ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.В.ДВ.05.02. Теория матриц

Направление подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность»

Профиль подготовки «Безопасность жизнедеятельности в техносфере»

Квалификация выпускника бакалавр

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/ эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1.	**Раздел 1** **Основы теории матриц**	-	×	×	4	4
1.1.	**Тема 1** Матрица и действия над ними	-	×	×	×	2
1.2.	**Тема 2** Алгоритм Гаусса и некоторые его применения	-	×	×	4	2
2.	**Раздел 2** **Матричные уравнения**	-	×	×	8	8
2.1.	**Тема 3** Уравнения различных типов	-	×	×	×	2
2.2.	**Тема 4** Извлечение корня m-ной степени из матрицы	-	×	×	8	2
2.3.	**Тема 5** Скалярное уравнение	-	×	×	×	2
2.4.	**Тема 6** Логарифм матрицы	-	×	×	×	2
3.	**Раздел 3** **Специальные вопросы и приложения**	-	×	×	6	6
3.1.	**Тема 7** Сингулярные пучки матриц	-	×	×	2	2
3.2.	**Тема 8** Приложение теории матриц к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений	-	×	×	4	2
3.3.	**Тема 9** Добавление неравенства для собственных и сингулярных чисел	-	×	×	×	2
4.	**Реферат**	×	×	×		
5.	**Эссе**	×	×	×	×	×
6.	**Промежуточная аттестация** (*зачет*)	×	×	×	×	×
7.	**Итого**	-	×	×	18	18

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

1.1 Тема 2 Алгоритм Гаусса и некоторые его применения

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующий вопрос - Разложение квадратной матрицы на треугольные множители

1. Пусть дана матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ ранга r. Введем следующие обозначения для последовательных главных миноров этой матрицы:

$$D_k = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Допустим, что имеют место условия выполнимости алгоритма Гаусса:

$$D_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Обозначим через G матрицу коэффициентов системы уравнений (18), к которой приводится система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

методом исключения Гаусса. Матрица G имеет верхнюю треугольную форму, причем элементы ее первыхrr строк определяются формулами (13), а элементы последних $n-r$ строк все равны нулю:

$$G = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{2,r+1}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Переход от матрицы A к матрице G совершался при помощи некоторого числа N операций следующего типа: к i-й строке матрицы прибавлялась j-я ($j < i$) строка, предварительно помноженная на некоторое число α. Такая операция равносильна умножению преобразуемой матрицы слева на матрицу

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} & & (j) & & (i) & & \end{matrix} \\
\begin{Vmatrix}
1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 1 & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & \alpha & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1
\end{Vmatrix}
\end{array}. \qquad (31)$$

В этой матрице на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы, за исключением элемента α, равны нулю.

Таким образом

$$G = W_N \ldots W_2 W_1 A,$$

где каждая из матриц $W_1, W_2, \ldots W_N$ имеет вид (31) и, следовательно, является нижней треугольной матрицей с диагональными элементами, равными 1.

Пусть

$$W = W_N \ldots W_2 W_1. \qquad (32)$$

Тогда

$$G = WA. \qquad (33)$$

Матрицу W будем называть преобразующей матрицей для матрицы A в методе исключения Гаусса. Обе матрицы, G и W, однозначно определяются заданием матрицы A. Из (32) следует, что W — нижняя треугольная матрица с диагональными элементами, равными 1 (см. стр. 28).

Поскольку W — неособенная матрица, то из (33) находим:

$$A = W^{-1} G. \qquad (33')$$

Мы представили матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы W^{-1} на верхнюю треугольную матрицу G. Вопрос о разложении матрицы A на множители такого типа полностью выясняется следующей теоремой:

Теорема 1. Всякую матрицу $A = \|a_{ik}\|_1^n$ ранга r, у которой первые r последовательных глазных миноров отличны от нуля,

$$D_k = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix} \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, r), \tag{34}$$

можно представить в виде произведения нижней треугольной матрицы B на верхнюю треугольную матрицу C

$$A = BC = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0\\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n}\\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & c_{nn}\end{Vmatrix}. \tag{35}$$

При этом

$$b_{11}c_{11} = D_1, \quad b_{22}c_{22} = \frac{D_2}{D_1}, \ \dots, \quad b_{rr}c_{rr} = \frac{D_r}{D_{r-1}}. \tag{36}$$

Первым r диагональным элементам матриц B и C можно дать произвольные значения, удовлетворяющие условиям (36).

Задание первых r диагональных элементов матриц B и C определяет однозначно элементы первых r столбцовматрицы B и первых r строк матрицы C. Для этих элементов имеют место формулы

$$b_{gk} = b_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}}, \qquad c_{kg} = c_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & k\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & g\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}} \tag{37}$$

$$(g = k, k+1, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, r).$$

В случае $r < n$ $(|A| = 0)$ в последних $n - r$ столбцах матрицы B можно все элементы положить разными нулю, а в последних $n - r$ строках матрицы C всем элементам дать произвольные значения, либо наоборот, последние $n - r$ строк матрицы C заполнить нулями, а последние $n - r$ столбцов матрицы B взять произвольными.

Доказательство. Возможность представления матрицы, удовлетворяющей условию (34), в виде произведения (35) была доказана выше [см. (33')]

Пусть теперь B и C — произвольные нижняя и верхняя треугольные матрицы, произведение которых равно A. Пользуясь формулой для миноров произведения двух матриц, найдем:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k\end{pmatrix} = \sum_{\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_k} B\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & g\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix} \tag{38}$$

$$(g = k, k+1, \dots, n, k = 1, 2, \dots, r).$$

Поскольку C — верхняя треугольная матрица, то первые k столбцов матрицы C содержат только один отличный от нуля минор k-го порядка $C\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}$. Поэтому равенство (38) может быть записано так:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix} = b_{11}b_{22}\dots b_{k-1,k-1}b_{gk}c_{11}c_{22}\dots c_{kk} \tag{39}$$

$$(g = k, k+1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r).$$

Положим сначала здесь $g = k$. Тогда получим:

$$b_{11}b_{22}\dots b_{k-1,k-1}b_{gk}c_{11}c_{22}\dots c_{kk} = D_k \qquad (k = 1, 2, \dots, r) \tag{40}$$

откуда уже вытекают соотношения (36).

Не нарушая неравенства (35), мы можем в нем умножить матрицу B справа на произвольную особенную диагональную матрицу $M = \left\|\mu_i \delta_{ik}\right\|_1^n$, одновременно умножая матрицу C слева на $M^{-1} = \left\|\mu_i^{-1} \delta_{ik}\right\|_1^n$. Это равносильно умножению столбцов матрицы B соответственно на $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ и строк матрицы C на $\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_n^{-1}$. Поэтому диагональным элементам $b_{11}, \dots, b_{rr}$, $c_{11}, \dots, c_{rr}$, можно придать любые значения удовлетворяющие условиям (36).

Далее, из (39) и (40) находим:

$$b_{gk} = b_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}} \qquad (g = k, k+1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r),$$

т. е. первые формулы (37). Совершенно аналогично устанавливаются вторые формулы (37) для элементов матрицы C.

Обратим внимание на то, что при перемножении матриц B и C элементы b_{kg} последних $n-r$ столбцов матрицы B и элементы c_{gk} последних $n-r$ строк матрицы C перемножаются между собой. Мы видели, что все элементы последних $n-r$ строк матрицы C можно выбрать равными нулю. Тогда элементы последних $n-r$ столбцов матрицы B можно выбрать произвольными. Ясно, что произведение матриц B и C не изменится, если мы последние $n-r$ столбцов матрицы B возьмем нулевыми, а элементы последних $n-r$ строк матрицы C произвольными.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает ряд интересных следствий.

Следствие 1. Элементы первых r столбцов матрицы B и первых r строк матрицы C связаны с элементами матрицы A рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} b_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{ij}c_{jk}}{c_{kk}} \quad (i \ge k; i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, r), \\ c_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}c_{jk}}{b_{ii}} \quad (i \le k; i = 1, 2, \ldots, r; k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Соотношения (41) непосредственно следуют из матричного равенства (35) ими удобно пользоваться для фактического вычисления элементов матриц B и C.

Следствие 2. Если $A = \|a_{ik}\|_1^n$ — неособенная матрица $(r = n)$, удовлетворяющая условию (34), то в представлении (35) матрицы B и C определяются однозначно, как только диагональные элементы этих матриц выбраны в соответствии с условиями (36).

Следствие 3. Если $S = \|s_{ik}\|_1^n$ — симметрическая матрица ранга r и

$$D_k = S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix} \ne 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

то

$$S = BB',$$

где $B = \|b_{ik}\|_1^n$ — нижняя треугольная матрица, в которой

$$b_{gk}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{D_kD_{k-1}}}A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k\end{pmatrix} & (g=k,k+1,\dots,n;\, k=1,2,\dots,r),\\ 0 \quad (g=k,k+1,\dots,n;\, k=r+1,\dots,n). \end{cases} \tag{42}$$

2. Пусть в представлении (35) у матрицы B элементы последних $n-r$ столбцов равны нулю. Тогда можно положить:

$$B=F\cdot\begin{Vmatrix} b_{11} & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & b_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0\end{Vmatrix},\qquad C=\begin{Vmatrix} c_{11} & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & c_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0\end{Vmatrix}\cdot L, \tag{43}$$

где F — нижняя, а L — верхняя треугольная матрица; при этом первые r диагональных элементов у матриц F и L равны 1, а элементы последних $n-r$ столбцов матрицы F и последних $n-r$ строк матрицы L выбраны совершенно произвольно. Подставляя в (35) выражения (43) для B и C и используя равенства (36), придем к следующей теореме:

Теорема 2. Всякая матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$ ранга r, у которой

$$D_k=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}\neq 0 \qquad (k=1,2,\dots,r),$$

Представим в виде произведения нижней треугольной матрицы F, диагональной D и верхней треугольной L:

$$A=FDL=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ f_{21} & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} D_1 & & & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{D_r}{D_{r-1}} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1 & l_{12} & \dots & l_{1n}\\ 0 & 1 & \dots & l_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{Vmatrix} \tag{44}$$

где

$$f_{gk} = \frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}}, \qquad l_{kg} = \frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1 & k\\ 1 & 2 & \dots & k-1 & g\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}} \qquad (45)$$

$$(g = k, k+1, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, r),$$

а f_{gk}, l_{kg} произвольны при $g = k+1, \dots, n$; $k = r+1, \dots, n$.

3. Метод исключения Гаусса, будучи применен к матрице $A = \|a_{ik}\|_1^n$ ранга r, для которой $D_k \neq 0\ (k = 1, 2, \dots, r)$, дает нам две матрицы: нижнюю треугольную матрицу W с диагональными элементами 1 и верхнюю треугольную матрицу G, у которой первые r диагональных элементов равны $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_r}{D_{r-1}}$, а последние $n-r$ строк заполнены нулями. G — гауссова форма матрицы A, W — преобразующая матрица.

Для конкретного вычисления элементов матрицы W можно рекомендовать следующий прием.

Мы получим матрицу W, если к единичной матрице E применим все те преобразования (задаваемые матрицами $W_1, \dots, W_N$), которые мы в алгоритме Гаусса делали над матрицей A (в этом случае вместо произведения WA, равного G, мы будем иметь произведение WE, равное W). Поэтому к матрице A приписываем справаединичную матрицу E:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (46)$$

Применяя к этой прямоугольной матрице все преобразования алгоритма Гаусса, получим прямоугольную матрицу, состоящую из двух квадратных матриц G и W:

$$(G, W).$$

Таким образом, применение алгоритма Гаусса к матрице (46) дает одновременно и матрицу G и матрицу W.

Если A — неособенная матрица, т. е. $\|A\| \neq 0$, то и $\|G\| \neq 0$. В этом случае из (33) следует $A^{-1} = G^{-1}W$. Поскольку матрицы G и W определены при помощи алгоритма Гаусса, то нахождение обратной матрицы A^{-1} сводится к определению G^{-1} и умножению G^{-1} на W.

Хотя нахождение обратной матрицы G^{-1}, после того как определена матрица G, не представляет затруднений, поскольку G — треугольная матрица, тем не менее можно избежать этой операции. Для этого наряду с матрицами G и W введем аналогичные матрицы G_1 и W_1 для транспонированной матрицы A'. Тогда $A' = W_1^{-1}G_1$, т. е.

$$A = G_1'W_1'^{-1}. \qquad (47)$$

Сопоставим между собой равенства (33') и (44):

$$A = W^{-1}G, \quad A = FDL.$$

Эти равенства могут быть рассматриваемы как два различных разложения вида (35); при этом мы произведение DL рассматриваем как второй множитель C. Поскольку первые r диагональных элементов у первых множителей одинаковы (они равны 1), то первые r столбцов у них совпадают. Тогда, поскольку последние $n-r$ столбцов матрицы F могут быть выбраны произвольными, то выберем их так, чтобы

$$F = W^{-1}. \qquad (48)$$

С другой стороны, сопоставление равенств (47) и (44):

$$A = G_1'W_1'^{-1}, \qquad A = FDL$$

показывает, что можно так подобрать произвольные элементы в L, чтобы

$$L = W_1'^{-1}. \qquad (49)$$

Подставляя в (44) вместо F и L их выражения из (48) и (49), получим:

$$A = W^{-1}D_1'W_1'^{-1}. \qquad (50)$$

Сопоставляя это равенство с равенствами (33') я (47), мы найдем:

$$G = DW_1'^{-1}, \quad G'_1 = W^{-1}D. \qquad (51)$$

Введем в рассмотрение диагональную матрицу

$$\hat{D} = \left\{ \frac{1}{D_1}, \quad \frac{D_1}{D_2}, \quad \ldots, \frac{D_{r-1}}{D_r}, 0, \quad \ldots, 0 \right\}. \qquad (52)$$

Тогда, поскольку

$$D = D\hat{D}D,$$

то из (50) и (51) следует:

$$A = G_1'\hat{D}G. \qquad (53)$$

Формула (53) показывает, что разложение матрицы A на треугольные множители может быть получено применением алгоритма Гаусса к матрицам A и A'.

Пусть теперь A — неособенная матрица $(r = n)$. Тогда $|D| \neq 0$, $\hat{D} = D^{-1}$. Поэтому из (50) следует:

$$A^{-1} = W'_1 \hat{D}W. \qquad (54)$$

Эта формула дает возможность эффективного
вычисления обратной матрицы A^{-1} путем применения алгоритма Гаусса к прямоугольным матрицам

$$(A, E) \ (A', E).$$

В частном случае, когда
вместо матрицы A возьмем симметрическую матрицу S, матрица G_1 совпадает с G, а матрица W_1 — с матрицей W, и потому формулы (53) и (54) принимают вид

$$S = G'\hat{D}G, \qquad (55)$$

$$S^{-1} = W'\hat{D}W. \qquad (56)$$

1.2 Тема 4 Извлечение корня m-ной степени из матрицы

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующий вопрос - Анализ извлечения корня из вырожденной и невырожденной матрицы

Переходим к разбору случая, когда $|A| = 0$ (A – особенная матрица).

Как и в первом случае, приведем матрицу A к нормальной жордановой форме:

$$A = U\left\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, \dots, \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}, H^{(q_2)}, \dots, H^{(q_t)}\right\} U^{-1}\ ; \qquad (65)$$

здесь мы через $(\lambda-\lambda_1)^{p_1}, \dots, (\lambda-\lambda_u)^{p_u}$ обозначили элементарные
делители матрицы A, отвечающие ненулевымхарактеристическим числам, а через $\lambda^{q_1}, \lambda^{q_2}, \dots, \lambda^{q_t}$ – элементарные делители с нулевыми характеристическими числами.

Тогда

$$A = U\{A_1, A_2\} U^1, \qquad (66)$$

где

$$A_1 = \left\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, \dots, \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\right\}, A_2 = \left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \dots, H^{(q_t)}\right\}. \qquad (67)$$

Заметим, что A_1 – неособенная матрица $(|A_1| \neq 0)$, а A_2 – нильпотентная матрица с индексом нильпотентности $\mu = \max(q_1, q_2, \dots, q_t)$ $\left(A_2^{\mu} = 0\right)$.

Из исходного уравнения (54) следует перестановочность матрицы A с искомой матрицей X, а следовательно, и перестановочность подобных им матриц

$$U^{-1} = AU = \{A_1, A_2\} \text{ и } U^{-1}XU. \qquad (68)$$

Как было доказано в § 2 (теорема 3), из перестановочности матриц (68) и из того факта, что матрицы A_1 и A_2 не имеют общих характеристических чисел, вытекает, что и вторая из матриц (68) имеет соответственную квазидиагональную форму

$$U^{-1}XU = \{X_1, X_2\}. \qquad (69)$$

Заменяя в уравнении (54) матрицы A и X подобными им матрицами

$$\{A_1, A_2\} \text{ и } \{X_1, X_2\},$$

мы заменим уравнение (54) двумя уравнениями:

$$X_1^m = A_1, \qquad (70)$$

$$X_2^m = A_2. \qquad (71)$$

Так как $|A_1| \neq 0$, то к уравнению (70) применимы результаты предыдущего параграфа. Поэтому X_1 находим по формуле (62):

$$X_1 = X_{A_1}\left\{\sqrt[m]{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}}\right\} X_{A_1}^{-1}. \qquad (72)$$

Таким образом, остается рассмотреть уравнение (71), т. е. заняться нахождением всех корней m-й степени из нильпотентной матрицы A_2, уже имеющей нормальную жорданову форму:

$$A_2 = \left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\}. \qquad (73)$$

$\mu = \max(q_1, q_2, \ldots, q_t)$ – индекс нильпотентности матрицы A_2. Из $A_2^\mu = 0$ и из (71) находим:

$$X_2^{m\mu} = 0.$$

Последнее равенство показывает, что искомая матрица X_2 также является нильпотентной с индексом нильпотентности ν, где $m(\mu - 1) < \nu \leq m\mu$. Приведем матрицу X_2 к жордановой форме:

$$X_2 = T\left\{H^{(\nu_1)}, H^{(\nu_2)}, \ldots, H^{(\nu_s)}\right\} T^{-1} \qquad (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s \leq \nu). \qquad (74)$$

Возведем теперь обе части последнего равенства в m-ю степень. Получим:

$$A_2 = X_2^m = T\left\{\left[H^{(\nu_1)}\right]^m, \left[H^{(\nu_2)}\right]^m, \ldots, \left[H^{(\nu_s)}\right]^m\right\} T^{-1}. \qquad (75)$$

Выясним теперь, какие элементарные делители имеет матрица $\left[H^{(\nu)}\right]^m$. Обозначим через $\boldsymbol{H}$ линейный оператор, задаваемый матрицей $H^{(\nu)}$ в ν-мерном векторном пространстве с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_\nu$. Тогда из вида матрицы $H^{(\nu)}$ (в матрице $H^{(\nu)}$ все элементы первой наддиагонали равны единице и все остальные элементы равны нулю) следует, что

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_1 = 0, \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_\nu = \boldsymbol{e}_{\nu-1}. \qquad (76)$$

Эти равенства показывают, что для оператора $\boldsymbol{H}$ векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_\nu$ образуют жорданову цепочку векторов, соответствующую элементарному делителю λ^ν.

Равенства (76) запишем так:

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu; \boldsymbol{e}_0 = 0).$$

Очевидно, что

$$\boldsymbol{H}^m \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_{j-m} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu; \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_{-1} = \ldots = \boldsymbol{e}_{-m+1} = 0). \qquad (77)$$

Представим число ν в виде

$$\nu = km + r \qquad (r < m),$$

где k, r – целые неотрицательные числа. Расположим базисные векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_\nu$ следующим образом:

$$\begin{array}{llll}
\boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_2, & \ldots, & \boldsymbol{e}_m, \\
\boldsymbol{e}_{m+1}, & \boldsymbol{e}_{m+2}, & \ldots, & \boldsymbol{e}_{2m}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\boldsymbol{e}_{(k-1)m+1}, & \boldsymbol{e}_{(k-1)m+2}, & \ldots, & \boldsymbol{e}_{km}, \\
\boldsymbol{e}_{km+1}, & \ldots, & \boldsymbol{e}_{km+r} &
\end{array}, \qquad (78)$$

В этой таблице мы имеем m столбцов: первые r содержат по $(k+1)$ векторов в каждом, остальные – по k векторов. Равенство (78) показывает, что векторы каждого столбца образуют жорданову цепочку векторов относительно оператора $\boldsymbol{H}^m$. Если вместо последовательной нумерации векторов (78) по строкам занумеровать их по столбцам, то в полученном таким образом новом базисе матрица оператора $\boldsymbol{H}^m$ будет иметь следующую нормальную жорданову форму:

$$\Big\{\underbrace{H^{(k+1)}, \ldots, H^{(k+1)}}_{r}, \underbrace{H^{(k)}, \ldots, H^{(k)}}_{m-r}\Big\},$$

и следовательно,

$$\left[H^{(\nu)}\right]^m = P_{\nu,m} \Big\{\underbrace{H^{(k+1)}, \ldots, H^{(k+1)}}_{r}, \underbrace{H^{(k)}, \ldots, H^{(k)}}_{m-r}\Big\} P_{\nu,m}^{-1}, \qquad (79)$$

где матрица $P_{\nu,m}$ (матрица перехода от одного базиса к другому) имеет вид (см. гл. III, § 4)

$$P_{\nu,m} = \begin{array}{l} \overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \ldots\quad 0}}^{m} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| \end{array} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \quad . \qquad (80)$$

Матрица $H^{(\nu)}$ имеет один элементарный делитель λ^{ν}. При возведении матрицы $H^{(\nu)}$ в m-ю степень этот элементарный делитель «расщепляется». Как показывает формула (79), матрица $\left[H^{(\nu)}\right]^{m}$ имеет элементарные делители:

$$\underbrace{\lambda^{k+1},\ldots,\lambda^{k+1}}_{r},\underbrace{\lambda^{k},\ldots,\lambda^{k}}_{m-r}.$$

Возвращаясь теперь к равенству (75), положим:

$$\nu_i = k_i m + r_i \left(0 \le r_i < m, k_i \ge 0; i = 1, 2, \ldots, s\right). \qquad (81)$$

Тогда в силу (79) равенство (75) перепишется так:

$$A_2 = X_2^m = TP\left\{\underbrace{H^{(k_1+1)},\ldots,H^{(k_1+1)}}_{r_1},\underbrace{H^{(k_1)},\ldots,H^{(k_1)}}_{m-r_1},\underbrace{H^{(k_2+1)},\ldots,H^{(k_2+1)}}_{r_2},H^{(k_2)},\ldots\right\}P^{-1}T^{-1}, \quad (82)$$

где $P = \left\{P_{\nu_1,m}, P_{\nu_2,m}, \ldots, P_{\nu_s,m}\right\}$.

Сопоставляя (82) с (73), видим, что клетки

$$H^{(k_1+1)},\ldots,H^{(k_1+1)},H^{(k_1)},\ldots,H^{(k_1)},H^{(k_2+1)},\ldots,H^{(k_2+1)},\ldots \qquad (83)$$

с точностью до порядка должны совпасть с клетками

$$H^{(q_1)},H^{(q_2)},\ldots,H^{(q_t)}. \qquad (84)$$

Условимся систему элементарных делителей $\lambda^{\nu_1},\lambda^{\nu_2},\ldots,\lambda^{\nu_s}$ называть возможной для X_2, если после возведенияматрицы в m-ю степень эти элементарные делители, расщепляясь, порождают заданную систему элементарных делителей матрицы $A_2 : \lambda^{q_1}, \lambda^{q_2}, \ldots, \lambda^{q_t}$. Число возможных систем элементарных делителей всегда конечно, поскольку

$$\max(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s) \le m\mu, \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s = n_2 \qquad (85)$$

(n_2 – степень матрицы A_2).

В каждом конкретном случае возможные системы элементарных делителей для X_2 могут быть легко определены путем конечного числа испытаний.

Покажем, что для каждой возможной системы элементарных делителей $\lambda^{\nu_1}, \lambda^{\nu_2}, \ldots, \lambda^{\nu_s}$ существуют соответствующие решения уравнения (71), и определим все эти решения. В этом случае существует преобразующая матрица Q такая, что

$$\left\{H^{(k_1+1)}, \ldots, H^{(k_1+1)}, H^{(k_1)}, \ldots, H^{(k_1)}, H^{(k_2+1)}, \ldots\right\} = Q^{-1} A_2 Q \,. \qquad (86)$$

Матрица Q осуществляет перестановку клеток в квазидиагональной матрице, что достигается надлежащей перенумерацией базисных векторов. Поэтому матрицу Q можно считать известной. Используя (86), мы из (82) получим:

$$A_2 = TPQ^{-1} A_2 A P^{-1} T^{-1} \,.$$

Отсюда

$$TPQ^{-1} = X_{A_2}$$

или

$$T = X_{A_2} Q P^{-1} \,, \qquad (87)$$

где X_{A_2} – произвольная матрица, перестановочная с A_2.

Подставляя выражение (87) для T в (74), будем иметь:

$$X_2 = X_{A_2} Q P^{-1} \left\{H^{(\nu_1)}, H^{(\nu_2)}, \ldots, H^{(\nu_s)}\right\} P Q^{-1} X_{A_2}^{-1} \,. \qquad (88)$$

Из (69), (72) и (88) получим общую формулу, охватывающую все искомые решения:

$$X = U\left\{X_{A_1}, X_{A_2}QP^{-1}\right\}\left\{\sqrt[m]{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}}, H^{(v_1)}, \ldots, H^{(v_t)}\right\} \cdot \left\{X_{A_1}^{-1}, PQ^{-1}X_{A_2}^{-1}\right\}U^{-1}. \tag{89}$$

Обратим внимание читателя на то, что корень m-й степени из особенной матрицы не всегда существует. Его существование связано с существованием системы возможных элементарных делителей для матрицы X_2.

Легко видеть, например, что уравнение

$$X^m = H^{(p)}$$

не имеет решений при $m > 1, p > 1$.

Пример. Требуется извлечь корень квадратный из матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

т. е. найти все решения уравнения

$$X^2 = A.$$

В данном случае $A = A_2, X = X_2, m = 2, t = 2, q_1 = 2, q_2 = 1$. Матрица X может иметь только один элементарный делитель λ^3. Поэтому $s = 1, v_1 = 3, k_1 = 1, r_1 = 1$ [см. (80)]

$$P = P_{3,2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = P^{-1}, \qquad Q = E.$$

Кроме того, как и в примере на стр. 214, можно положить в формуле (88):

$$X_{A_2} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{Vmatrix}, X_{A_2}^{-1} = \begin{Vmatrix} a^{-1} & cd - a^{-2}b & -ac \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -ad & a^2 \end{Vmatrix}.$$

Из этой формулы получим:

$$X = X_2 = X_{A_2}P^{-1}H^{(3)}PX_{A_2}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\alpha = ca^{-1} - a^2 d$ и $\beta = a^3$ – произвольные параметры.

1.3 **Тема 7** Сингулярные пучки матриц

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующий вопрос – Приложения к дифференциальным уравнениям

Рассмотрим приложения полученных результатов к интегрированию системы m линейных дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \frac{dx_k}{dt} = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{58}$$

или в матричной записи:

$$Ax + B\frac{dx}{dt} = f(t); \tag{59}$$

здесь

$$A = \|a_{ik}\|,\ B = \|b_{ik}\|,\ (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ f = (f_1, f_2, \dots, f_m).$$

Введем новые неизвестные функции $z_1, z_2, \dots, z_n$, связанные со старыми $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейным неособенным преобразованием с постоянными коэффициентами:

$$x = Qz,\ \left[z = (z_1, z_2, \dots, z_n);\ |Q| \neq 0\right] \tag{60}$$

Кроме того, вместо уравнений (58) можно ваять любые m независимых линейных комбинаций их, что равносильноумножению матриц A, B, f слева на квадратную неособенную матрицу m-го порядка P.
Подставляя Qz вместо x в (59) и умножая (59) почленно слева на P, получим:

$$\tilde{A}x + \tilde{B}\frac{dz}{dt} = \tilde{f}(t), \tag{61}$$

где

$$\tilde{A} = PAQ,\ \tilde{B} = PBQ,\ \tilde{f} = Pf = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n) \tag{62}$$

При этом пучки матриц $A+\lambda B$ и $\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$ строго эквивалентны друг другу:

$$\tilde{A}+\lambda\tilde{B}=P(A+\lambda B)Q \qquad (63)$$

Выберем матрицы P и Q так, чтобы пучок $\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$ имел каноническую квазидиагональную форму

$$\tilde{A}+\lambda\tilde{B}=\left\{0, L_{\varepsilon_{g+1}},\dots,L_{\varepsilon_p};\ L'_{\eta_{h+1}},\dots,L'_{\eta_q};\ N^{(u_1)},\dots,N^{(u_s)};\ J+\lambda E\right\} \qquad (64)$$

В соответствии с диагональными блоками в (64)
система дифференциальных уравнений распадается
на $v=p-g+q-h+s+2$ отдельных систем вида

$$0\cdot\overset{1}{z}=\overset{1}{\tilde{f}}, \qquad (65)$$

$$L_{\varepsilon_{g+i}}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{1+i}{z}=\overset{1+i}{\tilde{f}} \quad (i=1,2,\dots,p-g) \qquad (66)$$

$$L'_{\eta_{h+j}}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{p-g+1+j}{z}=\overset{p-g+1+j}{\tilde{f}} \quad (j=1,2,\dots,q-h) \qquad (67)$$

$$N^{(u_k)}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{p-g+q-h+1+k}{z}=\overset{p-g+q-h+1+k}{\tilde{f}} \quad (k=1,2,\dots,s) \qquad (68)$$

$$\left(J+\frac{d}{dt}\right)\overset{v}{z}=\overset{v}{\tilde{f}} \qquad (69)$$

где

$$z=\begin{Vmatrix}\overset{1}{z}\\ \overset{2}{z}\\ \vdots\\ \overset{v}{z}\end{Vmatrix},\quad \tilde{f}=\begin{Vmatrix}\overset{1}{\tilde{f}}\\ \overset{2}{\tilde{f}}\\ \vdots\\ \overset{v}{\tilde{f}}\end{Vmatrix} \qquad (70)$$

$\overset{1}{z}=(z_1,\dots,z_g)$, $\overset{1}{\tilde{f}}=(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_h)$, $\overset{2}{z}=(z_{g+1},\dots)$, $\overset{2}{\tilde{f}}=(\tilde{f}_{h+1},\dots)$ и т.д. (71)

$$\Lambda\left(\frac{d}{dt}\right) = A + B\frac{d}{dt}, \text{ если } \Lambda(\lambda) \equiv A + \lambda B \qquad (72)$$

Таким образом, интегрирование системы (59) в самом общем случае сведено к интегрированию частных систем (65) — (69) такого же типа. В этих системах пучок матриц $A + \lambda B$ имеет соответственно вид $0, L_\varepsilon, L'_\eta, N^{(u)}, J + \lambda E$.

1) Для того чтобы система (65) не была противоречивой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overset{1}{\tilde{f}} \equiv 0,$$

т.е.

$$\tilde{f}_1 \equiv 0, \ldots, \tilde{f}_h \equiv 0 \qquad (73)$$

в этом случае в качестве неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_\varepsilon$, составляющих столбец $\overset{1}{z}$ могут быть взяты произвольные функции от t.

2) Система (66) представляет собой систему вида

$$L_\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\right)z = \tilde{f} \qquad (74)$$

или в подробной записи

$$\frac{dz_1}{dt} + z_2 = \tilde{f}_1(t), \frac{dz_2}{dt} + z_3 = \tilde{f}_2(t), \ldots, \frac{dz_\varepsilon}{dt} + z_{\varepsilon+1} = \tilde{f}_\varepsilon(t) \qquad (75)$$

Такая система всегда совместна. Если в качестве $z_{\varepsilon+1}(t)$ взять произвольную функцию от t, то последовательными квадратурами из (75) определятся все остальные неизвестные функции $z_\varepsilon, z_{\varepsilon-1}, \ldots, z_1$.

3) Система (67) представляет собой систему вида

$$L'_\eta\left(\frac{d}{dt}\right)z = \tilde{f} \qquad (76)$$

или в подробной записи

$$\frac{dz_1}{dt} = \tilde{f}_1(t), \frac{dz_2}{dt} + z_1 = \tilde{f}_2(t), \ldots, \frac{dz_\eta}{dt} + z_{\eta-1} = \tilde{f}_\eta(t), \tilde{z}_\eta = \tilde{f}_{\eta+1}(t). \qquad (77)$$

Из всех уравнений (77), кроме первого, мы однозначно определяем $z_\eta, z_{\eta-1}, \dots, z_1$:

$$z_\eta = \tilde{f}_{\eta+1}, z_{\eta-1} = \tilde{f}_\eta - \frac{d\tilde{f}_{\eta+1}}{dt}, \dots, z_1 = \tilde{f}_2 - \frac{d\tilde{f}_3}{dt} + \dots + (-1)^{\eta-1} \frac{d^{\eta-1} \tilde{f}_{\eta+1}}{dt^{\eta-1}} \qquad (78)$$

Подставляя полученное выражение для z_1 в первое уравнение, получаем условие совместности:

$$\tilde{f}_1 - \frac{d\tilde{f}_2}{dt} + \frac{d^2 \tilde{f}_3}{dt^2} - \dots + (-1)^{\eta-1} \frac{d^\eta \tilde{f}_{\eta+1}}{dt^\eta} = 0. \qquad (79)$$

4) Система (68) представляет собой систему вида

$$N^{(u)}\left(\frac{d}{dt}\right) z = \tilde{f} \qquad (80)$$

или в подробной записи

$$\frac{dz_2}{dt} + z_1 = \tilde{f}_1(t), \frac{dz_3}{dt} + z_2 = \tilde{f}_2(t), \dots, \frac{dz_u}{dt} + z_{u-1} = \tilde{f}_{u-1}(t), z_u = \tilde{f}_u \qquad (81)$$

Отсюда последовательно однозначно определяем решение

$$z_u = \tilde{f}_u, z_{u-1} = \tilde{f}_{u-1} - \frac{d\tilde{f}_u}{dt}, \dots, z_1 = \tilde{f}_1 - \frac{d\tilde{f}_2}{dt} + \frac{d^2 \tilde{f}_3}{dt^2} - \dots + (-1)^{u-1} \frac{d^{u-1} \tilde{f}u}{dt^{u-1}} \qquad (82)$$

5) Система (69) представляет собой систему вида

$$Jz + \frac{dz}{dt} = \tilde{f} \qquad (83)$$

Как было показано в главе V (параграф 5), общее решение такой системы имеет вид

$$z = e^{-Jt} z_0 + \int_0^t e^{-J(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \qquad (84)$$

здесь z_0 - столбец с произвольными элементами (начальными значениями неизвестных функций при $t = 0$).

Обратный переход от системы (61) к системе (59) осуществляется формулами (60) и (62), согласно которым каждая из функций $x_1, \dots, x_n$ является линейной комбинацией функций $z_1,\dots,z_n$, а каждая из функций $\tilde{f}_1(t),\dots,\tilde{f}_m(t)$ линейно (с постоянными коэффициентами) выражается через функции $f_1(t),\dots,f_m(t)$.

Проведенный анализ показывает, что для совместности системы (58) в общем случае должны выполняться некоторые определенные линейные конечные и дифференциальные зависимости (с постоянными коэффициентами) между правыми частями уравнений.

Если эти условия выполнены, то общее решение системы содержит (в общем случае) линейно как произвольные постоянные, так и произвольные функции.

Характер условий совместности и характер решений (в частности количество произвольных постоянных и произвольных функций) определяются минимальными индексами и элементарными делителями пучка $A+\lambda B$ поскольку от этих индексов и делителей зависит каноническая форма системы дифференциальных уравнений (65) — (69).

1.4 Тема 8 Приложение теории матриц к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующий вопрос – Матрицант

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=P(t)X, \qquad (37)$$

где $P(t)=\|p_{ik}(t)\|_1^n$ - непрерывная матричная функция в некотором интервале (a,b) изменения аргумента t.

Воспользуемся методом последовательных приближений для определения нормированного решения системы (37), т. е. решения, обращающегося в единичную матрицу при $t=t_0$ [t_0 - фиксированное число из интервала (a,b)].
Последовательные приближения X_k $(k=0,1,2,\dots$ будем находить из рекуррентных соотношений

$$\frac{dX_k}{dt}=P(t)X_{k-1} \quad (k=1,2,\dots),$$

выбирая в качестве приближения X_0 единичную матрицу E.

Полагая $X_k(t_0)=E \quad (k=0,1,2,\dots)$, мы сможем X_k представить в виде

$$X_k = E+\int_{t_0}^{t} P(t)X_{k-1}dt \quad (k=1,2,\dots).$$

Таким образом

$$X_0=E,\ X_1=E+\int_{t_0}^{t}P(t)\,dt,\ X_2=E+\int_{t_0}^{t}P(t)dt+\int_{t_0}^{t}P(t)dt\int_{t_0}^{t}P(t)\,dt,\dots$$

т. е. $X_k \quad (k=0,1,2,\dots)$ есть сумма первых $k+1$ членов матричного ряда

$$E+\int_{t_0}^{t}P(t)dt+\int_{t_0}^{t}P(t)dt\int_{t_0}^{t}P(t)dt+\dots \qquad (38)$$

Для того чтобы доказать, что этот ряд абсолютно и равномерно сходится в любой замкнутой части интервала (a,b) и определяет искомое решение уравнения (37), мы построим мажорантный ряд.

Определим неотрицательные функции $g(t)$ и $h(t)$ в интервале (a,b) равенствами

$$g(t)=\max\left[\left|p_{11}(t)\right|,\left|p_{12}(t)\right|,\dots,\left|p_{nn}(t)\right|\right],\quad h(t)=\left|\int_{t_0}^{t}g(t)dt\right|$$

Легко проверяется, что функции $g(t)$, а следовательно, и $h(t)$ непрерывны в интервале (a,b).

Каждый из n^2 скалярных рядов, на которые распадается матричный ряд (38), мажорируется рядом

$$1+h(t)+\frac{nh^2(t)}{2!}+\frac{n^2h^3(t)}{2!}+\dots \qquad (39)$$

Действительно,

$$\left|\left\{\int_{t_0}^{t}P(t)dt\right\}_{i,k}\right|=\left|\int_{t_0}^{t}p_{ik}(t)dt\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}g(t)dt\right|=h(t),$$

$$\left|\left\{\int_{t_0}^{t} P(t)\,dt \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt\right\}_{i,k}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t} p_{ik}(t)\,dt \int_{t_0}^{t} p_{ik}(t)\,dt\right| \le n\left|\int_{t_0}^{t} g(t)\,dt \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt\right| = \frac{nh^2(t)}{2}$$

и т.д.

Ряд (39) сходится в интервале (a,b), причем сходится равномерно в любой замкнутой части этого интервала. Отсюда вытекает, что и матричный ряд (38) сходится в (a,b) и притом абсолютно и равномерно в любом замкнутом интервале, входящем в (a,b).

Почленным дифференцированием проверяем, что сумма ряда (38) представляет собой решение уравнения (37); это решение обращается в E при $t = t_0$. Почленное дифференцирование ряда (38) допустимо, поскольку ряд, получающийся после дифференцирования, отличается множителем P от ряда (38) и, следовательно, как и ряд (38), является равномерно сходящимся в любой замкнутой части интервала (a,b).

Таким образом, нами доказана теорема о существовании нормированного решения уравнения (37). Это решение будем обозначать через $\Omega_{t_0}^{t}(P)$ или просто $\Omega_{t_0}^{t}$. Любое другое решение, как было показано § 1, имеет вид

$$X = \Omega_{t_0}^{t} C,$$

где C - произвольная постоянная матрица. Из этой формулы следует, что любое решение, и в частности нормированное, однозначно определяется своим значением при $t = t_0$.

Ненормированное решение $\Omega_{t_0}^{t}$ уравнения (37) часто называют матрицантом.

Мы показали, что матрицант представим в виде ряда

$$\Omega_{t_0}^{t} = E + \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt + \ldots \qquad (40)$$

который сходится абсолютно и равномерно в любом замкнутом интервале, в котором функция $P(t)$ непрерывна.

Отмстим некоторые формулы для матрицанта.

1° $\Omega_{t_0}^{t} = \Omega_{t_1}^{t}\Omega_{t_0}^{t_1} \quad \left(t_0, t_1, t \subset (a,b)\right)$

Действительно, поскольку $\Omega_{t_0}^{t}$ и $\Omega_{t_1}^{t}$ - два решения уравнения (37), то

$\Omega_{t_0}^{t} = \Omega_{t_1}^{t}C$ (C - постоянная матрица).

Полагая здесь $t = t_1$. Получим $C = \Omega_{t_0}^{t_1}$.

2° $\Omega_{t_0}^{t}\left(P+Q\right) = \Omega_{t_0}^{t}\left(P\right)\Omega_{t_0}^{t}\left(S\right)$, где $S = \left[\Omega_{t_0}^{t}\left(P\right)\right]^{-1} Q\Omega_{t_0}^{t}\left(P\right)$.

Для вывода этой формулы положим:

$$X = \Omega_{t_0}^{t}\left(P\right),\ Y = \Omega_{t_0}^{t}\left(P+Q\right)$$

и

$$Y = XZ \qquad (41)$$

Дифференцируя почленно (41), найдем:

$$\left(P+Q\right)XZ = PXZ + X\frac{dZ}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{dZ}{dt} = X^{-1}QXZ$$

и, следовательно, поскольку из (41) следует, что $Z\left(t_0\right) = E$,

$$Z = \Omega_{t_0}^{t}\left(X^{-1}QX\right).$$

Подставляя в (41) вместо X, Y, Z соответствующие матриц анты, получаем формулу 2°.

3° $\ln\left|\Omega_{t_0}^{t}\left(P\right)\right| = \int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, P\, dt$

Эта формула следует из тождества Якоби (4) (стр. 420), если в него вместо $X(t)$ подставить $\Omega_{t_0}^{t}\left(P\right)$.

4° Если $A = \|a_{ik}\|_1^n = \mathrm{const}$, то

$$\Omega_{t_0}^t(A) = e^{A(t-t_0)}.$$

Введем следующие обозначения. Если $P = \|p_{ik}\|_1^n$, то через $\mathrm{mod}\,P$ будем обозначать матрицу

$$\mathrm{mod}\,P = \|\,|p_{ik}|\,\|_1^n.$$

Кроме того, если $A = \|a_{ik}\|_1^n$ и $B = \|b_{ik}\|_1^n$ - две вещественные матрицы и

$$a_{ik} \le b_{ik} \quad (i,k = 1,2,\dots,n),$$

то мы будем писать:

$$A \le B.$$

Тогда из представления (40) следует:

5° Если $\mathrm{mod}\,P(t) \le Q(t)$, то

$$\mathrm{mod}\,\Omega_{t_0}^t(P) \le \Omega_{t_0}^t(Q) \quad (t > t_0).$$

В дальнейшем матрицу n-го порядка, у которой все элементы равны единице, будем обозначать через I:

$$I = \|1\|.$$

Рассмотрим функцию $g(t)$, определенную на стр. 429. Тогда

$$\mathrm{mod}\,P(t) \le g(t)I.$$

Отсюда в силу 5°

$$\mathrm{mod}\,\Omega_{t_0}^t(P) \le \Omega_{t_0}^t(g(t)I) \quad (t > t_0) \tag{42}$$

Но $\Omega_{t_0}^t(g(t)I)$ есть нормированное решение уравнения

$$\frac{dX}{dt} = g(t)IX.$$

Следовательно, в силу 40

$$\Omega_{t_0}^{t}\left(g(t)I\right)=e^{h(t)I}\leq\left(1+h(t)+\frac{nh^2(t)}{2!}+\frac{n^2h^3(t)}{2!}+\ldots\right)I,$$

где

$$h(t)=\int_{t_0}^{t}g(t)dt$$

Поэтому из (42) следует:

6° $\operatorname{mod}\Omega_{t_0}^{t}(P)\leq\left(\frac{1}{n}e^{nh(t)}+\frac{n-1}{n}\right)I\leq e^{nh(t)}I \quad (t>t_0)$,

где

$$h(t)=\int_{t_0}^{t}g(t)dt, \quad g(t)=\max_{1\leq i,k\leq n}\left\{\left|p_{ik}(t)\right|\right\}.$$

Покажем теперь, как при помощи матриканта выражается общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с правыми частями:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)x_k+f_i(t) \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (43)$$

$p_{ik}(t)$, $f_i(t)$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$ - непрерывные функции в интервале изменения аргумента t.

Вводя столбцевые матрицы («векторы» $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$) и квадратную матрицу $P=\|p_{ik}\|_1^n$ запишем эту систему так:

$$\frac{dx_i}{dt}=P(t)x+f(t) \qquad (43')$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$x=\Omega_{t_0}^{t}(P)z, \qquad (44)$$

где z — неизвестный столбец, зависящий от t. Подставим это выражение для x в (43'), получим:

$$p\Omega_{t_0}^{t}(P)z+\Omega_{t_0}^{t}(P)\frac{dz}{dt}=P\Omega_{t_0}^{t}(P)z+f(t),$$

откуда

$$\frac{dz}{dt}=\left[\Omega_{t_0}^{t}(P)\right]^{-1}f(t).$$

Интегрируя, находим:

$$z=\int_{t_0}^{t}\left[\Omega_{t_0}^{\tau}(P)\right]^{-1}f(\tau)\,d\tau+c,$$

где c - произвольный постоянный вектор. Подставим это выражение в (44), получим:

$$x=\Omega_{t_0}^{t}(P)\int_{t_0}^{t}\left[\Omega_{t_0}^{\tau}(P)\right]^{-1}f(\tau)\,d\tau+\Omega_{t_0}^{t}(P)c. \qquad (45)$$

Давая t значение t_0 найдем: $x(t_0)=c$. Поэтому формула (45) принимает вид

$$x=\Omega_{t_0}^{t}(P)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \qquad (45')$$

где

$$K(t,\tau)=\Omega_{t_0}^{t}(P)\left[\Omega_{t_0}^{\tau}(P)\right]^{-1}$$

- так называемая матрица Коши.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

2.1 Лекционное занятие

Лекции являются одним из основных видов учебной деятельности в вузе, на которых преподавателем излагается содержание теоретического курса дисциплины.

Рекомендации по работе на лекционных занятиях:

1. Обратить внимание на то, как строится лекция. Она состоит, в основном из:

• вводной части, в которой актуализируется сущность вопроса, идет подготовка к восприятию основного учебного материала;

• основной части, где излагается суть рассматриваемой проблемы;

• заключения, где делаются выводы и даются рекомендации, практические советы.

2. Настроиться на лекцию. Настрой предполагает подготовку, которую рекомендует преподаватель. Например, самостоятельно найти ответ на вопрос домашнего задания, читая раздел рекомендуемого литературного источника и выявить суть рассматриваемых положений. Благодаря такой подготовке возникнут вопросы, которые можно будет выяснить на лекции. Кроме того, соответствующая подготовка к лекции облегчает усвоение нового материала, заранее ориентируя на узловые моменты изучаемой темы. Важна и самоподготовка к лекции через стимулирование чувства интереса, желания узнать новое.

3. Отключить до начала лекции мобильный телефон (или поставить его в бесшумный режим), чтобы случайный звонок не отвлекал преподавателя и других студентов.

4. Слушать лекцию внимательно и сосредоточенно. Не отвлекаться. Ваше внимание должно быть устойчивым. В противном случае есть риск не усвоить именно главные положения темы, оставить за кадром вопросы, которые осложнять учебу в дальнейшем.

5. Если Вы в чем-то не согласны (или не понимаете) с преподавателем, то совсем не обязательно тут же перебивать его и, тем более, высказывать свои представления, даже если они и кажутся Вам верными. Перебивание преподавателя на полуслове - это верный признак невоспитанности. А вопросы следует задавать либо после занятий (для этого их надо кратко

записать, чтобы не забыть), либо выбрав момент, когда преподаватель сделал хотя бы небольшую паузу, и обязательно извинившись.

6. Помнить, что лекцию лучше конспектировать, независимо есть тема в учебнике или ее нет. Научитесь правильно составлять конспект лекции.

2.2 Практическое занятие

Важно помнить, что решение каждой задачи или примера нужно стараться довести до конца. По нерешенным или не до конца понятым задачам обязательно проводятся консультации преподавателя. Своевременное разъяснение преподавателем неясного для студента означает обеспечение качественного усвоения нового материала.

По ряду дисциплин практикуется выдача индивидуальных или опережающих заданий на различный срок, определяемый преподавателем, с последующим представлением их для проверки в указанный срок.

Важно разъяснить студентам, что записи на практических занятиях нужно выполнять очень аккуратно, в отдельной тетради, попытка сэкономить время за счет неаккуратных сокращений приводит, как правило, к обратному – значительно большей потере времени и повторению сделанного ранее решения и всех расчетов.

Цель семинарских и практических занятий по всем дисциплинам не только углубить и закрепить соответствующие знания студентов по предмету, но и развить инициативу, творческую активность, вооружить будущего специалиста методами и средствами научного познания.