + 2y + 2z - 7 = 0$. Определить аппликату точки A при условии, что угол между плоскостями α и β равен $\mathbf{arccos}\frac{8}{21}$.

7. Проверить, имеют ли общую точку следующие четыре плоскости: $5x - z + 3 = 0,\ 2x - y - 4z + 5 = 0,\ 3y + 2z - 1 = 0,\ 3x + 4y + 5z - 3 = 0$.

8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0, \\ x + 7y - 4z - 5 = 0 \end{cases}$.

9. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей равные углы с плоскостями $4y = 3x,\ y = 0,\ z = 0$. Найти эти углы.

10. Доказать, что треугольник ABC, где A(2; 3; -1), B(3; -1; 2), C(-1; 2; 3), равносторонний. Составить уравнения сторон треугольника и найти длину его высоты.

11. Доказать, что прямые $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 - 4t, \\ z = -3 - 5t \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ параллельны и написать уравнения прямой, проходящей посередине между ними.

Вариант 25

1. Даны вершины A(-3; -2), B(4; -1), C(1; 3) трапеции ABCD (AD // BC). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершин D этой трапеции.

2. При каких значениях c площадь фигуры, ограниченной координатными осями и прямой $3x + 10y + c = 0$, равна 135 кв.единицам?

3. Даны стороны треугольника: $x - y + 2 = 0$ (AB), $x = 2$ (BC), $x + y - 2 = 0$ (AC). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC,

делящую её (считая от вершины А) в отношении 1:3. Найти угол между построенной прямой и стороной АС, а также длину высоты, опущенной из вершины В.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(0; 2) и образующей с осью ОХ угол, вдвое больше угла, который составляет с той же осью прямая $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$.
5. Найти аппликату точки М(2; 3; Z) при условии, что расстояние от неё до плоскости, проходящей через точку А (-3; 3; $\frac{1}{2}$) перпендикулярно вектору $\overline{BC} = \{7; -6; -6\}$ равно 4 ед.
6. Определить, при каких значениях m и n плоскости $mx - 3y + 6z + 5 = 0$ и $6x + 9y - nz - 4 = 0$ будут параллельны. При $m = n = 2$ найти угол между указанными плоскостями.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки А(10; -5; 2), В(16; 3; 11), С(-11; -33; 0), и указать особенность в её расположении. Найти углы, образованные перпендикуляром, проведенным из начала координат к плоскости, с координатными осями.
8. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x + 5y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - 5y - z + 5 = 0 \end{cases}$.
9. Найти угол между прямыми, одна из которых задана уравнением $\begin{cases} x - y - 2z - 1 = 0, \\ 2x + 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ другая проходит через точки М(1; 0; 3) и N(5; -2; 7).
10. Провести через точку пересечения плоскости $x + y + z - 10 = 0$ с прямой $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + t \end{cases}$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярно к данной прямой.
11. Найти периметр треугольника, вершины которого находятся в точках А(8; 0; 6), В(8; -4; 6), С(6; -2; 5). Составить уравнения средней линии треугольника, параллельной стороне АС.

Вариант 26

1. Даны вершины треугольника А(-12; -2); В(4; 10); С(-6; -10). Показать, что этот треугольник прямоугольный и составить уравнение высоты, проведенной из вершины прямого угла.
2. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y - 1 = 0$ и отсекающей от первого координатного угла площадь, равную 5.
3. Основание равнобедренного треугольника имеет уравнение $x + 7y - 21 = 0$. Одна из боковых сторон имеет уравнение $4x + 3y - 34 = 0$. Найти уравнение другой боковой стороны, если известно, что она проходит через точку М(8; 9).
4. Сторона АВ и DC параллелограмма заданы уравнениями $2x - y + 5 = 0$ и $x - 2y + 4 = 0$, диагонали его пересекаются в точке М(1; 4). Найти длину высоты параллелограмма из вершины В.
5. Найти расстояние от точки пересечения плоскостей $2x - 4y + 3z + 3 = 0$, $x - y + z = 0$, $x + 2y + z - 6 = 0$ до плоскости, проходящей через точки M_1(1; 4; 2), M_2(2; 3; 1), M_3(1; 1; 2).
6. Плоскость α проходит через точку M_1(1; 3; 1) параллельно плоскости $2x - 4y + 3z - 1 = 0$. Плоскость β проходит через точку M_2(5; -1; 2) и содержит ось ox. Найти угол между плоскостями α и β.
7. Плоскость α проходит через точку Р(3; -1; 2) и отсекает на оси ox отрезок вдвое больше, чем на оси oy и втрое больше, чем на оси oz. Плоскость β задана уравнением $3x + my - z + 1 = 0$. При каком m плоскости будут перпендикулярны?

8. Написать каноническое уравнения прямой $\begin{cases} 7x-3y+z-1=0, \\ 3x-5y+2z+3=0 \end{cases}$.
9. Найти расстояние от точки P(1; 3; 5) до прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$.
10. Найти периметр треугольника с вершинами $M_1(2; 4; 5)$, $M_2(3; 8; 13)$, $M_3(-1; 0; 5)$. Найти уравнение треугольника и угол между сторонами M_1M_2 и M_1M_3.
11. Через точку $M_1(2; 3; 6)$ провести плоскость перпендикулярную прямой $\begin{cases} 2x-6y+z=0, \\ 4x-3y-z+1=0 \end{cases}$.

Вариант 27

1. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, восстановленных из середин сторон треугольника, вершинами которого являются точки A(2; 3), B(0; -3), C(5; -2).
2. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси oy отрезок, величина которого равна 3, и наклоненной к оси ox под углом 135º.
3. Вычислить тангенс острого угла между прямыми $y=\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)x+c$, $y=\left(\dfrac{2b-a}{2a+b}\right)x+\alpha$.
4. На прямой $x-y-81=0$ найти такую точку, у которой абсцисса в десять раз больше ординаты. Найти расстояние от найденной точки до прямой $3x-y+1=0$.
5. Дан тетраэдр с вершинами A(2; 0; 1), B(0; 0; 3), C(1; 2; 1), D(4; 3; 2). Найти угол между гранями ABC и ACD. Составить уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно грани ABC.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 5; 1)$ и $M_2(4; 2; 3)$ и параллельной вектору $\bar{a}(3;-1;-2)$. Найти расстояние от точки P(5; -2; 4) до построенной плоскости.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(2; 3; 4)$ и перпендикулярной плоскости $2x-7y+5z+3=0$. Полученное уравнение привести к уравнению в отрезках и построить.
8. Написать каноническое уравнения прямой $\begin{cases} 8x-5y-z-1=0, \\ x+3y+2z+3=0 \end{cases}$.
9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку B(3; 4; -4) параллельно прямой $\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$. При каком m построенная прямая будет перпендикулярна прямой $\dfrac{x+1}{m}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{4}$.
10. Найти проекцию точки M(-1; -1; 0) на плоскость $3x+3y-z-9=0$.
11. При каких значениях A и B прямая $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$ лежит на плоскости $Ax+By-z+3=0$. При A=1, B=-2. Найти угол между прямой и плоскостью.

Вариант 28

1. Даны вершины треугольника A(2; 1), B(0; 7), C(-4; -1). Найти уравнение его медиан и точку их пересечения.

2. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_1(2; -5)$ и отсекает отрезок втрое больше, чем на оси ординат (считая каждый отрезок, направленным от начала координат).
3. Даны уравнения сторон треугольника $3x-7y+22=0$ (AB), $4x+y-12=0$ (BC), $5x+9y+16=0$ (AC). Найти угол между высотой, проведенной из вершины B и прямой, проведенной через точку C параллельно AB.
4. Дана прямая $6x-8y-15=0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от нее на расстоянии четырех единиц.
5. Плоскость α проходит через точку P(2; 1; 1) и отсекает на осях ox и oy отрезки, соответственно равные 4 и -6. Плоскость β задана уравнением $mx+3y+nz-6=0$. При каких m и n плоскости будут параллельны?
6. Плоскость α проходит через точку $M_1(5; 3; 2)$ и параллельна двум векторам $\bar{a}\{4;1;2\}$ и $\bar{b}\{5;3;1\}$. Плоскость β проходит через точку $P_1(1; 1; 1)$, $P_2(2; 3; 2)$ и $P_3(3; 4; 2)$. Найти угол между плоскостями α и β.
7. Вычислить расстояние между плоскостями $2x-11y+10z-15=0$ и $2x-11y+10z+45=0$.
8. Написать каноническое уравнения прямой $\begin{cases} 4x-4y-7z+1=0, \\ 3x+5y-z+5=0 \end{cases}$.
9. Найти точку симметричную точке C(-1; 2; 0) относительно прямой $x=t-1$, $y=-2t+3$, $z=2t-4$.
10. При каком n плоскость $-5x+y+nz-1=0$ будет параллельна прямой $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$? При n = -1 найти точку пересечения и угол между прямой и плоскостью.
11. Прямая α проходит через точку $M_1(3; 4; 7)$ и $M_2(-1; 3; 3)$. Прямая β проходит через точку P(3; 2; -1) параллельно прямой $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=3t-1, \\ z=-2t+3 \end{cases}$. Найти угол между прямыми α и β.

Вариант 29

1. Вершиной треугольника служит точка $M_1(5; -3)$, а основанием – отрезок, соединяющий точки $M_2(0; -1)$ и $M_3(3; 3)$. Составить уравнение сторон треугольника и найти длину высоты треугольника.
2. Найти угол наклона к оси ox и начальную ординату прямой $\frac{x}{-\sqrt{3}}+\frac{y}{1}=1$.
3. Стороны треугольника заданы уравнениями $3x-2y+6=0$ (AB), $2x+y-10=0$ (BC), $x-3y+2=0$ (AC). Найти углы, которые медиана BM образует со сторонами AB и BC.
4. Написать уравнение прямой, параллельной прямым $2x-3y+7=0$ и $2x-3y+5=0$ и проходящей посередине между ними.
5. Через точку пересечения плоскостей $x+4y+5z-12=0$, $x+2y-3z-9=0$, $3x+6y+z-21=0$ провести плоскость, параллельную плоскости $4x-y-2z-1=0$. Полученное уравнение привести к уравнению в отрезках и построить.
6. Через точку Q(-1; 3; -8) проведены две плоскости, одна из них содержит ось Oy, другая Oz. Вычислить угол между этими плоскостями.

7. Плоскость проходит через точки $M_1(0; 1; 2)$, $M_2(2; 8; 3)$, $M_3(3; -2; -1)$. Найти расстояние точки P(5; -8; 6).

8. Написать каноническое уравнения прямой $\begin{cases} 2x + 7y - z - 2 = 0, \\ 3z - 3y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$.

9. Доказать, что прямые $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$ параллельны и найти расстояние между ними.

10. Прямая α проходит через точку A(1; -3; 6) параллельно оси Oy. Прямая β проходит через точку B(2; 1; -1) параллельно прямой $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$. Найти угол между прямыми.

11. Прямая проходит через точки $M_1(-1; 3; 0)$, $M_2(1; 7; 3)$. Плоскость задана уравнением $3x + By + 2z + D = 0$. При каких B и D прямая лежит в плоскости?

Вариант 30

1. Даны вершины четырехугольника ABCD: A(2; 1), B(5; 2), C(3; 6), D(0; 3). Найти точку пересечения его диагонали. Через вершину C провести прямую, параллельную диагоналям BD.

2. Дано уравнение прямой $y - 5 = \dfrac{1}{3}(x + 4)$. Написать уравнение в отрезках и нормальное уравнение.

3. Найти внутренние углы треугольника, если даны уравнения его сторон: $x - 3y + 3 = 0$(AB), $x + 3y + 3 = 0$ (AC) и основание D(-1; 3) высоты AD.

4. Найти точку M симметричную точки N(7; -4) относительно прямой, проходящей через точки A(3; -2) и B(1; 4).

5. Плоскость α проходит через точку $M_1(1; 1; -4)$, M2(0; -1; -1), $M_3(-1; 2; 12)$. Плоскость β задана уравнением $x + 2y - 3z + 2 = 0$. Показать, что плоскости параллельны, и выяснить, какая их них расположена ближе к точке P(0; -7; 3).

6. Плоскость α проходит через точку $M_1(2; -4; 3)$ и отсекает на оси Oy отрезок вдвое меньше чем на оси ox и втрое больше чем на оси oz. Плоскость β задана уравнением $4x - my + nz - 1 = 0$. При каких m и n плоскости параллельны? При m=-1, n=2 найти угол между ними.

7. Найти такое число a, чтобы четыре плоскости $x + 3y - 2z + 6 = 0$, $2x - 3y + z - 1 = 0$, $2z + 6y - 2z + 5 = 0$, $4x + 4y + 2z + a = 0$ проходили через одну точку.

8. Написать каноническое уравнения прямой $\begin{cases} 9x - y - z - 1 = 0, \\ x + 5y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$.

9. При каких l и n прямая $\dfrac{x-7}{l} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{n}$ и плоскость $3z - y + 2z - 5 = 0$ будут перпендикулярны? При l=5, n=4 найти угол между ними.

10. Прямая α проходит через точку $M_1(-1; 2; 4)$, перпендикулярно плоскости $2x + y - 6z + 10 = 0$. Прямая β проходит через точки $M_1(2; 3; -5)$ и $M_2(-4; 0; 3)$. Найти угол между прямыми α и β.

11. Найти точку M симметричную точке P(-1; 2; 4) относительно плоскости $3x + 2y + z + 9 = 0$.

4.2.2. Контрольная работа №2 по теме «Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Ряды. Непрерывные случайные величины. Нормальное распределение и его свойства».

«Дифференциальное исчисление функций многих переменных»

Задание1. Исследовать функцию двух переменных на экстремум

1 $z = x^2 + 3y^2 - 6x + 18y - 4.$ **2** $z = x^2 + 3y^2 - 4x + 18y - 4.$

3 $z = x^2 - 2y^2 + 6x + 4y - 5.$ **4** $z = x^2 - 3y^2 - 4x + 6y.$

5 $z = x^2 + 3y^2 - 4x - 6y.$ **6** $z = x^2 - 3y^2 - 4x + 12y - 1.$

7 $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3.$ **8** $z = 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 2.$

9 $z = x^2 + y^2 - 8x + 4y - 3.$ **10** $z = x^2 + 2y^2 + 8x - 1.$

11 $z = x^2 - 2y^2 + 4y - 6x - 1.$ **12** $z = 2x^2 + 3y^2 - 8x + 12y.$

13 $z = x^2 - y^2 + x - 2y + 3.$ **14** $z = 2x - 4y - x^2 - 2y^2.$

15 $z = x^2 + y^2 - 4x + 2.$ **16** $z = x^2 - 3y^2 + 6x - 18y - 3.$

17 $z = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + x - 4y + 1.$ **18** $z = 0{,}5x^2 + 0{,}5y^2 + x + y.$

19 $z = 0{,}5x^2 - y^2 - 6y + 1.$ **20** $z = 0{,}5x^2 - 3x + 3y^2 - 6y + 1.$

21 $z = 0{,}5x^2 - x - 2y^2 + 4y - 2.$ **22** $z = x^2 - 2x - y + 3.$

23 $z = x^2 + 2x - 4y^2 + 8y.$ **24** $z = x^2 + y^2 - 10x + 4y + 2.$

25 $z = 3 - x^2 - 4x + 6y - y^2.$ **26** $z = -0{,}5x^2 + 3y^2 + x - 24y.$

27 $z = x^2 + 2x - 2y + 2y^2 - 4.$ **28** $z = 1 + 2x - x^2 - y - 0{,}5y^2.$

29 $z = 1 + x^2 + 2y - y^2 + 4x.$ **30** $z = -0{,}5x^2 + x - 4y + y^2 - 3.$

31 $z = -2 - 0{,}5x^2 + 2y - y^2 + 4x.$ **32** $z = 3 - x^2 + 8y + y^2 + 3x.$

Задание2. Исследовать функцию двух переменных на экстремум

131. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$. **132.** $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

133. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1$. **134.** $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 5$.

135. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$. **136.** $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

137. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$. **138.** $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + x - y + 5$.

139. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1$. **140.** $z = 4 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y$.

«Ряды»

а) Исследовать сходимость ряда.

б) Определить область сходимости ряда.

1 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n \cdot x^n}{n}$. 2 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

3 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^{2n}}{2n}$. 4 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{(2n-1)^3}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$.

5 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n \cdot x^n}{n^2+1}$. 6 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n \cdot n!}{(n+1)!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

7 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{7n-2}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$. 8 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{10^n \cdot n}}$.

9 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$.

10 а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n}}{\sqrt{8}^{\,n}}$.

11 а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{(2n-1)^3}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{\sqrt{n}\cdot 16^n}$.

12 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

13 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot x^n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, б). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n(x+4)^n}{(2n-1)!}$

15 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{n\cdot 10^n}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$, б). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

17 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{(n-1)3^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

18 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.

20. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}x^n$.

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{7n-2}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{10^n\cdot n}}$.

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$.

25. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n}}{\sqrt{8}^{\,n}}$.

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{(2n-1)^3}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{\sqrt{n}\cdot 16^n}$.

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot x^n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, б). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n(x+4)^n}{(2n-1)!}$

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{n\cdot 10^n}$.

«Непрерывные случайные величины. Нормальное распределение и его свойства»

Задание 1. Задана непрерывная случайная величина *X* своей плотностью распределения вероятностей *f*(*x*). Требуется:1) определить коэффициент *A*; 2) найти функцию распределения *F*(*x*); 3) схематично построить графики функций *f*(*x*) и *F*(*x*); 4) вычислить математическое ожидание и дисперсию *X*; 5) определить вероятность того, что *X* примет значение из интервала (*a*, *b*).

1. $f(x)=\begin{cases}A\cos 2x, -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\\ 0, |x|>\frac{\pi}{4}.\end{cases}\quad a=\frac{\pi}{6}, b=2.$

2. $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ Ae^{-x}, x>0.\end{cases}\quad a=1, b=+\infty$

3. $f(x)=\begin{cases}Ax,^2 |x|\le 3,\\ 0, |x|>3.\end{cases}\quad a=1, b=2$

4. $f(x)=\begin{cases}A\sin 2x, 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, x>\frac{\pi}{2} \text{ или } x<0.\end{cases}\quad a=-\frac{\pi}{6}, b=\frac{\pi}{6}$

5. $f(x)=\begin{cases} Ae^{x}, x\le 0, \\ 0, x>0. \end{cases} a=-\infty, b=-1$

Задана непрерывная случайная величина X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется: 1). определить коэффициент A;2). найти плотность распределения вероятностей $f(x)$; 3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; 4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X; 5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a, b).

6. $F(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ Ax,^3 0\le x\le 3, a=1, b=2 \\ 1, x>3. \end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ 1+Ae,^{-x} x\ge 0. \end{cases} a=1, b=+\infty$

8. $F(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ A\cos x+1, 0\le x\le \frac{\pi}{2}, a=\frac{\pi}{3}, b=\pi \\ 1, x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ A\sin 2x, 0\le x\le \frac{\pi}{4}, a=0, b=\frac{\pi}{6} \\ 1, x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases} Ae,^{x} x\le 0, \\ 1, x>0. \end{cases} a=-\infty, b=-1$

Задание 2. Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α; β).

1. $a=10$, σ = 4, α = 2, ß = 13.
2. $a=9$, σ = 5, α = 5, ß = 14.
3. $a=8$, σ = 1, α = 4, ß = 9.
4. $a=7$, σ = 2, α = 3, ß = 10.
5. $a=6$, σ = 3, α = 2, ß = 11.
6. $a=5$, σ = 1, α = 1, ß = 12.
7. $a=4$, σ = 5, α = 2, ß = 11.
8. $a=3$, σ = 2, α = 3, ß = 10.
9. $a=2$, σ = 5, α = 4, ß = 9.
10. $a=2$, σ = 4, α = 6, ß = 10.

Задание 3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}$, объем выборки n и среднее квадратическое отклонение σ.

1. $\bar{x}$ = 75,17, n = 36, σ = 6.
2. $\bar{x}$ = 75,16, n = 49, σ = 7.
3. $\bar{x}$ = 75,15, n = 64, σ = 8.
4. $\bar{x}$ = 75,14, n = 81, σ = 9.
5. $\bar{x}$ = 75,13, n = 100, σ = 10.
6. $\bar{x}$ = 75,12, n = 12I, σ = 11.
7. $\bar{x}$ = 75,11, n = 144, σ = 12.
8. $\bar{x}$ = 75,10, n = 169, σ = 13.
9. $\bar{x}$ = 75,09, n = 196, σ = 14.
10. $\bar{x}$ = 75,08, n = 225, σ = 15.

4.3. Порядок выполнения заданий

- Изучается теоретический материал по рассматриваемой тематике,
- осваиваются методы решения типового варианта заданий,
- выполняется индивидуальное задание.

4.4 Примеры выполнения заданий

4.4.1 Пример выполнения задания Контрольной работы № 1

Задача 1. Даны вершины треугольника: A (1,-3), B (2,5) и C (8,1). Найти точку пересечения медианы, проведенной из вершины A и высоты – из вершины B, а также длину медианы, проведенной из вершины A.

Решение:

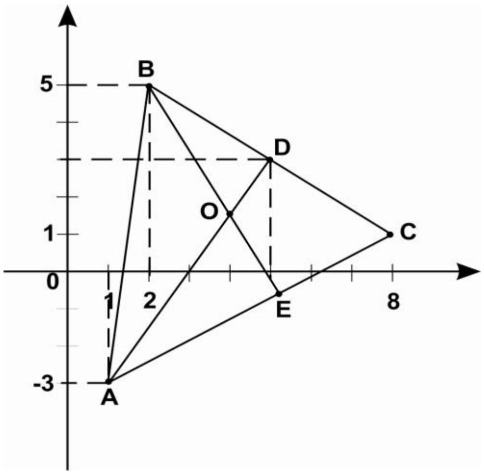

Рис. 1

Составим уравнение медианы AD. Координаты точки D определяем по формулам координат середины отрезка $x_D = \frac{x_B + x_C}{2}$, $y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$. $x_D = \frac{2+8}{2} = 5$, $y_D = \frac{5+1}{2} = 3$ D (5; 3).

Используем уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Получаем

$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y+3}{3+3}$.

Уравнение медианы AD: $3x - 2y - 9 = 0$.

Составим уравнение высоты, проведенной из вершины B. Так как BE $\perp$ AC, следовательно $k_{BE} = -\frac{1}{k_{AC}}$. Угловой коэффициент прямой AC определяем по формуле $k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1+3}{8-1} = \frac{4}{7}$. Следовательно, $k_{BE} = -\frac{7}{4}$. Используем уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 (x_0,y_0) в данном направлении $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Уравнение высоты из вершины B: $y - 5 = -\frac{7}{4}(x - 2)$, $7x + 4y - 34 = 0$.

Для нахождения координат точки пересечения медианы, проведенной из вершины A и высоты, проведенной из вершины B нужно решить совместно из уравнения $\begin{cases} 3x - 2y - 9 = 0, \\ 7x + 4y - 34 = 0 \end{cases}$

. Точка O (4; $\frac{3}{2}$).

Длина медианы определяется по формуле расстояния d между точками A (x_1,y_1)и D (x_2,y_2) на плоскости $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

A (1,-3), D (5,3) $d_{AD} = \sqrt{(5-1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$.

Задача 2. Составить уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с прямой $3x - y + 5 = 0$ угол $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Решение:

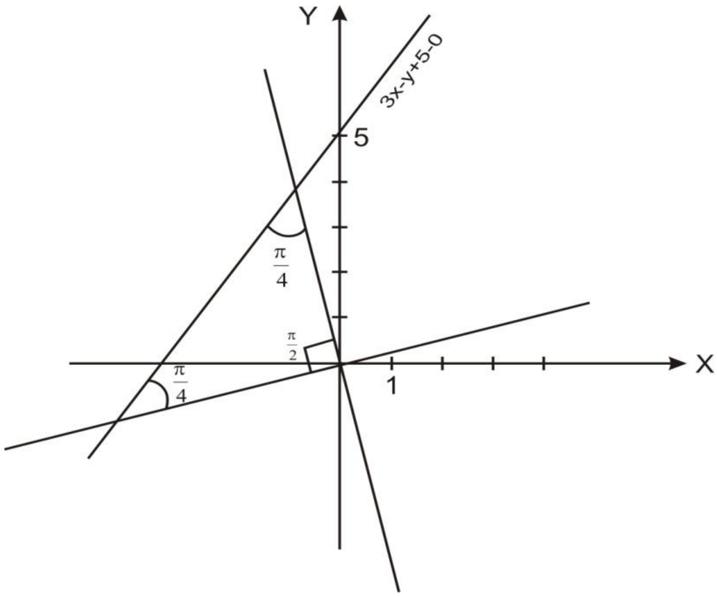

Рис. 2

Уравнения искомых прямых имеют вид $y = kx$, так как прямые проходят через начало координат. Задача имеет два решения (Рис. 2). Для решения используем формулу $\mathbf{tg}\,\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, причем, поскольку нас интересует острый угол, правую часть формулы возьмём по абсолютной величине. Пусть угловой коэффициент одной из искомых прямых равен k. Угловой коэффициент заданной прямой равен 3. Так как угол между этими прямыми равен $\frac{\pi}{4}$, то $\mathbf{tg}\frac{\pi}{4} = \left|\frac{k-3}{1+3k}\right|$.

Тогда $\left|\frac{k-3}{1+3k}\right| = 1$, отсюда $\frac{k-3}{1+3k} = 1$ и $\frac{k-3}{1+3k} = -1$.

Решая каждое из получившихся уравнений, находим, что угловой коэффициент одной из прямой $k_1 = -2$, а другой $k_2 = \frac{1}{2}$. Уравнения искомых прямых $y = -2x$, $y = \frac{1}{2}x$.

<u>Задача 3.</u> Даны вершины A (-3,-2), B (4,-1), C (1,3) трапеции ABCD (AD || BC). Составить уравнение средней линии трапеции. Полученное уравнение привести к уравнению в «отрезках» и к нормальному.

Решение: Составим уравнение прямой BC (уравнение прямой, проходящей через две точки). $\frac{x-4}{1-4} = \frac{y+1}{3+1}$

$$BC: 4x + 3y - 13 = 0$$

От общего уравнения прямой ($Ax + By + C = 0$) перейдем к уравнению с угловым коэффициентом ($y = kx + b$).

$y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$, где $k_{BC} = -\frac{4}{3}$

Средняя линия трапеции параллельна BC и проходит через середину отрезка AB. E – середина AB, следовательно E $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

Так как прямые параллельны, то $k_1 = k_2$. Используем уравнение прямой

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y + \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}(x - \frac{1}{2})$$

Уравнение средней линии трапеции: $8x + 6y + 5 = 0$. Уравнение прямой в отрезках:

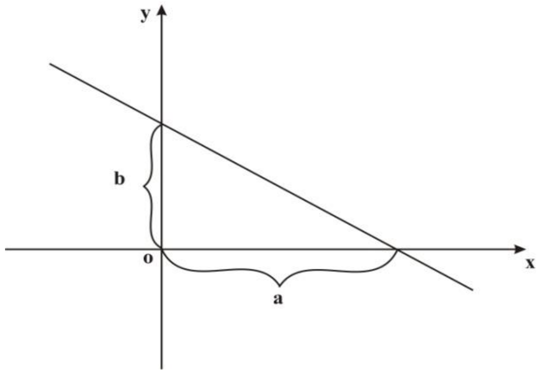

Рис. 3

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a – величина отрезка отсекаемого прямой на оси OX, b - величина отрезка отсекаемого прямой на оси OY.

Перенося свободный член данного уравнения в правую часть равенства, получим $8x + 6y = -5$. Деля обе части равенства на -5, будем иметь $-\frac{8x}{5} - \frac{6y}{5} = 1$, или $\frac{x}{-\frac{5}{8}} + \frac{y}{-\frac{5}{6}} = 1$. Следовательно, $a = -\frac{5}{8}$, $b = -\frac{5}{6}$ (Рис. 4).

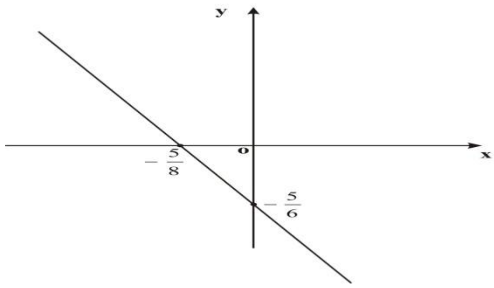

Рис. 4

Нормальное уравнение прямой (Рис. 5) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α - угол, который образует этот перпендикуляр с положительным направлением оси OX.

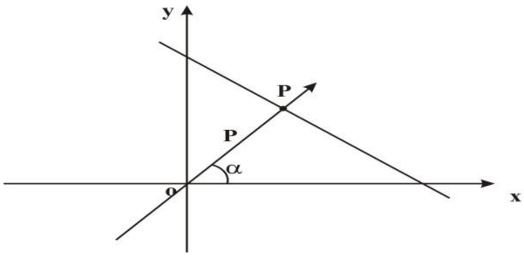

Рис. 5

Для приведения общего уравнения прямой к нормальному виду обе его части надо умножить на нормирующий множитель $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, причем перед дробью следует выбрать знак, противоположный знаку свободного члена C в общем уравнении прямой.

Находим нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{8^2+6^2}} = -\frac{1}{10}$ (знак минус берется потому, что C = 5 > 0). Таким образом, нормальное уравнение полученной прямой имеет вид $-\frac{8}{10}x - \frac{6}{10}y - \frac{5}{10} = 0$ или $-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{2} = 0$.

Направляющие косинусы $\mathbf{cos}\alpha = -\frac{4}{5}$**,** $\mathbf{cos}\beta = -\frac{3}{5}$ $(\mathbf{cos}\beta = \mathbf{sin}\alpha = -\frac{3}{5})$. Длина перпендикуляра из начала координат к прямой $p = \frac{1}{2}$.

Задача 4. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 15 = 0$ и $3x + 4y + 20 = 0$.

Решение: Искомое расстояние найдем как расстояние от произвольной точки первой прямой до второй прямой. Возьмем на первой прямой произвольную точку, например, точку с абсциссой $x = 1$. Её ордината $y = 3$. Итак, на первой прямой выбрана точка A (1;3). Найдем теперь расстояние этой точки до второй прямой по формуле $d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$.

$$d = \left|\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 20}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \frac{35}{5} = 7.$$

Задача 5. Даны точки M_1 (-3; 7; -5) и M_2 (-8; 3; -4). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overline{N} = \overline{M_1M_2}$.

Решение: Найдем координаты нормального вектора $\overline{N}$. Имеем $\overline{N} = \{-5; -4; 1\}$.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку M ($x_0; y_0; z_0$). Перпендикулярно данному вектору $\overline{N} = \{A, B, C\}$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Искомое уравнение плоскости: $-5(x+3) - 4(y-7) + (z+5) = 0$ или $5x + 4y - z - 18 = 0$.

Задача 6. Через точку пересечения плоскостей $2x - 4y + 5z - 21 = 0,\ x - 3z + 18 = 0,\ 6x + y + z - 30 = 0$ провести плоскость, параллельную плоскости $3x - y - 5z + 6 = 0$. Найти расстояние точки M_1 (1; -1; -1) до построенной плоскости.

Решение:

Плоскости пересекаются, следовательно $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z - 21 = 0 \\ x - 3z + 18 = 0 \\ 6x + y + z - 30 = 0 \end{cases}$$, получим точку M (3; 5; 7).

Так как искомая плоскость параллельна плоскости $3x - y - 5z + 6 = 0$, то в качестве ее нормального вектора можно взять нормальный вектор $\overline{N} = \{3; -1; -5\}$ данной плоскости ($\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - условие параллельности двух плоскостей).

Используя теперь уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно данному вектору $\overline{N}$, получаем $3(x-3) - (y-5) - 5(z-7) = 0$ или $3x - y - 5z + 31 = 0$. Это и есть искомое уравнение.

Расстояние от точки $M(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле $d = \dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. В данном случае $d = \left| \dfrac{3 \cdot (1) - 1 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1) + 31}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5^2)}} \right| = \dfrac{40}{\sqrt{35}}$.

Задача 7. Плоскость α проходит через точки: $M_1(1; -3; \ 4)$, $M_2(0; -2; -1)$ и $M_3(1; \ 1; -1)$. Плоскость β проходит через ось OX и точку $M_4(9; -3; \ 8)$. Найти угол между плоскостями α и β.

Решение: Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_3)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ имеет вид $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$. В данном случае $\begin{vmatrix} x - 1 & y + 3 & z - 4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$.

Раскрывая этот определитель, получим $15(x-1) - 5(y+3) - 4(z-4) = 0$ или $15x - 5y - 4z - 14 = 0$ - уравнение плоскости α. Если плоскость проходит через ось OX, A = 0, D = 0(общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$) т. е. $By + Cz = 0$. Плоскость β проходит через ось OX и точку M_4 (9,-3, 8). Подставляем в это уравнение координаты точки M_4 получим $-3B + 8C = 0$ или $B = \dfrac{8C}{3}$, таким образом, имеем $\dfrac{8C}{3} y + Cz = 0$, т. е. $8y + 3z = 0$ - уравнение плоскости β.

Угол между плоскостями определяется по формулам $\mathbf{cos}\varphi = \pm \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, где $\overline{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$. Нормальный вектор плоскости α: $\overline{N_\alpha} = \{15, -5, -4\}$. Для плоскости β: $\overline{N_\beta} = \{0, 8, 3\}$. Определяем острый угол между плоскостями α и β:

$$\mathbf{cos}\varphi = \frac{|15 \cdot 0 - 5 \cdot 8 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{15^2 + (-5)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 8^2 + 3^2}} = \frac{52}{\sqrt{256} \cdot \sqrt{73}} = \frac{52}{16 \cdot \sqrt{73}} = \frac{13}{4\sqrt{73}}$$

$$\varphi = \mathbf{arccos}\frac{13}{4\sqrt{73}} \approx 67^\circ.$$

Задача 8. Общее уравнение прямой $\begin{cases} 3x + 3y + z - 1 = 0, \\ 2x - 3y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

Решение:

<u>Первый способ</u>. Наметим такой план решения задачи: из системы исключим сначала y и выразим z через x, потом исключим x и выразим z теперь уже через y.

Для того чтобы из системы исключить y, сложим первое уравнение системы почленно со вторым. Получим, что $5x - z - 7 = 0$, откуда $z = 5x - 7$, $z = \dfrac{x - \frac{7}{5}}{\frac{1}{5}}$.

Умножая первое уравнение на (2), а второе на ,(-3) и складывая их почленно, получим $15y+8z+16=0$, откуда $8z=-15\left(y+\frac{16}{15}\right)$ или $z=\frac{y+\frac{16}{15}}{-\frac{8}{15}}$.

Сравнивая найденные значения z, получаем уравнение прямой в каноническом виде $\frac{x-\frac{7}{5}}{\frac{1}{5}}=\frac{y+\frac{16}{15}}{-\frac{8}{15}}=\frac{z-0}{1}$.

Умножая теперь все знаменатели на 15, окончательно получим $\frac{x-\frac{7}{5}}{3}=\frac{y+\frac{16}{15}}{-8}=\frac{z-0}{15}$.

Прямая проходит через точку $M\left(\frac{7}{5};\ -\frac{16}{5};\ 0\right)$ и имеет направляющий вектор $\overline{S}=\{3;\ -8;\ 15\}$.

<u>Второй способ</u>. Найдем направляющий вектор $\overline{S}=\{l;\ m;\ n\}$ прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам заданных плоскостей $\overline{N_1}=\{3;\ 3;\ 1\}$ и $\overline{N_2}=\{2;\ -3;\ -2\}$, то в качестве его можно взять векторное произведение векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$: $\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\end{vmatrix}=-3\bar{i}+8\bar{j}-15\bar{k}$.

Таким образом, l = -3, m = 8, n = -15. За точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, через которую проходит искомая прямая, можно принять точку её пересечения с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью XOY. Поскольку при этом $z_0=0$, координаты x_0, y_0 определяются из системы уравнений заданных плоскостей, если положить в них $z=0$

$\begin{cases}3x+3y-1=0\\ 2x-3y-6=0\end{cases}$, отсюда получаем $x_0=\frac{7}{5}$, $y_0=-\frac{16}{15}$. Так как каноническое уравнение имеет вид $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, то в данном случае $\frac{x-\frac{7}{5}}{-3}=\frac{y+\frac{16}{15}}{8}=\frac{z-0}{-15}$ или $\frac{x-\frac{7}{5}}{3}=\frac{y+\frac{16}{15}}{-8}=\frac{z-0}{15}$.

<u>**Задача 9.**</u> Написать уравнение прямой l, проходящей через точки А (-1; 2; 3) и В (5; -2; 1). Лежат ли на этой прямой точки: К (-7; 6; 5), L (2; 0; 1), М (-4; 4; 4)? При каком значении m прямая l перпендикулярна прямой $\frac{x+2}{m}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{5}$.

Решение: Уравнение прямой, проходящей через две данные точки M (x_1; y_1; z_1) и N(x_2; y_2; z_2):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Прямая l: $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-2}$ или $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1}$. Подставляем в эти уравнения координаты точек K, L, M, соответственно находим: $\frac{-7+1}{3}=\frac{6-2}{-2}=\frac{5-3}{-1}=-2$; $\frac{2+1}{3}=\frac{0-2}{-2}\neq\frac{1-3}{-1}$; $\frac{-4+1}{3}=\frac{4-2}{-2}=\frac{4-3}{-1}=-1$. Следовательно, K$\in l$, M$\in l$, L$\notin l$. Условие перпендикулярности двух прямых - $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$, где $\overline{S_1}=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\overline{S_2}=\{l_2, m_2, n_2\}$.
В данном случае для прямой $l: \overline{S_1}=\{3,-2,-1\}$, $\overline{S_2}=\{m, 2, 5\}$.
Тогда $3\cdot m-2\cdot(2)-1\cdot(5)=0$

$3m=9$

При $m=9$ прямые перпендикулярны.

Задача 10. При каких значениях n и A прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{n}$ и плоскость $Ax-2y+z-3=0$ будут перпендикулярны? При n = -1 и A = 3 найти точку пересечения прямой с плоскостью и угол между ними.

Решение: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ - условие перпендикулярности прямой и плоскости (Рис. 6).

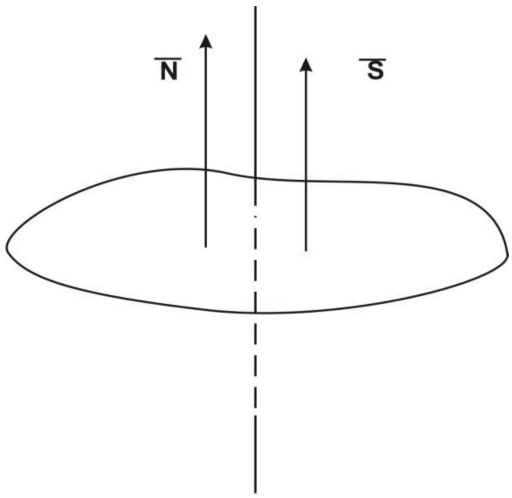

Рис. 6

В данном случае $\overline{N}=\{A,-2,1\}$, $\overline{S}=\{2, 1, n\}$

$\frac{A}{2}=\frac{-2}{1}=\frac{1}{n}$

При A = -4; n = $-\frac{1}{2}$ прямая и плоскость перпендикулярны.

Если n = -1, то прямая имеет вид $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

Если A = 3, то плоскость имеет вид $3x-2y+z-3=0$.

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x=-1+2t,\ y=2+t,\ z=1-t$. Подставляя значения *x, y, z* в уравнение плоскости, имеем $3(-1+2t)-2(2+t)+(1-t)-3=0$, откуда $t=3$. Подставляя теперь это значение *t* в параметрические уравнения прямой, находим координаты точки пересечения: $x=5,\ y=5,\ z=-2$, M (5; 5; -2).

Острый угол между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле $\sin\varphi=\left|\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right|$. Учитывая, что $\overline{N}=\{3,-2,1\}$, $\overline{S}=\{2,1,-1\}$ получаем

$$\sin\varphi=\left|\frac{3\cdot 2+(-2)\cdot 1+1\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\varphi=\arcsin\frac{3}{2\sqrt{21}}\approx 19^\circ$$

4.4.2 Пример выполнения задания Контрольной работы № 2

Задание. Найти экстремум функции $z=x^3+8y^3-6xy+5$

Решение: функция z определена на всей плоскости xoy. Находим частные производные 1-го порядка.

$$z'_x=3x^2-6y$$
$$z'_y=24y^2-6x$$

Решая систему $\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$, находим критические точки.

$$\begin{cases} 3x^2-6y=0 \\ 24y^2-6x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ 4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2=x \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ x^4-x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ x(x^3-1)=0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1=0;$ $y_1=0;$ $x_2=1;$ $y_2=\frac{1}{2}$. Критические точки $M_1(0;0)$ $M_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Чтобы установить наличие экстремума в критических точках, вычисляем значение

$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$, где $A=f''_{xx}(M)$, $B=f''_{xy}(M)$, $C=f''_{yy}(M)$. M -критическая точка.

При этом: 1) если $\Delta>0$, то M - есть точка экстремума: при $A<0$ (или $C<0$) точка максимума, а при $A>0$ (или $C>0$) точка минимума.

2) если $\Delta<0$, то в точке M нет экстремума.

3) если $\Delta=0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M требуется дальнейшее исследование, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

Найдем $z''_{xx}=6x$ $z''_{xy}=-6$ $z''_{yy}=48y$.

Для точки $M_1(0;0)$ получим $A=0$, $B=-6$, $C=0$, $\Delta=AC-B^2=-36<0$, следовательно, в точке $M_1(0;0)$ нет экстремума.

Для точки $M_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$ имеем $A=6$, $B=-6$, $C=24$

$$\Delta=AC-BC^2=6\cdot 24-36=144-36=108>0$$

Т.к. $A=6>0$ (и $C=24>0$) то точка M_2 есть точка минимума.

$$z_{\min}=z(M_2)=1^3+8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-6\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+5=1+1-3+5=4$$

$$z_{\min}=z(M_2)=4$$

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Решение. По признаку Даламбера $d=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1\Rightarrow$ ряд сходится.

3. Найти интервал и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение. Находим радиус сходимости ряда

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty\Rightarrow$ интервалом сходимости является $(-\infty;+\infty)$, т.е. ряд сходится на всей числовой оси.

Задание 4. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x-Ax^3 & \text{при } 0<x<2,\\ 0 & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$$

Вычислить A, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение величины X.

Решение. Воспользуемся отношениями:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^2 x-Ax^3\ dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{A}{4}x^4\right)\Big|_0^2=\frac{4}{2}-\frac{16A}{4}=2-4A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-4A=1\Rightarrow\ 4A=1\Rightarrow\ A=\frac{1}{4}.$$

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}=\frac{16}{15}\cdot$$

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}\cdot$$

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\frac{4}{3}-\frac{256}{225}=\frac{44}{225}\cdot\quad \sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\frac{2\sqrt{11}}{15}\cdot$$

Задание 5. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m = 11 и σ = 1. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения:

а) из интервала (5,13);

б) отличающееся от своего среднего *m* по абсолютной величине не больше чем на 6.

Решение:

а) вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал [a, b] определяется формулой:

$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$, где Φ(x) – функция Лапласа.

Отсюда получаем

$P(5 \le X \le 13) = \Phi\left(\frac{13-11}{1}\right) - \Phi\left(\frac{5-11}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(-6) = 0{,}4772 + 0{,}4999 = 0{,}9771;$

б) вероятность отклонения случайной величины X от среднего m не более чем на ε находится по формуле

$P(|X-m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$. Отсюда получаем

$P(|X-11| < 6) = 2\Phi\left(\frac{6}{1}\right) = 2\Phi(6) = 2 \cdot 0{,}4999 = 0{,}9998.$

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

5.1 Наименование вопроса (Тема **6**) Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Уравнение плоскости и прямой в пространстве.
2. Угол между плоскостями. Угол между прямыми.
3. Угол между прямой и плоскостью.

5.2 Наименование вопроса (Тема **7**) Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Поверхности второго порядка. (8 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.
2. Поверхности второго порядка.

5.3 Наименование вопроса (Тема **8**) Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств.
2. Отображения множеств. Мощность множества. Множество вещественных чисел.
3. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции.
4. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

5.4 Наименование вопроса (Тема **11**) 1). Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. 2). Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. 3). Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Показать применение формулы Тейлора в теоретических обоснованиях(Второе достаточное условие Экстремума) и вычислительных задачах(вычисление пределов, приближённых вычислениях).

5.5 Наименование вопроса (Тема **12**) Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке. (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Условия монотонности функции.
2. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия.
3.Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

5.6 Наименование вопроса (Тема **13**) Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика. (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба.
2. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

5. 7 Наименование вопроса (Тема 14) 1). Вектор-функция скалярного аргумента. Понятие кривой, гладкая кривая. Касательная к кривой. 2). Кривизна кривой. Радиус кривизны. Главная нормаль. Бинормаль. Кручение кривой (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности. Показать применение вектор - функций в прикладных задачах.

5. 8 Наименование вопроса (Тема 15) Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел. (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости.

2. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.

3. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел.

5. 9 Наименование вопроса (Тема 18) Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства. Понятие сингулярных интегралов. (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

2. Понятие сингулярных интегралов.

5. 10 Наименование вопроса (Тема 21) Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
2. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

5. 11 Наименование вопроса (Тема 22). Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие n-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Понятия повторных интегралов и вычисление кратных интегралов с помощью повторных. Изменение порядка интегрирования в повторных интегралах. Применения кратных интегралов при решении прикладных задач. Понятие якобиана.

5.12 Наименование вопроса (Тема 23). Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Их свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Вычисление криволинейных интегралов с помощью определённых. Сравнение криволинейных интегралов 1 и 2 типов. Связь криволинейных интегралов с двойными, формула Грина.

5. 13 Наименование вопроса (Тема 25). Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.
Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций. Применения рядов.

5. 14 Наименование вопроса (Тема 26). Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье по ортогональным системам. Полнота и замкнутость системы. Тригонометрические ряды Фурье (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.
Иметь представление о тригонометрических рядах Фурье и условиях разложимости функций в ряд Фурье.

5.15 Наименование вопроса (Тема 27). Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Формула обращения. Свойства преобразования Фурье (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Иметь понятие о преобразовании Фурье в комплексной форме, а так же о sin *и* cos *преобразованиях.*

5.16 Наименование вопроса (Тема 29). Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах. (8 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

5.17 Наименование вопроса (Тема 30). Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка. (8 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши.
2. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений.
3. Уравнения, допускающие понижение порядка.

5.18 Наименование вопроса (Тема 31). Дифференциальные с постоянными коэффициентами (8 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Интегрирование Дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

5. 19 Наименование вопроса (Тема 32). Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (8 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности. Решать простейшие системы ДУ с постоянными коэффициентами методом исключения и методом собственных значений.

5. 20 Наименование вопроса (Тема 33). Бинарные отношения и их свойства. Отношения эквивалентности и частичного порядка. Отношения Парето. Принятие решений при многих критериях. (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Бинарные отношения и их свойства. Отношения эквивалентности и частичного порядка.
2. Отношения Парето. Принятие решений при многих критериях.

5. 21 Наименование вопроса (Тема 34). Булевы функции. Элементарные булевы функции. Совершенные нормальные формы. Полином Жегалкина. (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Булевы функции. Элементарные булевы функции.
2. Совершенные нормальные формы.

3. Полином Жегалкина.

5. 22 Наименование вопроса (Тема 35). Основы теории графов (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Основные понятия теории графов

5. 23 Наименование вопроса (Тема 37). Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа. (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Схема Бернулли.
2. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

5. 24 Наименование вопроса (Тема 39). Случайные непрерывные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия случайной непрерывной величины (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Случайные непрерывные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства.
2. Математическое ожидание и дисперсия случайной непрерывной величины

5. 25 Наименование вопроса (Модульная единица 40). Нормальное распределение и его свойства (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Понятие и свойства нормального распределения, графики зависимостей, основные оценки и формулы; функция Лапласа и её свойства; приложения к инженерным задачам.

5. 26 Наименование вопроса (Тема 42). Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.
Понятие функциональной зависимости и регрессии.
Линии регрессии, их свойства.
Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

5. 27 Наименование вопроса (Тема 43). Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов. (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

1. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

5. 28 Наименование вопроса (Тема 44). Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения (7 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рассмотреть на примере процедуру проверки гипотезы о виде распределения, применив критерий Пирсона.

5. 29 Наименование вопроса (Тема 45). Проверка гипотез о равенстве долей и средних. (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

5. 30 Наименование вопроса (Тема 46). Основные понятия теории функций комплексного переменного. Элементарные функции, их свойства. Дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана. Гармонические и аналитические функции. Конформные отображения. (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.
1. Основные понятия теории функций комплексного переменного.
2. Элементарные функции, их свойства.
3. Дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана.
4.Гармонические и аналитические функции.
5. Конформные отображения.

5. 31 Наименование вопроса (Тема 47). Интегрирование по комплексной переменной. Первообразная. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.
1. Интегрирование по комплексной переменной.
2. Первообразная. Теорема Коши.
3.Интегральная формула Коши.

5. 32 Наименование вопроса (Тема 48). Ряды Тейлора. Ряды Лорана. Вычеты, их вычисление. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов(6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.
Ряды Тейлора. Ряды Лорана.
Вычеты, их вычисление. Основная теорема о вычетах.
Применение вычетов к вычислению интегралов

5. 33 Наименование вопроса (Тема 49). Элементы операционного исчисления: преобразование Лапласа, его свойства. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Применение к описанию линейных моделей (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Элементы операционного исчисления: преобразование Лапласа, его свойства. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Применение к описанию линейных моделей.

5. 34 Наименование вопроса (Тема 50). УМФ. Основные задачи. Методы решения (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рекомендуется изучить основные понятия, определения, термины раздела, выписать формулы основных соотношений и зависимостей.

5. 35 Наименование вопроса (Тема 52). Численные методы алгебры, анализа, численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рассмотреть, например, метод трапеций приближённого вычисления интеграла и машинное вычисление интеграла.

5.36 Наименование вопроса (Модульная единица 52). Решение инженерных задач с применением ЭВМ. Вычислительный эксперимент (6 ч).

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рассмотреть ручной и машинный варианты решения задачи для ДУ несколькими методами приближённых вычислений.

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

6.1 Вид и наименование темы занятия (Раздел 1. Элементы линейной алгебры).

По разделу № 1 проводится 5 лекций (10 ч), 5 практических занятия (8 ч).

При подготовке к занятиям раздела 1 необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие матрицы. Определители 2-го и 3-го порядка и их простейшие свойства.
2. Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными. Формулы Крамера.
3. Числовые матрицы. Виды матриц.
4. Операции над матрицами.
5. Определители *n*-го порядка и их свойства.
6. Разложение определителя по строке (столбцу).
7. Обратные матрицы над полем. Алгоритмы нахождения обратной матрицы.
8. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

Ранг матрицы.

9. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.
10. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения.
11. Однородные системы. Фундаментальные системы решений. Неоднородные системы.

12. Прикладные задачи. Другие методы решения СЛАУ

6.2 Вид и наименование темы занятия (Раздел 2. Векторная алгебра (геометрические векторы)**).**

По теме № 2 проводится 2 лекции (4 ч), 2 практических занятия (4 ч).

При подготовке к занятиям раздела 2 необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами.
2. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек
3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис. Вычисления в координатах.
4. Преобразования координат.
5. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение.
6. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.
7. Координатное выражение векторного и смешанного произведений.
8. Приложения произведений векторов.
9. Системы координат на плоскости и в пространстве.
10. Системы координат на плоскости и в пространстве.

6.3 Вид и наименование темы занятия (Радел 3. Элементы аналитической геометрии).

По теме № 3 проводится 3 лекций (6 ч), 3 практических занятия(6 ч), ИДЗ-1.

При подготовке к занятиям раздела 3 необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.
2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.
3. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение плоскости и прямой в пространстве.
4. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
5. Канонические уравнения кривых 2-го порядка. Элементы кривых 2-го порядка.
6. Понятие о приведении кривой 2-го порядка к каноническому виду.
7. Кривые в явной, неявной, параметрической форме, в полярных координатах.
8. Полярные уравнения кривых 2-го порядка.
9. Понятие поверхности 2-го порядка. Классы поверхностей.
10. Канонический вид поверхностей 2-го порядка.

6.4 Вид и наименование темы занятия (Раздел 4. Введение в анализ).

По теме № 4 проводится 2 лекции (4 ч), и 2 практических занятия (4 ч).

При подготовке к занятиям раздела 4 необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Множества. Операции с множествами.

2. Декартово произведение множеств. Отображения множеств.
3. Мощность множества.
4. Множество вещественных чисел.
5. Функция. Область ее определения.
6. Сложные и обратные функции. График функции.
7. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
8. Предел и непрерывность функции действительной переменной.

6.5 Вид и наименование темы занятия (Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной).

По теме № 5 проводится 5 лекций (10 ч), 1 лабораторно-практическое занятие (2 ч), 4 практических занятия (2 ч).

При подготовке к занятиям раздела 5 необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации.
2. Производная функции, ее смысл в различных задачах.
3. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций.
4. Инвариантность формы дифференциала.
5. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
6. Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, их применение.
7. Правило Лопиталя.
8. Производные и дифференциалы высших порядков.
9. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа.
10. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.
11. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений.
12. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия.
13. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.
14. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба.
15. Асимптоты функций.
16. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
17. Вектор-функция скалярного аргумента.
18. Понятие кривой, гладкая кривая. Касательная к кривой.
19. Кривизна кривой. Радиус кривизны.

6.6 Вид и наименование темы занятия (Раздел 6. Комплексные числа).

По теме № 6 проводится 2 лекции (4 ч), 2 практических занятия (4 ч).

При подготовке к занятиям раздела 6 необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие о комплексных числах. Алгебраические действия над комплексными числами.
2. Поле C. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Комплексная плоскость. 3.
3. Множества точек комплексной плоскости.
4. Комплексные числа в тригонометрической форме, модуль и аргумент комплексного числа.

5. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

6. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.

7. Показательная форма комплексного числа, формулы Эйлера, expz.
8. Умножение и деление комплексных чисел в показательной форме.

6.7 Вид и наименование темы занятия (Раздел 7. Интегральное исчисление функций одной переменной).

По теме № 7 проводится 5 лекций (10 ч), 5 практических занятия(10 ч).

При подготовке к занятиям раздела 7 необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы.
2. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.
3. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.
4. Геометрические и механические приложения определенного интеграла. Приближённые вычисления интегралов.
5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства. Понятие сингулярных интегралов.

6.8 Вид и наименование темы занятия (Раздел 8. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменны.

По теме № 8 проводится 4 лекции (8 ч), и 4 практических занятия(8 ч), РПР-2.

При подготовке к занятиям раздела 8 обратить внимание на следующие моменты

1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции
2. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала.
3. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций. Теорема об обратном отображении.
4. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

6.9 Вид и наименование темы занятия (Радел 9. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы).

По теме № 9 проводится 2 лекции (4 ч), и 2 практических занятия(4 ч).

При подготовке к занятиям раздела 9 обратить внимание на следующие вопросы и задания:

1. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному.
2. Понятие *n*-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.
3. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление.
4. Поверхностные интегралы.

5. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

10 Вид и наименование темы занятия (Раздел 10. Числовые и функциональные ряды)

По теме № 10 проводится 4 лекции (8 ч), и 4 практических занятия(8 ч), РПР-3

При подготовке к занятиям разздела 10 обратить внимание на следующие моменты.

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.
2. Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
3. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости.
4. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.

6.11 Вид и наименование темы занятия (Раздел 11. Гармонический анализ)

По теме № 11 проводится 2 лекции (6 ч), 2 практических занятия(4 ч).

При подготовке к занятиям раздела 11 обратить внимание на следующие моменты.

1. Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме.
2. Ортогональные и ортонормированные системы.
3. Ряды Фурье по ортогональным системам.
4. Полнота и замкнутость системы.
5. Тригонометрические ряды Фурье.
6. Интеграл Фурье.
7. Преобразование Фурье. Формула обращения.
8. Свойства преобразования Фурье.

6.12 Вид и наименование темы занятия (Раздел 12. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

По теме № 12 проводится 4 лекции (8 ч), 8 практических занятия(4 ч).

При подготовке к занятиям раздела 12 обратить внимание на следующие моменты:

1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

3. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

4. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.

6. Дифференциальные равнения высших порядков. Задача Коши. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

6.13 Вид и наименование темы занятия (Раздел 13. Линейные уравнения и системы).

По теме № 13 проводится 1 лекция (2 ч), 2 практических занятия(4 ч).

При подготовке к занятиям раздела 13 обратить внимание на следующие вопросы и задания:

1. Система линейных дифференциальных уравнений.
2. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений.

6.14 Вид и наименование темы занятия (Раздел 14. Элементы дискретной математики).

По теме № 14 проводится 3 лекции (6 ч), 4 практических занятия(8 ч).

При подготовке к занятиям раздел 14 обратить внимание на следующие моменты.

1. Бинарные отношения и их свойства. Отношения эквивалентности и частичного порядка.
2. Отношения Парето. Принятие решений при многих критериях.
3. Булевы функции. Элементарные булевы функции.
4. Совершенные нормальные формы.
5. Полином Жегалкина.
6. Основы теории графов

6.15 Вид и наименование темы занятия (Разздел 15 . Случайные события)

По теме № 15 проводится 3 лекции (6 ч), 3 практических занятия(6 ч).

При подготовке к занятиям раздела 15 обратить внимание на следующие моменты.

1. Понятие случайного события. Вероятность.
2. Элементарная теория вероятностей.
3.Методы вычисления вероятностей.
4. Условная вероятность.
5. формула полной вероятности.
6. Формула Байеса.
7. Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

6.16 Вид и наименование темы занятия (Раздел 16. Случайные величины).

По теме № 16 проводится 3 лекции (6 ч), 3 практических занятия(6 ч), РПР-4.

При подготовке к занятиям раздела 16 обратить внимание на следующие вопросы и задания:

1. Дискретные случайные величины.
2. Функция распределения и ее свойства.
3. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.
4. Непрерывные случайные величины.
5. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства.
6. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

7. Нормальное распределение и его свойства

6.17 Вид и наименование темы занятия (Раздел 17. Статистическое описание результатов наблюдений).

По теме № 17 проводится 3 лекции (6 ч), 1 лабораторно-практическое занятие (2 ч), 3 практических занятия (6 ч).

При подготовке к занятиям радела 17 обратить внимание на следующие моменты

1. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая
2. функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.
3. Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.
5. Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

6.18 Вид и наименование темы занятия (Раздел 18. Статистические методы обработки результатов наблюдений).

По теме № 18 проводится 3 лекции (6 ч), 3 практических занятия(6 ч), 1 лабораторно-практическое занятие ЛПЗ-2.

При подготовке к занятиям раздела 18 обратить внимание на следующие моменты.

1. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.
2. Понятие о критериях согласия.
3. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения.
4. Проверка гипотезы о виде распределения.
5. Проверка гипотез о равенстве долей и средних.

6.19 Вид и наименование темы занятия (Раздел 19. Элементы теории функций комплексного переменного)

По теме № 19 проводится 4 лекции (8 ч), 4 практических занятия(8 ч).

При подготовке к занятиям раздела 19 обратить внимание на следующие моменты

1. Основные понятия теории функций комплексного переменного.
2. Элементарные функции, их свойства.
3. Дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана.
4. Гармонические и аналитические функции.
5. Конформные отображении
6. Интегрирование по комплексной переменной. Первообразная.
7. Теорема Коши.
8. Интегральная формула Коши.
9. Ряды Тейлора. Ряды Лорана. Вычеты, их вычисление. Основная теорема о вычетах.
10. Применение вычетов к вычислению интегралов.
11.Элементы операционного исчисления: преобразование Лапласа, его свойства. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Применение к описанию линейных моделей.

6.20 Вид и наименование темы занятия (Раздел 20. Уравнения математической физики)

По теме № 20 проводится 2 лекции (4 ч), 2 практических занятия(4 ч).

При подготовке к занятиям раздела 20 обратить внимание на следующие вопросы и задания:

1. Классификация линейных уравнений с частными производными.
2. Канонический вид линейных уравнений с частными производными.
3. Основные уравнения математической физики.
4. Основные задачи для дифференциальных уравнений математической физики.
5. Решение Даламбера.

6.21 Раздел 21. Численные методы

По теме № 21 проводится 2 лекции (4 ч), 1 практическое занятие(2 ч).

При подготовке к занятиям раздела 21 обратить внимание на следующие моменты

1. Метод трапеций вычисления определённых интегралов.
2. Метод Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений.
3. Метод Рунге-Кутта численного интегрирования дифференциальных уравнений

4. Решение задач алгебры, анализа, задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с применением MathCAD.