

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.12.01 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Направление подготовки: 20.03.01 Техносферная безопасность

Профиль образовательной программы: Безопасность жизнедеятельности в техносфере

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Организация самостоятельной работы.....	3
2. Методические рекомендации по подготовке к занятиям.....	4
2.1 Статика.....	4
2.2 Кинематика.....	4
2.3 Динамика.....	4
3. Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий.....	4
3.1 С-1 Определение реакций опор составной конструкции	4
3.2 К-1 Определение скоростей и ускорений точек.....	10
3.3 Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.....	13
4. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов.....	21

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

п/п	Наименование разделов, тем	всего	Количество часов по видам самостоятельной работы				
			подготовка курсовой работы (проекта)	подготовка рефератов	КоР	СИБ	ПкЗ
1	2	3	4	5	6	7	8
	Статика. Аксиомы. реакции связей. Силовые факторы и действия над ними.	2	-	-	2	-	-
1	Статика. Основная теорема статики. Уравнения равновесия. Статически определенные и статически неопределенные задачи.	12	-	-	8	4	-
2	Статика. Трение скольжения и трение качения. Центр параллельных сил, центр тяжести.	6	-	-	-	6	-
	Кинематика. Кинематика точки. Способы задания движения, основные кинематические характеристики.	4	-	-	4	-	-
3	Кинематика. Простейшие движения твердого тела. Плоское движение твердого тела.	7	-	-	3	4	-
4	Кинематика. Определение скоростей и ускорений точек. Составное движение точки.	14	-	-	6	8	-
	Динамика. Аксиомы динамики. Дифференциальные уравнения движения точки.	16	-	-	8	8	-
5	Динамика. Виды движения точки в зависимости от действующих сил.	8	-	-	4	4	-

6	Динамика. Динамика системы. Общие теоремы динамики системы. Общее уравнение динамики.	12	-	-	4	8	-
Итого		81	-	-	39	42	-

2. Методические рекомендации по подготовке к занятиям

2.1 Статика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Понятие равнодействующей системы сил.
- Понятие момента силы относительно центра и оси.
- Инвариантность главного вектора и скалярного произведения главного вектора на главный момент.
- Условия равновесия системы сил.

2.2 Кинематика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Векторный, координатный и естественный способы задания движения. Определение кинематических характеристик в каждом из способов.
- Виды движений твёрдого тела. Кинематические характеристики в каждом из движений.
- Составное движение.

2.3 Динамика

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующем:

- Дифференциальные уравнения движения в координатной и естественной формах.
- Применение общих теорем динамики для точки, твёрдого тела и механической системы.
- Применение принципов динамики для решения первой и второй задач динамики.

3. Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий

3.1 С-1 Определение реакций опор твёрдого тела.

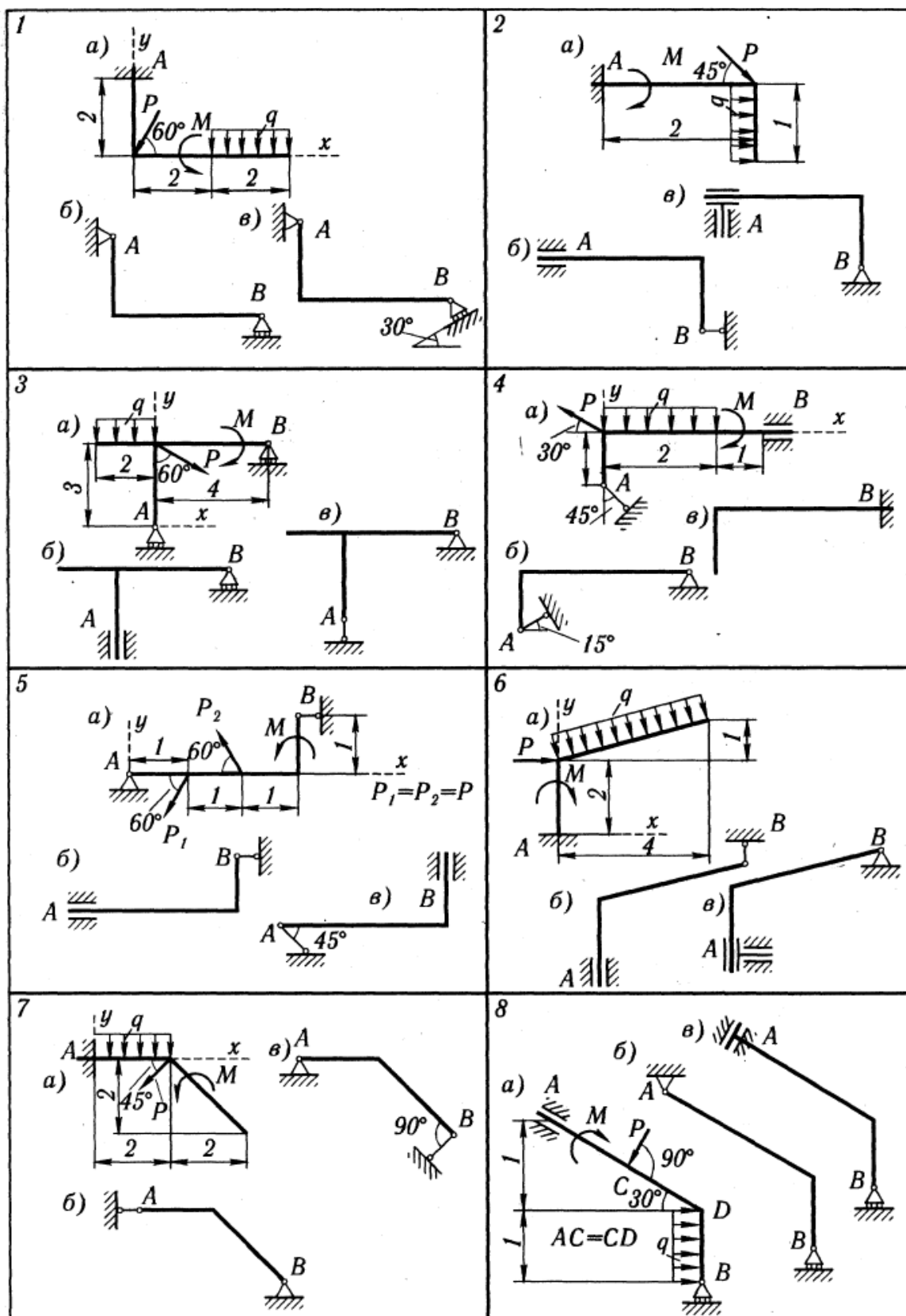
Задание С.1. Определение реакций опор твёрдого тела

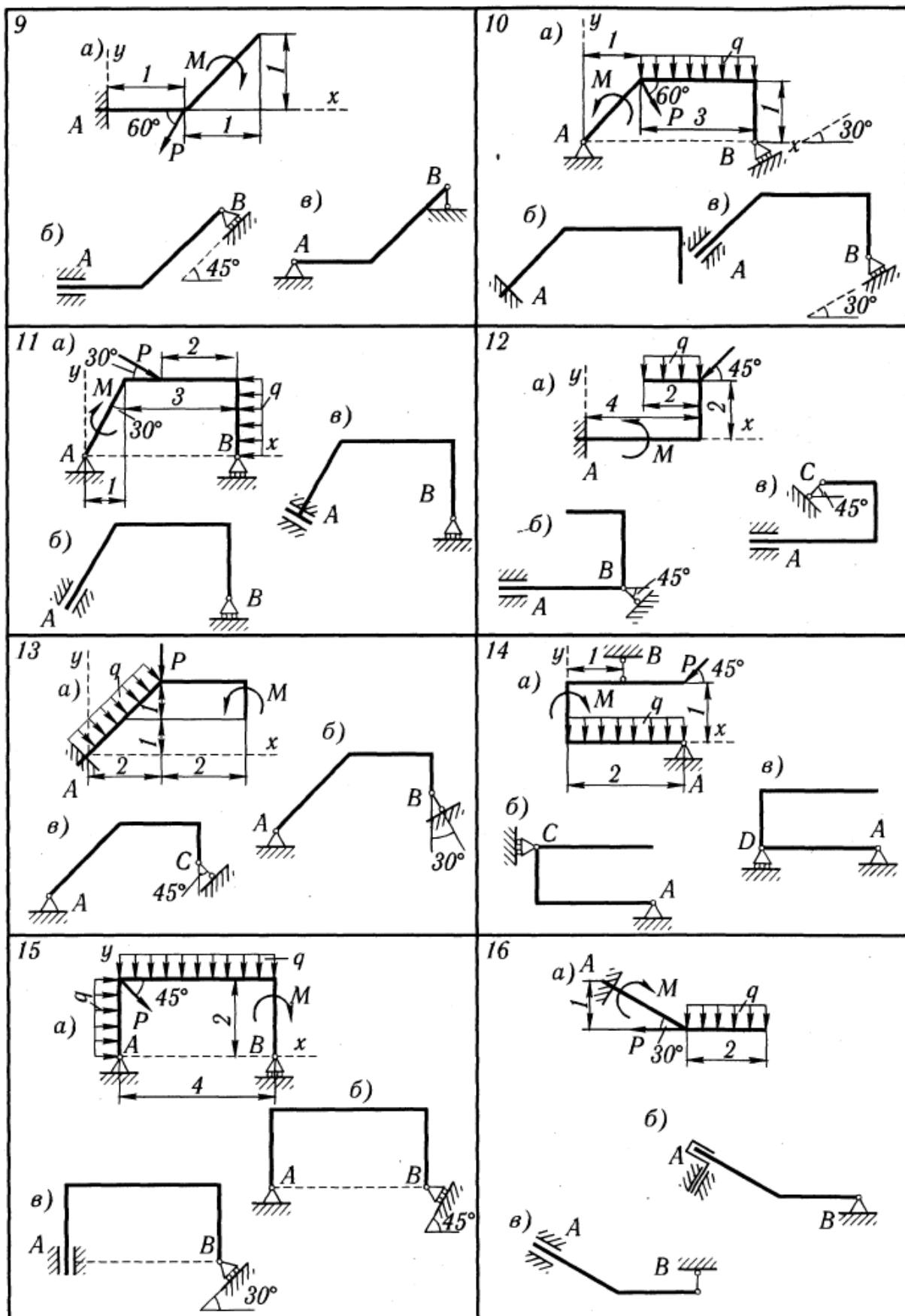
На схемах (рис. 1—4) показаны для каждого варианта три способа закрепления бруса, ось которого — ломаная линия. Задаваемая нагрузка (см. табл. 1) и размеры (м) во всех трех случаях одинаковы.

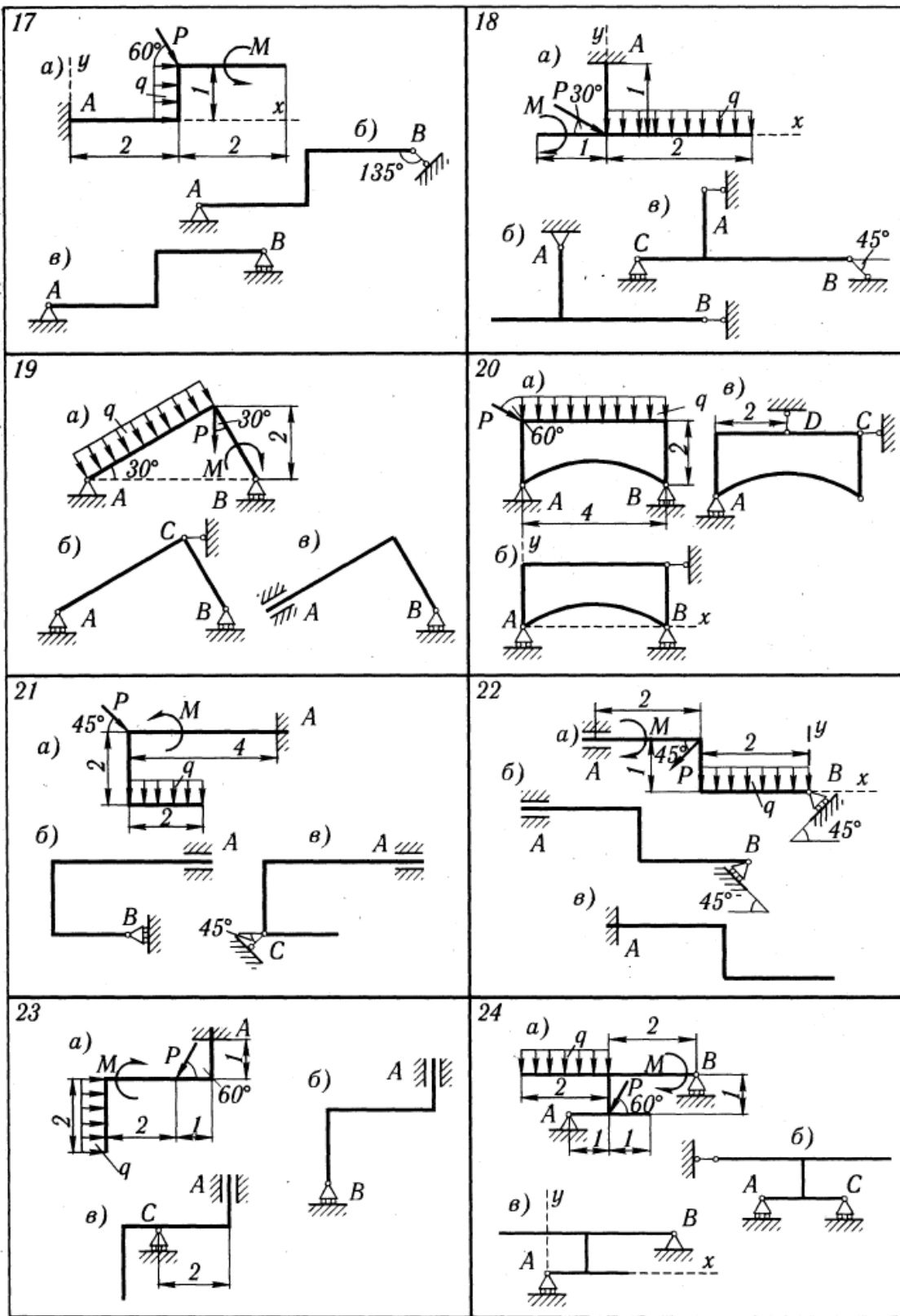
Определить реакции опор для того способа закрепления бруса, при котором реакция, указанная в табл. 1, имеет наименьший модуль.

Таблица 1

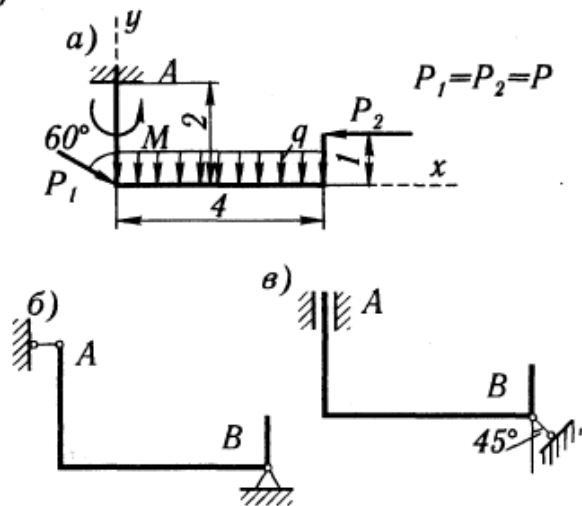
Номер варианта (рис. 1—4)	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Исследуемая реакция	Номер варианта (рис. 1—4)	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Исследуемая реакция
1	10	6	2	Y_A	16	12	6	2	M_A
2	20	5	4	M_A	17	20	4	3	Y_A
3	15	8	1	Y_B	18	14	4	2	X_A
4	5	2	1	Y_B	19	16	6	1	R_B
5	10	4	—	X_B	20	10	—	4	Y_A
6	6	2	1	M_A	21	20	10	2	M_A
7	2	4	2	X_A	22	6	6	1	Y_A
8	20	10	4	R_B	23	10	4	2	M_A
9	10	6	—	Y_A	24	4	3	1	Y_A
10	2	4	2	R_A	25	10	10	2	X_A
11	4	10	1	R_B	26	20	5	2	M_A
12	10	5	2	Y_A	27	10	6	1	X_A
13	20	12	2	Y_A	28	20	10	2	Y_A
14	15	4	3	Y_A	29	25	—	1	M_A
15	10	5	2	X_A	30	20	10	2	R_B



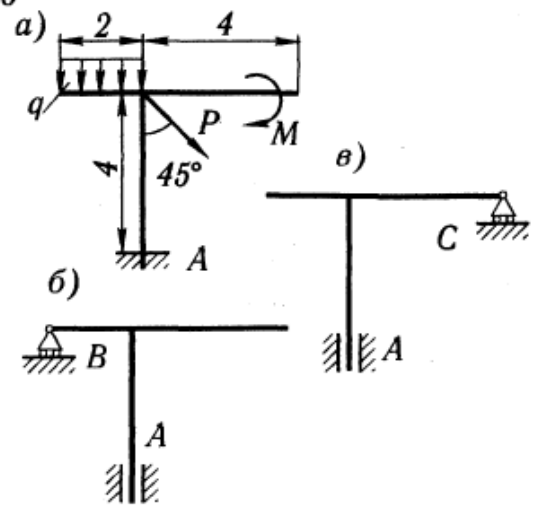




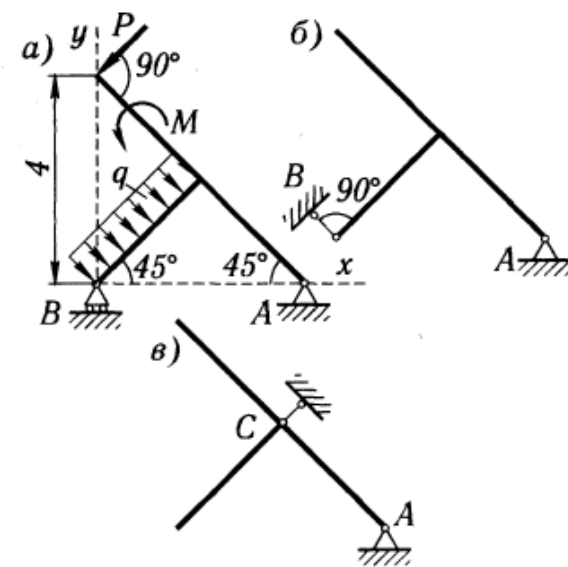
25



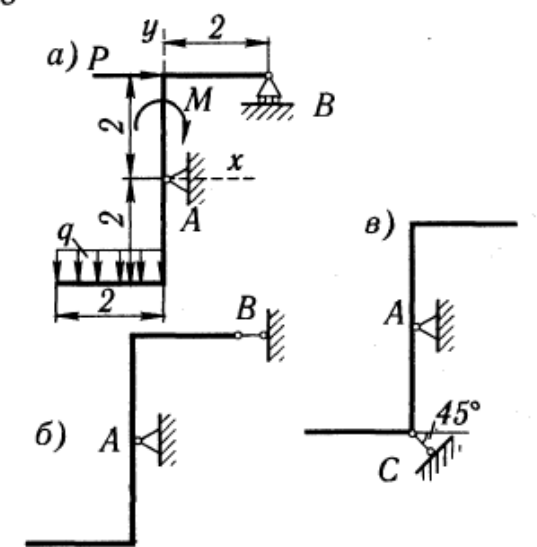
26



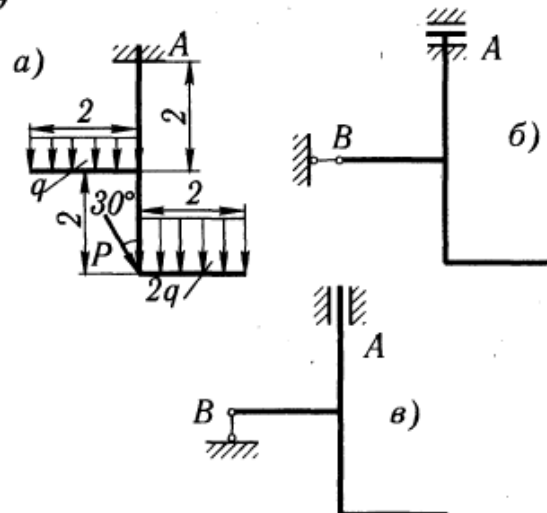
27



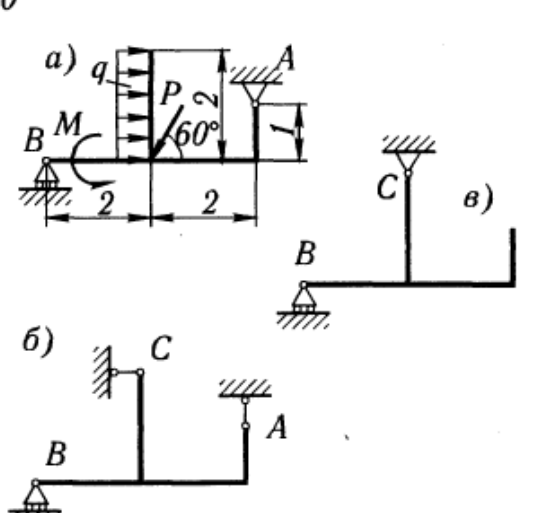
28



29



30



Пример выполнения задания. Дано: схемы закрепления бруса (рис. 5, а, б, в); $P = 5 \text{ кН}$; $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 1,2 \text{ кН/м}$.

Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором момент M_A в заделке имеет наименьшее числовое значение.

Решение. Рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями (рис. 6): в схеме а — X_A , Y_A , M_A , в схеме б — Y'_A ,

M'_A и R_B , в схеме в — M''_A , X_B и Y_B . Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей

$$Q = q \cdot 2 = 2,4 \text{ кН}.$$

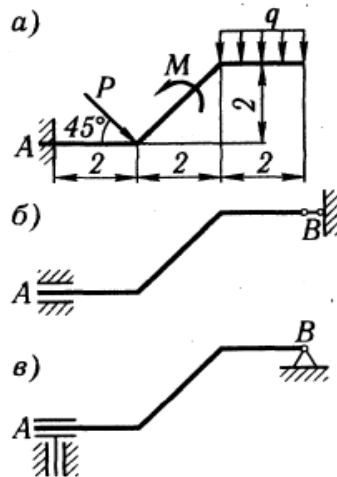


Рис. 5

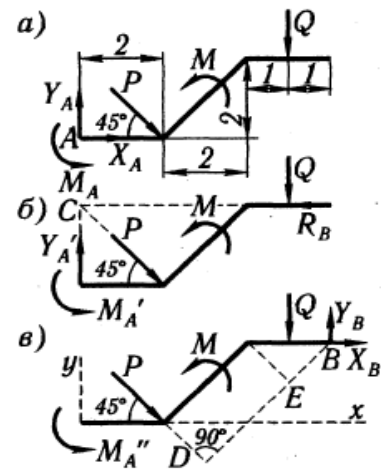


Рис. 6

Чтобы выяснить, в каком случае момент в заделке является наименьшим, найдем его для всех трех схем, не определяя пока остальных реакций.

Для схемы а

$$\sum M_{iA} = 0; M_A - P \cdot 2 \sin 45^\circ + M - Q \cdot 5 = 0.$$

Вычисления дают

$$M_A = 11,07 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для схемы б

$$\sum M_{iC} = 0; M'_A + M - Q \cdot 5 = 0 \text{ и } M'_A = 4,00 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для схемы в

$$\sum M_{iB} = 0; M''_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0 \text{ и } M''_A = -31,61 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Здесь

$$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4,24 \text{ м}.$$

Таким образом, наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме б. Определим остальные опорные реакции для этой схемы:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; P \cos 45^\circ - R_B = 0, & \text{откуда } R_B &= 3,54 \text{ кН}; \\ \sum Y_i &= 0; Y'_A - P \cdot \sin 45^\circ - Q = 0, & \text{откуда } Y'_A &= 5,94 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Схема по рис. 6	Момент $M_A(M'_A, M''_A), \text{кН} \cdot \text{м}$	Силы, кН	
		Y'_A	R_B
a	11,07	—	—
b	4,00	5,94	3,54
в	-31,61	—	—

2.2 К-1. Определение скоростей и ускорений точек.

Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 20.

Таблица 20

Номер варианта	Уравнения движения		$t_1,$ с
	$x = x(t), \text{см}$	$y = y(t), \text{см}$	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4 \cos^2(\pi t/3) + 2$	$4 \sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
5	$2 \sin(\pi t/3)$	$-3 \cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7 \sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7 \cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4 \cos(\pi t/3)$	$-2 \sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1/2
12	$5 \sin^2(\pi t/6)$	$-5 \cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5 \cos(\pi t^2/3)$	$-5 \sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2
15	$4 \cos(\pi t/3)$	$-3 \sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7 \sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7 \cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3 \cos(\pi t^2/3)$	$3 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6 \sin(\pi t^2/6) - 2$	$6 \cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
24	$-4 \cos(\pi t/3) - 1$	$-4 \sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8 \cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8 \sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$	$-9 \cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2 \cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \quad (1)$$

$$t_1 = 0,5 \quad (x \text{ и } y — \text{ в см, } t \text{ и } t_1 — \text{ в с}).$$

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 67.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}$ — орты осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 4 \text{ см/с}; & a_x = \ddot{x} &= 0; \\ v_y = \dot{y} &= 32t; & a_y = \ddot{y} &= 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt|, \quad (6)$$

или

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a}/v|; \quad (6')$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (6'')$$

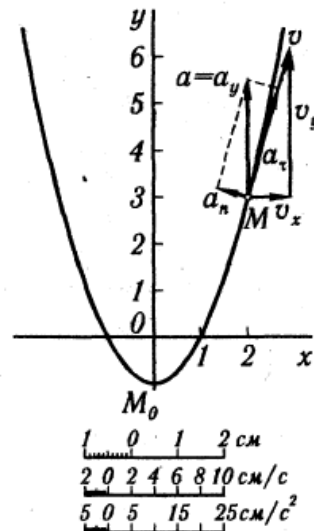


Рис. 67

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ совпадают; знак «-», — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \quad (7)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}|/v. \quad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x|/v. \quad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (9)$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3)—(6), (8) и (10) для заданного момента времени $t_1 = 0,5$ с приведены в табл. 21.

Таблица 21

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 67 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Совпадение величин a_τ и a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Дополнение к заданию К.1. Данное задание может быть использовано для определения скорости и ускорения точки при ее движении по пространственной траектории. Для этого к двум уравнениям движения (см. табл. 20) добавляется третье уравнение (табл. 22).

Общий порядок выполнения задания в этом случае такой же, как и в приведенном выше примере.

Таблица 22

Номер варианта	$z = z(t)$, см	Номер варианта	$z = z(t)$, см	Номер варианта	$z = z(t)$, см	Номер варианта	$z = z(t)$, см	Номер варианта	$z = z(t)$, см
1	$3t$	7	$2,5t$	13	$1,5t$	19	$6t$	25	$5t$
2	$2t$	8	$5t$	14	$2t+2$	20	$2t$	26	$6t$
3	$1,5t$	9	$4t+8$	15	$3t$	21	$4t$	27	$3,5t$
4	$4t+4$	10	t	16	$1,5t$	22	t	28	$4t$
5	t	11	$2t$	17	$5t$	23	$1,5t$	29	$5t$
6	$3t$	12	$3t$	18	$3,5t$	24	$2t$	30	$1,5t$

Зада н и е Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1—5 (рис. 117, схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f .

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD , наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и h .

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0,2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC .

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 3,5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить v_B и τ .

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9,8$ м; $\beta = 60^\circ$; $f = 0$. Определить α и T .

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $l = 9,8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45^\circ$. Определить f и v_C .

Варианты 6—10 (рис. 117, схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB , наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l , со скоростью v_A . Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f . Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью v_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$; $f = 0,1$; $\tau = 0,2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30^\circ$. Определить l и v_C .

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить v_B и T .

Вариант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0,3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60^\circ$. Определить α и d .

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\tau = 0,3$ с; $f = 0,1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить v_B и v_A .

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC .

Варианты 11—15 (рис. 117, схема 3). Имея в точке A скорость v_A , мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l , составляющему с горизонтом угол α . При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d , находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью v_C . Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m .

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4,5$ м/с; $d = 3$ м. Определить τ и h .

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4,5$ м/с; $h = 1,5$ м. Определить v_A и d .

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1,5$ м. Определить P и l .

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $P = 2,2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить v_B и v_C .

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m .

Варианты 16—20 (рис. 117, схема 4). Камень скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l . Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f . Имея в точке B скорость v_B , камень через T с ударяется в точке C о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0,2$; $d = 2,5$ м. Определить h и T .

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить d и f .

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $l = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0,1$; $d = 3$ м. Определить h и τ .

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $\tau = 1,5$ с; $d = 2$ м. Определить v_A и h .

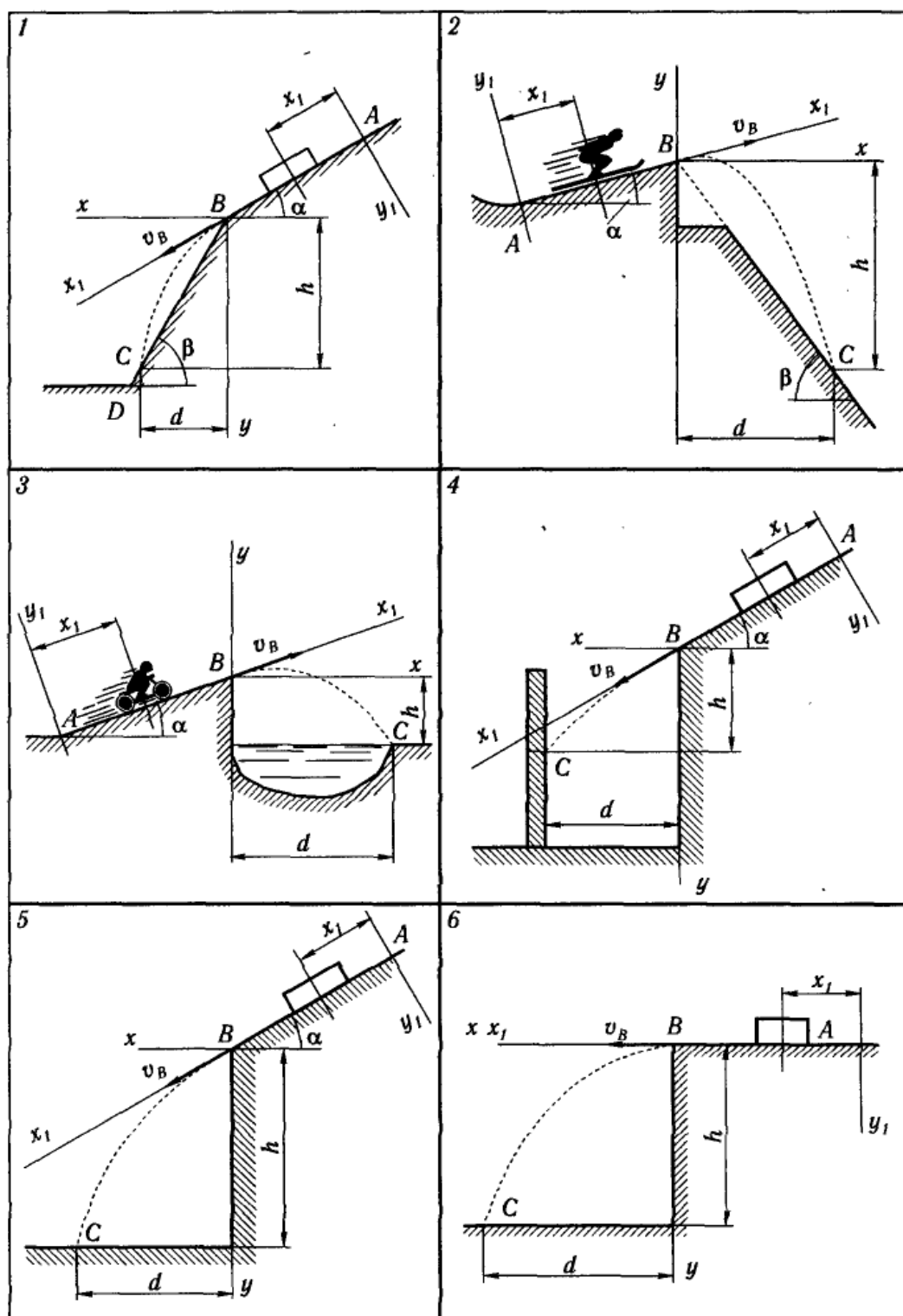


Рис.117

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Определить l и τ .

Варианты 21—25 (рис. 117, схема 5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения равен f . Через τ с тело в точке B со скоростью v_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью v_C ; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 1$ м/с; $\tau = 1,5$ с; $h = 10$ м. Определить v_B и d .

Вариант 22. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45^\circ$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить f и уравнение траектории на участке BC .

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9,81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T .

Вариант 24. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить τ и h .

Вариант 25. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 6$ м; $h = 4,5$ м. Определить τ и v_C .

Варианты 26—30 (рис. 117, схема 6). Имея в точке A скорость v_A , тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f . Со скоростью v_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью v_C , находясь в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $v_A = 7$ м/с; $f = 0,2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м. Определить d и v_C .

Вариант 27. Дано: $v_A = 4$ м/с; $f = 0,1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить v_B и h .

Вариант 28. Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0,3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и T .

Вариант 29. Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2,5$ м; $h = 20$ м. Определить f и d .

Вариант 30. Дано: $f = 0,25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и τ .

Пример выполнения задания (рис. 118). В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC . Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость $v_0 = 0$, определить наименьшую ширину полки b и скорость v_C , с которой камень падает на нее. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l , камень движется τ с.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75^\circ$.
Определить b и v_C .

Решение. Рассмотрим движение камня на участке AB . Принимая камень за материальную точку, покажем (рис. 118) действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$. Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB :

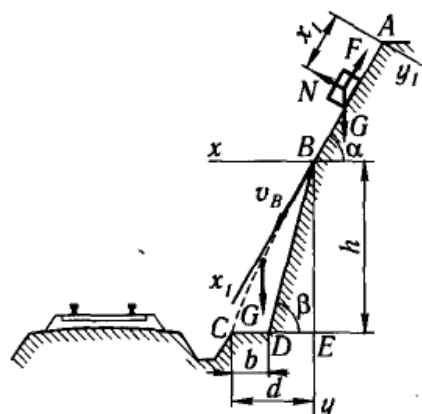


Рис. 118

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0^*$.

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2.$$

Для момента τ , когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B; \quad x_1 = l,$$

т. е.

$$v_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau;$$

$$l = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \tau^2,$$

* Постоянные интегрирования C_1 — C_6 во всех 30 вариантах задания можно найти, вводя начальные условия на первом и втором участках движения точки. Тем не менее в ряде вариантов более естественно воспользоваться граничными условиями, когда значения координат и скоростей заданы не для одного, а для разных моментов времени.

откуда

$$v_B = 2l/\tau,$$

т. е.

$$v_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C .

Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= 0; \\ \dot{x}_0 &= v_B \cos \alpha; & \dot{y}_0 &= v_B \sin \alpha. \end{aligned}$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_3; & \dot{y} &= gt + C_4; \\ x &= C_3t + C_5; & y &= gt^2/2 + C_4t + C_6. \end{aligned}$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= C_3; & \dot{y}_0 &= C_4; \\ x_0 &= C_5; & y_0 &= C_6. \end{aligned}$$

Отсюда найдем, что

$$\begin{aligned} C_3 &= v_B \cos \alpha; & C_4 &= v_B \sin \alpha; \\ C_5 &= 0; & C_6 &= 0. \end{aligned}$$

Получим следующие уравнения проекций скорости камня:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = gt^2/2 + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2/(2v_B^2 \cos^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2,11 \text{ м}, \quad d_2 = -7,75 \text{ м.}$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d = 2,11 \text{ м}$.

Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - h/\operatorname{tg} 75^\circ, \quad \text{или } b = 0,77 \text{ м.}$$

Используя уравнение движения камня $x = v_B \cos \alpha \cdot t$, найдем время T движения камня от точки B до точки C :

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

по формуле

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 0,53 \text{ с}$

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2},$$

или

$$v_C = 12,8 \text{ м/с.}$$

4. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов

3.1. Рассматриваемые вопросы

1. Центр тяжести твердого тела и его координаты

На каждую частицу тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действует направленная вертикально вниз сила, которая называется *силой тяжести*. Силы тяжести каждой частицы тела, строго говоря, направлены по радиусам к центру Земли и не являются параллельными. Но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, непараллельность настолько незначительна, что в расчетах с большой точностью силы тяжести их частиц можно считать параллельными, сохраняющими свои значения, точки приложения и параллельность при любых поворотах тела. Поэтому, обо-

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^N P_k} \text{ и}$$

зная силу тяжести частицы через P_k , можно, согласно формулам

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

, найти точку С, которая неизменно связана с телом и называется центром системы параллельных сил тяжести. Таким образом, центром тяжести твердого тела называется центр системы параллельных сил тяжести частиц данного тела. Точка С — это геометрическая точка, она может и не принадлежать телу, но она всегда с ним связана, например центр тяжести баскетбольного мяча, кольца и др. Выразим силу тяжести (вес) частицы тела через ее

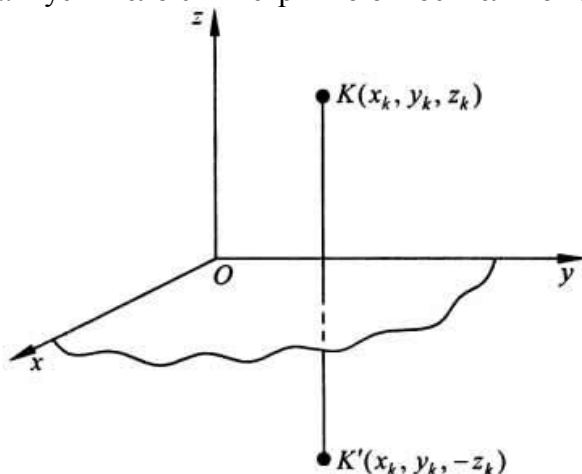
объем V . Тогда величина $\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV}$ называется *удельным весом*, а величина $\rho = \gamma/g$ — *плотностью* тела в данной точке. ("гамма"-Н/м³) ("ро"-Н*с/м⁴)

Методы нахождения центра тяжести.

1) Метод симметрии.

Покажем, что если однородное тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то его центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

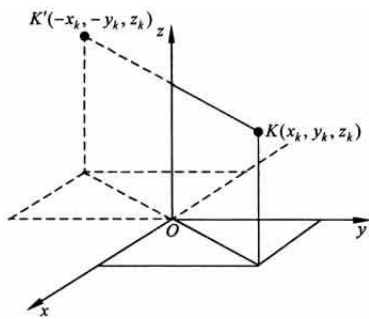
а. Пусть тело симметрично относительно плоскости Оху



Тогда вследствие симметрии каждому элементу К тела объемом $\Delta V_k(x_k, y_k, z_k)$ будет соответствовать элемент К' того же объема с координатами $(x_k, y_k, -z_k)$. Поэтому статический момент объема

$\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k = 0$ и координата $z_C = \sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k / V = 0$. Следовательно, центр тяжести тела будет лежать в плоскости симметрии Оху.

б. Пусть тело симметрично относительно оси Oz.



Тогда всякому элементу К тела объемом ΔV_k с координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать такой же по объему элемент К', расположенный симметрично относительно оси Oz и имеющий координаты $(-x_k, -y_k, z_k)$. Поэтому статические моменты $\sum_{k=1}^N x_k \Delta V_k = 0$, $\sum_{k=1}^N y_k \Delta V_k = 0$, $\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k \neq 0$ и,

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^N x_k \Delta V_k}{V} = 0, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \Delta V_k}{V} = 0, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^N z_k \Delta V_k}{V} \neq 0$$

следовательно, координаты центра тяжести будут находиться на оси симметрии.

в. Пусть тело имеет центр симметрии, который примем за начало координат. Тогда всякой частице тела объемом ΔV_k , определяемой радиус-вектором $\vec{r}_k$, будет соответствовать частица такого же объема с радиус-вектором $(-\vec{r}_k)$, симметричная ей относительно центра О. Поэтому $\sum_{k=1}^N \vec{r}_k \Delta V_k = 0$. Следовательно, центр тяжести будет находиться в центре симметрии. Например, центры тяжести однородных куба, сферы, кольца, прямоугольной или круглой пластины лежат в геометрическом центре этих тел.

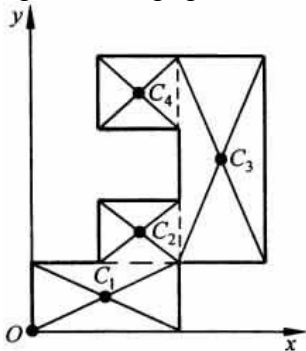
2) Метод разбиения.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^N P_k} \quad \text{и}$$

Этот метод основан на применении формул

$$x_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

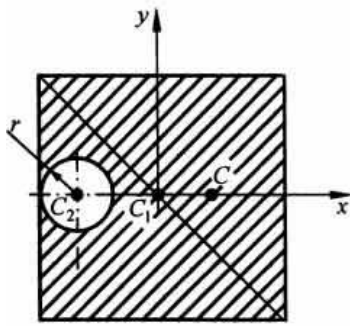
Его используют, когда тело можно разбить на ряд частей, центры тяжести которых известны из условий симметрии. Метод разбиения можно наглядно проиллюстрировать с помощью рисунка.



Расположив тело в системе координат, разделив его мысленно на отдельные части, веса которых P_1, P_2, P_3, P_4 , а центры тяжести известны, вычислим вес тела и, согласно формулам

$$x_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

, координаты центра тяжести С всего тела. Если тело имеет вырез, причем известны центр тяжести тела без выреза и центр тяжести вырезанного тела, то для определения координат центра тяжести используют метод отрицательных масс (частный случай метода разбиения).



На рисунке изображена квадратная пластина, сторона которой a . В пластине выполнено круглое отверстие с радиусом $r=0,2a$ и координатами центра $x_2=-0,3a$; $y_2=0$. Координаты центра тяжести C , пластины без отверстия $x_1=0$, $y_1=0$. Рассмотрим два тела: пластину без отверстия и диск, соответствующий вырезанному отверстию. При использовании формул

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^N P_k z_k$$

вес диска будем считать отрицательным. То-

$$P = p(a^2 - \pi r^2);$$

$$x_C = \frac{1}{P} (P_1 x_1 - P_2 x_2) = \frac{p}{P} [a^2 \cdot 0 - \pi r^2 (-0,3a)] = \frac{0,3\pi a r^2}{a^2 - \pi r^2};$$

гда

$$y_C = 0,$$

, где p — вес единицы площади пластины.

2.Трение

Силой трения называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами.

Различают трение внешнее и внутреннее.

Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения или трение покоя).

Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкость или газ).

Различают сухое и жидкое (или вязкое) трение.

Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки.

Жидким (вязким) называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.

Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на трение скольжения и трение качения. Рассмотрим законы сухого трения (рис. 4.5).

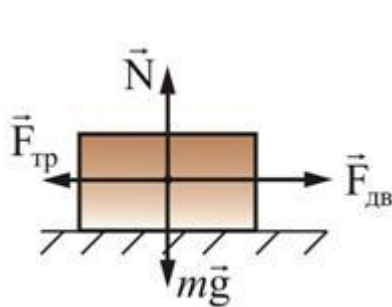


Рис. 4.5

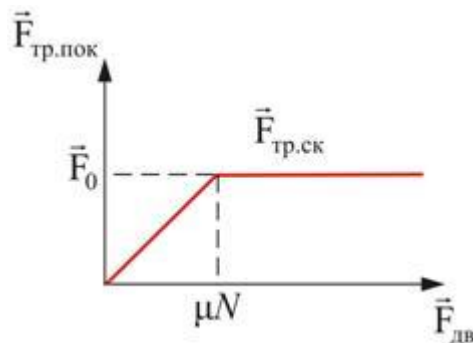


Рис. 4.6

Подействуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости, внешней силой $\vec{F}_{\text{вн}}$, постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила $\vec{F}_{\text{вн}}$ урав-

новешивается некоторой силой $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной по касательной к трущейся поверхности, противоположной силе $\vec{F}_{\text{тр}}$. В этом случае $\vec{F}_{\text{тр}}$ и есть сила трения покоя.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю силы нормального давления N :

$$F_{\text{тр.пок}} = \mu_0 N,$$

μ_0 – коэффициент трения покоя, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение F_0 , тело начнет скользить по опоре – трение покоя $F_{\text{тр.пок}}$ сменится трением скольжения $F_{\text{ск}}$ (рис. 4.6):

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (4.4.1)$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения, но коэффициент трения μ ; здесь значительно меньше.

Подробнее рассмотрим силу трения скольжения на наклонной плоскости (рис. 4.7). На тело, находящееся на наклонной плоскости с сухим трением, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила сухого трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила $\vec{F}$ есть равнодействующая сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рис. 4.7 видно, что $F = mg \sin \alpha$, $N = mg \cos \alpha$.

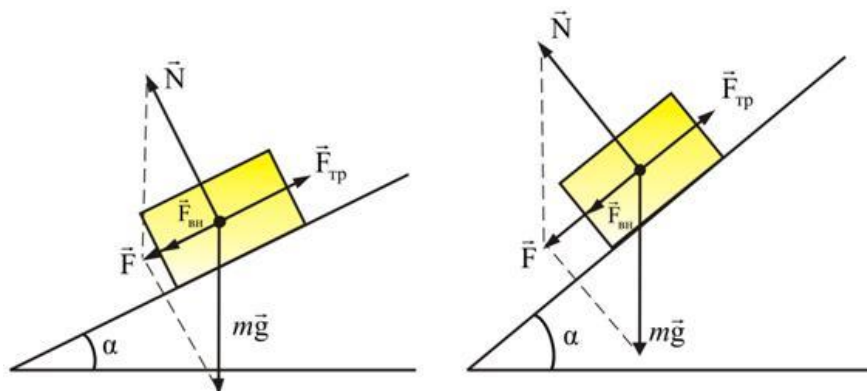


Рис. 4.7

Если $F < (F_{\text{тр}})_{\text{max}} = \mu N$ – тело остается неподвижным на наклонной плоскости. Максимальный угол наклона α определяется из условия $(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = F$ или $\mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha$, следовательно, $\tan \alpha_{\text{max}} = \mu$, где μ – коэффициент сухого трения.

$$F_{\text{тр}} = \mu N = mg \cos \alpha,$$

$$F = mg \sin \alpha.$$

При $\alpha > \alpha_{\text{max}}$ тело будет скатываться с ускорением

$$a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

$$F_{\text{ск}} = ma = F - F_{\text{тр}}.$$

Если дополнительная сила $F_{\text{вн}}$, направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол α_{max} и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

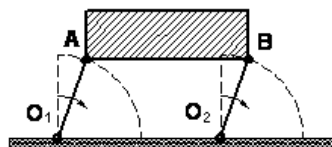
3. Предмет кинематики. Способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки.

Вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Поступательное движение твердого тела.

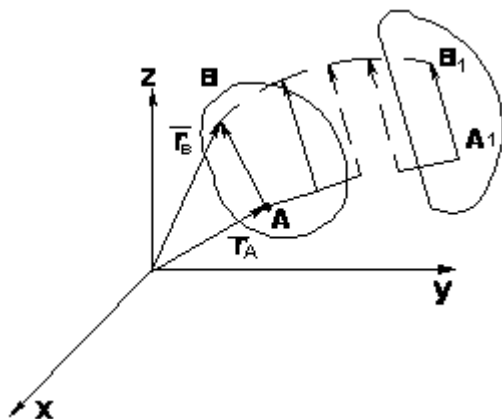
1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

Поступательное движение не значит прямолинейное:



ТЕОРЕМА: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (3.1)$$

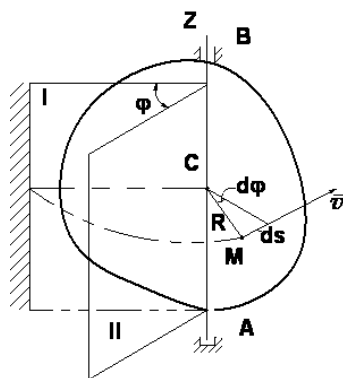
$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \quad (3.2)$$

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором во все время движения какие-либо две точки тела остаются неподвижными (проходящая через эти неподвижные точки прямая называется *осью вращения*), а все остальные точки описывают траектории, представляющие собой окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения, а центры лежат на этой оси.



$$\varphi = f(t) \quad (3.3)$$

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \dot{\varphi} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (3.5)$$

Примеры:

Равномерное вращение
($\omega = const$)

Равнопеременное вращение
($\varepsilon = const$)

$$d\varphi = \omega dt$$

$$\varphi = \omega t$$

$$\omega = \varphi/t$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n$$

$$d\omega = \varepsilon dt$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

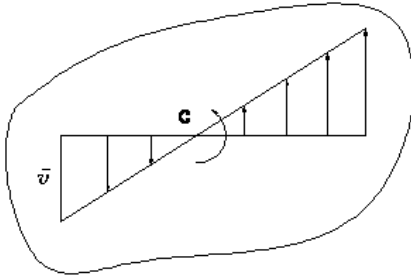
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\Rightarrow d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$$

3. Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

Вращательная скорость точки



$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = R \omega \quad (3.6)$$

Модуль вращательной скорости точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на угловую скорость тела

Ускорение точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (\rho = R)$$

$$a_\tau = R \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R}$$

или $a_\tau = R\varepsilon = a_\varepsilon$ (3.7) - вращательное ускорение

$a_n = R\omega^2 = a_\omega$ (3.8) - центростремительное ускорение

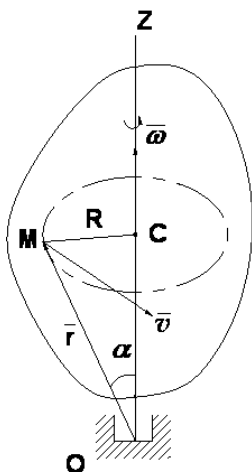
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4}$ (3.9) - полное ускорение

$$a = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (3.10)$$

4. Векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений.

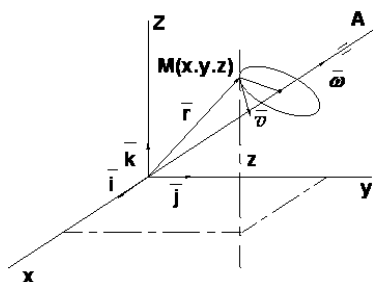
Формулы Эйлера.



$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= R \cdot \omega = \omega r \cdot \sin \alpha \\ |\bar{\omega} \times \bar{r}| &= \omega \cdot r \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \bar{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \\ &+ \bar{k}(\omega_x y - \omega_y x) \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

- формулы Эйлера

Векторные выражения вращательного и центростремительного ускорения точки

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \bar{\epsilon}; \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{a} &= \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} \end{aligned}$$

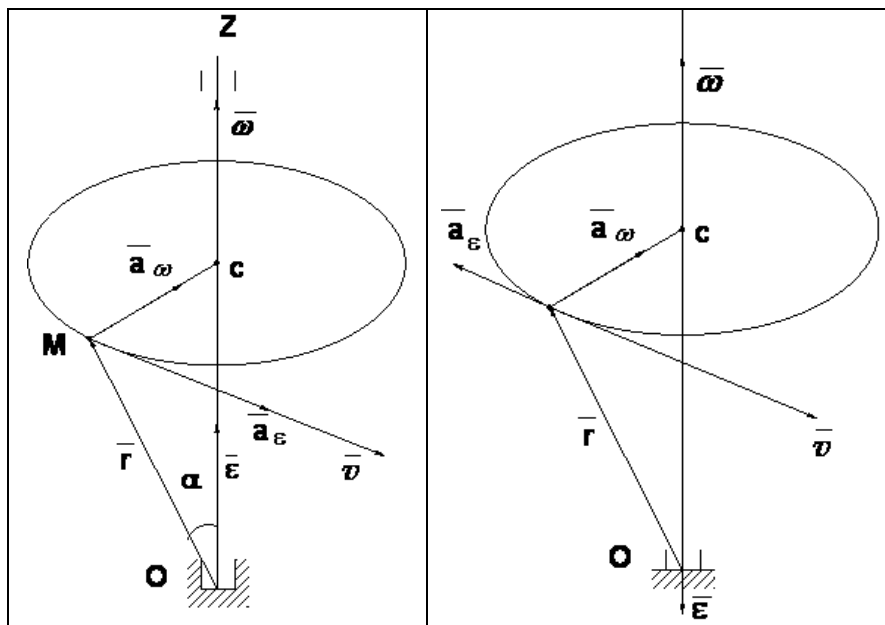
$$\bar{a} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad \text{- полное ускорение точки}$$

$$|\bar{\epsilon} \times \bar{r}| = \epsilon \cdot r \cdot \sin \alpha \Rightarrow |\bar{a}_\epsilon| = |\bar{\epsilon} \times \bar{r}| \quad \text{- вращательное ускорение точки}$$

$$a_\omega = \omega^2 R = \omega \cdot v$$

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \omega \cdot v \cdot \sin(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega \cdot v$$

- центростремительное ускорение точки



4. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

Основной задачей кинематики сложного движения твердого тела является установление соотношений между характеристиками абсолютного и относительного движений. Сложное движение твердого тела может состоять из поступательных движений, вращательных движений, или может быть получено в результате сложения поступательного и вращательного движений. В некоторых задачах кинематики заданное сложное движение твердого тела раскладывают на составляющие движения (анализ); в других — требуется определить сложное движение твердого тела как результат сложения более простых движений (синтез). Как при анализе, так и при синтезе движений речь идет о разложении и сложении движений, рассматриваемых в данный момент (мгновенных движений). Сложение поступательных движений твердого тела.

Теорема. В результате сложения мгновенных поступательных движений твердого тела получается результирующее мгновенно поступательное движение.

Доказательство. Пусть твердое тело одновременно участвует в двух мгновенных поступательных движениях, из которых одно является относительным со скоростью v_1 а второе — переносным со скоростью v_2 . По теореме о параллелограмме скоростей имеем для любой точки твердого тела $v_a = v_r + v_e = v_1 + v_2$,

а так как и относительные, и переносные движения твердого тела являются мгновенно поступательными, то относительные, переносные и, следовательно, согласно формуле (II.98), абсолютные скорости всех точек тела соответственно между собой равны в каждый момент времени, т.е. абсолютное движение тела также является мгновенно поступательным. Теорема доказана.

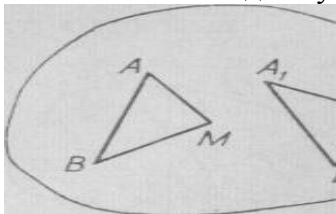
Очевидно, что данная теорема применима к сложному движению твердого тела, состоящему из трех

и более мгновенно поступательных движений; тогда в общем случае $\bullet = \sum_{i=1}^n \bullet_i$

Заметим, что мгновенно поступательное движение твердого тела отличается от поступательного тем, что во втором случае в каждый момент времени равны между собой скорости и ускорения всех точек тела, между тем, как в первом случае в данный момент времени равны между собой только скорости всех точек тела.

ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

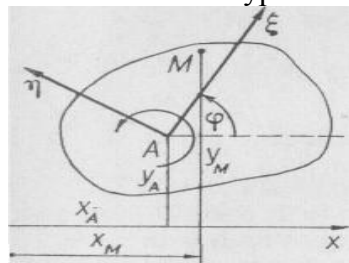
Плоско-параллельным (или плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоско-



сти.

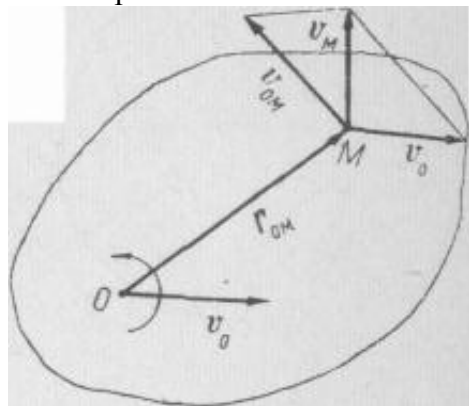
Из определения плоско-параллельного движения следует, что движения точек тела, расположенных на перпендикуляре к неподвижной плоскости, одинаковы. Поэтому, вместо движения всего тела в пространстве, можно рассмотреть движение плоской фигуры S , являющейся проекцией тела на неподвижную плоскость. Нетрудно показать, что, зная движение некоторого отрезка плоской фигуры S , можно определить движение всей фигуры. Пусть отрезок AB плоской фигуры занимает положение, указанное на рис. 68. Положение произвольной точки M плоской фигуры определим, соединив эту точку с точками A и B отрезка. Если отрезок AB изменит свое положение и перейдет в новое положение A_1B_1 , то для определения нового положения этой точки достаточно построить треугольник $A_1B_1M_1$, равный треугольнику ABM . Так как стороны треугольников, как расстояния между двумя точками абсолютно твердого тела, остаются неизменными, то $A_1B_1 = AB$; $AM = A_1M_1$; $BM = B_1M_1$. Таким образом, кинематика плоско-параллельного движения тела сводится к кинематике движения отрезка прямой на плоскости.

Кинематические уравнения плоско-параллельного движения



Допустим, что плоская фигура движется в неподвижной плоскости Oxy . Выбрав, например, точку A плоской фигуры за полюс, неизменно свяжем с этой фигурой подвижную систему координат $A\xi\eta$ с началом в полюсе A (рис. 70). Для определения положения подвижной системы координат $A\xi\eta$ относительно неподвижной нужно знать координаты точки A (т. е. x_A и y_A), а также угол поворота φ вокруг полюса (т. е. угол, образованный осью $A\xi$ с осью Ox). Следовательно, кинематические уравнения плоско-параллельного движения твердого тела имеют вид $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, где $x_A(t)$, $y_A(t)$, $\varphi(t)$ — конечные, однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции времени. Пользуясь формулами преобразования координат, можно получить уравнения движения любой точки M плоской фигуры $x = x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$, $y = y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$. Скорости точек тела Теорема. При плоско-параллельном движении твердого тела скорость любой его точки равна векторной сумме скорости полюса и скорости во вращательном движении вокруг полюса.

Доказательство. Пусть полюс O движется со скоростью v_0 , а плоская фигура вращается вокруг полюса с угловой скоростью ω (рис. 71). Требуется определить скорость произвольной точки M этой фигуры. Так как переносным здесь является поступательное движение вместе с полюсом O , то переносные скорости всех точек плоской фигуры будут одинаковыми, равными скорости полюса: $v_{Me} = v_0$



Относительным движением является вращательное движение вокруг полюса. Поэтому, обозначая радиус-вектор точки M относительно полюса O через r_{OM} , согласно формуле Эйлера, для относительной скорости точки M получим $v_{Mr} = \omega \times r_{OM}$.

Относительную скорость точки при плоско-параллельном движении тела обозначают двойным индексом, т. е. $v_{Mr} = v_{OM}$. Первый индекс указывает полюс O , вокруг которого происходит вращение, а второй — обозначает рассматриваемую точку M . Следовательно,

$$v_{Mr} = v_{OM} = \omega \times r_{OM}$$

По теореме о сложении скоростей получим

$$v_a = v_e + v_r. \text{ Следовательно, } v_M = v_O + v_{OM}.$$

5. Количество движения материальной точки и механической системы. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Общие теоремы динамики. Понятие о силовом поле.

Количество движения материальной точки — векторная величина, которая равняется произведению массы точки на вектор ее скорости.

Единицей измерения количества движения есть (кг м/с).

Количество движения механической системы — векторная величина, равняющаяся геометрической сумме (главному вектору) количества движения всех точек системы. или количество движения системы равняется произведению массы всей системы на скорость ее центра масс

Когда тело (или система) движется так, что ее центр масс неподвижен, то количество движения тела равняется нулю (пример, вращение тела вокруг неподвижной оси, которая проходит через центр масс тела).

Если движение тела сложное, то не будет характеризовать вращательную часть движения при вращении вокруг центра масс. Т.е., количество движения характеризует только поступательное движение системы (вместе с центром масс).

Импульс силы характеризует действие силы за некоторый промежуток времени.

Импульс силы за конечный промежуток времени определяется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов

Теорема об изменении количества движения материальной точки:
(в дифференциальной форме): Производная за временем от количества движения материальной точки равняется геометрической сумме действующих на точки сил
(в интегральной форме): Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения механической системы
(в дифференциальной форме): Производная по времени от количества движения системы равняется геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.
(в интегральной форме): Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов, действующих на систему внешних сил, за тот же промежуток времени.

Теорема позволяет исключить из рассмотрения заведомо неизвестные внутренние силы.

Теорема об изменении количества движения механической системы и теорема о движении центра масс являются двумя разными формами одной теоремы.

Закон сохранения количества движения системы.

1. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равняется нулю, то вектор количества движения системы будет постоянным по направлению и по модулю.
2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на любую произвольную ось равняется нулю, то проекция количества движения на эту ось является величиной постоянной.

Законы сохранения свидетельствуют, что внутренние силы не могут изменить суммарное количество движения системы.

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех точек этой системы:

$$T = \sum m_k v_k^2 / 2 ,$$

где m_k и v_k - масса и скорость k -й материальной точки, принадлежащей данной системе.

На основании *теоремы Кёнига* кинетическая энергия произвольной механической системы определяется по формуле

$$T = M v_C^2 / 2 + \sum m_k v_{kr}^2 / 2 ,$$

где M - масса всей системы;

v_C - скорость центра масс системы;

m_k - масса k -й точки системы;

v_{kr} - относительная скорость k -й точки при движении её вокруг центра масс

(т.е. $v_k = v_C \oplus v_{kr}$).

Из этой формулы можно получить следующие частные случаи для твёрдого тела:

- при поступательном движении тела $v_k = v_C$, $v_{kr} = 0$,

$$T = m v_C^2 / 2 ;$$

- при вращении тела вокруг оси, проходящей через его центр масс,

$$v_C = 0, v_{kr} = \omega \otimes r_k,$$

$$T = \sum m_k v_{kr}^2 / 2 = J \omega^2 / 2 ,$$

где J - момент инерции тела относительно оси, проходящей в данный момент времени через центр масс;

ω - угловая скорость вращения тела;

- в случае произвольного движения тела (например при плоскопараллельном движении)

$$T = m v_C^2 / 2 + J \omega^2 / 2 .$$

Основные (общие) теоремы динамики систем свободных материальных точек являются уравнениями движения систем свободных материальных точек, т. е. математически дифференциальными уравнениями изменений основных мер движения.

1. Для точки M_α уравнение движения относительно инерциальной системы отсчёта:

$$m_\alpha \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha^{(e)} + \vec{F}_\alpha^{(i)}$$

Перенесём все векторы, не изменяя их направления, в центр масс и сложим геометрически:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{V}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^{(e)} .$$

Производная по времени от количества движения системы свободных материальных точек равна геометрической сумме внешних сил. Это теорема об изменении количества движения системы.

$$\sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \vec{V}_\alpha = M \vec{V}_c$$

Так как то

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^{(e)} .$$

Это уравнение движения центра масс системы материальных точек с массой, равной массе всей системы, к которой приложена сумма всех внешних сил (главный вектор внешних сил) или теорема о движении центра масс.

2. Умножим уравнение движения точки M_α слева векторно на $\vec{r}_\alpha$ и геометрически сложим, перенося векторы в центр масс:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n [\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha] = \sum_{\alpha} [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}] .$$

Теорема об изменении кинетического момента системы:

Производная по времени от кинетического момента системы свободных материальных точек равна сумме моментов всех внешних сил (главному моменту всех внешних сил).

Существенно: моменты количества движения и моменты сил вычисляются относительно общего неподвижного начала.

3. Умножая скалярно уравнение движения точки M_α на $d\vec{r}_\alpha = \vec{V}_\alpha dt$ и суммируя:

$$d \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_\alpha^{(e)} d\vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_\alpha^{(i)} d\vec{r}_\alpha)$$

или

$$d \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_\alpha^{(e)} d\vec{r}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha=2}}^n f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы:

Дифференциал кинетической энергии системы свободных материальных точек равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил.

Интегралы уравнений движения системы:

1) Если равен нулю главный вектор внешних сил, то $\vec{V}_c = \text{const}$, то есть центр масс системы свободных материальных точек движется равномерно и прямолинейно.

2) Если главный момент внешних сил равен нулю, то сохраняется кинетический момент системы свободных материальных точек:

$$\vec{G} \equiv \sum_{\alpha=1}^n [\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha] = \text{const}$$

3) Если внешние и внутренние силы консервативны, то

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)} + \text{const}$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} + \mathcal{U}^{(e)} + \mathcal{U}^{(i)} = E_0$$

Здесь:

$\Pi^{(e)}$ - потенциал внешнего силового поля;

$\Pi^{(i)}$ - потенциал взаимодействия точек;

$\mathcal{U}^{(e)} = -\Pi^{(e)}$ - потенциальная энергия системы точек во внешнем поле;

$\mathcal{U}^{(i)} = -\Pi^{(i)}$ - потенциальная энергия взаимодействующих точек.