

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.12.01 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Направление подготовки: 20.03.01. Техносферная безопасность

Профиль образовательной программы: Безопасность жизнедеятельности в техносфере

Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Организация самостоятельной работы.....	3
2. Методические рекомендации по подготовке к занятиям.....	4
2.1 Статика.....	4
2.2 Кинематика.....	4
2.3 Динамика.....	4
3. Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий.....	4
3.1 С-3 Определение реакций опор составной конструкции	4
3.2 С-7. Определение реакций опор твёрдого тела.....	12
3.3 К-1 Определение скоростей и ускорений точек.....	17
3.4 К-3 Кинематический анализ плоского механизма.....	21
3.5 Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.....	29
3.6 Д-10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.....	35
4. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов.....	48

1. Организация самостоятельной работы

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

п/п	Наименование разделов, тем	всего	Количество часов по видам самостоятельной работы				
			подготовка курсовой работы (проекта)	подготовка рефератов	ИДЗ	СИБ	ПкЗ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Статика. Основная теорема статики. Уравнения равновесия. Статически определенные и статически неопределенные задачи.	4	-	-	2	1	1
2	Статика. Трение скольжения и трение качения. Центр параллельных сил, центр тяжести.	3	-	-	2	1	-
3	Кинематика. Простейшие движения твердого тела. Плоское движение твердого тела.	5	-	-	3	1	1
4	Кинематика. Определение скоростей и ускорений точек. Составное движение точки.	5	-	-	3	1	1
5	Динамика. Виды движения точки в зависимости от действующих сил.	4	-	-	3	-	1
6	Динамика. Динамика системы. Общие теоремы динамики системы. Общее уравнение динамики.	4	-	-	3	1	-
Итого		25	-	-	16	5	4

2. Методические рекомендации по подготовке к занятиям

2.1 Статика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Понятие равнодействующей системы сил.
- Понятие момента силы относительно центра и оси.
- Инвариантность главного вектора и скалярного произведения главного вектора на главный момент.
- Условия равновесия системы сил.

2.2 Кинематика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Векторный, координатный и естественный способы задания движения. Определение кинематических характеристик в каждом из способов.
- Виды движений твёрдого тела. Кинематические характеристики в каждом из движений.
- Составное движение.

2.3 Динамика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Дифференциальные уравнения движения в координатной и естественной формах.
- Применение общих теорем динамики для точки, твёрдого тела и механической системы.
- Применение принципов динамики для решения первой и второй задач динамики.

3. Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий

3.1 С-3 Определение реакций опор составной конструкции.

Задание С.3. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Конструкция состоит из двух частей. Установить, при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции, указанной в табл. 5, наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения C .

На рис. 17—19 показан первый способ соединения — с помощью шарнира C . Второй способ соединения — с помощью скользящей заделки, схемы которой показаны в табл. 6.

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 20); $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 7$ кН; $M = 22$ кН·м; $q = 2$ кН/м; $\alpha = 60^\circ$.

Определить реакции опор, а также соединения C для того способа сочленения (шарнир или скользящая заделка), при котором модуль опоры A наименьший.

Решение. 1. *Определение реакций опоры A при шарнирном соединении в точке C .*

Таблица 5

Номер вари- анта (рис. 17-19)	P_1	P_2	$M,$	$q,$	Иссле- дуемая реакция	Номер вари- анта (рис. 17-19)	P_1	P_2	$M,$	$q,$	Иссле- дуемая реакция
	кН		кН · м	кН/м			кН		кН · м	кН/м	
1	5,0	—	24,0	0,8	X_A	16	7,0	10,0	14,0	3,8	R_B
2	6,0	10,0	22,0	1,0	R_A	17	9,0	12,0	26,0	4,0	R_A
3	7,0	9,0	20,0	1,2	R_B	18	11,0	10,0	18,0	3,5	M_B
4	8,0	—	18,0	1,4	M_A	19	13,0	9,0	30,0	3,0	M_B
5	9,0	—	16,0	1,6	R_A	20	15,0	8,0	25,0	2,5	R_B
6	10,0	8,0	25,0	1,8	M_A	21	10,0	7,0	20,0	2,0	R_A
7	11,0	7,0	20,0	2,0	R_B	22	5,0	6,0	15,0	1,5	R_A
8	12,0	6,0	15,0	2,2	M_A	23	8,0	5,0	10,0	1,4	R_A
9	13,0	—	10,0	2,4	X_A	24	11,0	4,0	5,0	1,3	M_A
10	14,0	—	12,0	2,6	R_A	25	14,0	6,0	7,0	1,2	R_B
11	15,0	5,0	14,0	2,8	R_D	26	12,0	8,0	9,0	1,1	R_B
12	12,0	4,0	16,0	3,0	R_B	27	10,0	7,0	11,0	1,0	X_A
13	9,0	6,0	18,0	3,2	R_A	28	8,0	9,0	13,0	1,2	R_A
14	6,0	—	20,0	3,4	M_A	29	6,0	10,0	15,0	1,4	M_A
15	5,0	8,0	22,0	3,6	M_B	30	10,0	12,0	17,0	1,6	M_B

Рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 21). Составим уравнение моментов сил относительно точки B . Для упрощения вычисления момента силы \vec{P}_1 разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие: $P'_1 = P_1 \cos 60^\circ = 2,5$ кН; $P''_1 = P_1 \sin 60^\circ = 4,33$ кН,

$$\sum M_{iB} = 0; P'_1 \cdot 3 + P''_1 \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + P_2 \sqrt{1,0^2 + 1,5^2} = 0, \quad (1)$$

где $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$ кН.

После подстановки данных и вычислений уравнение (1) получает вид

$$X_A - 5Y_A = -24,74 \text{ кН}. \quad (1')$$

Второе уравнение с неизвестными X_A и Y_A получим, рассмотрев систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира C (рис. 22):

$$\sum M_{iC} = 0; P''_1 \cdot 6 + Q \cdot 2 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 3 = 0,$$

или после вычислений

$$4X_A - 3Y_A = -41,98 \text{ кН}. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1') и (2), находим:

$$X_A = -7,97 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,36 \text{ кН}.$$

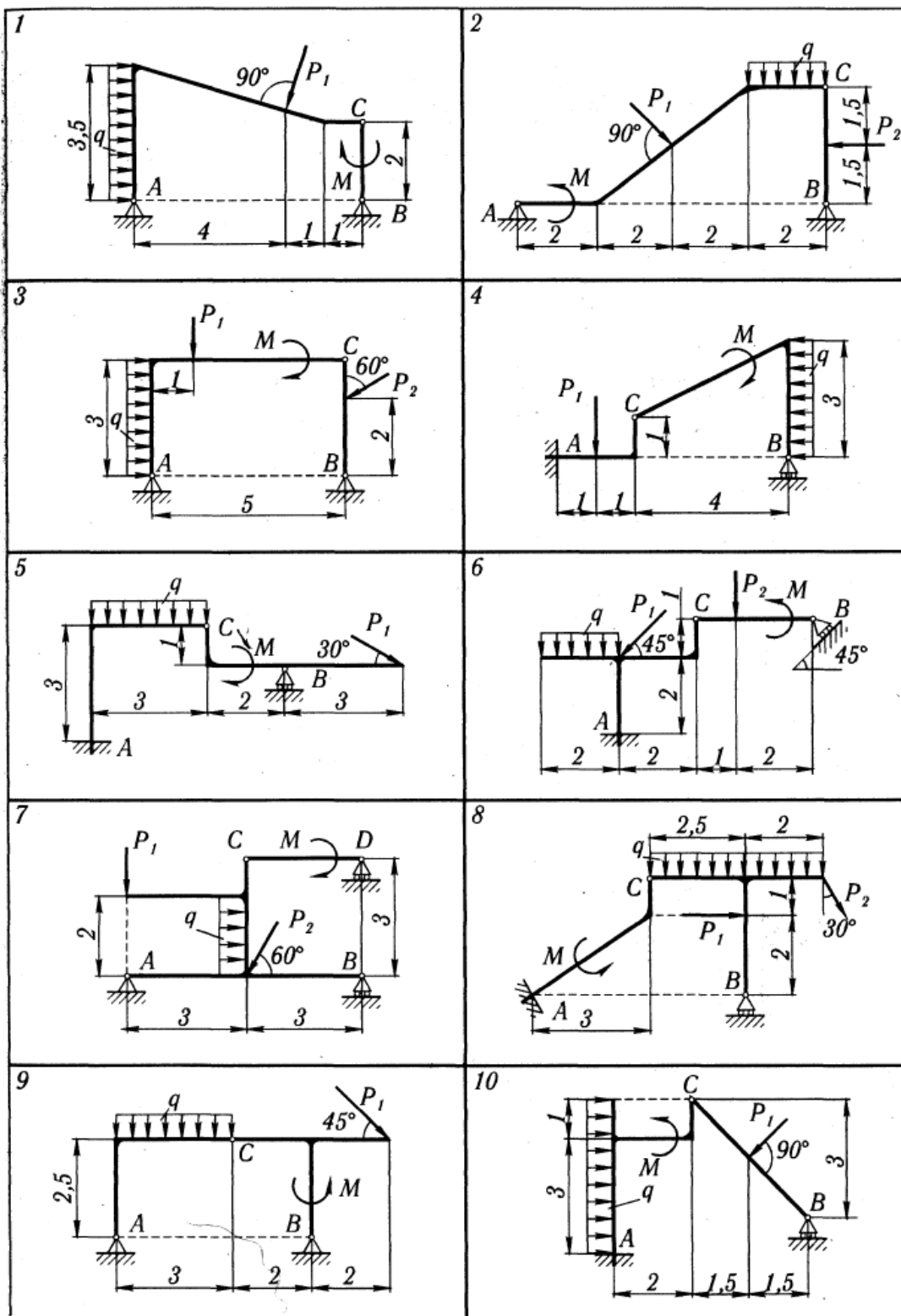


Рис. 17

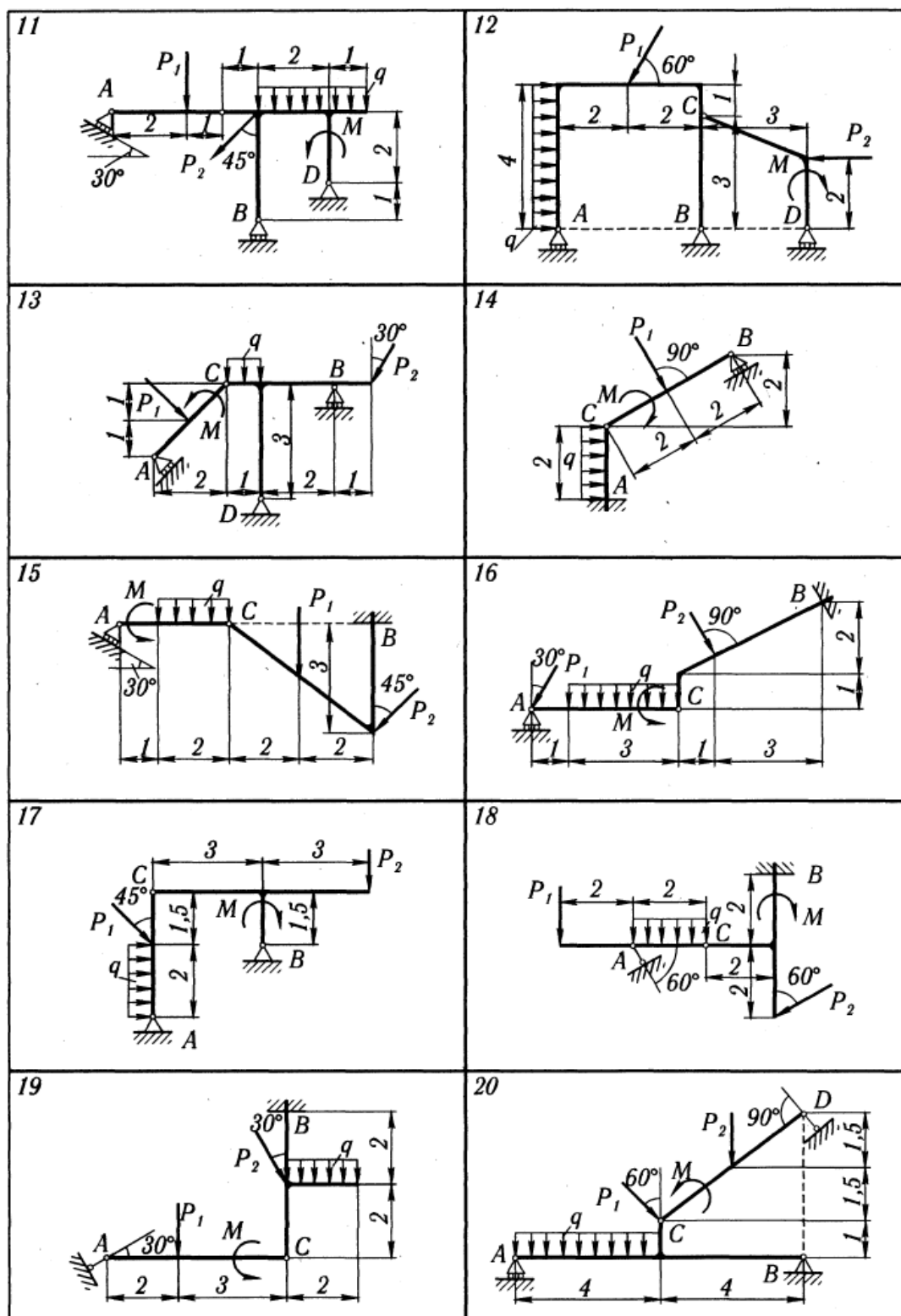


Рис. 18

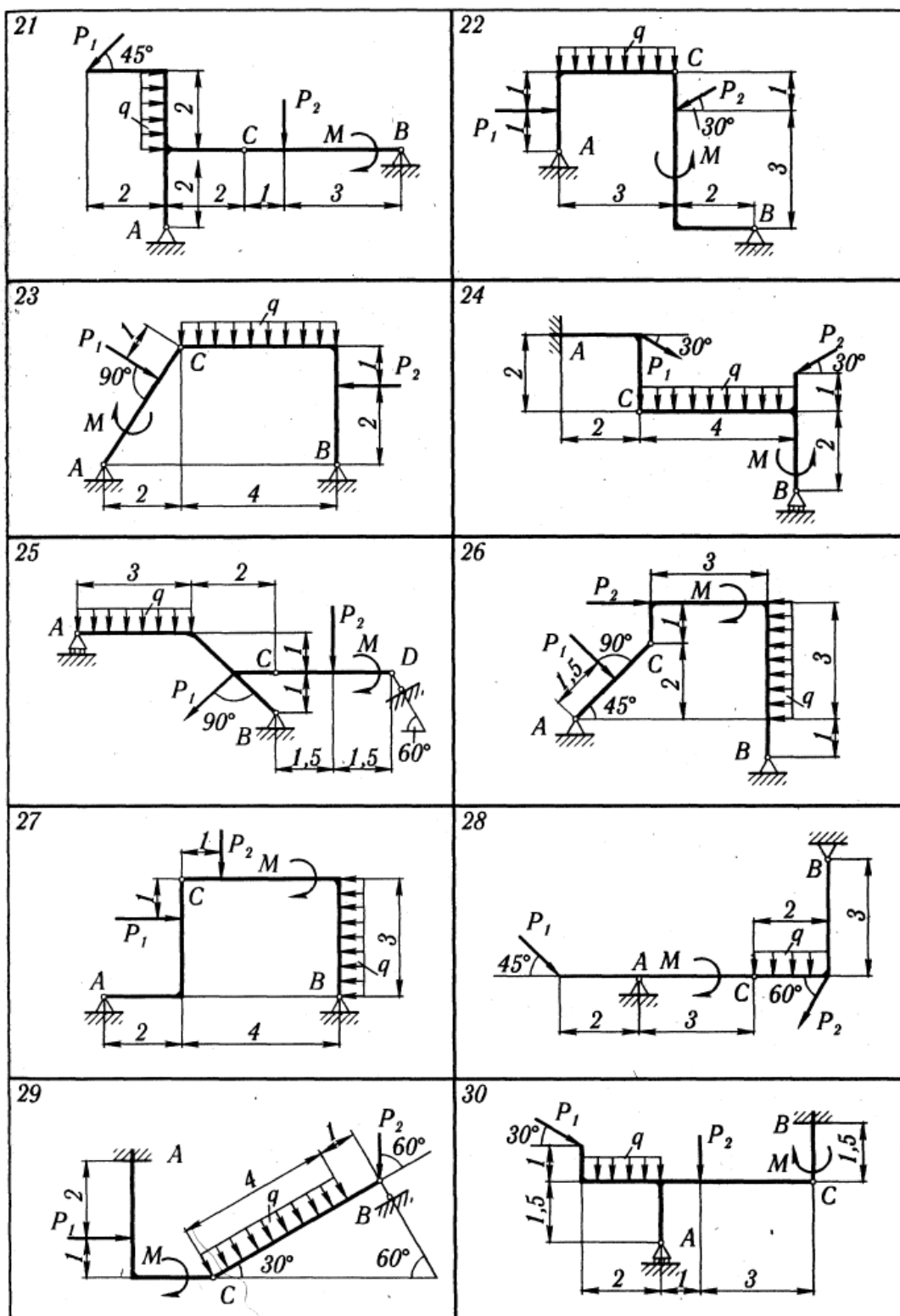


Рис. 19

Таблица 6

Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки
1, 2, 3		14		23	
4		15		24	
5		16		25	
6, 7, 8		17		26	
9		18		27	
10		19		28	
11		20		29	
12		21		30	
13		22			

Модуль реакции опоры A при шарнирном соединении в точке C равен

$$R'_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{7,97^2 + 3,36^2} = \sqrt{74,81} = 8,65 \text{ кН.}$$

2. Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке C скользящей заделкой показана на рис. 23. Системы сил, показанных

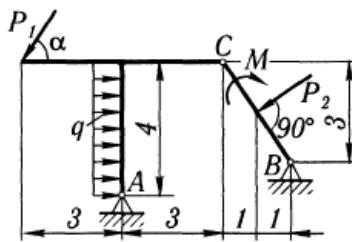


Рис. 20

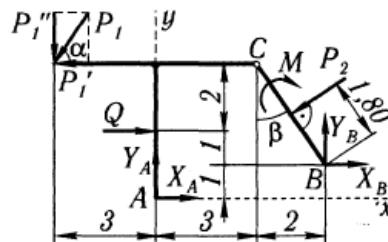


Рис. 21

на рис. 21 и 23, ничем друг от друга не отличаются. Поэтому уравнение (1') остается в силе. Для получения второго уравнения

рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее скользящей заделки C (рис. 24, а).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + Q - P'_1 = 0, \quad (3)$$

откуда

$$X_A = -5,50 \text{ кН},$$

и из уравнения (1') находим

$$Y_A = 3,85 \text{ кН}.$$

Следовательно, модуль реакции опоры A при скользящей заделке в C равен

$$R''_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,50^2 + 3,85^2} = \sqrt{45,07} = 6,71 \text{ кН}.$$

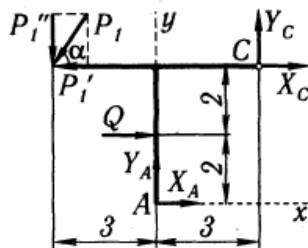


Рис. 22

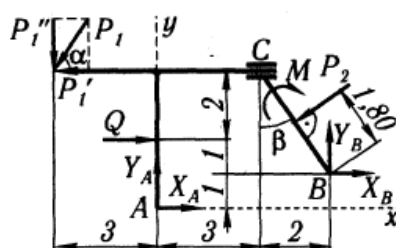


Рис. 23

Итак, при соединении в точке C скользящей заделкой модуль реакции опоры A меньше, чем при шарнирном соединении (\approx на 22%). Найдем составляющие реакции опоры B и скользящей заделки.

Для левой от C части (рис. 24, а)

$$\sum Y_i = 0; \quad -P''_1 + Y_A + Y_C = 0, \quad (4)$$

откуда

$$Y_C = P''_1 - Y_A = 0,48 \text{ кН}.$$

Составляющие реакции опоры B и момент в скользящей заделке найдем из уравнений равновесия, составленных для правой от C части конструкции (рис. 24, б):

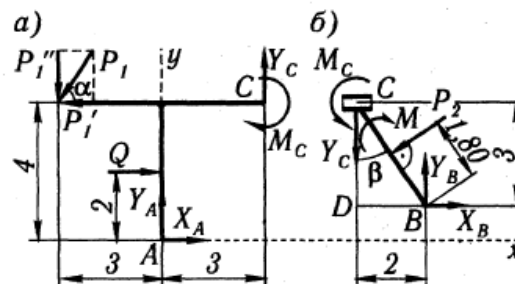


Рис. 24

$$\sum M_{iB} = 0; \quad M_C + Y_C \cdot 2 - M + P_2 \cdot 1,80 = 0, \quad (5)$$

$$\sum X_i = 0; \quad -P_2 \cos \beta + X_B = 0, \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -Y_C + Y_B - P_2 \sin \beta = 0. \quad (7)$$

Из прямоугольного треугольника BCD

$$\sin \beta = BD/BC = 2,0/\sqrt{2^2 + 3^2} = 2,0/3,61 = 0,555;$$

$$\cos \beta = CD/BC = 3,0/3,61 = 0,832.$$

Решая уравнения (5)—(7) относительно M_C , X_B , Y_B , получим:

$$M_C = 8,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_B = 5,82 \text{ кН}; \quad Y_B = 4,37 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций убедимся, что соблюдается не использованное ранее уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции (см. рис. 21), например

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= P'_1 \cdot 4 + P''_1 \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \sin \beta \cdot 4 + P_2 \cos \beta \cdot 2,5 - X_B \cdot 1 + \\ &+ Y_B \cdot 5 = 2,5 \cdot 4 + 4,33 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - 22 - 7 \cdot 0,555 \cdot 4 + 7 \cdot 0,832 \cdot 2,5 - \\ &- 5,82 \cdot 1 + 4,37 \cdot 5 = 59,40 - 59,36 \approx 0. \end{aligned}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 7

	Силы, кН						Момент, кН · м
	X_A	Y_A	R_A	Y_C	X_B	Y_B	M_C
Для схемы на рис. 20	-7,97	3,36	8,65	—	—	—	—
Для схемы на рис. 23	-5,50	3,85	6,71	±0,48	5,82	4,37	±8,44

Задание С.7. Определение реакций опор твердого тела

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций показаны на рис. 44—46. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 14.

Таблица 14

Номер варианта	Силы, кН			Размеры, см					Номер варианта	Силы, кН			Размеры, см						
	(рис. 44—46)	<i>Q</i>	<i>T</i>	<i>G</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>R</i>		<i>r</i>	(рис. 44—46)	<i>Q</i>	<i>T</i>	<i>G</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>R</i>	<i>r</i>
1	2	—	20	20	30	10	15	5	16	4	—	2	50	30	—	—	—	—	—
2	4	—	2	20	10	30	10	10	17	2	—	1	15	10	20	20	5	—	—
3	20	—	18	400	400	450	—	—	18	6	—	2	60	40	60	—	—	—	—
4	3	—	2	30	20	40	15	10	19	—	8	2	20	30	40	20	15	—	—
5	5	—	3	30	40	20	20	15	20	4	—	—	60	40	20	—	—	—	—
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	—	—	40	60	30	—	—	—	—
7	—	3	1	30	10	5	18	6	22	—	—	5	20	50	30	—	—	—	—
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	—	—	4	40	30	50	—	—	—	—
9	5	—	3	20	15	10	30	40	24	5	—	2	—	—	—	—	—	—	—
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	—	—	3	50	50	60	—	—	—	—
11	—	2	1	20	30	15	15	10	26	—	—	1	20	60	40	—	—	—	—
12	4	—	1	25	20	8	15	10	27	10	—	—	50	30	50	—	—	—	—
13	10	—	5	40	30	20	25	15	28	35	—	32	400	200	200	—	—	—	—
14	—	2	1	30	90	20	30	10	29	—	4	3	15	20	15	15	10	—	—
15	3	—	2	60	20	40	20	5	30	5	—	—	40	40	10	—	—	—	—

Примечания. 1. Считать, что в вариантах 16, 18, 22—26 петли не препятствуют перемещению рамы вдоль AB .

2. В вариантах 20 и 21 соприкасающиеся поверхности считать абсолютно гладкими.

Пример выполнения задания. Дано: рама $ABCD$ весом $G = 1$ кН, $P = 2$ кН, $\vec{P} \parallel Ay$, $AD = BC = 60$ см, $AB = CD = 100$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (рис. 47). Найти реакции опор A , B и C (A — шаровой шарнир, B — петля, C — стержневая опора).

Решение. К раме $ABCD$ приложены сила тяжести \vec{G} , сила \vec{P} , реакция \vec{S} стержня CE и реакции опор A и B . Реакция шарового шарнира A определяется тремя составляющими: \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , а реакция петли B — двумя: \vec{X}_B и \vec{Y}_B (рис. 48).

Из этих сил — шесть неизвестных. Для их определения можно составить шесть уравнений равновесия.

Уравнения моментов сил относительно координатных осей:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cos 30^\circ AB + Z_B \cdot AB = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad G(BC/2) \sin 30^\circ - S \cdot BC \sin 60^\circ = 0, \quad (2)$$

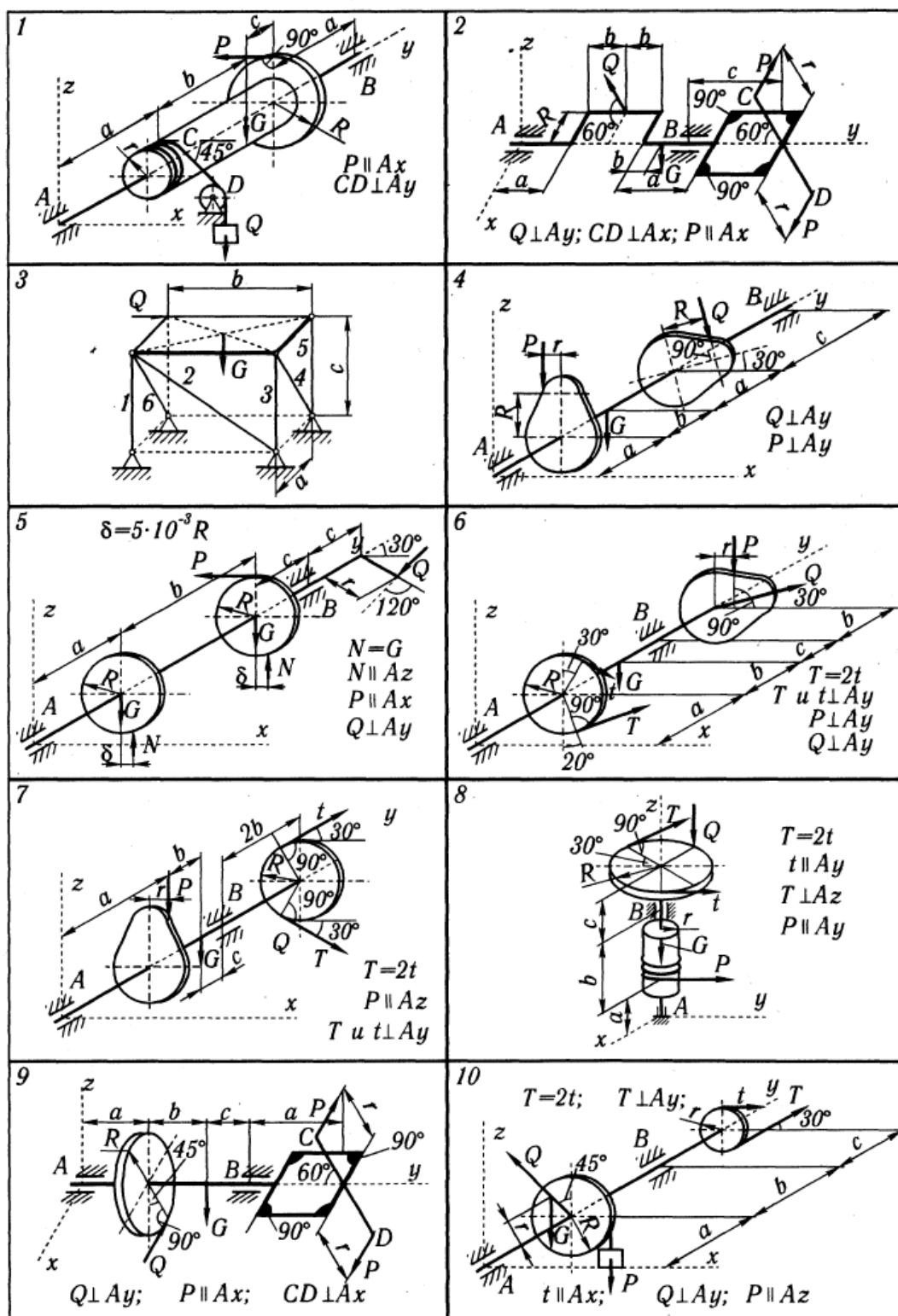


Рис. 44

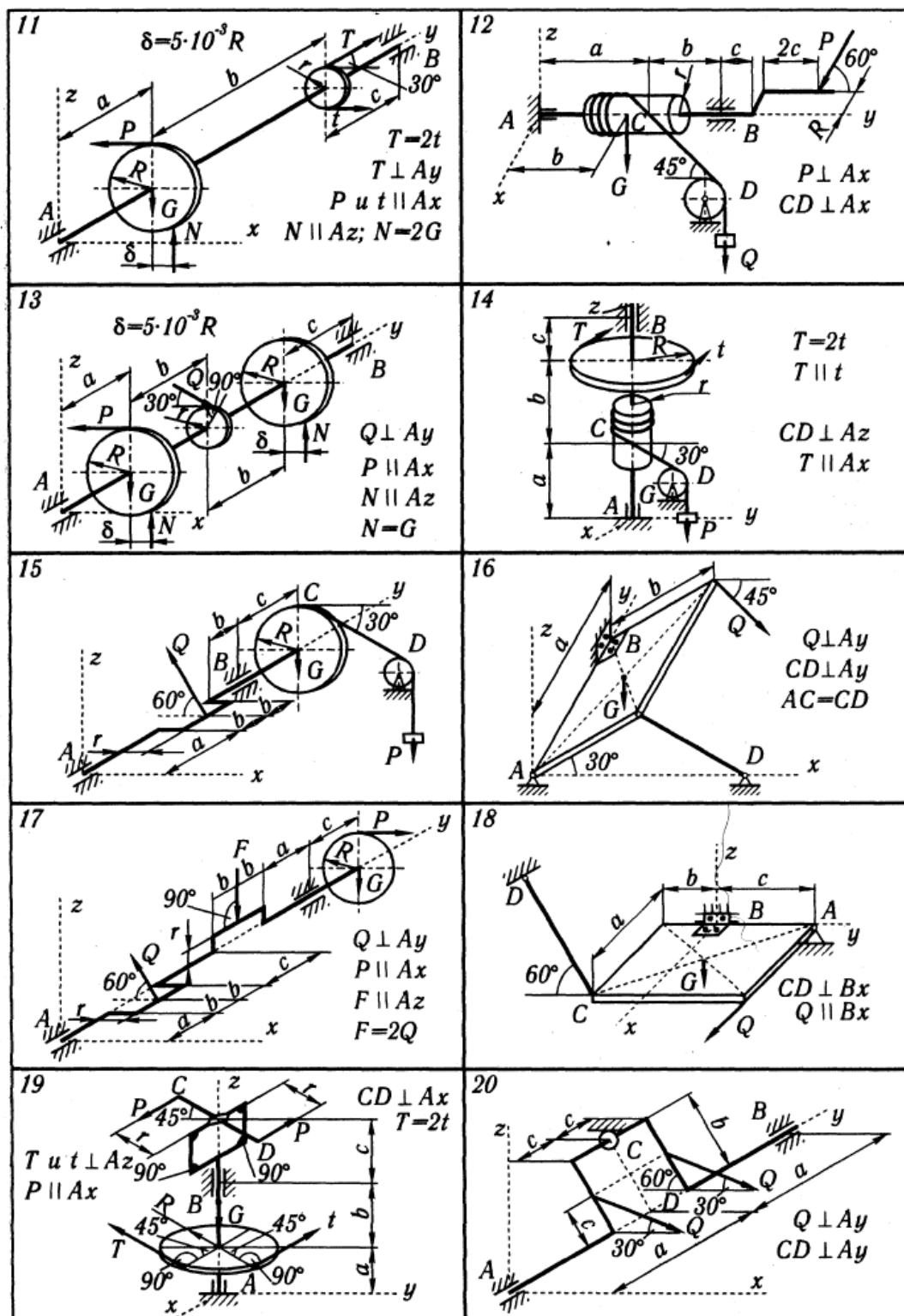


Рис. 45

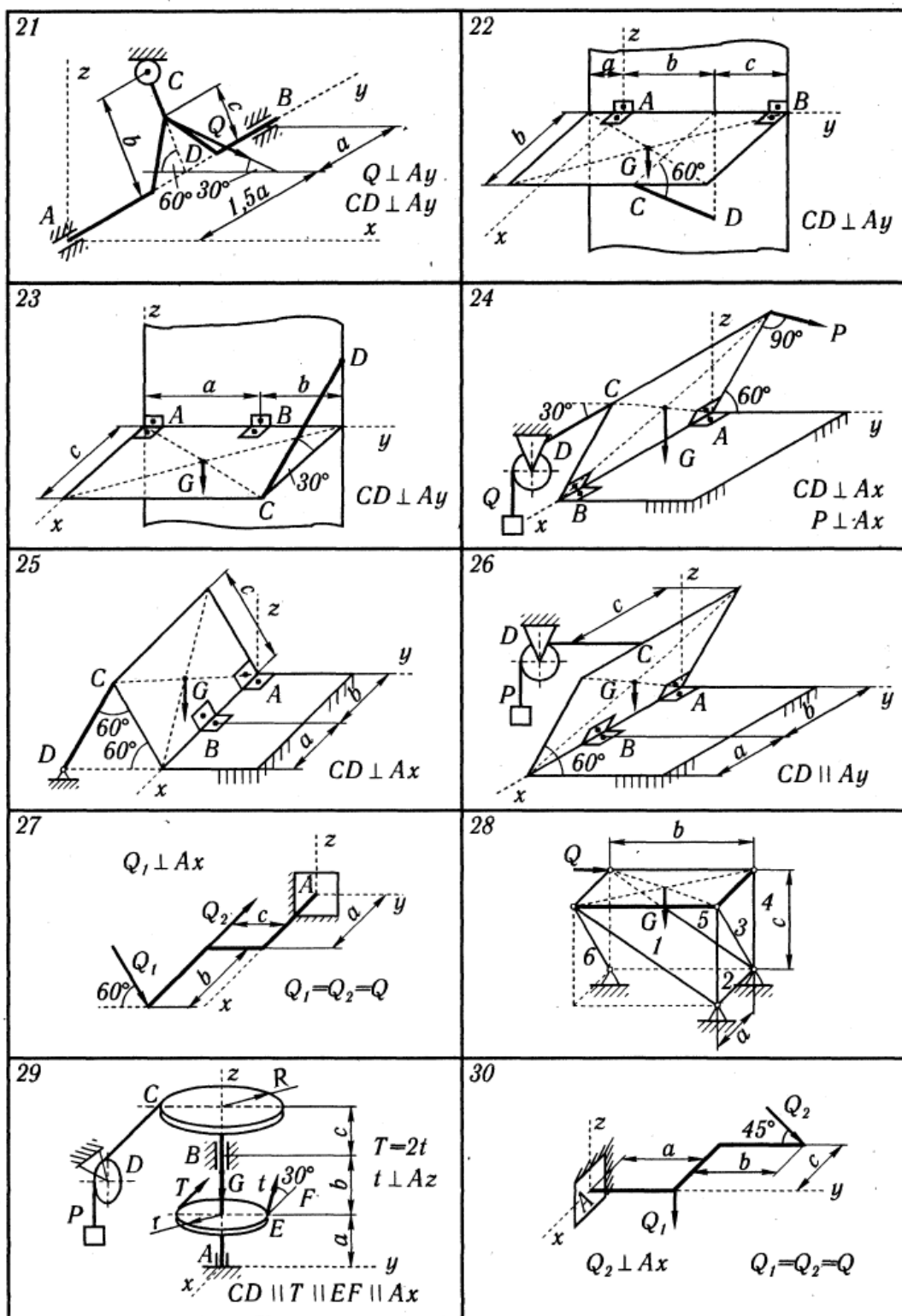


Рис. 46

$$\sum M_{iz} = 0; \quad P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ AB - X_B \cdot AB = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (2) определяем S , затем из уравнений (1) и (3) находим Z_B и X_B . Уравнения проекций сил на оси координат:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S \cos 30^\circ = 0. \quad (6)$$

Из этих уравнений находим X_A , Y_A и Z_A .

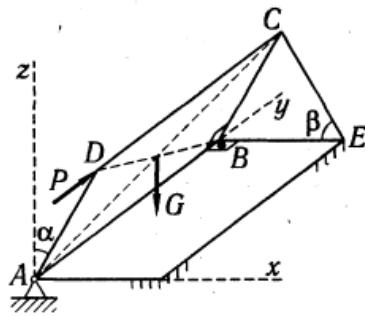


Рис. 47

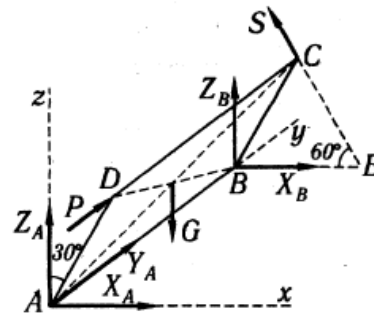


Рис. 48

Результаты вычислений приведены в табл. 15.

Таблица 15

Силы, кН					
S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,289	-0,600	-2,00	-0,54	0,744	1,29

**Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки
по заданным уравнениям ее движения**

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 20.

Таблица 20

Номер варианта	Уравнения движения		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4 \cos^2(\pi t/3) + 2$	$4 \sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
5	$2 \sin(\pi t/3)$	$-3 \cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7 \sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7 \cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4 \cos(\pi t/3)$	$-2 \sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1/2
12	$5 \sin^2(\pi t/6)$	$-5 \cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5 \cos(\pi t^2/3)$	$-5 \sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2
15	$4 \cos(\pi t/3)$	$-3 \sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7 \sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7 \cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3 \cos(\pi t^2/3)$	$3 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6 \sin(\pi t^2/6) - 2$	$6 \cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
24	$-4 \cos(\pi t/3) - 1$	$-4 \sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8 \cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8 \sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$	$-9 \cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2 \cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \quad (1)$$

$$t_1 = 0,5 \quad (x \text{ и } y — \text{ в см, } t \text{ и } t_1 — \text{ в с}).$$

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 67.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь \vec{i}, \vec{j} — орты осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 4 \text{ см/с}; & a_x = \ddot{x} &= 0; \\ v_y = \dot{y} &= 32t; & a_y = \ddot{y} &= 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt|, \quad (6)$$

или

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a}/v|; \quad (6')$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (6'')$$

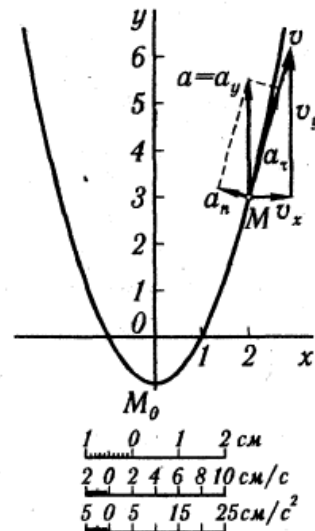


Рис. 67

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления \vec{a}_τ и \vec{v} совпадают; знак «-», — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \quad (7)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}|/v. \quad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x|/v. \quad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (9)$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3)—(6), (8) и (10) для заданного момента времени $t_1 = 0,5$ с приведены в табл. 21.

Таблица 21

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 67 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор \vec{v} строим по составляющим \vec{v}_x и \vec{v}_y , причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор \vec{a} строим по составляющим \vec{a}_x и \vec{a}_y и затем раскладываем на составляющие \vec{a}_τ и \vec{a}_n . Совпадение величин a_τ и a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Дополнение к заданию К.1. Данное задание может быть использовано для определения скорости и ускорения точки при ее движении по пространственной траектории. Для этого к двум уравнениям движения (см. табл. 20) добавляется третье уравнение (табл. 22).

Общий порядок выполнения задания в этом случае такой же, как и в приведенном выше примере.

Таблица 22

Номер вари- анта	$z = z(t),$ см	Номер вари- анта	$z = z(t),$ см	Номер вари- анта	$z = z(t),$ см	Номер вари- анта	$z = z(t),$ см	Номер вари- анта	$z = z(t),$ см
1	$3t$	7	$2,5t$	13	$1,5t$	19	$6t$	25	$5t$
2	$2t$	8	$5t$	14	$2t+2$	20	$2t$	26	$6t$
3	$1,5t$	9	$4t + 8$	15	$3t$	21	$4t$	27	$3,5t$
4	$4t + 4$	10	t	16	$1,5t$	22	t	28	$4t$
5	t	11	$2t$	17	$5t$	23	$1,5t$	29	$5t$
6	$3t$	12	$3t$	18	$3,5t$	24	$2t$	30	$1,5t$

Задание К.3. Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C , а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов помещены на рис. 73—75, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 25.

Таблица 25

Номер варианта (рис. 73—75)	Размеры, см				ω_{OA} ,	ω_I ,	ε_{OA} ,	v_A ,	a_A ,
	OA	r	AB	AC	рад/с	рад/с	рад/с ²	см/с	см/с ²
1	40	15	—	8	2	—	2	—	—
2	30	15	—	8	3	—	2	—	—
3	—	50	—	—	—	—	—	50	100
4	35	—	—	45	4	—	8	—	—
5	25	—	—	20	1	—	1	—	—
6	40	15	—	6	1	1	0	—	—
7	35	—	75	60	5	—	10	—	—
8	—	—	20	10	—	—	—	40	20
9	—	—	45	30	—	—	—	20	10
10	25	—	80	20	1	—	2	—	—
11	—	—	30	15	—	—	—	10	0
12	—	—	30	20	—	—	—	20	20
13	25	—	55	40	2	—	4	—	—
14	45	15	—	8	3	12	0	—	—
15	40	15	—	8	1	—	1	—	—
16	55	20	—	—	2	—	5	—	—
17	—	30	—	10	—	—	—	80	50
18	10	—	10	5	2	—	6	—	—
19	20	15	—	10	1	2,5	0	—	—
20	—	—	20	6	—	—	—	10	15
21	30	—	60	15	3	—	8	—	—
22	35	—	60	40	4	—	10	—	—
23	—	—	60	20	—	—	—	5	10
24	25	—	35	15	2	—	3	—	—
25	20	—	70	20	1	—	2	—	—
26	20	15	—	10	2	1,2	0	—	—
27	—	15	—	5	—	—	—	60	30
28	20	—	50	25	1	—	1	—	—
29	12	—	35	15	4	—	6	—	—
30	40	—	—	20	5	—	10	—	—

Примечание. ω_{OA} и ε_{OA} — угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_I — угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A — скорость и ускорение точки A . Качение колес происходит без скольжения.

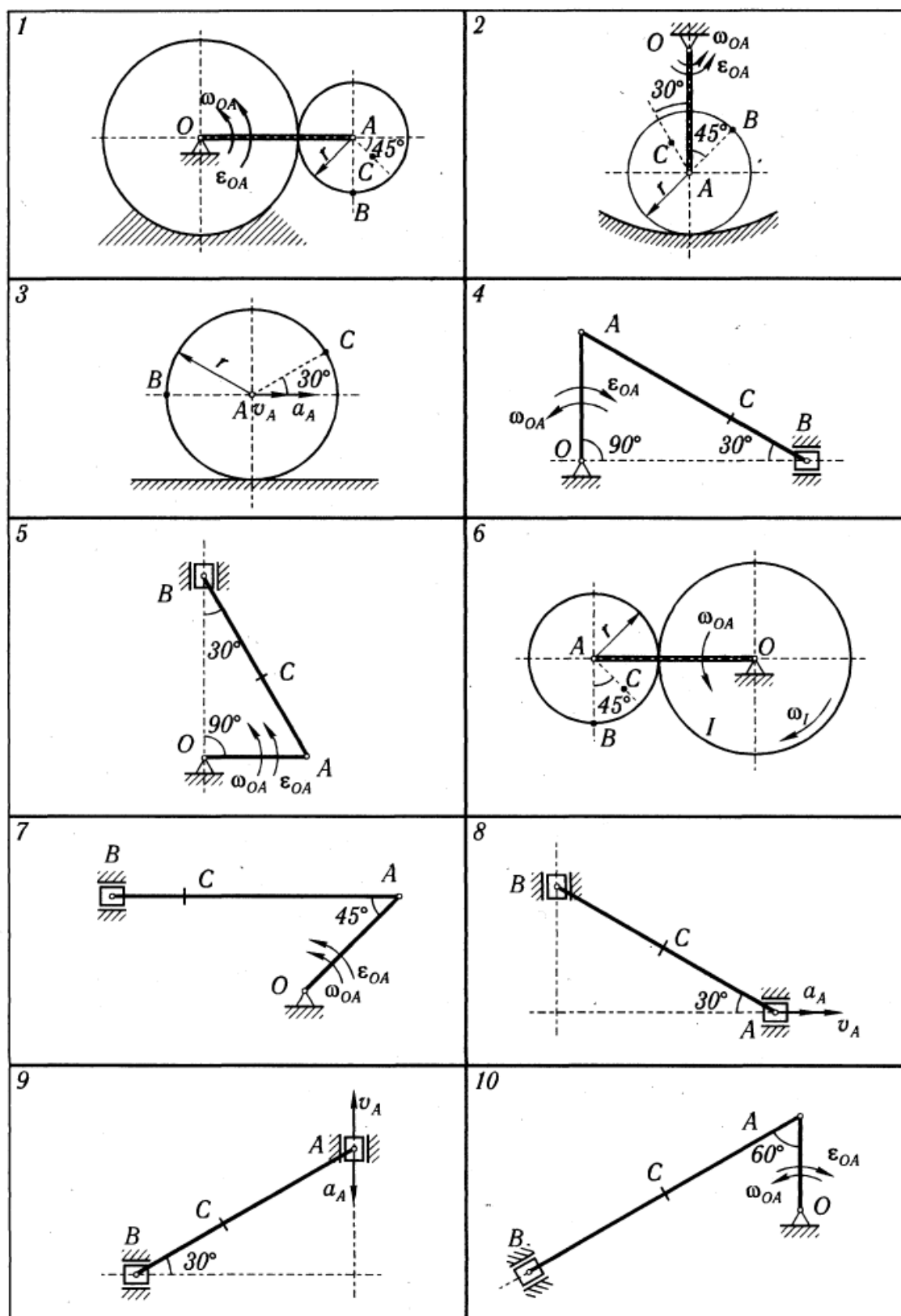


Рис. 73

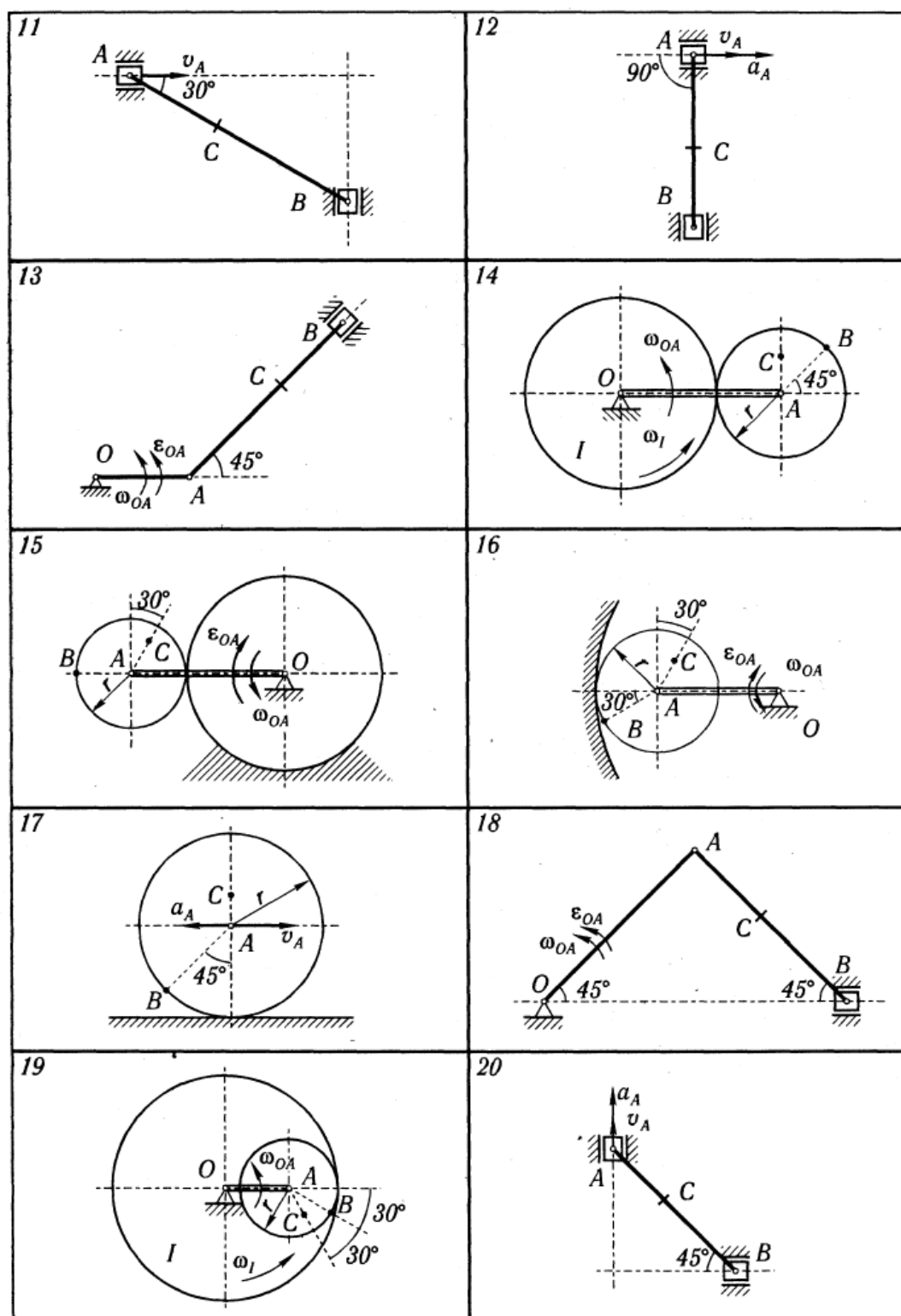


Рис. 74

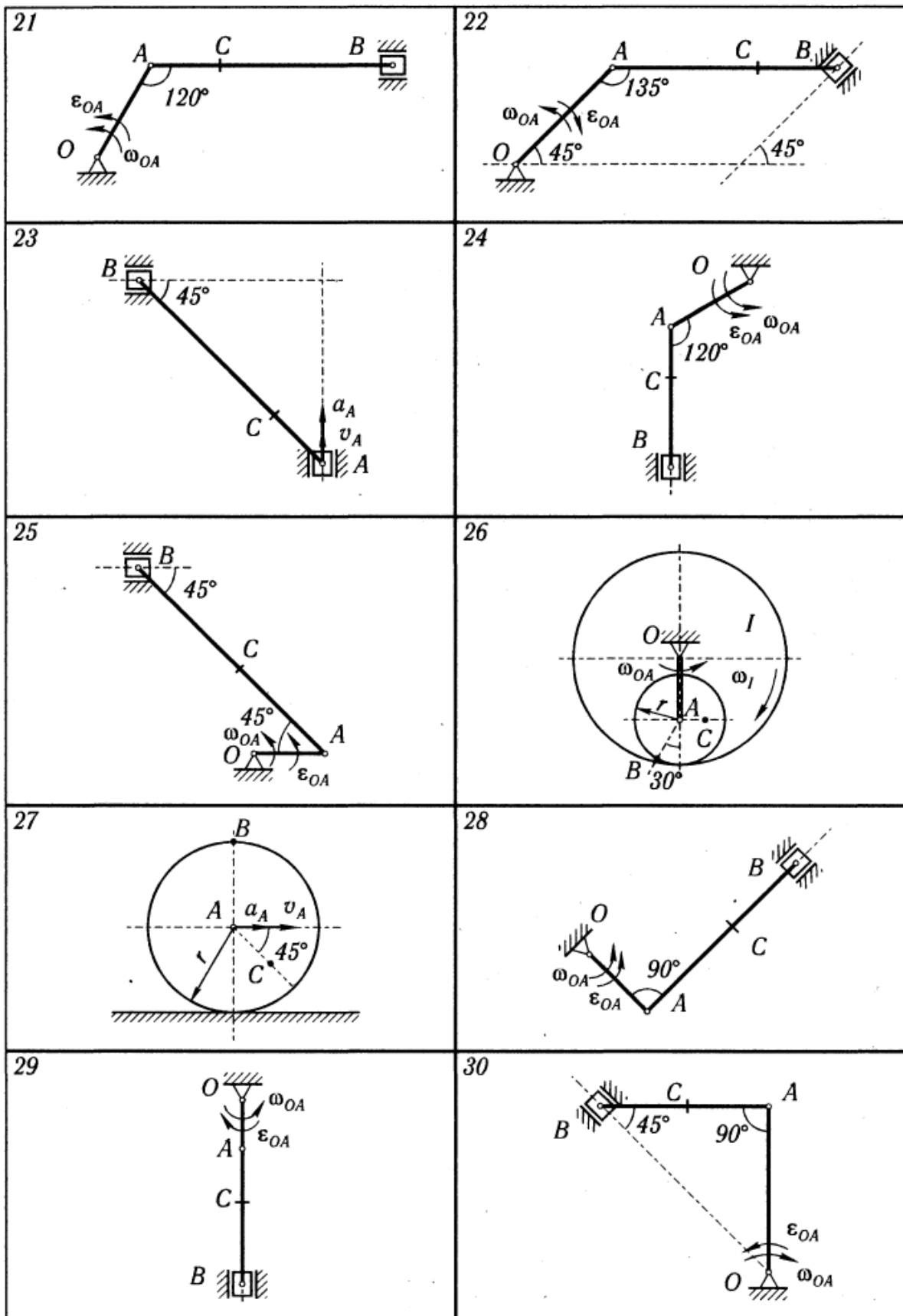


Рис. 75

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 76); исходные данные (табл. 26).

Таблица 26

Размеры, см			ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Решение. 1. *Определение скоростей точек и угловой скорости звена* (рис. 77). Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA. Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}.$$

Модули скоростей точек B и C

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Расстояния AP_{AB} , BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB} :

$$AP_{AB} = 52,0 \text{ см}; \quad BP_{AB} = 30,0 \text{ см}; \quad CP_{AB} = 36,1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим $v_A = 15,0 \text{ см/с}$; $\omega_{AB} = 0,29 \text{ рад/с}$; $v_B = 8,7 \text{ см/с}$; $v_C = 10,5 \text{ см/с}$.

Вектор \vec{v}_C направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB.

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

Направим ось x вдоль шатуна AB в направлении от B к A.

Имеем $v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x)$, или, как видно из рис. 77,

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Отсюда

$$v_B = 8,7 \text{ см}.$$

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

2. *Определение ускорений точек и углового ускорения звена* (рис. 78). Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^B + \vec{a}_A^U; \quad a_A^B = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^U = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^B + \vec{a}_{AB}^U,$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_A^U + \vec{a}_{AB}^B + \vec{a}_{AB}^U. \quad (1)$$

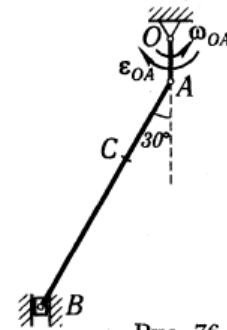


Рис. 76

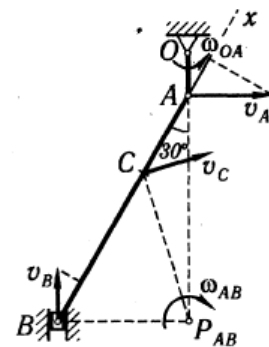


Рис. 77

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a_{AB}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a_A^B = 20,0 \text{ см/с}^2; \quad a_A^u = 22,5 \text{ см/с}^2; \quad a_{AB}^u = 5,0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_A^u направлен от A к O . Вектор \vec{a}_A^B перпендикулярен вектору \vec{a}_A^u и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа OA — замедленное).



Вектор \vec{a}_{AB}^u направлен от B к A . Что касается ускорения \vec{a}_B точки B и вращательного ускорения \vec{a}_{AB}^B , то известны только линии действия этих векторов: \vec{a}_B — по вертикали вдоль направляющих ползуна, \vec{a}_{AB}^B — перпендикулярно AB .

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 78, а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y , как показано на рис. 78, г, получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^B \cos 60^\circ + a_{AB}^u \cos 30^\circ + a_{AB}^B; \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^B \cos 30^\circ + a_A^u \cos 60^\circ + a_{AB}^B. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим

$$a_B = 16,7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение \vec{a}_B направлено, как показано на рис. 78, а.

Из уравнения (3) получаем

$$a_{AB}^B = -20,2 \text{ см/с}^2.$$

Направление \vec{a}_{AB}^B противоположно показанному на рис. 78, а.

Ускорение \vec{a}_B и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 78, б.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь a_{AB}^B — алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = |a_{AB}^B|/AB.$$

Вычисляя, находим

$$\varepsilon_{AB} = 0,34 \text{ рад/с}^2.$$

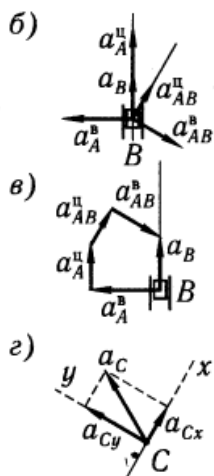


Рис. 78

Направление ускорения \vec{a}_{AB}^B относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB} . Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном — противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.

Определить \vec{a}_B и \vec{a}_{AB}^B можно и графически — построением многоугольника ускорений.

Отложим из точки B согласно (1) в выбранном масштабе последовательно векторы \vec{a}_A , \vec{a}_A^u и \vec{a}_{AB}^u (рис. 78, в). Через конец вектора \vec{a}_{AB}^u проведем прямую, параллельную вращательному ускорению \vec{a}_{AB}^B , т. е. перпендикулярно \vec{a}_B , до пересечения ее с прямой, по которой направлено ускорение \vec{a}_B .

Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.

Модули a_B и a_{AB}^B могут быть найдены измерением на чертеже.

Определяем ускорение точки C :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_A^u + \vec{a}_{AC}^B + \vec{a}_{AC}^u.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении AB вокруг полюса A

$$a_{AC}^B = \varepsilon_{AB} \cdot AC; \quad a_{AC}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AC,$$

или

$$a_{AC}^B = 6,8 \text{ см/с}^2; \quad a_{AC}^u = 1,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_{AC}^B перпендикулярен вектору \vec{a}_{AC}^u и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB} .

Ускорение точки C находим способом проекций (рис. 78, а):

$$a_{Cx} = a_{AC}^u + a_A^u \cos 30^\circ - a_A^B \cos 60^\circ,$$

$$a_{Cy} = a_A^u \cos 60^\circ + a_A^B \cos 30^\circ - a_{AC}^B,$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

В результате вычислений получаем: $a_{Cx} = 11,2 \text{ см/с}^2$; $a_{Cy} = 21,8 \text{ см/с}^2$; $a_C = 24,5 \text{ см/с}^2$ (рис. 78, з).

Приведем решение этой же задачи другим, более общим методом.

На рис. 79 показана схема механизма в некотором произвольном положении.

Проведем оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются условия

$$\vec{r}_B = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (4)$$

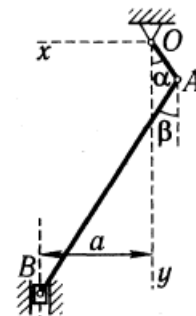


Рис. 79

(\vec{r}_B — радиус-вектор точки B , проведенный из центра O),

$$x_B = a = \text{const.} \quad (5)$$

Проецируя (4) на ось x , с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin \alpha + AB \cdot \sin \beta = a. \quad (6)$$

Для определения угловой скорости $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ звена AB и углового ускорения $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos \alpha / (AB \cdot \cos \beta). \quad (8)$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$, имеем

$$OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos \beta \cdot \varepsilon_{AB} = 0;$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \tan \beta + OA(\varepsilon_{OA} \cos \alpha - \omega_{OA}^2 \sin \alpha) / (AB \cdot \cos \beta). \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять ω_{AB} и ε_{AB} для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 30^\circ$).

Заметим, что ω_{OA} и ε_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α . В данном случае $\omega_{OA} = 1,5$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = -2,0$ рад/с². Смысл знаков ω_{AB} и ε_{AB} определяется направлением отсчета угла β .

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y , получаем

$$y_B = OA \cdot \cos \alpha + AB \cdot \cos \beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin \beta \cdot \varepsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$ на оси x и y .

Зада н и е Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1—5 (рис. 117, схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f .

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD , наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и h .

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0,2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC .

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 3,5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить v_B и τ .

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9,8$ м; $\beta = 60^\circ$; $f = 0$. Определить α и T .

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $l = 9,8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45^\circ$. Определить f и v_C .

Варианты 6—10 (рис. 117, схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB , наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l , со скоростью v_A . Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f . Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью v_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$; $f = 0,1$; $\tau = 0,2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30^\circ$.
Определить l и v_C .

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45^\circ$.
Определить v_B и T .

Вариант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0,3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60^\circ$. Определить α и d .

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\tau = 0,3$ с; $f = 0,1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45^\circ$.
Определить v_B и v_A .

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60^\circ$.
Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC .

Варианты 11—15 (рис. 117, схема 3). Имея в точке A скорость v_A , мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l , составляющему с горизонтом угол α . При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d , находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью v_C . Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m .

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4,5$ м/с; $d = 3$ м. Определить τ и h .

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4,5$ м/с; $h = 1,5$ м. Определить v_A и d .

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1,5$ м. Определить P и l .

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $P = 2,2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить v_B и v_C .

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m .

Варианты 16—20 (рис. 117, схема 4). Камень скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l . Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f . Имея в точке B скорость v_B , камень через T с ударяется в точке C о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0,2$; $d = 2,5$ м. Определить h и T .

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить d и f .

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $l = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0,1$; $d = 3$ м. Определить h и τ .

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $\tau = 1,5$ с; $d = 2$ м. Определить v_A и h .

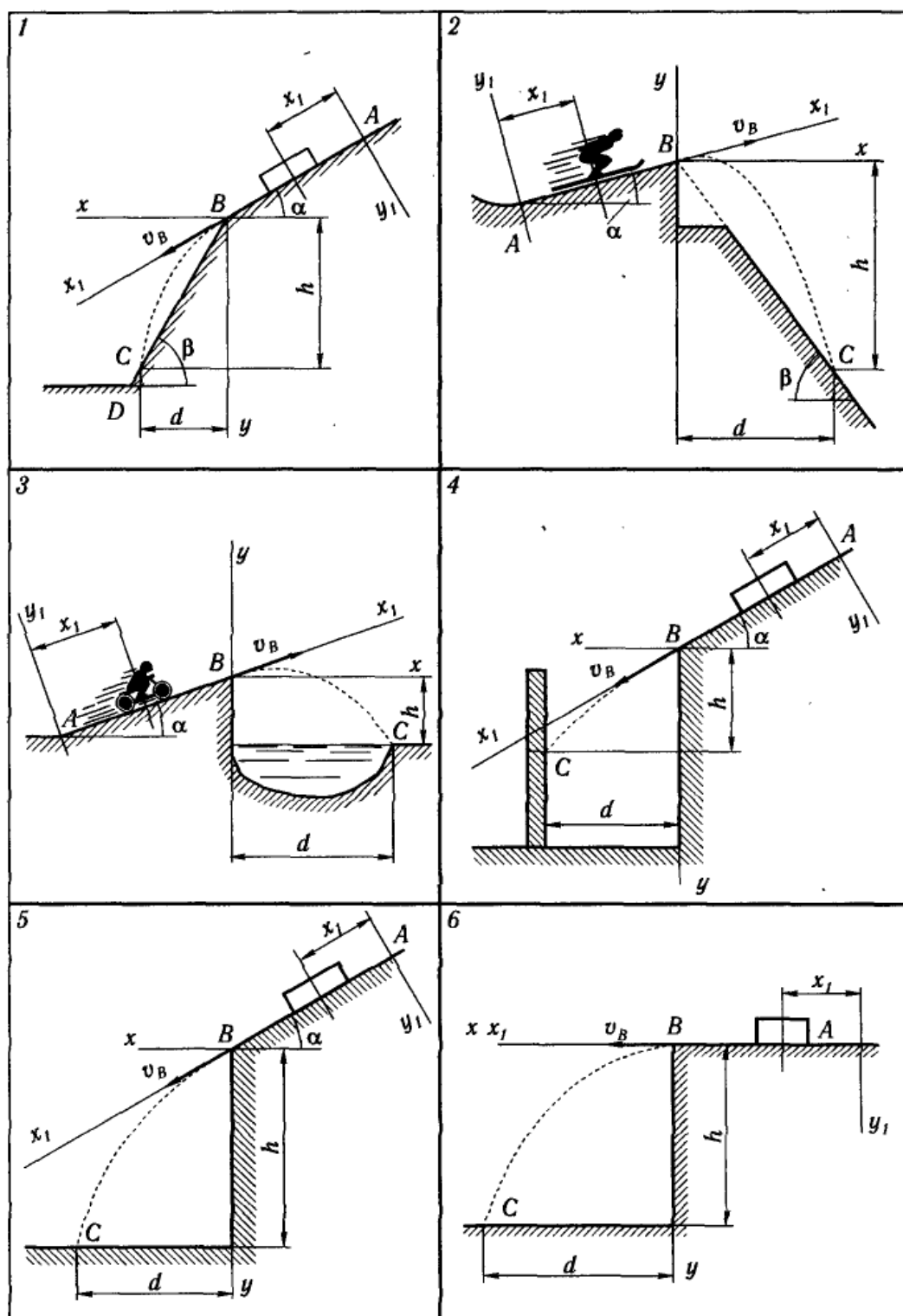


Рис.117

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Определить l и τ .

Варианты 21—25 (рис. 117, схема 5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения равен f . Через τ с тело в точке B со скоростью v_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью v_C ; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 1$ м/с; $\tau = 1,5$ с; $h = 10$ м. Определить v_B и d .

Вариант 22. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45^\circ$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить f и уравнение траектории на участке BC .

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9,81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T .

Вариант 24. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить τ и h .

Вариант 25. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 6$ м; $h = 4,5$ м. Определить τ и v_C .

Варианты 26—30 (рис. 117, схема 6). Имея в точке A скорость v_A , тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f . Со скоростью v_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью v_C , находясь в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $v_A = 7$ м/с; $f = 0,2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м. Определить d и v_C .

Вариант 27. Дано: $v_A = 4$ м/с; $f = 0,1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить v_B и h .

Вариант 28. Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0,3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и T .

Вариант 29. Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2,5$ м; $h = 20$ м. Определить f и d .

Вариант 30. Дано: $f = 0,25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и τ .

Пример выполнения задания (рис. 118). В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC . Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость $v_0 = 0$, определить наименьшую ширину полки b и скорость v_C , с которой камень падает на нее. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l , камень движется τ с.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75^\circ$.
Определить b и v_C .

Решение. Рассмотрим движение камня на участке AB . Принимая камень за материальную точку, покажем (рис. 118) действующие на него силы: вес \vec{G} , нормальную реакцию \vec{N} и силу трения скольжения \vec{F} . Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB :

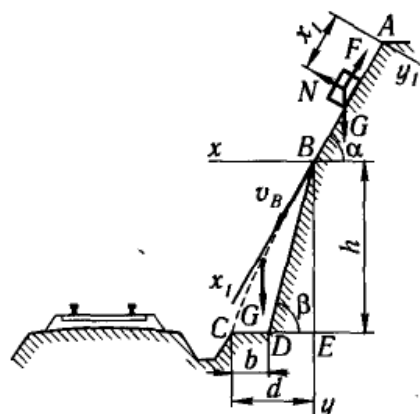


Рис. 118

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0^*$.

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2.$$

Для момента τ , когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B; \quad x_1 = l,$$

т. е.

$$v_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau;$$

$$l = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \tau^2,$$

* Постоянные интегрирования $C_1 - C_6$ во всех 30 вариантах задания можно найти, вводя начальные условия на первом и втором участках движения точки. Тем не менее в ряде вариантов более естественно воспользоваться граничными условиями, когда значения координат и скоростей заданы не для одного, а для разных моментов времени.

откуда

$$v_B = 2l/\tau,$$

т. е.

$$v_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C .

Показав силу тяжести \vec{G} , действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= 0; \\ \dot{x}_0 &= v_B \cos \alpha; & \dot{y}_0 &= v_B \sin \alpha. \end{aligned}$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_3; & \dot{y} &= gt + C_4; \\ x &= C_3t + C_5; & y &= gt^2/2 + C_4t + C_6. \end{aligned}$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= C_3; & \dot{y}_0 &= C_4; \\ x_0 &= C_5; & y_0 &= C_6. \end{aligned}$$

Отсюда найдем, что

$$\begin{aligned} C_3 &= v_B \cos \alpha; & C_4 &= v_B \sin \alpha; \\ C_5 &= 0; & C_6 &= 0. \end{aligned}$$

Получим следующие уравнения проекций скорости камня:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = gt^2/2 + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2/(2v_B^2 \cos^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2,11 \text{ м}, \quad d_2 = -7,75 \text{ м.}$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d = 2,11 \text{ м}$.

Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - h/\operatorname{tg} 75^\circ, \quad \text{или } b = 0,77 \text{ м.}$$

Используя уравнение движения камня $x = v_B \cos \alpha \cdot t$, найдем время T движения камня от точки B до точки C :

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

по формуле

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 0,53 \text{ с}$

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2},$$

или

$$v_C = 12,8 \text{ м/с.}$$

2.6 Д-10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

**Задание Д.10. Применение теоремы об изменении
кинетической энергии
к изучению движения механической системы**

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 152—154. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1—3, 5, 6, 8—12, 17—23, 28—30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6—9, 11, 13—15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами

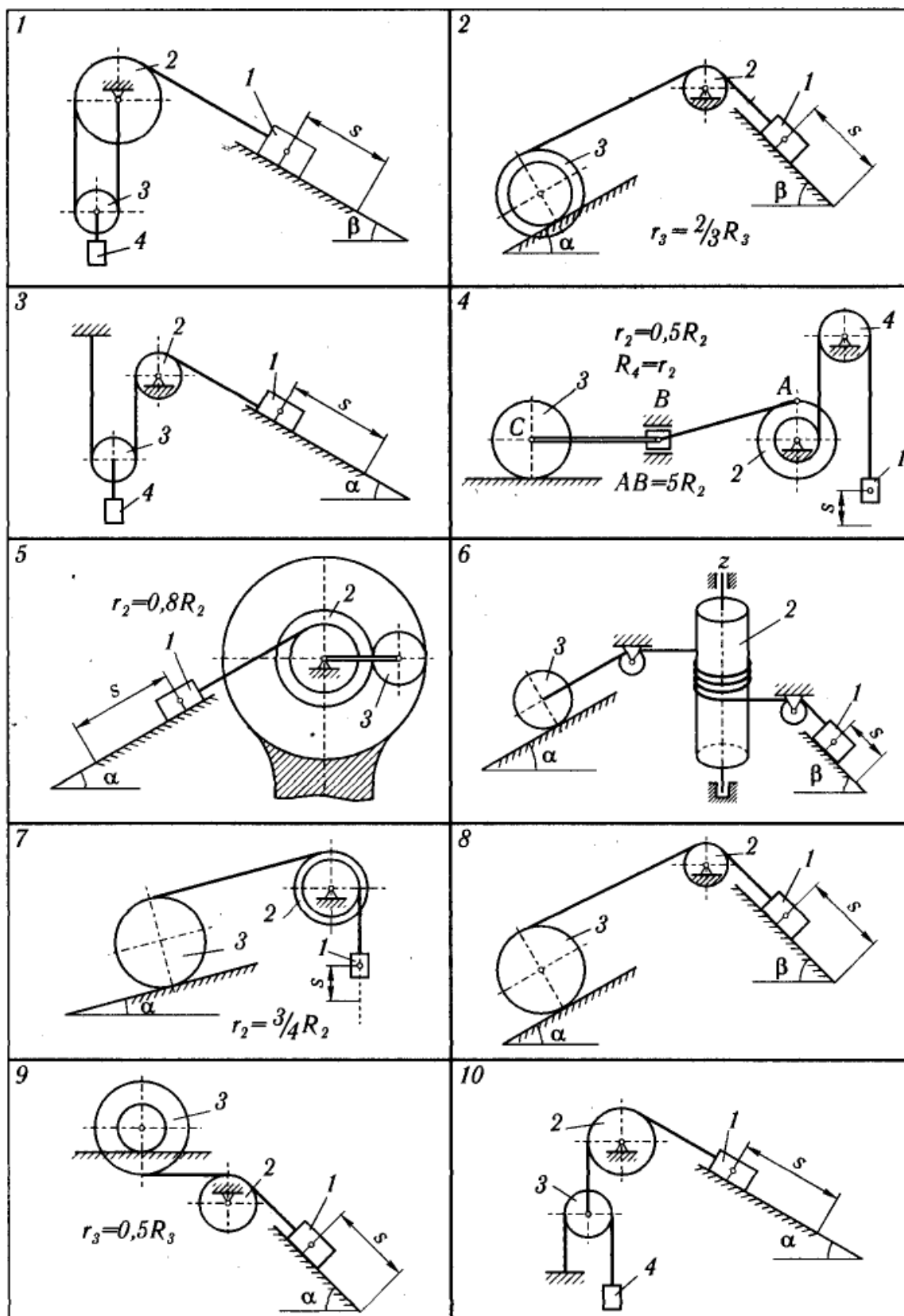


Рис. 152

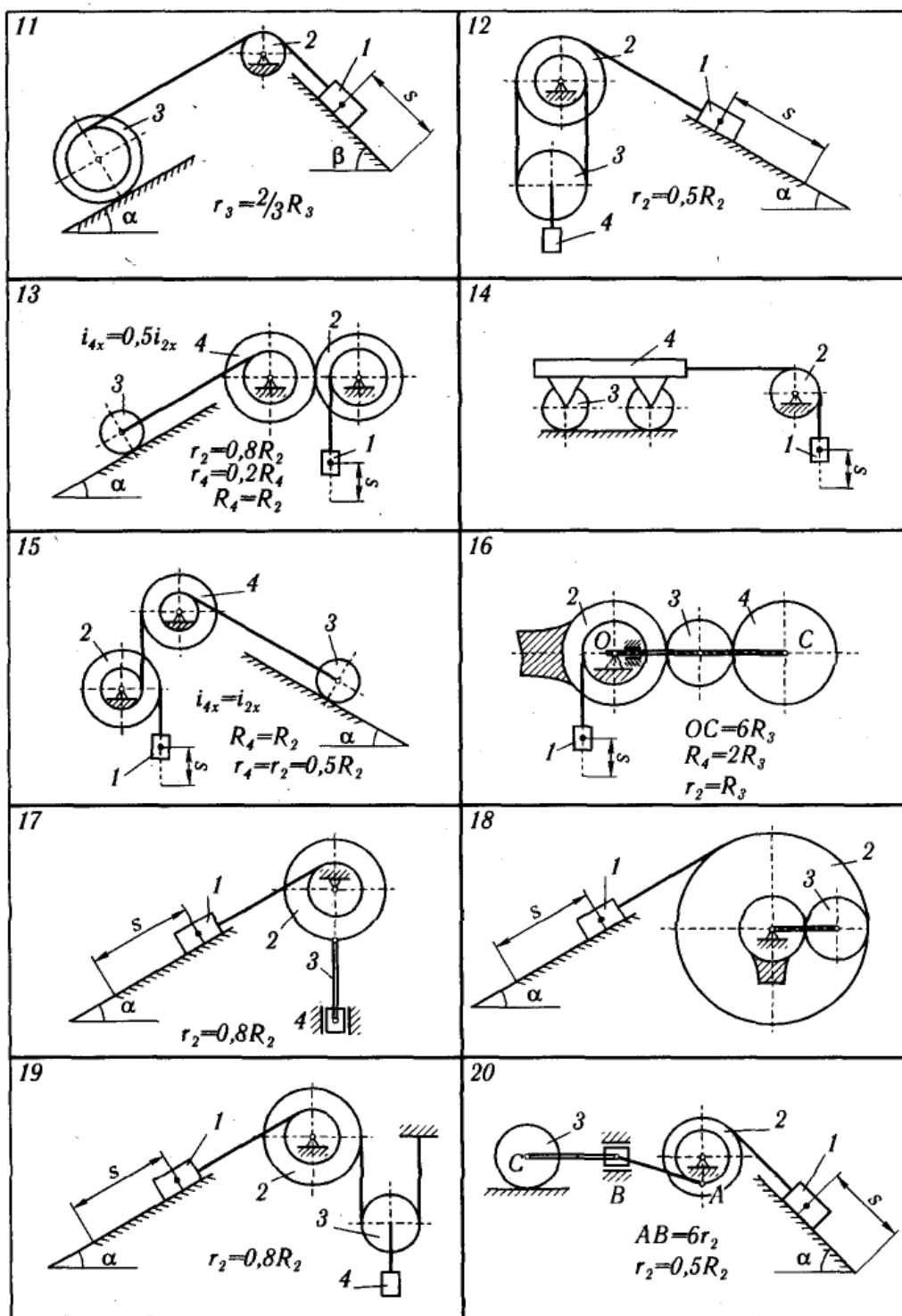


Рис. 153

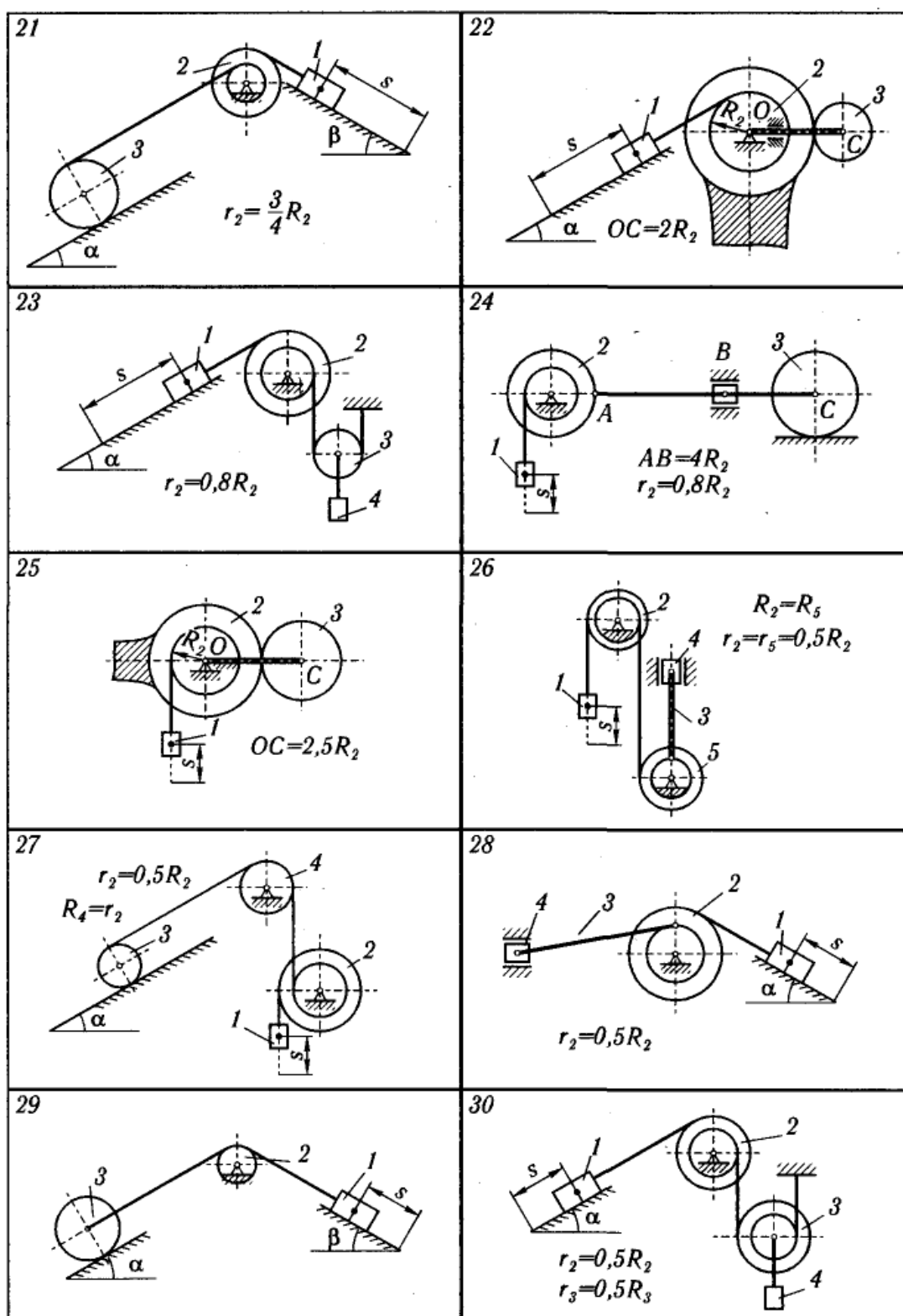


Рис. 154

нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s .

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 — массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей; $i_{2x}, i_{3\xi}$ — радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β — углы наклона плоскостей к горизонту; t — коэффициент трения скольжения; δ — коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 47. Блоки в катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Пример выполнения задания. Дано: m_1 — масса груза 1, $m_2 = 2m_1, m_3 = m_1, m_4 = 0,5m_1, m_5 = 20m_1, R_2 = R_3 = 12$ см, $r_2 = 0,5R_2, r_3 = 0,75R_3, R_5 = 20$ см, $AB = l = 4R_3, i_{2\xi} = 8$ см,

$i_{3x} = 10$ см, $\alpha = 30^\circ, f = 0,1, \delta = 0,2$ см, $s = 0,06\pi$ м. Сопротивление качению тела 2 не учитывать. Шатун 4 считать тонким однородным стержнем; каток 5 — однородный сплошной цилиндр. Массами звена BC_5 и ползуна B пренебречь. На рис. 155, а показана механическая система в начальном положении.

Найти v_1 — скорость груза 1 в конечном положении.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \quad (1)$$

где T_0 и T — кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_i^E$ — сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное; $\sum A_i^J$ — сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями,

$$\sum A_i^J = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_i^E. \quad (2)$$

Для определения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил надо изобразить систему в конечном положении (рис. 155, б, в).

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т. е. уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорости и перемещения груза 1.

Таблица 47

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	кг				см			см			i_{2x}	$i_{3\xi}$	α	β	f	δ , см	s , м	Примечание
	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{3\xi}$	град													
1	m	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	-	-	-	-	-	60	0,10	-	2	Массами звеньев АВ, ВС и пол- зуна В пренебречь								
2	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	20	30	45	0,22	0,20	2									
3	m	m	$1/10m$	m	-	-	-	-	45	-	0,10	-	2									
4	m	$2m$	$40m$	m	20	40	18	-	-	-	-	0,30	0,1π									
5	m	$2m$	m	-	20	15	18	-	60	-	0,12	-	0,28π	Массой водила пренебречь								
6	m	$3m$	m	-	-	28	-	-	30	45	0,10	0,28	1,5									
7	m	$2m$	$2m$	-	16	25	14	-	30	-	-	0,20	2									
8	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	-	30	45	0,15	0,20	1,75									
9	m	$2m$	$9m$	-	-	30	-	20	30	-	0,12	0,25	1,5	Массы каждого из четырех колес одинаковы								
10	m	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	-	-	-	-	60	-	0,10	-	8									
11	m	$1/2m$	$1/4m$	-	-	30	-	25	30	45	0,17	0,20	2,5									
12	m	$1/2m$	$1/5m$	m	30	-	20	-	30	-	0,20	-	2,5									
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	-	30	-	-	0,24	2	Массой водила пренебречь								
14	m	$1/2m$	$5m$	$4m$	-	25	-	-	-	-	-	0,20	2									
15	m	$1/2m$	$4m$	$1/2m$	20	15	18	-	60	-	-	0,25	1,5									
16	m	$1/10m$	$1/20m$	$1/10m$	10	12	-	-	-	-	-	-	0,05π									
17	m	$1/4m$	$1/5m$	$1/10m$	20	-	15	-	60	-	0,10	-	0,16π	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень								

Продолжение табл. 47

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	кг				см				град			f	δ , см	s , м	Примечание
	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	i_{3x}	α	β									
	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	i_{3x}	α	β									
18	m	$3m$	m	—	35	15	32	—	60	—	—	0,15	—	0,2 π	Массой водила пренебречь				
19	m	$1/3m$	$1/10m$	m	24	—	20	—	60	—	—	0,15	—	1,5	Массами звеньев AB , BC и ползу- на B пренебречь				
20	m	$2m$	$20m$	—	20	15	16	—	30	—	—	0,10	0,20	0,2 π	Массой водила пренебречь				
21	m	m	$2m$	—	20	20	16	—	30	45	0,20	0,32	1,2	—	Массой водила пренебречь				
22	m	$1/2m$	$1/4m$	—	20	10	—	—	60	—	0,17	—	0,1 π	—	Массами звеньев AB , BC и ползу- на B пренебречь				
23	m	m	$1/10m$	$4/5m$	20	—	18	—	30	—	0,10	—	1	—	Массой водила пренебречь				
24	m	$3m$	$20m$	—	20	30	18	—	—	—	—	—	0,08 π	0,60	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы				
25	m	$1/3m$	$1/4m$	—	16	20	—	—	—	—	—	—	0,04 π	—	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень				
26	m	$1/2m$	m	$1/3m$	30	—	20	—	—	—	—	—	0,6 π	—	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень				
27	m	m	$6m$	$1/2m$	20	20	16	—	30	—	—	—	0,20	2	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень				
28	m	$2m$	$3m$	—	20	—	14	—	60	—	—	0,10	—	0,1 π	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень				
29	m	$1/4m$	$1/8m$	—	—	35	—	—	15	30	0,20	0,20	2,4	—	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень				
30	m	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	—	0,12	—	—	2	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень				

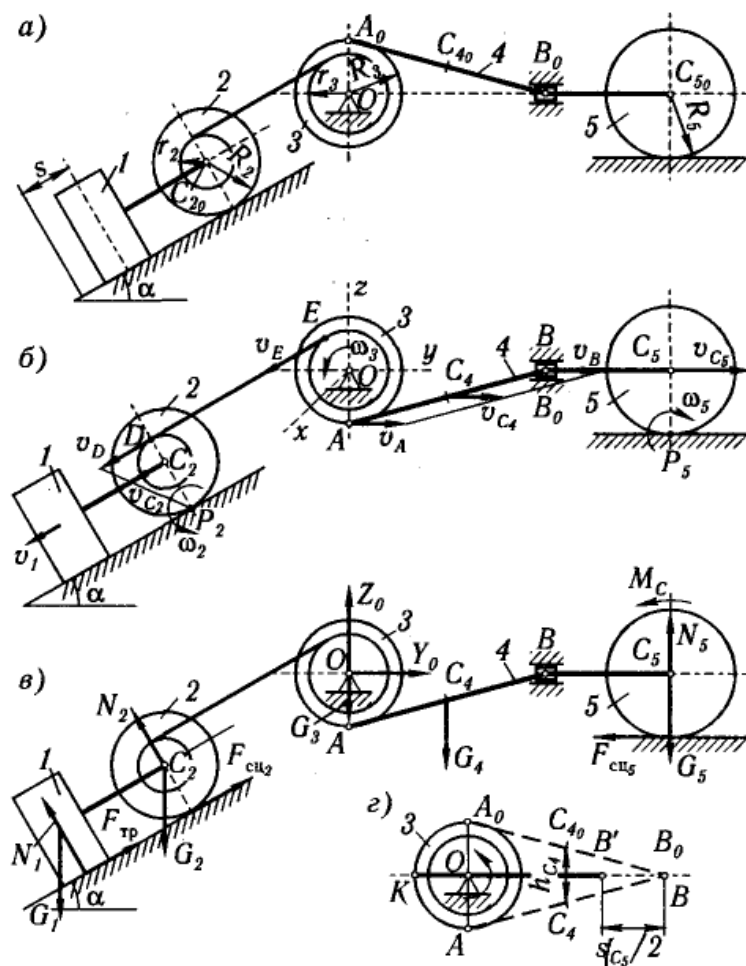


Рис. 155

Скорость центра масс C катка 2 равна скорости груза 1:

$$v_{C2} = v_1. \quad (3)$$

Угловая скорость катка 2, мгновенный центр скоростей которого находится в точке P_2 ,

$$\omega_2 = v_{C2} / (C_2 P_2).$$

Учитывая (3), получим

$$\omega_2 = v_1 / R_2. \quad (4)$$

Скорость точки D катка 2

$$v_D = \omega_2 \cdot DP_2,$$

т. е.

$$v_D = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Скорость точки E блока 3 равна скорости точки D катка 2:

$$v_E = v_D. \quad (5)$$

Но

$$v_E = \omega_3 r_3.$$

Следовательно,
по (5),

$$\omega_3 r_3 = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Так как

$$R_2 = 2r_2,$$

то

$$\omega_3 r_3 = 3/2 v_1,$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{3}{2} \frac{v_1}{r_3}. \quad (6)$$

Заменяя в формуле (6)

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}, \quad v_1 = \frac{ds}{dt},$$

получим

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \frac{ds}{dt},$$

или

$$d\varphi_3 = \frac{3}{2r_3} ds.$$

После интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{s}{r_3}. \quad (7)$$

Когда груз 1 пройдет путь $s = 0,06\pi$ м, блок 3 повернется на угол φ_3 :

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{s}{r_3} = \frac{3}{2} \frac{0,06\pi}{0,09} = \pi.$$

При этом повороте блока 3 на 180° его точка A_0 перейдет в конечное положение A и шатун 4 из начального положения A_0B_0 перейдет в конечное положение AB .

Каток 5 переместится влево при повороте блока 3 на угол $\pi/2$ и вправо при повороте блока еще на $\pi/2$; значит, конечное положение катка 5 совпадает с его начальным положением.

Таким образом, конечное положение всей системы вполне определено (рис. 155, б).

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (8)$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \quad (9)$$

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{J_{2\xi} \omega_2^2}{2}, \quad (10)$$

где $J_{2\xi}$ — момент инерции катка 2 относительно его продольной центральной оси $C_{2\xi}$:

$$J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2. \quad (11)$$

Подставляя (3), (4), (11) в формулу (10), получаем

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2 R_2^2} v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} \right) v_1^2. \quad (12)$$

Кинетическая энергия тела 3, вращающегося вокруг оси Ox ,

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{3x} \omega_3^2, \quad (13)$$

где J_{3x} — момент инерции блока 3 относительно оси Ox :

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2. \quad (14)$$

Подставляя (6), (14) в формулу (13), получаем

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3x}^2}{2} \left(\frac{3 v_1}{2 r_3} \right)^2 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} v_1^2. \quad (15)$$

Кинетическая энергия шатуна 4, совершающего плоское движение,

$$T_4 = \frac{m_4 v_{C4}^2}{2} + \frac{J_{4\xi} \omega_4^2}{2},$$

где v_{C4} — скорость центра масс C_4 шатуна 4; ω_4 — угловая скорость шатуна 4; $J_{4\xi}$ — момент инерции шатуна относительно центральной оси $C_{4\xi}$.

Для определения v_{C4} и ω_4 найдем положение мгновенного центра скоростей шатуна 4. Так как скорости точек A и B в этот момент параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна 4 находится в бесконечности; следовательно, угловая скорость шатуна в данный момент $\omega_4 = 0$, а скорости всех его точек параллельны и равны между собой. Таким образом, кинетическая энергия шатуна 4

$$T_4 = m_4 v_{C4}^2 / 2, \quad (16)$$

где

$$v_{C4} = v_A. \quad (17)$$

Вращательная скорость точки A тела 3

$$v_A = \omega_3 R_3, \quad (18)$$

или с учетом (14)

$$v_A = 3/2 R_3 v_1 / r_3.$$

Поскольку $r_3 = 3/4 R_3$, получим

$$v_A = 2v_1.$$

По (17)

$$v_{C4} = v_A, \quad v_{C4} = 2v_1. \quad (19)$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетической энергии шатуна 4 принимает вид

$$T_4 = 1/2 m_4 (2v_1)^2 = 2m_4 v_1^2. \quad (20)$$

Кинетическая энергия катка 5, совершающего плоское движение,

$$T_5 = m_5 v_{C5}^2 / 2 + J_{5\xi} \omega_5^2 / 2,$$

где v_{C5} — скорость центра масс C_5 катка 5; $J_{5\xi}$ — момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной продольной оси $C_5\xi$, $J_{5\xi} = m_5 R_5^2 / 2$; ω_5 — угловая скорость катка 5.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке P_5 . Поэтому

$$\omega_5 = v_{C5} / R_5.$$

Следовательно,

$$T_5 = \frac{m_5 v_{C5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2 v_{C5}^2}{2 \cdot 2 R_5^2} = \frac{3}{4} m_5 v_{C5}^2.$$

Так как звено BC_5 совершает поступательное движение, то $v_{C5} = v_B$, но $v_B = v_{C4} = 2v_1$. Значит, $v_{C5} = 2v_1$.

Поэтому выражение кинетической энергии катка 5 принимает вид

$$T_5 = 3/4 m_5 (2v_1)^2 = 3m_5 v_1^2. \quad (21)$$

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (8) с учетом (9), (12), (15), (20), (21):

$$T = m_2 v_1^2 / 2 + m_2 (1 + i_{2\xi}^2 / R_2^2) v_1^2 / 2 + 9/8 m_3 v_1^2 i_{3x}^2 / r_3^2 + 2m_4 v_1^2 + 3m_5 v_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс, получаем

$$T = m_1 v_1^2 [1 + 2(1 + i_{2\xi}^2 / R_2^2) + 9/4 i_{3x}^2 / r_3^2 + 2 + 120] / 2,$$

или

$$T = 129 m_1 v_1^2 / 2. \quad (22)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении. Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис. 155, в).

Работа силы тяжести \vec{G}_1

$$A_{G_1} = G_1 h_1 = m_1 g s \sin \alpha. \quad (23)$$

Работа силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$

$$A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}}s.$$

Так как

$$F_{\text{тр}} = fN_1 = fG_1 \cos \alpha,$$

то

$$A_{F_{\text{тр}}} = -f m_1 g s \cos \alpha. \quad (24)$$

Работа силы тяжести \vec{G}_2

$$A_{G_2} = G_2 h_{C_2} = m_2 g s \sin \alpha. \quad (25)$$

Работа сил сцепления $\vec{F}_{\text{сц}2}$, $\vec{F}_{\text{сц}5}$ катков 2 и 5 равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей этих катков.

Работа силы тяжести \vec{G}_4

$$A_{G_4} = G_4 h_{C_4},$$

где h_{C_4} — вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна 4 из начального положения в его конечное положение (рис. 155, з):

$$h_{C_4} = R_3,$$

$$A_{G_4} = m_4 g R_3. \quad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 5

$$A_{M_C} = -M_C \varphi_5, \quad (27)$$

где $M_C = \delta N_5 = \delta G_5$ — момент пары сил сопротивления качению катка 5; φ_5 — угол поворота катка 5.

Так как каток 5 катится без скольжения, то угол его поворота

$$\varphi_5 = s_{C_5}/R_5, \quad (28)$$

где s_{C_5} — перемещение центра тяжести C_5 катка 5.

В данном примере работу пары сил сопротивления вычислим как сумму работ этой пары при качении катка 5 влево при повороте тела 3 на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело 3 повернется еще на угол $\pi/2$.

Перемещение центра тяжести C_5 катка 5 равно перемещению ползуна B влево и вправо:

$$s_{C_5} = 2(B_0 B'). \quad (29)$$

Определим перемещение $B_0 B'$ при повороте тела 3 на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки B выберем неподвижную точку K плоскости (рис. 155, з). При этом повороте тела 3 шатун из положения $A_0 B_0$ перейдет в положение $K B'$. Тогда

$$B_0 B' = K B_0 - K B',$$

где

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2},$$

$$KB' = l = 4R_3.$$

Следовательно,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0,88R_3. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), а затем в (28), находим полный угол поворота катка 5:

$$\varphi_5 = 1,76R_3/R_5. \quad (31)$$

Работа пары сил сопротивления качению по (27)

$$A_{Mc} = -\delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5. \quad (32)$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (23)—(26) и (32):

$$\sum A_i^E = m_1 g s \sin \alpha - f m_1 g s \cos \alpha + m_2 g s \sin \alpha + m_4 g R_3 - \delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5.$$

Подставляя заданные значения масс, получаем

$$\sum A_i^E = m_1 g s \left(\sin \alpha - f \cos \alpha + 2 \sin \alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1,76R_3}{R_5 s} \right),$$

или

$$\sum A_i^E = 1,51m_1 g s. \quad (33)$$

Согласно теореме (2), приравняем значения T и $\sum A_i^E$, определяемые по формулам (22) и (33):

$$129 \cdot m_1 v_1^2 / 2 = 1,51m_1 g s,$$

откуда

$$v_1 = 0,21 \text{ м/с}.$$

4. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов

4.1. Рассматриваемые вопросы

1. Центр тяжести твердого тела и его координаты

На каждую частицу тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действует направленная вертикально вниз сила, которая называется *силой тяжести*. Силы тяжести каждой частицы тела, строго говоря, направлены по радиусам к центру Земли и не являются параллельными. Но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, непараллельность настолько незначительна, что в расчетах с большой точностью силы тяжести их частиц можно считать параллельными, сохраняя свои значения, точки приложения и параллельность при любых поворотах тела. Поэтому, обо-

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^N P_k} \quad \text{и}$$

значив силу тяжести частицы через P_k , можно, согласно формулам

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

, найти точку С, которая неизменно связана с телом и называется центром системы параллельных сил тяжести. Таким образом, центром тяжести твердого тела называется центр системы параллельных сил тяжести частиц данного тела. Точка С — это геометрическая точка, она может и не принадлежать телу, но она всегда с ним связана, например центр тяжести баскетбольного мяча, кольца и др. Выразим силу тяжести (вес) частицы тела через ее

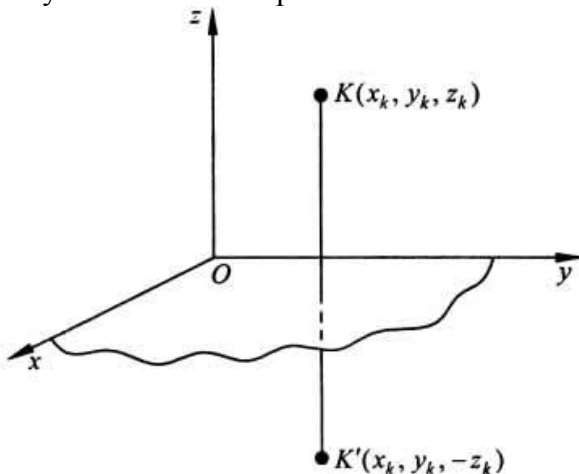
объем V . Тогда величина $\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV}$ называется *удельным весом*, а величина $\rho = \gamma/g$ — *плотностью* тела в данной точке. ("гамма"-Н/м³) ("ро"-Н*с²/м⁴)

Методы нахождения центра тяжести.

1) Метод симметрии.

Покажем, что если однородное тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то его центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

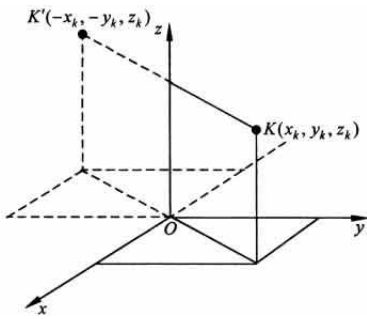
а. Пусть тело симметрично относительно плоскости Оху



Тогда вследствие симметрии каждому элементу К тела объемом $\Delta V_k(x_k, y_k, z_k)$ будет соответствовать элемент К' того же объема с координатами $(x_k, y_k, -z_k)$. Поэтому статический момент объема

$\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k = 0$ и координата $z_C = \sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k / V = 0$. Следовательно, центр тяжести тела будет лежать в плоскости симметрии Оху.

б. Пусть тело симметрично относительно оси Oz.



Тогда всякому элементу К тела объемом ΔV_k с координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать такой же по объему элемент К', расположенный симметрично относительно оси Oz и имеющий координаты $(-x_k, -y_k, z_k)$. Поэтому статические моменты $\sum_{k=1}^N x_k \Delta V_k = 0, \sum_{k=1}^N y_k \Delta V_k = 0, \sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k \neq 0$ и,

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^N x_k \Delta V_k}{V} = 0, y_c = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \Delta V_k}{V} = 0, z_c = \frac{\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k}{V} \neq 0$$

следовательно, координаты центра тяжести будут находиться на оси симметрии.

в. Пусть тело имеет центр симметрии, который примем за начало координат. Тогда всякой частице тела объемом ΔV_k , определяемой радиус-вектором \vec{r}_k , будет соответствовать частица такого же объема с радиус-вектором $(-\vec{r}_k)$, симметричная ей относительно центра О. Поэтому $\sum_{k=1}^N \vec{r}_k \Delta V_k = 0$. Следовательно, центр тяжести будет находиться в центре симметрии. Например, центры тяжести однородных куба, сферы, кольца, прямоугольной или круглой пластины лежат в геометрическом центре этих тел.

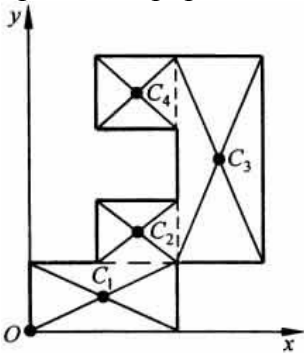
2) Метод разбиения.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^N P_k} \text{ и}$$

Этот метод основан на применении формул

$$x_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; y_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; z_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

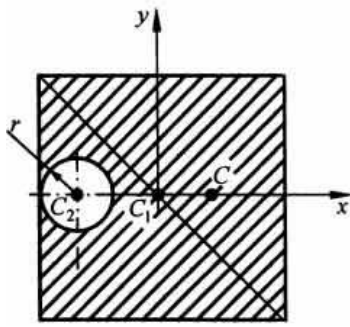
. Его используют, когда тело можно разбить на ряд частей, центры тяжести которых известны из условий симметрии. Метод разбиения можно наглядно проиллюстрировать с помощью рисунка.



Расположив тело в системе координат, разделив его мысленно на отдельные части, веса которых P_1, P_2, P_3, P_4 , а центры тяжести известны, вычислим вес тела и, согласно формулам

$$x_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; y_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; z_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

, координаты центра тяжести С всего тела. Если тело имеет вырез, причем известны центр тяжести тела без выреза и центр тяжести вырезанного тела, то для определения координат центра тяжести используют метод отрицательных масс (частный случай метода разбиения).



На рисунке изображена квадратная пластина, сторона которой a . В пластине выполнено круглое отверстие с радиусом $r=0,2a$ и координатами центра $x_2=-0,3a$; $y_2=0$. Координаты центра тяжести C , пластины без отверстия $x_1=0$, $y_1=0$. Рассмотрим два тела: пластину без отверстия и диск, соответствующий вырезанному отверстию. При использовании формул

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

вес диска будем считать отрицательным. То-

$$P = p(a^2 - \pi r^2);$$

$$x_C = \frac{1}{P} (P_1 x_1 - P_2 x_2) = \frac{p}{P} [a^2 \cdot 0 - \pi r^2 (-0,3a)] = \frac{0,3\pi a r^2}{a^2 - \pi r^2};$$

гда $y_C = 0$, , где p — вес единицы площади пластины.

2.Трение

Силой трения называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами.

Различают трение внешнее и внутреннее.

Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения или трение покоя).

Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкость или газ).

Различают сухое и жидкое (или вязкое) трение.

Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки.

Жидким (вязким) называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.

Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на трение скольжения и трение качения. Рассмотрим законы сухого трения (рис. 4.5).

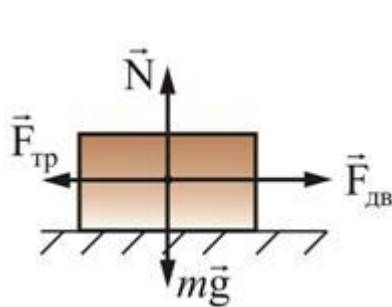


Рис. 4.5

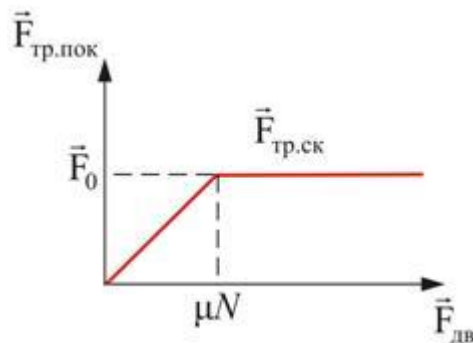


Рис. 4.6

Подействуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости, внешней силой $\vec{F}_{\text{вн}}$, постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила $\vec{F}_{\text{вн}}$ уравни-

новешивается некоторой силой $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной по касательной к трущейся поверхности, противоположной силе $\vec{F}_{\text{тр}}$. В этом случае $\vec{F}_{\text{тр}}$ и есть сила трения покоя.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю силы нормального давления N :

$$F_{\text{тр.пок}} = \mu_0 N,$$

μ_0 – коэффициент трения покоя, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение F_0 , тело начнет скользить по опоре – трение покоя $F_{\text{тр.пок}}$ сменится трением скольжения $F_{\text{ск}}$ (рис. 4.6):

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (4.4.1)$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения, но коэффициент трения μ ; здесь значительно меньше.

Подробнее рассмотрим силу трения скольжения на наклонной плоскости (рис. 4.7). На тело, находящееся на наклонной плоскости с сухим трением, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная сила реакции опоры \vec{N} и сила сухого трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила \vec{F} есть равнодействующая сил $m\vec{g}$ и \vec{N} ; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рис. 4.7 видно, что $F = mg \sin \alpha$, $N = mg \cos \alpha$.

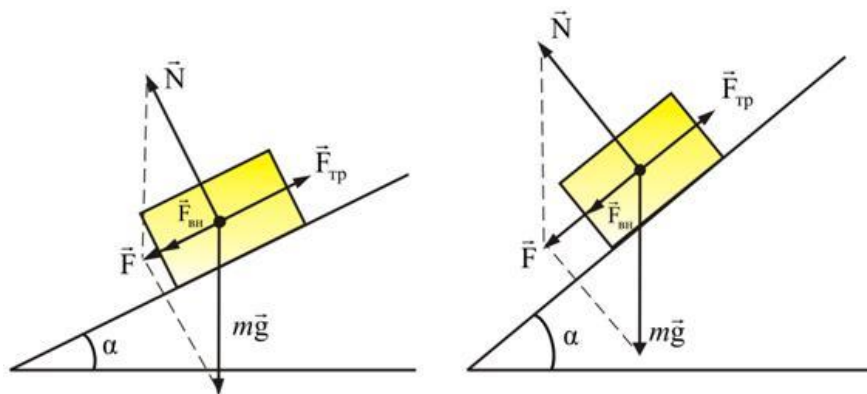


Рис. 4.7

Если $F < (F_{\text{тр}})_{\text{max}} = \mu N$ – тело остается неподвижным на наклонной плоскости. Максимальный угол наклона α определяется из условия $(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = F$ или $\mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha$, следовательно, $\tan \alpha_{\text{max}} = \mu$, где μ – коэффициент сухого трения.

$$F_{\text{тр}} = \mu N = mg \cos \alpha,$$

$$F = mg \sin \alpha.$$

При $\alpha > \alpha_{\text{max}}$ тело будет скатываться с ускорением

$$a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

$$F_{\text{ск}} = ma = F - F_{\text{тр}}.$$

Если дополнительная сила $F_{\text{вн}}$, направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол α_{max} и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

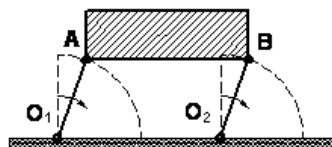
3. Предмет кинематики. Способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки.

Вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Поступательное движение твердого тела.

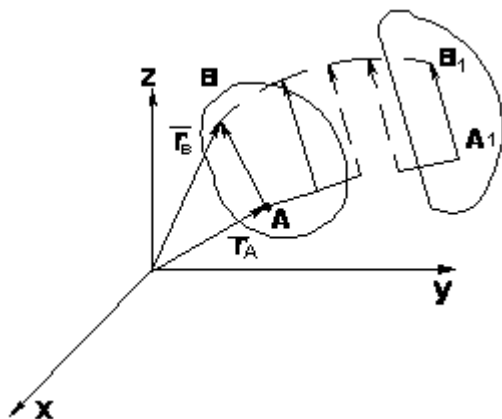
1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

Поступательное движение не значит прямолинейное:



ТЕОРЕМА: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (3.1)$$

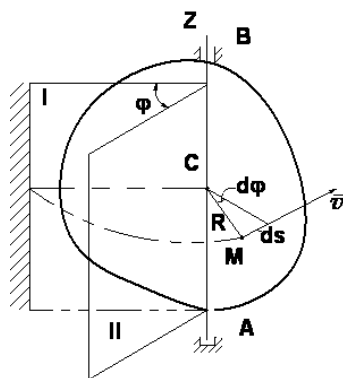
$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \quad (3.2)$$

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором во все время движения какие-либо две точки тела остаются неподвижными (проходящая через эти неподвижные точки прямая называется *осью вращения*), а все остальные точки описывают траектории, представляющие собой окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения, а центры лежат на этой оси.



$$\varphi = f(t) \quad (3.3)$$

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \dot{\varphi} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (3.5)$$

Примеры:

Равномерное вращение
($\omega = const$)

Равнопеременное вращение
($\varepsilon = const$)

$$d\varphi = \omega dt$$

$$\varphi = \omega t$$

$$\omega = \varphi/t$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n$$

$$d\omega = \varepsilon dt$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

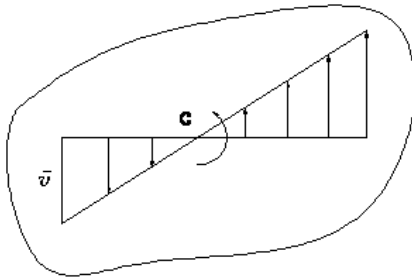
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\Rightarrow d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$$

3. Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

Вращательная скорость точки



$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = R \omega \quad (3.6)$$

Модуль вращательной скорости точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на угловую скорость тела

Ускорение точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (\rho = R)$$

$$a_\tau = R \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R}$$

или $a_\tau = R\varepsilon = a_\varepsilon$ (3.7) - вращательное ускорение

$a_n = R\omega^2 = a_\omega$ (3.8) - центростремительное ускорение

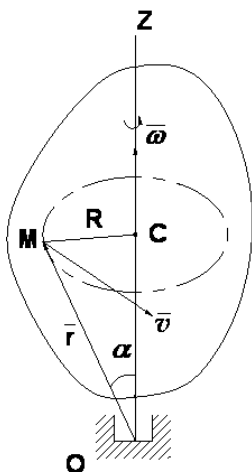
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4} \quad (3.9) - \text{полное ускорение}$$

$$a = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (3.10)$$

4. Векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений.

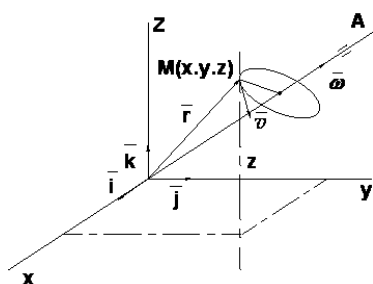
Формулы Эйлера.



$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= R \cdot \omega = \omega r \cdot \sin \alpha \\ |\bar{\omega} \times \bar{r}| &= \omega \cdot r \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \bar{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \\ &+ \bar{k}(\omega_x y - \omega_y x) \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

- формулы Эйлера

Векторные выражения вращательного и центростремительного ускорения точки

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \bar{\epsilon}; \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{a} &= \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} \end{aligned}$$

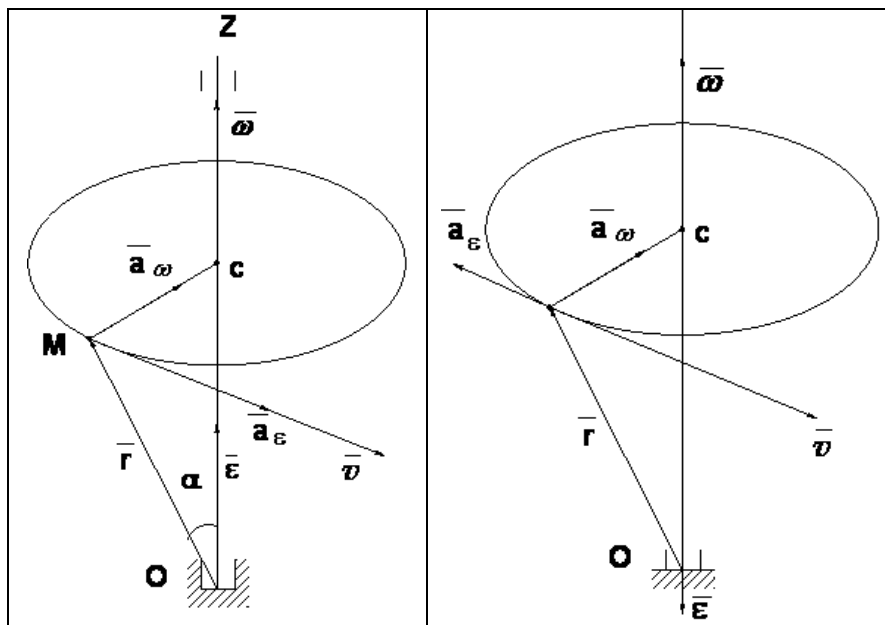
$$\bar{a} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad - \text{полное ускорение точки}$$

$$|\bar{\epsilon} \times \bar{r}| = \epsilon \cdot r \cdot \sin \alpha \Rightarrow |\bar{a}_\epsilon| = |\bar{\epsilon} \times \bar{r}| \quad - \text{вращательное ускорение точки}$$

$$a_\omega = \omega^2 R = \omega \cdot v$$

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \omega \cdot v \cdot \sin(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega \cdot v$$

- центростремительное ускорение точки



4. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

Основной задачей кинематики сложного движения твердого тела является установление соотношений между характеристиками абсолютного и относительного движений. Сложное движение твердого тела может состоять из поступательных движений, вращательных движений, или может быть получено в результате сложения поступательного и вращательного движений. В некоторых задачах кинематики заданное сложное движение твердого тела раскладывают на составляющие движения (анализ); в других — требуется определить сложное движение твердого тела как результат сложения более простых движений (синтез). Как при анализе, так и при синтезе движений речь идет о разложении и сложении движений, рассматриваемых в данный момент (мгновенных движений). Сложение поступательных движений твердого тела.

Теорема. В результате сложения мгновенных поступательных движений твердого тела получается результирующее мгновенно поступательное движение.

Доказательство. Пусть твердое тело одновременно участвует в двух мгновенных поступательных движениях, из которых одно является относительным со скоростью v_1 а второе — переносным со скоростью v_2 . По теореме о параллелограмме скоростей имеем для любой точки твердого тела $v_a = v_r + v_e = v_1 + v_2$,

а так как и относительные, и переносные движения твердого тела являются мгновенно поступательными, то относительные, переносные и, следовательно, согласно формуле (II.98), абсолютные скорости всех точек тела соответственно между собой равны в каждый момент времени, т.е. абсолютное движение тела также является мгновенно поступательным. Теорема доказана.

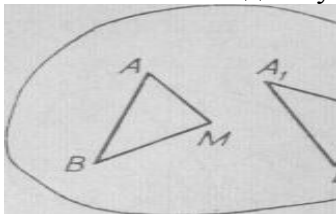
Очевидно, что данная теорема применима к сложному движению твердого тела, состоящему из трех

и более мгновенно поступательных движений; тогда в общем случае
$$v = \sum_{i=1}^n v_i$$

Заметим, что мгновенно поступательное движение твердого тела отличается от поступательного тем, что во втором случае в каждый момент времени равны между собой скорости и ускорения всех точек тела, между тем, как в первом случае в данный момент времени равны между собой только скорости всех точек тела.

ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоско-параллельным (или плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоско-



сти.

Из определения плоско-параллельного движения следует, что движения точек тела, расположенных на перпендикуляре к неподвижной плоскости, одинаковы. Поэтому, вместо движения всего тела в пространстве, можно рассмотреть движение плоской фигуры S , являющейся проекцией тела на неподвижную плоскость. Нетрудно показать, что, зная движение некоторого отрезка плоской фигуры S , можно определить движение всей фигуры. Пусть отрезок AB плоской фигуры занимает положение, указанное на рис. 68. Положение произвольной точки M плоской фигуры определим, соединив эту точку с точками A и B отрезка. Если отрезок AB изменит свое положение и перейдет в новое положение A_1B_1 , то для определения нового положения этой точки достаточно построить треугольник $A_1B_1M_1$, равный треугольнику ABM . Так как стороны треугольников, как расстояния между двумя точками абсолютно твердого тела, остаются неизменными, то $A_1B_1 = AB$; $AM = A_1M_1$; $BM = B_1M_1$. Таким образом, кинематика плоско-параллельного движения тела сводится к кинематике движения отрезка прямой на плоскости.

Кинематические уравнения плоско-параллельного движения

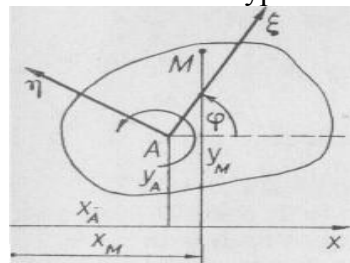
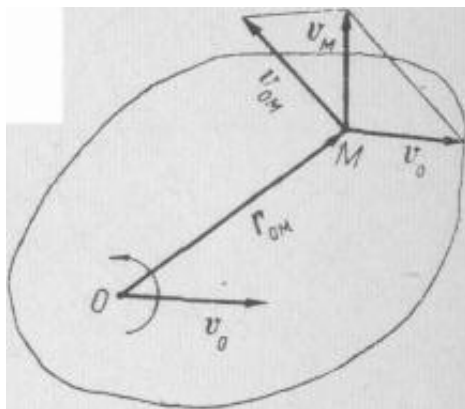


рис. 70

Допустим, что плоская фигура движется в неподвижной плоскости Oxy . Выбрав, например, точку A плоской фигуры за полюс, неизменно свяжем с этой фигурой подвижную систему координат $A\xi\eta$ с началом в полюсе A (рис. 70). Для определения положения подвижной системы координат $A\xi\eta$ относительно неподвижной нужно знать координаты точки A (т. е. x_A и y_A), а также угол поворота φ вокруг полюса (т. е. угол, образованный осью $A\xi$ с осью Ox). Следовательно, кинематические уравнения плоско-параллельного движения твердого тела имеют вид $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, где $x_A(t)$, $y_A(t)$, $\varphi(t)$ — конечные, однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции времени. Пользуясь формулами преобразования координат, можно получить уравнения движения любой точки M плоской фигуры $x = x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$, $y = y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$. Скорости точек тела Теорема. При плоско-параллельном движении твердого тела скорость любой его точки равна векторной сумме скорости полюса и скорости во вращательном движении вокруг полюса.

Доказательство. Пусть полюс O движется со скоростью v_0 , а плоская фигура вращается вокруг полюса с угловой скоростью ω (рис. 71). Требуется определить скорость произвольной точки M этой фигуры. Так как переносным здесь является поступательное движение вместе с полюсом O , то переносные скорости всех точек плоской фигуры будут одинаковыми, равными скорости полюса:

$$v_{Me} = v_0$$



Относительным движением является вращательное движение вокруг полюса. Поэтому, обозначая радиус-вектор точки M относительно полюса O через r_{OM} , согласно формуле Эйлера, для относительной скорости точки M получим $v_{Mr} = \omega \times r_{OM}$.

Относительную скорость точки при плоско-параллельном движении тела обозначают двойным индексом, т. е. $v_{Mr} = v_{OM}$. Первый индекс указывает полюс O , вокруг которого происходит вращение, а второй — обозначает рассматриваемую точку M . Следовательно,

$$v_{Mr} = v_{OM} = \omega \times r_{OM}$$

По теореме о сложении скоростей получим

$$v_a = v_e + v_r. \text{ Следовательно, } v_M = v_O + v_{OM}.$$

5. Количество движения материальной точки и механической системы. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Общие теоремы динамики. Понятие о силовом поле.

Количество движения материальной точки — векторная величина, которая равняется произведению массы точки на вектор ее скорости.

Единицей измерения количества движения есть (кг м/с).

Количество движения механической системы — векторная величина, равняющаяся геометрической сумме (главному вектору) количества движения всех точек системы. или количество движения системы равняется произведению массы всей системы на скорость ее центра масс

Когда тело (или система) движется так, что ее центр масс неподвижен, то количество движения тела равняется нулю (пример, вращение тела вокруг неподвижной оси, которая проходит через центр масс тела).

Если движение тела сложное, то не будет характеризовать вращательную часть движения при вращении вокруг центра масс. Т.е., количество движения характеризует только поступательное движение системы (вместе с центром масс).

Импульс силы характеризует действие силы за некоторый промежуток времени.

Импульс силы за конечный промежуток времени определяется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов

Теорема об изменении количества движения материальной точки: (в дифференциальной форме): Производная за временем от количества движения материальной точки равняется геометрической сумме действующих на точки сил (в интегральной форме): Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения механической системы (в дифференциальной форме): Производная по времени от количества движения системы равняется геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил. (в интегральной форме): Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов, действующих на систему внешних сил, за тот же промежуток времени.

Теорема позволяет исключить из рассмотрения заведомо неизвестные внутренние силы.

Теорема об изменении количества движения механической системы и теорема о движении центра масс являются двумя разными формами одной теоремы.

Закон сохранения количества движения системы.

1. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равняется нулю, то вектор количества движения системы будет постоянным по направлению и по модулю.
2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на любую произвольную ось равняется нулю, то проекция количества движения на эту ось является величиной постоянной.

Законы сохранения свидетельствуют, что внутренние силы не могут изменить суммарное количество движения системы.

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех точек этой системы:

$$T = \sum m_k v_k^2 / 2 ,$$

где m_k и v_k - масса и скорость k -й материальной точки, принадлежащей данной системе.

На основании *теоремы Кёнига* кинетическая энергия произвольной механической системы определяется по формуле

$$T = M v_C^2 / 2 + \sum m_k v_{kr}^2 / 2 ,$$

где M - масса всей системы;

v_C - скорость центра масс системы;

m_k - масса k -й точки системы;

v_{kr} - относительная скорость k -й точки при движении её вокруг центра масс

(т.е. $v_k = v_C \oplus v_{kr}$).

Из этой формулы можно получить следующие частные случаи для твёрдого тела:

- при поступательном движении тела $v_k = v_C$, $v_{kr} = 0$,

$$T = m v_C^2 / 2 ;$$

- при вращении тела вокруг оси, проходящей через его центр масс,

$$v_C = 0, v_{kr} = \omega \otimes r_k,$$

$$T = \sum m_k v_{kr}^2 / 2 = J \omega^2 / 2 ,$$

где J - момент инерции тела относительно оси, проходящей в данный момент времени через центр масс;

ω - угловая скорость вращения тела;

- в случае произвольного движения тела (например при плоскопараллельном движении)

$$T = m v_C^2 / 2 + J \omega^2 / 2 .$$

Основные (общие) теоремы динамики систем свободных материальных точек являются уравнениями движения систем свободных материальных точек, т. е. математически дифференциальными уравнениями изменений основных мер движения.

1. Для точки M_α уравнение движения относительно инерциальной системы отсчёта:

$$m_\alpha \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha^{(e)} + \vec{F}_\alpha^{(i)}$$

Перенесём все векторы, не изменяя их направления, в центр масс и сложим геометрически:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{V}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^{(e)} .$$

Производная по времени от количества движения системы свободных материальных точек равна геометрической сумме внешних сил. Это теорема об изменении количества движения системы.

$$\sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{V}_\alpha = M \vec{V}_c$$

Так как то

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^{(e)}$$

Это уравнение движения центра масс системы материальных точек с массой, равной массе всей системы, к которой приложена сумма всех внешних сил (главный вектор внешних сил) или теорема о движении центра масс.

2. Умножим уравнение движения точки M_α слева векторно на \vec{r}_α и геометрически сложим, переносим векторы в центр масс:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n [\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha] = \sum_{\alpha} [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}]$$

Теорема об изменении кинетического момента системы:

Производная по времени от кинетического момента системы свободных материальных точек равна сумме моментов всех внешних сил (главному моменту всех внешних сил).

Существенно: моменты количества движения и моменты сил вычисляются относительно общего неподвижного начала.

3. Умножая скалярно уравнение движения точки M_α на $d\vec{r}_\alpha = \vec{V}_\alpha dt$ и суммируя:

$$d \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_\alpha^{(e)} d\vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_\alpha^{(i)} d\vec{r}_\alpha)$$

или

$$d \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_\alpha^{(e)} d\vec{r}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha=2}}^n f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы:

Дифференциал кинетической энергии системы свободных материальных точек равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил.

Интегралы уравнений движения системы:

1) Если равен нулю главный вектор внешних сил, то $\vec{V}_c = \text{const}$, то есть центр масс системы свободных материальных точек движется равномерно и прямолинейно.

2) Если главный момент внешних сил равен нулю, то сохраняется кинетический момент системы свободных материальных точек:

$$\vec{G} \equiv \sum_{\alpha=1}^n [\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha] = \text{const}$$

3) Если внешние и внутренние силы консервативны, то

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)} + \text{const}$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} + \psi^{(e)} + \psi^{(i)} = E_0$$

Здесь:

$\Pi^{(e)}$ - потенциал внешнего силового поля;

$\Pi^{(i)}$ - потенциал взаимодействия точек;

$\psi^{(e)} = -\Pi^{(e)}$ - потенциальная энергия системы точек во внешнем поле;

$\psi^{(i)} = -\Pi^{(i)}$ - потенциальная энергия взаимодействующих точек.

