ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б.1.В.01 Методы оптимальных решений и математическое планирование эксперимента

Направление подготовки (специальность): *20.04.01 Техносферная безопасность*

Профиль образовательной программы: *Система управления рисками ЧС*

Форма обучения: *заочная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция 1 (2 часа)
Тема: «Общее понятие модели и моделирования. Типы и свойства моделей. Общая модель линейного программирования в каноническом и неканоническом представлении. Основные теоремы ЛП. Графический метод решения ЗЛП. Симплекс-метод. Двойственные задачи линейного программирования»

1.1.1. Вопросы лекции:

1. Общее понятие модели и моделирования.
2. Типы и свойства моделей
3. Общая характеристика экономико-математических методов и областей их применения
4. Общая модель линейного программирования в каноническом и неканоническом представлении.
5. Графический метод решения ЗЛП.
6. Симплекс-метод.
7. Двойственные задачи линейного программирования

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Общее понятие модели и моделирования.

Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект который в процессе изучения замещает объект-оригинал сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Человек применяет модели с незапамятных времен при изучении сложных явлений процессов конструировании новых сооружений. Хорошо построенная модель ,как правило, доступнее для исследования нежели реальный объект. Более того некоторые объекты вообще не могут быть изучены непосредственным образом: недопустимы например эксперименты с экономикой страны в познавательных целях; принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым или скажем с планетами Солнечной системы и т.п.

Модель позволяет научиться управлять объектом, апробируя различные варианты управления на модели этого объекта. Экспериментировать в этих целях с реальным объектом в лучшем случае бывает неудобно, а зачастую просто вредно или вообще невозможно в силу ряда причин (большой продолжительности эксперимента во времени риска привести объект в нежелательное и необратимое состояние и т.п.)

Процесс построения модели называется моделированием.

Другими словами моделирование - это процесс изучения строения и свойств оригинала с помощью модели.

Различают материальное и идеальное моделирование.

Материальное моделирование в свою очередь делится на физическое и аналоговое моделирование.

Физическим принято называть моделирование при котором реальному объекту противопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающая исследование (как правило в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия.

От предметного моделирования принципиально отличается идеальное моделирование, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной мыслимой.

Основным типом идеального моделирования является знаковое моделирование. Знаковым называется моделирование ,использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы графики чертежи формулы наборы символов.

Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели сформулированной на языке математики.

Процесс моделирования состоит из следующих этапов:

Объект - Модель - Изучение модели - Знания об объекте

Основной задачей процесса моделирования является выбор наиболее адекватной к оригиналу модели и перенос результатов исследования на оригинал. Существуют достаточно общие методы и способы моделирования.

2. Типы и свойства моделей

Существует несколько классификаций экономико-математических моделей. Одна из них была предложена математиком-экономистом Кравченко:

1. Корреляционные модели или производственные функции которые позволяют определить степень влияния факторных признаков на результат.

2. Балансовые модели обеспечивают обоснование пропорций в производственном процессе

3. Математической оптимизации дающие возможность выбора наилучших вариантов развития

Брославец предложил следующую классификацию:

В практической работе имеет смысл классифицировать модели в зависимости от лежащих в основе математических методов, поэтому модели можно разделить на:

1. Аналитические, где используется классический математический аппарат алгебры геометрии, представленный в виде формул

2. Экономико-статистические – основаны на методах математической статистики, теории вероятностей. Главное место среди них занимает производственная функция.

3. Оптимизационные - основаны на методах математического программирования, позволяют находить экстремальные значения целевой функции по искомому значению переменной величины для определенных условий. Применяется когда из множества вариантов нужно выбрать наиболее оптимальный.

4. Балансовые – обеспечивают обоснование и определение наилучших пропорций при организации производства представлена в виде матриц и таблиц.

5. Модели сетевого планирования.

Условия применения экономико-математических методов и моделей.

- ЭММ могут быть полезны если явления и процессы можно выразить количественно; существуют взаимосвязи и зависимости, которые можно представить в виде уравнений или неравенств.

- При разработке модели должны быть учтены экономические технологические и др. условия.

- Количество исходной информации, ее достоверность должны соответствовать целям решаемых задач и задаваемой точности вычислений

-Должна существовать возможность анализа и корректировки результатов решения

- Должно быть возможным максимальное упрощение модели, ее информации для более быстрого экономического решения задач

- комплексное применение математических моделей и методов.

2. Типы и свойства моделей

- ЭММ относится к разряду математических и соответственно представляет собой некоторое абстрактное описание объектов, явлений или процессов с помощью знаков и символов. Другими словами, она имеет вид определенной совокупности математических уравнений или неравенств, матриц, формул, таблиц или других средств математического описания изучаемых объектов;

- ЭММ обладают всеми общими свойствами, присущими и другим типам моделей (она подобна изучаемому объекту и отражает его наиболее существенные качества, при исследовании способна замещать данный объект, а также давать информацию не только о самом объекте, но и о его предполагаемом или возможном поведении);

- ЭММ – это модель, которая изучает именно экономический объект, явление или процесс. На основе этого она выявляет определенные закономерности и дает возможность сознательно использовать объективные экономические законы при планировании и организации производства, то есть находить и устанавливать определенный экономический порядок.

Классификация экономико-математических моделей, в зависимости от лежащих в их основе математических методов:

1. Аналитические модели в землеустройстве основаны на применении классического математического аппарата (алгебра, дифференциальное и интегральное исчисление, геометрия, тригонометрия, мат.анализ). Как правило, аналитические модели имеют вид формул и отражают функциональные зависимости. Каждому определенному значению фактора (независимой переменной) или множеству факторов соответствует строго определенное значение результата.

2. Экономико-статистические модели базируются на использовании теории вероятностей и методов мат. статистики (корреляционного, регрессионного, дисперсионного анализа, теории выборок и т.д.). Главное место среди них занимают производственные функции, представляющие собой уравнения статистической связи зависимой переменной и факторов-аргументов.

Экономико-статистические модели могут быть функциональными и корреляционными.

Функциональные – идентичны аналитическим моделям, но основаны на статистической информации. Используются в экономике редко.

Корреляционные - позволяют отразить степень влияния различных факторов на результаты производства, обосновать нормативы, сделать прогнозы состояния и динамики процессов производства.

Корреляционные модели базируются на статистических связях между факторами. Они могут обладать разной степенью достоверности, так как описывают случайные процессы. Уровень достоверности модели оценивается коэффициентом корреляции.

3. Экономико-математические (оптимизационные) модели дают возможность выбора наилучших вариантов развития экономических систем на основе использования аппарата математического программирования, дающего возможность находить экстремальные (минимальные и максимальные) значения целевой функции по искомому перечню переменных при заданных условиях.

Нередко именно оптимизационные модели называют экономико-математическими, так как они занимают главное место в общей системе моделей.

Оптимизационные модели делятся на комбинированные и дифференцированные.

При комбинированном моделировании все вопросы землеустроительного проекта решаются комплексно в их взаимообусловленности и взаимозависимости, что более правильно, однако приводит к громоздким задачам, решение которых затруднительно.

Дифференцированное моделирование подразумевает последовательное решение нескольких задач по проекту (например, по составным частям). Модели получаются значительно меньшего объема, и их решение существенно облегчается.

4. Балансовые модели, обеспечивающие обоснование наилучших пропорций территориальной организации производства с учетом его факторов и результатов. Они имеют форму матриц, систем таблиц, отражающих балансы кормов, труда и т.д.

5. Модели сетевого планирования и управления.

Классификаций математических моделей на основе зависимостей между факторами и результатом:

1) Экономико-статистическая модель, представляющая собой корреляционное уравнение, отражающее связь зависимого и нескольких независимых факторов; Большинство экономико-статистических моделей описывает влияние случайных факторов.

2) Экономико-математическая модель, представляющая собой таблицу чисел и связанных в единую систему функциональных уравнений различного типа. В свою очередь делятся на детерминистические (однозначно определяются набором независимых переменных, строятся на основе правил линейной алгебры и представляют собой системы уравнений, совместно решаемые для получения искомых результатов) и стохастические (описывающие случайные процессы, подчиняющиеся законам теории вероятности.

Позволяют анализировать эмпирические закономерности, не выражающиеся строго функциональными зависимостями

3. Общая характеристика экономико-математических методов и областей их применения

На основании вышеизложенного сформулированы основные требования, предъявляемые к использованию экономико-математических методов и моделей

1. Сочетание при моделировании количественного и качественного анализа.

В основе экономико-математического моделирования лежат количественные методы анализа, что предполагает детальное изучение объектов проектирования, выявление различных зависимостей и взаимосвязей, их математический анализ в виде набора переменных величин, уравнений, неравенств и т. д.

2. Учет экономических, технологических, технических и других условий.

К экономическим условиям относятся: размеры и сочетание отраслей, виды ресурсов, гарантированные объемы производства, условия реализации и распределения продукции.

К технологическим условиям относят агротехнические особенности возделывания сельскохозяйственных культур, ветеринарные и зоотехнические требования к выращиванию животных и т. д.

Они составляют основу любой модели, которую предполагается использовать при землеустроительном проектировании.

3. Использование надежной информационной базы, соответствующей целям решаемых задач и задаваемой точности вычислений.

Возможности моделирования прямо связаны с качеством исходной информации. Поэтому необходимо учитывать, какие показатели реально могут быть получены на основе имеющихся статистических, экспериментальных и нормативных материалов.

4. Максимально возможное упрощение моделей, их унификация для более быстрого и экономичного решения землеустроительных задач при необходимой точности.

Экономико-математические модели не должны быть очень громоздкими, так как любое усложнение модели может привести к обратному эффекту. Поэтому модели должны быть максимально упрощены и унифицированы, но при этом иметь достаточное количество переменных и ограничений, которое позволяет ей получить приемлемое решение. Использование экономико-математических методов не является самоцелью, поэтому не следует вводить в условие задачи ничего лишнего. Полученные результаты следует тщательно проанализировать и только потом использовать для дальнейших действий.

4. Общая модель линейного программирования в каноническом и неканоническом представлении.

Существует огромное количество ЗЛП с различными словесными формулировками. Но, несмотря на различие содержательных ситуаций ряда задач ЛП, экстремальные математические модели, соответствующие им, имеют много общего. Так, в каждой из этих задач требуется максимизировать или минимизировать линейную функцию от нескольких переменных. При этом ограничения, наложенные на совокупность переменных, являются либо линейными уравнениями, либо линейными неравенствами, либо состоят как из линейных уравнений, так и из линейных неравенств. Каждая из этих задач является частным случаем общей задачи ЛП.

Общей задачей ЛП называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (.1)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,k} \qquad (.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1,m} \qquad (.3)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,l}, \quad l \le n \qquad (.4)$$

где aij , bi, cj - заданные постоянные величины и k £ m.

Функция (.1) называется целевой функцией задачи (1) – (4), а условия (2) – (4) – ограничениями данной задачи.

Различают еще две основные формы задач ЛП в зависимости от наличия ограничений разного типа: стандартную и каноническую.

Стандартной (или симметричной) ЗЛП называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1) при выполнении условий (2) и (4), где k = m , и l=n, т.е.

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad (5)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Канонической (или основной) ЗЛП называется задача, которая состоит в определении максимального значения целевой функции (1) при выполнении условий (3) и (4), где k=0, и l=n, т.е.

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad (3.6)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Стандартная форма модели интересна тем, что большое число прикладных моделей естественным образом сводится к этому виду моделей. Каноническая форма модели важна ввиду того, что основные вычислительные схемы различных алгоритмов решения этих задач разработаны именно для этой формы.

Указанные выше три формы ЗЛП эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть приведена к любой из двух остальных. Следовательно, любую ЗЛП можно привести к канонической форме. Поэтому умение решать задачу в канонической форме позволяет решать задачу и в любой другой форме.

Чтобы перейти от одной формы записи ЗЛП к другой нужно уметь:

1) сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации;

2) переходить от ограничений – неравенств к ограничениям – равенствам;

3) заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности, на неотрицательные переменные.

1. В том случае, когда требуется найти min функции F=c1x1+c2x2+…+cnxn, можно перейти к нахождению максимума функции F1, умножив коэффициенты при переменных в целевой функции модели на (-1), т.е.:

F1 = - F = - c1x1 - c2x2 - ……- cnxn , т.к. min F = - max (- F).

2. Ограничение – неравенство исходной задачи ЛП можно преобразовать в ограничение – равенство добавлением к его левой части неотрицательной переменной с соответствующим знаком.

Таким образом, ограничение – неравенство вида

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n \le b_i$$

преобразуется в ограничение – равенство

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \ge 0, \quad i = \overline{1,m},$$

а ограничение – неравенство вида

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n \ge b_i$$

в ограничение – равенство

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при подобных преобразованиях равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи ЛП отражается расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной следует интерпретировать как остаток, или неиспользованную часть, данного ресурса.

3. Если переменная Xк не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными X_k' и X_k'', приняв $X_k = X_k' - X_k''$. Правомерность такой замены очевидна, т.к. любое число можно представить в виде разности двух неотрицательных чисел.

2. Графический метод решения ЗЛП.

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач линейного программирования с двумя переменными. Он основан на геометрическом представлении допустимых решений и целевой функции задачи.

Каждое из неравенств задачи линейного программирования определяет на координатной плоскости (x_1Ox_2) некоторую полуплоскость, а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется областью допустимых решений (ОДР). ОДР всегда представляет собой выпуклую фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки А и В принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок АВ принадлежит ей. ОДР графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучом, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи ОДР является пустым множеством.

Все вышесказанное относится и к случаю, когда система ограничений включает равенства, поскольку любое равенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ можно представить в виде системы двух неравенств

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i \end{cases}$$

Целевая функция $L(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ при фиксированном значении $L(x) = L$ определяет на плоскости прямую линию $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Изменяя значения L, мы получим семейство параллельных прямых, называемых линиями уровня.

Это связано с тем, что изменение значения L повлечет изменение лишь длины отрезка, отсекаемого линией уровня на оси Ox_2 (начальная ордината), а угловой коэффициент прямой $tg\alpha = \frac{-c_1}{c_2}$ останется постоянным. Поэтому для решения будет достаточно построить одну из линий уровня, произвольно выбрав значение L.

Вектор $C = (c_1, c_2)$ с координатами из коэффициентов целевой функции при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня. Направление вектора C совпадает с направлением возрастания целевой функции, что является важным моментом для решения задач. Направление убывания целевой функции противоположно направлению вектора .

Суть графического метода заключается в следующем. По направлению (против направления) вектора C в ОДР производится поиск оптимальной точки $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Оптимальной считается точка, через которую проходит линия уровня $L_{max}(L_{min})$, соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции $L(x)$. Оптимальное решение всегда находится на границе ОДР, например, в последней вершине многоугольника ОДР, через которую пройдет целевая прямая, или на всей его стороне.

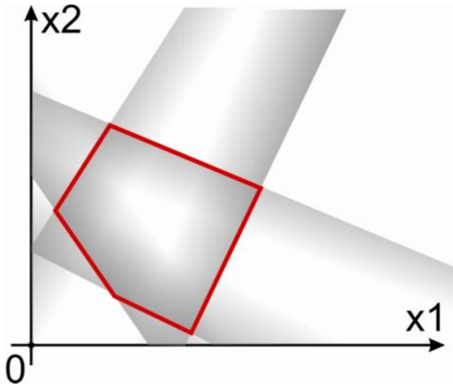


Рисунок 1 Построение графиков, и выявление общей области решения

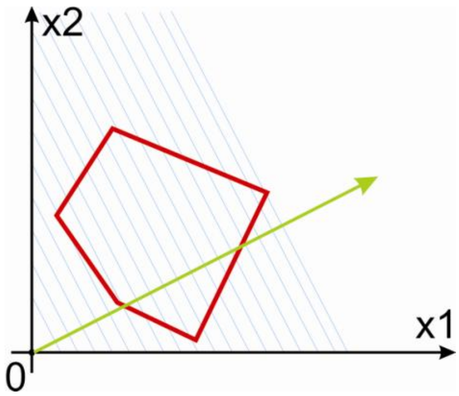


Рис. 2 Построение вектора градиента

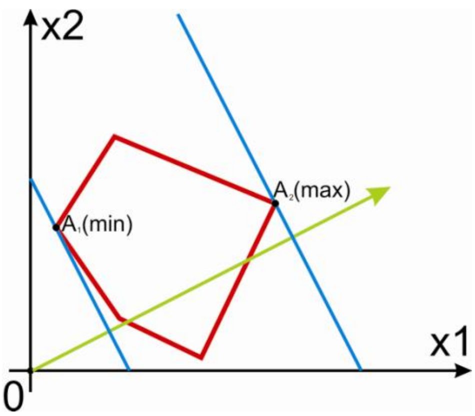


Рис. 3 Определение точек экстремума

Особые случаи

При поиске оптимального решения задач линейного программирования возможны могут возникнуть следующие ситуации, когда:

Существует бесконечное множество решений (альтернативный оптиум);

Целевая функция не ограничена;

Отсутствует общая область допустимых решений.

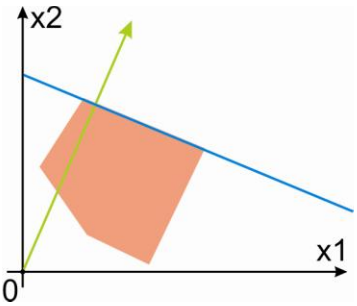


Рис. 4 Бесконечное множество решений (альтернативный оптимум)

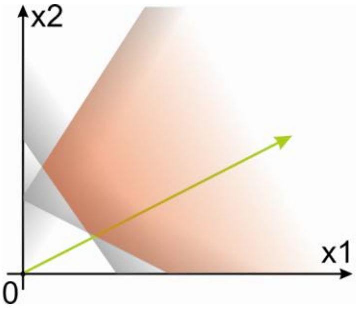


Рис.5 Целевая функция не ограничена

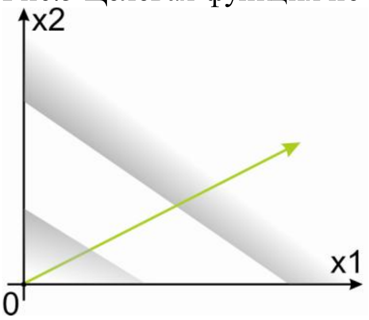


Рис. 6 Отсутствует общая область допустимых решений

Методика решения задач линейного программирования графическим методом.

В ограничениях задачи заменить знаки неравенств знаками точных равенств и построить соответствующие прямые.

Найти и заштриховать полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи. Для этого нужно подставить в конкретное неравенство координаты какой-либо точки (например, (0;0)), и проверить истинность полученного неравенства. Если неравенство истинное, то надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку. Иначе (неравенство ложное) - надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.
Поскольку и должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси Ox_1и правее оси , т.е. вI-й координатной плоскости. Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой. Поэтому необходимо выделить на графике такие прямые.

Определить ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделить ее. При отсутствии ОДР задача не имеет решений.

Если ОДР не пустое множество, то нужно построить целевую прямую, т.е. любую из линий уровня (где L– произвольное число, например, кратное c_1иc_2, т.е. удобное для проведения расчетов). Способ построения аналогичен построению прямых ограничений.

Построить вектор $C = (c_1, c_2)$, который начинается в точке (0;0) и заканчивается в точке (c_1, c_2). Если целевая прямая и вектор построены верно, то они будут перпендикулярны.

При поиске максимума ЦФ необходимо передвигать целевую прямую в направлении вектора, при поиске минимума ЦФ против направления вектора . Последняя по ходу движения вершина ОДР будет точкой максимума или минимума ЦФ. Если такой точки (точек) не существует, то можно сделать вывод о неограниченности ЦФ на множестве планов сверху (при поиске максимума) или снизу (при поиске минимум).

Определить координаты точки max(min) ЦФ и вычислить значение ЦФ $L(x^*)$. Для вычисления координат оптимальной точки X^* необходимо решить систему уравнений прямых, на пересечении которых находится.

5. Симплекс-метод.

Симплекс метод является наиболее распространенным вычислительным методом, который может быть применен для решения любых задач ЛП как вручную, так и с помощью ЭВМ.

Этот метод позволяет переходить от одного допустимого решения к другому, причем так, что значения целевой функции непрерывно возрастают. Этот переход возможен, если известен какой-либо опорный план. В этом случае каноническая задача линейного программирования должна содержать единичную подматрицу порядка М. Тогда очевиден первоначальный опорный план(неотрицательное базисное решение системы ограничений ЗЛП).

В результате оптимальное решение находят за конечное число шагов. Алгоритм симплекс-метода позволяет также установить является ли задача ЛП разрешимой.

Любая задача линейного программирования с помощью элементарных преобразований может быть приведена к каноническому виду.

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\text{mir}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \tilde{o}_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \tilde{o}_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \tilde{o}_{n+\grave{o}} = b_m \\ x_i, \tilde{o}(i = 1n), \end{cases}$$

где F(x) - целевая функция; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - базисные переменные; остальные переменные называются свободными.

Задача имеет m+n ограничений, среди них m ограничений типа равенства и n ограничений неотрицательности. По определению крайняя точка удовлетворяет n линейно-независимым ограничениям задачи как точным равенствам.

Алгоритм симплекс метода в случае неотрицательности свободных членов

Переходим от системы неравенств к равенствам с помощью ослабляющих переменных.

Находим единичные вектора условий, которые войдут в базис. Их должно быть столько, сколько уравнений в системе.

Составляем симплекс таблицу.

Таблица 1 Общий вид симплекс таблицы

Сб	Б	В	C_1	C_2	…	C_n	C_{n+1}	C_{n+2}	…	C_{n+m}	Q
			X_1	X_2	…	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	…	X_{n+m}	
	X_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	

	X_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	X_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	
Δ		Z									
L											

В первой строке записываем коэффициенты целевой функции.

Коэффициенты ограничений переносятся в среднюю часть таблицы.

Вносим свободные члены в третий столбец «B».

Во второй столбец записываем базис (единичные вектора).

Находим «Z» как сумму попарных произведений 1-го и 3-го столбцов.

Предпоследнюю строку таблицы L находим как Сумму попарных произведений элементов первого столбца и соответствующего столбца средней части таблицы.

Последнюю строку Δ определяем как разность элементов предпоследней строки и 1-й строки (коэффициентов целевой функции).

Величина «Δ» - критерий оптимальности. Для задачи минимизации оптимальным будет план, для которого все значения строки меньше или равны 0 ($\Delta \le 0$), а для задачи максимизации план в котором все значения больше или равны 0 ($\Delta \ge 0$). Если план не оптимален, то переходим к заполнению новой симплексной таблице.

Находим разрешающий элемент.

Для задачи максимизации выбираем столбец с максимальным по модулю Δ среди отрицательных. А для задачи минимизации столбец с максимальным по модулю среди положительных. Такой столбец называется «Разрешающим»

Для нахождения «Разрешающей» строки, значения элементов 3-го столбца («B») делим на значения соответствующих элементов Разрешающего столбца. Полученный результат записываем в последний столбец (Q).

Среди полученных значений выбираем наименьшее. Строка, содержащая это число, и будет «Разрешающей».

На пересечение Разрешающего столбца и разрешающей строки получаем «Разрешающий» элемент.

В новой таблице меняем базисную переменную и соответственно поправляем 1-й столбец.

Разрешающую строку делим на Разрешающий элемент и записываем на свои места.

Обнуляем остальные элементы Разрешающего столбца.

Остальные элементы таблицы находим по правилу прямоугольника.

Заполняем последние 2 строки.

В случае оптимальности плана Записываем полученные значения в ответ, а в случае неоптимальности составляем новую симплекс таблицу согласно предыдущим пунктам.

Через конечное число итераций либо будет получено решение задачи линейного программирования, либо будет установлено, что решение неограниченно.

Метод искусственного базиса решения задач линейного программирования

Симплексный метод с искусственным базисом применяется в тех случаях, когда затруднительно найти первоначальный опорный план исходной задачи линейного программирования, записанной в канонической форме.

М-метод заключается в применении правил симплекс-метода к так называемой М-задаче. Она получается из исходной добавлением к левой части системы уравнений в канонической форме исходной задачи линейного программирования таких искусственных единичных векторов с соответствующими неотрицательными искусственными переменными, чтобы вновь полученная матрица содержала систему единичных линейно-независимых векторов. В линейную форму исходной задачи добавляется в случае её максимизации слагаемое, представляющее собой произведение числа (-M) на сумму искусственных переменных, где M - достаточно большое положительное число.

В полученной задаче первоначальный опорный план очевиден. При применении к этой задаче симплекс-метода оценки теперь будут зависеть от числа M. Для сравнения оценок нужно помнить, что M достаточно большое положительное число, поэтому из базиса будут выводиться в первую очередь искусственные переменные.

В процессе решения M-задачи искусственные векторы выходят из базиса, в результате чего будет получен опорный план. В противном случае исходная задача неразрешима.

Постановка задачи линейного программирования

При откорме, каждое животное должно получить не менее 9 ед. белка, 8 ед. протеина, и 10 ед. углеводов. Для составления рациона используется 2 вида корма, состав которых приведён в таблице. Стоимость 1 кг. Первого составляет 4 ден. ед., а второго 6 ден. ед..

Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

Таблица 2. Состав питательных веществ в кормах

Питательное вещество	Содержание вещества	
	Корм 1	Корм 2
Белок	3	1
Углеводы	1	2
Протеин	1	6

Построение математической модели задачи

Практически во всех науках о природе, живой и неживой, об обществе, построение и использование моделей является мощным орудием познания. Реальные объекты и процессы бывают столь многообразны и сложны, что лучшим способом изучения часто является построение модели, отражающей лишь какую-то часть реальности.

В любом случае модель строится с целью узнать про объект что-либо новое или сохранить об объекте информацию, которая может стать недоступной в будущем.

Как правило, процесс изучения, связанный с использованием моделей и называемый моделированием не заканчивается созданием одной модели. Построив модель и получив с её помощью, какие-либо результаты, соотносят их с реальностью, и если это соотношение даёт неудовлетворительные результаты, то в построенную модель вносят коррективы или даже создают другую модель. В случае достижения хорошего соответствия с реальностью выясняют границы применения модели. Это очень важный вопрос, он решается путём сравнения модели с оригиналом путём сравнения предсказаний, полученных с помощью компьютерной модели. Если это сравнение даёт удовлетворительные результаты, то модель принимают на вооружение, если нет, приходится создавать другую модель.

Математическое моделирование относится к классу знакового моделирования, при этом модели могут создаваться из любых математических объектов, чисел, функций, уравнений, графиков, графов.

Практически во всех науках построение и использование моделей является мощным орудием познания.

Цель задачи заключается в нахождение рациона питания, который бы восполнял минимальный набор питательных веществ. При минимальных денежных затратах.

Пусть x_1 число килограммов корма 1-го вида, а x_2 число килограмм корма 2-го вида необходимых для составления рациона.

Цель задачи: Минимизировать расход, при соблюдение нормы рациона.

Следовательно, $Z(x) = 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \min$

Состав питательных веществ в рационе не должен быть меньше необходимой дневной нормы. Отсюда следует система неравенств:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 9 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 10 \\ 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \geq 8 \end{cases}$$

Решение задачи линейного программирования вручную

Графический способ решения задачи линейного программирования

Переходим от системы неравенств содержащей ограничения, к системе уравнений.

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 9 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 10 \\ 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 8 \end{cases}$$

Строим соответствующие графики функций представленные прямой линией.

Находим парные решения для уравнений.

$3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 9$;

$A_2(2;3)$,

Получаем что прямая l_1, заданная уравнением , проходит через точки (3;0) и (2;3);

Откладываем точки на координатной плоскости и строим график (прямую) проходящий через эти точки.

Определяем область решения.

Берём произвольную точку на плоскости координат B(1; 1) и подставляем значения в первоначальное неравенство, если после решения неравенство верно, то полуплоскость которой принадлежит точка B, будет являться областью решения. Если неравенство ошибочно, то областью решения будет противоположная полуплоскость. $3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \geq 9$→Неравенство ошибочно.

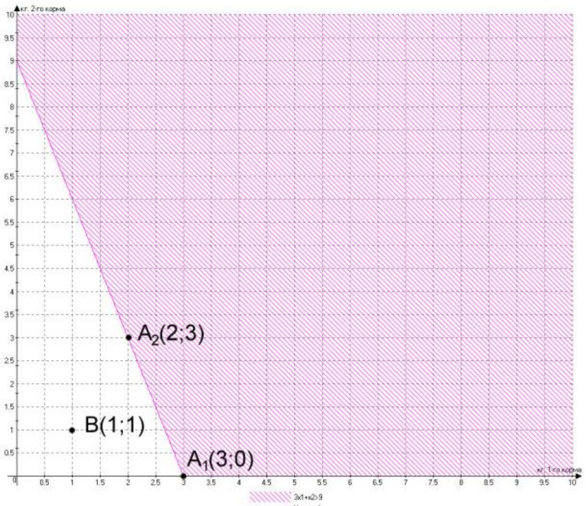


Рис. 1 Определение области решения

Аналогичным образом находим области решения для остальных уравнений.

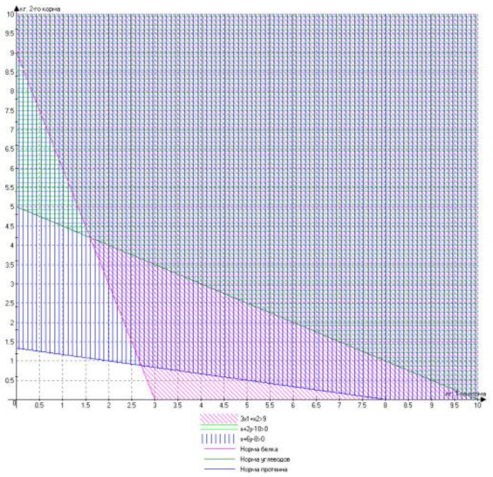


Рис. 2 Области решения всех неравенств

Выделяем общую область допустимых решений, отвечающую всем ограничениям, поставленным в условиях задачи.

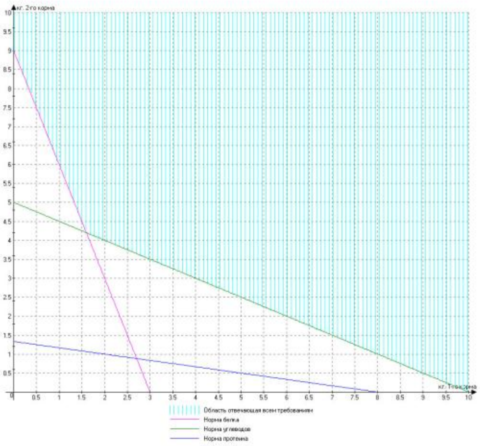


Рис. 3 Общая область решения

Для нахождения экстремума целевой функции, от начала координат строим вектор градиент N (4; 6). Перпендикулярно ему строим вспомогательную линию Z, проходящую через вершины полученной области.

Так как целевая функция задачи минимизация то, искомым оптимальным решением будет точка А, полученная пересечением области решения и вспомогательной линии, построенной первой по направлению вектора градиента.

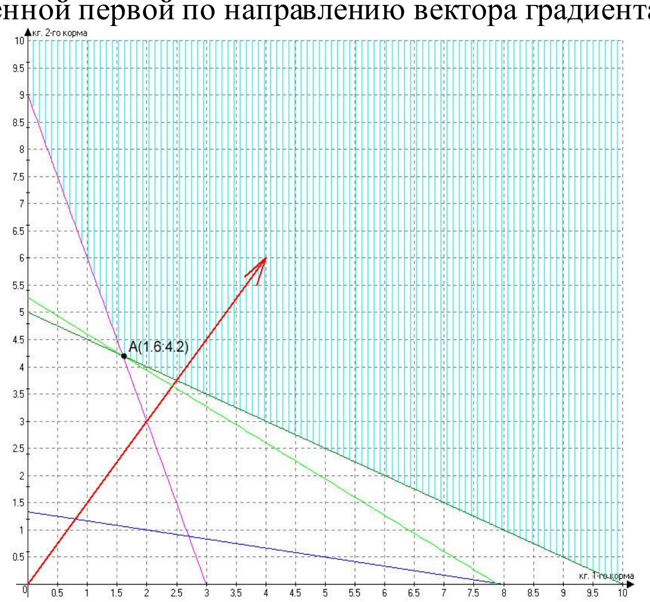


Рис. 4 Нахождение точки минимума

Координаты точки А и будут являться искомыми значениями необходимыми для решения задачи. Для нахождения координат, необходимо решить систему уравнений, состоящую из функций графиков, дающих в пересечении точку А.

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 9 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 10 \end{cases}$$

При решении системы уравнений используем метод подстановки. Для этого:

Выразим x_2 из первого уравнения $x_2 = 9 - 3 \cdot x_1$.

Подставим во второе уравнение $1 \cdot x_1 + 2 \cdot (9 - 3 \cdot x_1) = 10$.

Находим из полученного уравнения

$$1 \cdot x_1 + 18 - 6 \cdot x_1 = 10;$$

$$1 \cdot x_1 - 6 \cdot x_1) = 10 - 18;$$

$$-5 \cdot x_1 = -8;$$

$$x_1 = \frac{-8}{-5} = 1.6;$$

Полученное значение подставляем в одно из исходных уравнений (первое) и находим x_2

$$3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 9;$$

$$x_2 = 9 - 3 \cdot 1.6 = 4.2;$$

В результате решения системы получили $x_1 = 1.6$ и $x_2 = 4.2$

Найдём значение целевой функции используя полученные значения Z(x) = 4·1.64+6·4.2 =31.6

Ответ. Наименьшие затраты 31.6 ден. ед. достигаются при составление рациона из 1.6 кг корма 1-го вида и 4.2 кг корма 2-го вида в сутки.

Решение задачи линейного программирования симплекс методом

Приведем математическую модель задачи представленную в виде уравнений к каноническому виду.

$$Z(x) = x_1 \cdot 4 + x_2 \cdot 6 \to min$$

Вводим дополнительные переменные: $x_5 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ чтобы неравенства преобразовать в равенства.

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 x_3 = 9 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 x_2 = 10 \\ 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 1 x_5 = 8 \end{cases}$$

Чтобы выбрать начальный базис, вводим искусственные переменные $x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0$ и очень большое число M (M → ∞). Решаем M методом.

$$F(x) = 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_4 + M \cdot x_6 + M \cdot x_7 + M \cdot x_8 \to min$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 = 9 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 1 \cdot x_7 + 0 \cdot x = 10 \\ 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 1 \cdot x = 8 \end{cases}$$

Заполняем первую симплекс таблицу.

Таблица 3. Первая симлекс- таблица

Сб	Б	В	4	6	0	0	0	M	M	M	Q
			x_1		x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
M		9	3	1	-1	0	0	1	0	0	
M		10	1	2	0	-1	0	0	1	0	
M		8	1	6	0	0	-1	0	0	1	
L		Z									
Δ											

При расчёте опорного плана используем M=1000.

$$Z = \sum_{j=1}^{3} C\delta_j \cdot B_j = 1000 \cdot 9 + 1000 \cdot 10 + 1000 \cdot 8 = 27000;$$

Рассчитываем опорный план таблицы.

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} C\delta_j \cdot a_{ij};$$

$$L_1 = 1000 \cdot 3 + 1000 \cdot 1 + 1000 \cdot 1 = 5000;$$

$$L_2 = 1000 \cdot 1 + 1000 \cdot 2 + 1000 \cdot 6 = 9000;$$

$$L_3 = 1000 \cdot (-1) + 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 = -1000;$$

$$L_4 = 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot (-1) + 1000 \cdot 0 = -1000;$$

$$L_5 = 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot (-1) = -1000;$$

$$L_6 = 1000 \cdot 1 + 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 = 1000;$$

$$L_7 = 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 1 + 1000 \cdot 0 = 1000;$$

$$L_8 = 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 + 1000 \cdot 1 = 1000;$$

$$\Delta_i = L_i - C_i;$$

$$\Delta_1 = 5000 - 4 = 4996;$$

$$\Delta_2 = 9000 - 6 = 8994;$$

$$\Delta_3 = -1000 - 0 = -1000;$$

$$\Delta_4 = -1000 - 0 = -1000;$$

$$\Delta_5 = -1000 - 0 = -1000;$$

$$\Delta_6 = 1000 - 1000 = 0;$$

$$\Delta_7 = 1000 - 1000 = 0;$$

$$\Delta_8 = 1000 - 1000 = 0;$$

Поскольку есть положительные значения Δ, то план не оптимален.
Находим разрешающий элемент таблицы №1

D49

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Сб	Б	В	4	6	0	0	0	1000	1000	1000	
2				x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
3	1000	x6	9	3	1	-1	0	0	1	0	0	9
4	1000	x7	10	1	2	0	-1	0	0	1	0	5
5	1000	x8	8	1	6	0	0	-1	0	0	1	1,333333333
6	L		Z	5000	9000	-1000	-1000	-1000	1000	1000	1000	
7	Δ		27000	4996	8994	-1000	-1000	-1000	0	0	0	
8												

Рис. 5 Таблица №1 (нулевой шаг)

	Разрешающая строка Разрешающий столбец		Разрешающий элемент

Максимальное положительное значение имеет Δ_2 =8994, следовательно, столбец C_2 - Разрешающий. Найдём разрешающую строку, выделив наименьший положительный элемент Q.

$$Q_j = \frac{B_j}{a_{2j}}; \quad Q_1 = \frac{9}{1} = 9; \quad Q_1 = \frac{10}{5} = 5; \quad Q_1 = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3};$$

На пересечение разрешающего столбца и строки получаем разрешающий элемент =6.

Заполняем вторую симплекс таблицу.

Разрешающую строку делим на разрешающий элемент и записываем на своем месте.

Обнуляем остальные элементы разрешающего столбца

Оставшиеся элементы таблицы находим по правилу прямоугольника $a_{ij} = \frac{a_{ks} \cdot a_{ij} - a_{is} \cdot a_{kj}}{a_{ks}}$; где a_{ks} - Разрешающий элемент.

$$a_{11} = \frac{6 \cdot 9 - 1 \cdot 8}{6} = 7\frac{2}{3};$$

….

Рассчитываем опорный план второй таблицы (аналогично первой).

9	Сб	Б	В	4	6	0	0	0	1000	1000	1000	
10				x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
11	1000	x6	7,6666667	2,8333333	0	-1	0	0,1667	1	0	-0,16667	2,705882353
12	1000	x7	7,3333333	0,6666667	0	0	-1	0,3333	0	1	-0,33333	11
13	6	x2	1,3333333	0,1666667	1	0	0	-0,167	0	0	0,166667	8
14	L		Z	3501	6	-1000	-1000	499	1000	1000	-499	
15	Δ		15008	3497	0	-1000	-1000	499	0	0	-1499	

Рис.6 Таблица №2 (первый шаг)

Поверяем новый план на оптимальность. Так как решение не найдено, возвращаемся к пункту 4.

При использование для расчётов табличного процессора MSExcel, с использованием маркера автозаполнения необходимо ввести следующие формулы

Для расчета элементов разрешающей строки «=C5/$E$5». Где:

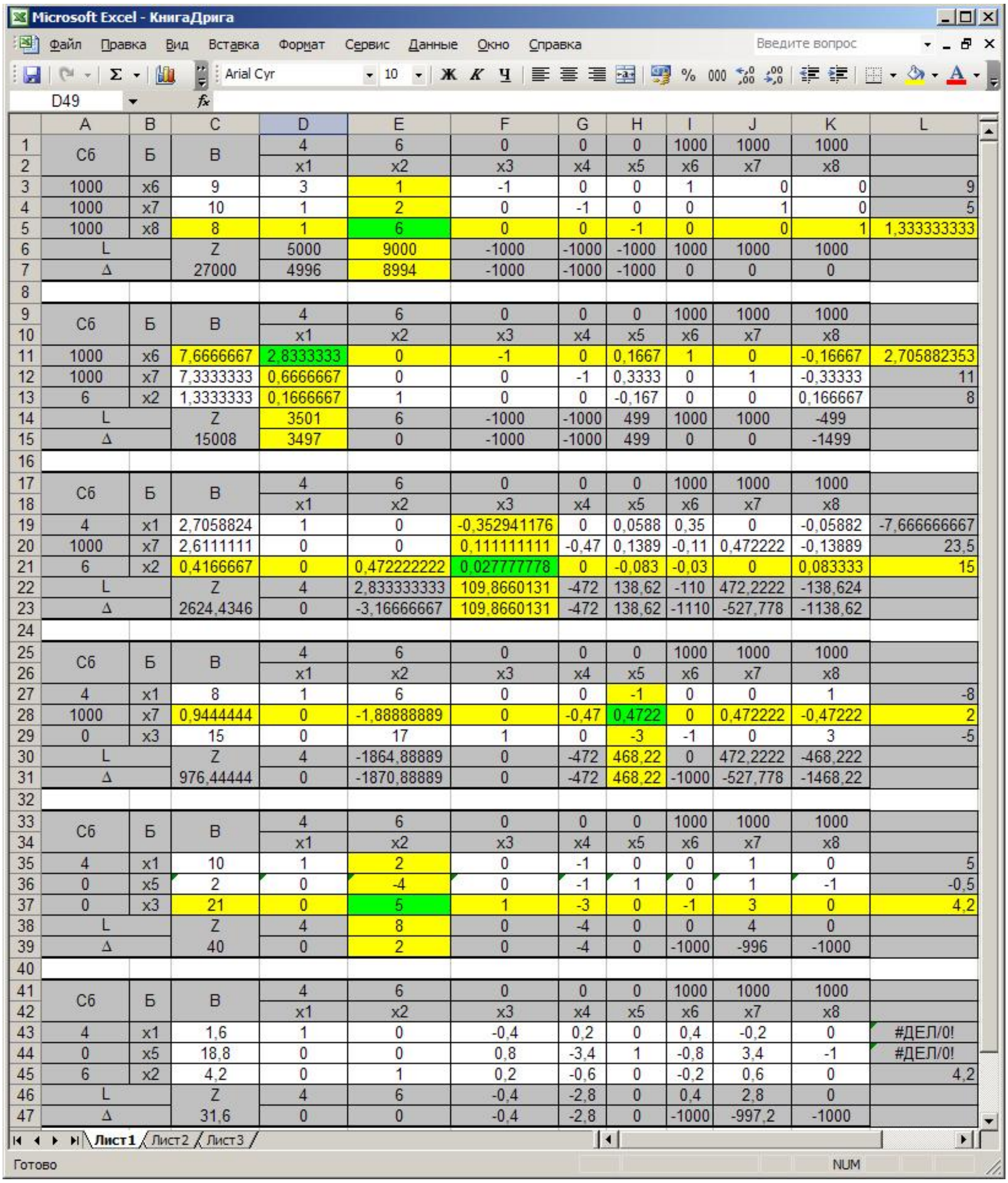
C5– ячейка элемента в предыдущей таблице.

$E$5– ячейка разрешающего элемента с абсолютной адресацией

Для расчёта свободных элементов по правилу прямоугольника «=($E$5*E4-E$5*$E4)/$E$5». Где:

$E$5– ячейка разрешающего элемента с абсолютной адресацией E4 - ячейка элемента в предыдущей таблице E$5– ячейка элемента находящегося в одном столбце с искомым элементом и в одной строке с разрешающим элементом.

$E4 - ячейка элемента находящегося в одном столбце с разрешающим элементом и в одной строке с искомым элементом.



Microsoft Excel - КнигаДрига

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

D49

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Сб	Б	B	4	6	0	0	0	1000	1000	1000	
2				x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
3	1000	x6	9	3	1	-1	0	0	1	0	0	9
4	1000	x7	10	1	2	0	-1	0	0	1	0	5
5	1000	x8	8	1	6	0	0	-1	0	0	1	1,333333333
6	L		Z	5000	9000	-1000	-1000	-1000	1000	1000	1000	
7	Δ		27000	4996	8994	-1000	-1000	-1000	0	0	0	
8												
9	Сб	Б	B	4	6	0	0	0	1000	1000	1000	
10				x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
11	1000	x6	7,6666667	2,8333333	0	-1	0	0,1667	1	0	-0,16667	2,705882353
12	1000	x7	7,3333333	0,6666667	0	0	-1	0,3333	0	1	-0,33333	11
13	6	x2	1,3333333	0,1666667	1	0	0	-0,167	0	0	0,166667	8
14	L		Z	3501	6	-1000	-1000	499	1000	1000	-499	
15	Δ		15008	3497	0	-1000	-1000	499	0	0	-1499	
16												
17	Сб	Б	B	4	6	0	0	0	1000	1000	1000	
18				x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
19	4	x1	2,7058824	1	0	-0,352941176	0	0,0588	0,35	0	-0,05882	-7,666666667
20	1000	x7	2,6111111	0	0	0,111111111	-0,47	0,1389	-0,11	0,472222	-0,13889	23,5
21	6	x2	0,4166667	0	0,472222222	0,027777778	0	-0,083	-0,03	0	0,083333	15
22	L		Z	4	2,833333333	109,8660131	-472	138,62	-110	472,2222	-138,624	
23	Δ		2624,4346	0	-3,16666667	109,8660131	-472	138,62	-1110	-527,778	-1138,62	
24												
25	Сб	Б	B	4	6	0	0	0	1000	1000	1000	
26				x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
27	4	x1	8	1	6	0	0	-1	0	0	1	-8
28	1000	x7	0,9444444	0	-1,88888889	0	-0,47	0,4722	0	0,472222	-0,47222	2
29	0	x3	15	0	17	1	0	-3	-1	0	3	-5
30	L		Z	4	-1864,88889	0	-472	468,22	0	472,2222	-468,222	
31	Δ		976,44444	0	-1870,88889	0	-472	468,22	-1000	-527,778	-1468,22	
32												
33	Сб	Б	B	4	6	0	0	0	1000	1000	1000	
34				x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
35	4	x1	10	1	2	0	-1	0	0	1	0	5
36	0	x5	2	0	-4	0	-1	1	0	1	-1	-0,5
37	0	x3	21	0	5	1	-3	0	-1	3	0	4,2
38	L		Z	4	8	0	-4	0	0	4	0	
39	Δ		40	0	2	0	-4	0	-1000	-996	-1000	
40												
41	Сб	Б	B	4	6	0	0	0	1000	1000	1000	
42				x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
43	4	x1	1,6	1	0	-0,4	0,2	0	0,4	-0,2	0	#ДЕЛ/0!
44	0	x5	18,8	0	0	0,8	-3,4	1	-0,8	3,4	-1	#ДЕЛ/0!
45	6	x2	4,2	0	1	0,2	-0,6	0	-0,2	0,6	0	4,2
46	L		Z	4	6	-0,4	-2,8	0	0,4	2,8	0	
47	Δ		31,6	0	0	-0,4	-2,8	0	-1000	-997,2	-1000	

Лист1 / Лист2 / Лист3

Готово NUM

Рис.7 Решение задачи Симлекс-методом с использованием MS Excel

Опорный план, составленный по последней симплекс-таблице, является оптимальным, т.к. все значения Δ меньше или равны нулю.

Записываем полученный результат в ответ.

$x_1 = 16;$
$x_2 = 4.2;$
$F(x) = 316;$

Ответ: Оптимальная стоимость дневного рациона составляет 31.6ден. ед. при приобретении 1.6 кг. корма 1-го вида, и 4.2 кг. корма 2-го вида.

4. Двойственные задачи линейного программирования.

Рассмотрим двойственные задачи в общей форме.

Прямая задача:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \mathbf{max},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,l};\, l \le n\right).$$

Двойственная задача:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \mathbf{min}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ \ldots \\ a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{mi}y_m \ge c_i, \\ a_{1,i+1}y_1 + a_{2,i+1}y_2 + \ldots + a_{m,i+1}y_m = c_{i+1}, \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_m, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,k};\, k \le m\right).$$

Двойственная задача по отношению к прямой составляется следующим образом:

1. Целевая функция исходной задачи задаётся на максимум, а в двойственной – на минимум.

2. Матрицы коэффициентов прямой и двойственной задач получаются друг из друга заменой строк столбцами, а столбцов – строками (операция транспонирования):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\, a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots \\ a_{1n}\, a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче (и наоборот).

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в ограничениях исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи являются коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

Задача. Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$$f = -x_1 + 2x_2 \to \mathbf{max},$$

$$2x_1 - x_2 \ge 1,$$

$$-x_1 + 4x_2 \le 24,$$

$$x_1 - x_2 \le 3,$$

$$x_1 + x_2 \ge 5,$$

$$x_i \ge 0.$$

Поскольку прямая задача на максимум, то приведём все неравенства системы ограничений к виду «£» (обе части первого и четвёртого неравенства умножим на –1):

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 - x_2 \le -5. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & f \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица:

$$A_1^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & z \end{pmatrix}.$$

Сформулируем двойственную задачу:

$$z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0.$$

Теоремы двойственности

Сначала сформулируем основное неравенство теории двойственности.

Пусть имеется пара двойственных задач. Для любых допустимых решений $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ прямой и двойственной задач справедливо неравенство $f(X) \le z(Y)$ или в координатном виде $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Теперь сформулируем достаточный признак оптимальности.

Если X^* и Y^* – допустимые решения соответственно прямой и двойственной задач, для которых справедливо равенство $f(X^*) = z(Y^*)$, то X^* – оптимальное решение прямой задачи, а Y^* – двойственной задачи.

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Первая теорема двойственности. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причём оптимальные значения их целевых функций равны: $f_{\max} = z_{\min}$ или $f(X^*) = z(Y^*)$.

Если целевая функция одной из задач не достигает оптимума, то условия другой задачи противоречивы.

Экономический смысл первой теоремы двойственности состоит в следующем.

План производства X^* и набор цен ресурсов Y^* оптимальны тогда и только тогда, когда прибыль (выручка) от продукции, найденная при «внешних» (известных заранее) ценах $c_1, c_2, \dots, c_n$, равна затратам на ресурсы по «внутренним» (определяемым только из решения задачи) ценам $y_1, y_2, \dots, y_m$.

Связь между двойственными задачами проявляется не только в равенстве оптимальных значений их целевых функций (первая теорема двойственности).

Пусть даны двойственные задачи.

Прямая:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \mathbf{max},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,n}).$$

Двойственная:

$$z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \mathbf{min},$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_1 \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_2 \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge c_m, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \; (i = \overline{1,m}).$$

Если каждую из этих задач решать симплекс-методом, то необходимо привести их к каноническому виду, для чего в систему ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

прямой задачи следует ввести m неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$, а в систему ограничений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j \quad (j = \overline{1,n})$$

двойственной задачи следует ввести n неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+i}, \ldots, y_{m+n}$, где – номер неравенства, в которое введена дополнительная переменная $x_{n+i} \ge 0 \;\; (y_{m+i} \ge 0)$. Системы ограничений каждой из задач примут соответственно вид:

прямая задача –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

двойственная задача –

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - y_{m+j} = c_j \quad (j = \overline{1,n}).$$

Вторая теорема двойственности. Чтобы допустимые решения x^*, y^* пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$(y^*)^T(Ax^* - b) = 0,$$
$$(c - (y^*)^T A)x^* = 0.$$

Следствие. Если в оптимальном решении одной из двойственных задач какая-либо переменная не равна нулю, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи на оптимальном решении выполняется как равенство, и наоборот, если на оптимальном решении одной из двойственных задач какое-либо ограничение выполняется как строгое неравенство, то соответствующая ему переменная в оптимальном решении двойственной задачи равна нулю.

Если в одной из взаимно двойственных задач нарушается единственность оптимального решения (геометрически это означает, что оно достигается на ребре/грани многоугольника/многогранника), то оптимальное решение двойственной задачи вырожденное.

1.2 Лекция 2 (2 часа)

Тема: «Постановка задач линейного программирования транспортного типа. Базовая транспортная модель. Методы решения задач транспортного типа»

1.2.1. Вопросы лекции:

1. Постановка задач линейного программирования транспортного типа.
Базовая транспортная модель.
2. Первичное распределение поставок.
3. Методы решения транспортной задачи закрытого и открытого типов.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Постановка задач линейного программирования транспортного типа.

Базовая транспортная модель.

Имеется целый набор специфических, для которых разработаны особые методы решения задач линейного программирования. В качестве примера таких задач мы рассмотрим так называемую транспортную задачу.

Начнем с её содержательной формулировки.

Пусть имеется некоторый однородный продукт, сосредоточенный на m пунктах отправления (складах), так что на i-м складе находится a_i единиц этого продукта.

Этот продукт необходимо доставить в n пунктов назначения (потребления), причем на j-й пункт необходимо доставить b_j единиц продукта. Запасы и потребности сбалансированы, то есть $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$, то есть наличие продукта равно потребности в нем.

Пусть стоимость перевозки единицы продукта из i-го склада в j-й пункт назначения равна c_{ij}. Пусть x_{ij} есть то количество продукта, которое перевозится из i-го склада в j-й пункт потребления.

Тогда общие транспортные расходы составят величину $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$.

Из каждого склада весь продукт должен быть вывезен. Это значит, что должно быть выполнено условие $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$.

С другой стороны, потребности j-го пункта назначения должны быть полностью удовлетворены. Это означает, что $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$.

Желание минимизировать транспортные расходы приводит нас к следующей задаче:

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n}, \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

являющейся типичной задачей линейного программирования.

Определение. Транспортная задача называется открытой транспортной задачей, если условие баланса нарушаются; в случае выполнения условия баланса она называется сбалансированной транспортной задачей.

Однако у этой задачи есть одна очень существенная особенность: в ограничениях перед неизвестными x_{ij} всегда стоит 1. И именно это позволяет разработать гораздо более эффективные и простые алгоритмы решения транспортной задачи, чем симплекс-метод.

Сам же симплекс-метод был бы не эффективен по двум причинам:

1. Большая размерность решаемой задачи. Общее число неизвестных величин x_{ij} равно mn , и даже при n =m = 10 размерность решаемой задачи уже будет равна 100. Даже ЭВМ будет решать такую задачу симплекс-методом достаточно долго.

2. Опорные планы в транспортной задаче очень часто бывают вырожденными, а наличие вырождения приводит к необходимости несколько модифицировать симплекс-метод.

Приведение открытой транспортной задачи к сбалансированной

1. Превышение запасов над потребностями.

В этом случае вводится «фиктивный» $n+1$ потребитель с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для $n+1$ потребителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.

2. Превышение потребностей над запасами.

Вводим «фиктивного» $m+1$ производителя (склад) с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для $m+1$ производителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.

Простейшие свойства транспортной задачи

Теорема 1. Для любой транспортной задачи существует план (то есть для любой транспортной задачи допустимая область не пуста).

Теорема 2. Транспортная задача всегда имеет оптимальный план.

Теорема 3. Любой опорный план имеет не более $n+m-1$ положительных компонент.

Следствие. Оптимальный план содержит не более, чем $n+m-1$ перевозку.

2. Виды земельно-кадастровых задач, сводящихся к задаче линейного программирования транспортного типа

Пример 1. На пашне производственного участка сельскохозяйственной организации выделено 3 категории эродированных земель, площадь которых составляет:

¬ I категория – 140;

¬ II – 190;

¬ III – 220 га.

Необходимо так разместить культуры на землях различных категорий, чтобы полученный чистый доход в стоимостном выражении от всего производства был максимальным.

Площадь посева сельскохозяйственных культур следующая:

¬ яровые зерновые – 100;

¬ многолетние травы – 200;

¬ кукуруза – 150;

¬ озимые зерновые – 50 га.

Не предполагается возделывать кукурузу на участке с I категорией эродированных земель. Чистый доход с 1 га приведен в табл. 1

Таблица 1. - Чистый доход с 1 га, у.д.е.

Сельскохозяйственные культуры	Категории эродированных земель		
	I	II	III
Яровые зерновые	120	110	150
Многолетние травы	50	90	70
Кукуруза	-	80	60
Озимые зерновые	140	100	130

Транспортная интерпретация задачи:

ресурсы в источниках Ai - это площади культур;

потребности в ресурсах Bj - площади земель различных категорий эродированности;

транспортная прибыль cij - чистый доход с 1 га;

транспортируемый ресурс xij - площадь i-й культуры на землях j-й категории;

целевая функция – максимизация общего чистого дохода производственного участка сельскохозяйственной организации.

Пример 2. Три близлежащие сельскохозяйственные организации имеют семь чересполосных участков, продукция которых используется на кормовые цели. Необходимо так перераспределить их между организациями, чтобы транспортные затраты на перевозку кормов были минимальными при условии, что общий объем потребления кормов в каждом хозяйстве сохраняется. Объем производства (потребления) кормов в сельхозорганизациях на первоначально закрепленных за ними участках составил:

1-й организации – 12000;

2-й – 8000;

3-й – 20000 ц к. ед.

Объем производства кормов на указанных участках составил (ц к. ед.):

1 – 18000;

2 – 2000;

3 – 5000;

4 – 3000;

5 – 2000;

6 – 4000;

7 – 6000.

Пример 3. При землеустроительном обследовании в сельскохозяйственной организации выделено четыре участка с разным плодородием (пригодных для трансформации угодий), на которых планируется разместить три севооборота. Площади севооборотов составят:

1-го (полевого) – 300; 2-го (полевого) – 500; 3-го (кормового) – 200 га.

Площади участков, пригодных для трансформации угодий, равны:

1-го – 200; 2-го – 280; 3-го – 150; 4-го – 400 га.

Не планируется размещать первый полевой севооборот на четвертом земельном участке. Необходимо так распределить севообороты по участкам, чтобы прибыль была максимальной.

2. Первичное распределение поставок.

Пусть задана некоторая классическая транспортная задача.

Предположим, что имеется n пунктов потребления (например, промышленных предприятий или типографий) Пj, $j \in \{1..n\}$, требующих снабжения некоторым определенным видом сырья. Потребности в сырье каждого предприятия Пj равны соответственно bj условных единиц $j \in \{1..n\}$. Кроме того, имеется m складов Ci, $i \in \{1..m\}$, на которых хранится требуемое предприятиям сырье. На каждом складе Ci имеется в наличии запас товара в количестве ai соответственно, $i \in \{1..m\}$.

Склады удалены от предприятий на некоторые расстояния и связаны с ними некоторыми путями сообщений с различными тарифами на перевозку грузов (в нашем случае сырья). Будем считать, что каждый склад связан с каждым пунктом потребления некоторым единственным маршрутом с неограниченной пропускной способностью. Единица сырья, получаемая предприятием Пj со склада Ci с учетом известных тарифов на перевозки, обходится в cij рублей. Для простоты предположим, что все заявки выполнимы и обеспечивают отсутствие излишек на складах, т.е. сумма всех заявок в точности равна сумме всех имеющихся запасов: $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Требуется составить план перевозок, т.е. указать с какого склада на какие предприятия, и какое количество сырья нужно направить, чтобы заявки были выполнены, а общие расходы на все перевозки были минимальными.

Составим для данной задачи, как это уже было показано раньше таблицу издержек:

Сток Исток	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	Запасы: $\sum a_i$
C_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
C_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
C_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
Заявки: $\sum b_j$	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_i a_i = \sum_j b_j$

Очевидно, что не все m + n уравнений системы ограничений транспортной задачи являются независимыми. Действительно. складывая все ограничения по заявкам и все ограничения по запасам, в силу равенства заявок и запасов, получаем доказательство того, что ранг системы ограничений $r = m + n - 1$. Следовательно, можно разрешить эти уравнения относительно r базисных переменных, выразив их через остальные k свободные.

$k = m \cdot n - r = m \cdot n - m - (n - 1) = m \cdot (n - 1) - (n - 1) \Rightarrow k = (m - 1) \cdot (n - 1)$.

Мы уже останавливались на факте того, что в задаче линейного программирования оптимальное решение достигается в одной из вершин области допустимых решений, где, по крайней мере, k переменных обращаются в нуль.

Значения x_{ij} количества единиц груза, направляемых из пункта Сi в пункт Пj будем называть перевозками. Любую совокупность значений (x_{ij}) будем называть планом перевозок, или просто планом. Тогда план будем называть допустимым, если он удовлетворяет балансовым условиям: все заявки удовлетворены и, все запасы исчерпаны.

В свою очередь, допустимый план будем называть оптимальным в том случае, если он приводит к наименьшей стоимости всех перевозок.

Методы решения транспортной задачи не требуют манипуляций с симплекс-таблицами, а сводятся к операциям с таблицей, где в определенном порядке (см. примеры таблиц издержек выше) записаны все условия транспортной задачи – транспортной таблицей. Стоимость перевозок (соответствующие издержки из таблицы издержек) c_{ij} будем помещать в правом верхнем углу каждой ячейки, с тем, чтобы в самой ячейке помещать значения соответствующих перевозок (x_{ij}). Ниже приведен пример заполнения транспортной таблицы:

Сток Исток	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	Запасы: $\sum a_i$
C_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
C_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	… …	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	… …	… …	… …	… …	…
C_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Заявки: $\sum b_j$	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_i a_i = \sum_j b_j$

Ячейки таблицы с отличными от нуля перевозками условимся называть базисными, а остальные (пустые – в дальнейшем в транспортную таблицу мы будем заносить только отличные от нуля значения) свободными.

Решение транспортной задачи, как и всякой задачи линейного программирования, начинается с нахождения опорного решения или, в случае транспортной задачи, опорного плана перевозок. В отличие от общего случая задачи линейного программирования, решение транспортной задачи всегда существует. Рассмотрим один из способов построения опорного плана – так называемый метод «северо-западного угла».

Нахождение опорного плана методом «северо-западного угла»

Метод «северо-западного» угла реализует интерактивный поиск опорного решения. Идея метода состоит в следующем. На каждой итерации выбирается такое решение, которое бы с одной стороны учитывало бы результаты предыдущих итераций, а с другой стороны по возможности минимизировало бы количество оставшихся итераций. Применительно к транспортной таблице работу метода «северо-западного угла» можно представить так. Первоначально заполняется самая левая верхняя клетка (северо-западный угол таблицы). Это означает, что мы принудительно посылаем товар со склада 1 потребителю 1. Если количество имеющегося в наличии товара на складе 1 превышает размер запроса потребителя 1, то в северо-западную клетку (1,1) следует поместить значение запроса потребителя 1. В противном случае, то есть в ситуации, при которой склад 1 не в состоянии самостоятельно удовлетворить запрос потребителя 1, в ячейку (1,1) транспортной таблицы следует поместить значение запаса склада 1.

Очевидно, что в случае неравенства (или равенства) запаса на складе 1 запросу потребителя 1 возможны два варианта:

1. Склад 1 полностью удовлетворил запрос потребителя 1, но при этом запас его товаров еще не исчерпан. Тогда на следующей итерации алгоритма мы будем рассматривать соседнюю с востока ячейку, то есть ячейку (1,2) транспортной таблицы.
2. Склад 1 не в состоянии полностью удовлетворить запрос потребителя 1, то есть запас его товаров исчерпан, а запрос потребителя еще не удовлетворен. Тогда на следующей итерации алгоритма мы будем рассматривать соседнюю с юга ячейку, то есть ячейку (2,1) транспортной таблицы.
3. Склад 1 полностью удовлетворил потребности потребителя 1, при этом запас товаров на складе был полностью исчерпан. Тогда на следующей итерации алгоритма мы будем рассматривать соседнюю с юго-востока ячейку, то есть ячейку (2,2) транспортной таблицы.

Описанная процедура обеспечивает выбор ячейки транспортной таблицы для следующей итерации алгоритма поиска опорного решения.

Очевидно, что в силу равенства суммарных заявок (запросов) суммарным запасам на последней итерации алгоритма – ячейка (i,j) – в общем случае окажется, что i-ый склад оставшимся своим запасом полностью удовлетворит оставшийся неудовлетворенным на предыдущих итерациях запрос j-того потребителя.

Рассмотрим работу данного метода на конкретном примере. Пусть задана некоторая транспортная задача и соответствующая ей транспортная таблица:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы:
A_1	10	8	5	6	9	48
A_2	6	7	8	6	5	30
A_3	8	7	10	8	7	27
A_4	7	5	4	6	8	20
Заявки:	18	27	42	12	26	125

Тогда в соответствии с только что описанным методом «северо-западного угла» будем заполнять таблицу перевозками, начиная с северо-западной ячейки (1,1), рассуждая так. Удовлетворим пункт B1 за счет запаса A1, следовательно x11= 18. После этого в пункте A1 осталось 30 единиц груза. Удовлетворим запрос пункта B2 за счет остатка A1, следовательно x12 = 27. оставшиеся 3 единицы груза направим в пункт B3 □ x13 = 3. В составе заявки пункта B3 осталось неудовлетворенным 39 единиц груза. Из них 30 покроем за счет пункта A2, чем его запас будет исчерпан, и еще 9 единиц возьмем из пункта A3, следовательно x23 = 30 и x33 = 9 и т.д. Полученное решение будет не только допустимым, но и опорным.

В результате этих действий получим следующее опорное решение:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы:
A_1	10	8	5	6	9	48

	18	27	3			
A_2	6	7	8 30	6	5	30
A_3	8	7	10 9	8 12	7 6	27
A_4	7	5	4	6	8 20	20
Заявки:	18	27	42	12	26	125

Остановимся теперь на одной особенности плана перевозок. Речь идет о так называемом «вырожденном» плане, в котором некоторые из базисных перевозок оказываются равными 0.

Забегая вперед, отметим, что для решения транспортной задачи необходимо, чтобы уравнения, формирующие план перевозок, имели базис размерности m + n – 1. В противном случае дальнейшее решение транспортной задачи становится не возможным. Исходя из этого, можно сделать вывод о необходимости строго поддерживать размерность базиса, равную m + n – 1. Тогда в случае получения на некоторой итерации вырожденного плана перевозок необходимо искусственным образом ввести дополнительную базисную переменную. Для этого в любую из свободных клеток транспортной таблицы следует поместить некоторую бесконечно малую величину□ и соответственно скорректировать значения всех соседних базисных клеток. В качестве иллюстрации метода преобразования вырожденного плана, рассмотрим довольно простой пример, в котором вырожденный план перевозок получается при нахождении опорного плана методом северо-западного угла.

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы:
A_1	10 10	8 10	5 □	6	9	20
A_2	6	7	8 20-□	6 10+□	5	30
A_3	8	7	10	8 25-□	7 □	25
A_4	7	5	4	6	8 20+□	20
Заявки:	10	10	20	35	20	95

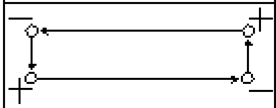
Особенностью этого опорного плана является то, что в нем только 6 , а не 8 отличных от нуля перевозок (r = m + n – 1 = 4 + 5 – 1 = 8).

В дальнейшем нам удобно будет всегда иметь в транспортной таблице r базисных клеток, хотя в некоторых из них, может быть, будут стоять нулевые значения перевозок. Для этого можно ничтожно мало изменить запасы или заявки, например, на величину □, а после нахождения оптимального решения положить □ = 0.

Улучшение плана перевозок. Цикл пересчета

Метод «северо-западного» угла позволяет отыскать допустимый план перевозок, который мы назвали опорным планом. Очевидно, что в общем случае опорный план, являясь допустимым, не является оптимальным. Для нахождения оптимального плана перевозок необходимо последовательно, пока это возможно, улучшать опорный план. В этом параграфе мы рассмотрим термины и определения, используемые при улучшении опорного плана, которые нам в дальнейшем потребуются при рассмотрении алгоритмов решения транспортной задачи.

Возвращаясь к нашему исходному примеру, рассмотрим его опорное решение – опорный план перевозок.

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы:
A_1	10 18	8 27	5 3	6	9	48
 A_2	6	7	8 30	6	5	30
A_3	8	7	10 9	8 12	7 6	27
A_4	7	5	4	6	8 20	20
Заявки:	18	27	42	12	26	125

Стоимость этого плана равна: L = 18*10 + 27*8 + 3*5 + 30*8 + 9*10 + 12*8 + 6*7 + 20*8 = 1039.

Попробуем улучшить этот план, перенеся, как показано в приведенной выше таблице, 18 единиц из клетки (1,1) в клетку (2,1) и, чтобы не нарушать баланса, перенесем те же 18 единиц из клетки (2,3) в клетку (1,3). В результате переноса мы получили новый план перевозок, который тоже будет допустимым, так как переброску груза с одного маршрута на другой мы осуществляли циклически, заботясь о сохранении баланса заявок и запасов.

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы:
A_1	10	8 27	5 21	6	9	48
A_2	6 18	7	8 12	6	5	30
A_3	8	7	10 9	8 12	7 6	27
A_4	7	5	4	6	8 20	20
Заявки:	18	27	42	12	26	125

Таким образом, мы получили новый допустимый план, стоимость которого равна:

L = 18*6 + 27*8 + 21*5 + … = 913.

Очевидно, что полученный план перевозок по стоимости предпочтительнее первоначального опорного плана.

Из приведенной таблицы видно, что за счет циклической перестановки грузоперевозок объемом 18 единиц по маршрутам (1,1)~, (2,1)+, (2,3)~, (1,3)+ удалось понизить стоимость плана перевозок на 126 условных единиц стоимости.

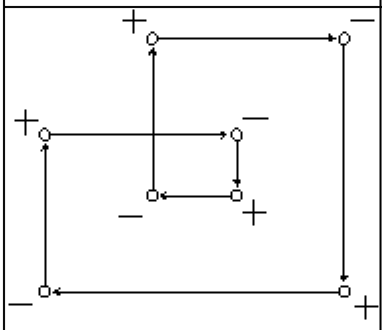
Здесь следует обратить внимание на следующее равенство:

1039 – 913 = –126 = 18□~(10 + 6 – 8 + 5) = 18□~(7).

Рассмотрев на практическом примере принципы, лежащие в основе методов улучшения планов перевозок, формально определим некоторые из использованных нами при этом понятий.

Итак, циклом в транспортной таблице назовем несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на угол, равный 90o. Условимся помечать символами (+) те вершины ломаной линии, образующей цикл, в которых объемы перевозок увеличивается, а символом () те вершины цикла, в которых они уменьшаются.

Очевидно, что прямоугольник представляет собой наиболее простой случай такой замкнутой ломаной линии. В таблице, расположенной ниже, представлен более сложный пример возможного цикла:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы:
 A_1	10	8	5	6	9	48
A_2	6	7	8	6	5	30
A_3	8	7	10	8	7	27
A_4	7	5	4	6	8	20
Заявки:	18	27	42	12	26	125

Цикл с отмеченными вершинами будем называть «означенным». Перенести какое-то количество единиц груза по означенному циклу – это означает увеличить объемы перевозок в положительных вершинах (вершинах, помеченных символом «+») на это количество единиц и одновременно с этим уменьшить перевозки на то же количество в отрицательных вершинах (вершинах, помеченных символом «–»).

Очевидно что, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется.

Назовем ценой (стоимостью) цикла– алгебраическую сумму стоимостей, стоящих в вершинах цикла, с учетом знака этих вершин, например:

$a1 = c21 – c23 + c43 – c41$,

$a2 = c34 – c35 + c55 – c54 + c14 – c16$.

3. Методы решения транспортной задачи закрытого и открытого типов.

Распределительный метод решения транспортной задачи

Данный метод состоит в последовательном улучшении опорного плана перевозок путем отыскания на каждом шаге выгодных циклов переноса грузов. Опорный план для данного метода (как и для других методов решения транспортной задачи методом потенциалов) можно сформировать, применяя метод «северо-западного» угла.

Более подробно рассмотрим теперь процесс формирования очередного цикла переноса на каждом новом шаге алгоритма.

Очевидно, что при перемещении x единиц груза по некоторому циклу с ценой g стоимость перевозок изменяется на величину $x \times g$.

Тогда, для улучшения текущего плана перевозок имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна.

Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, это означает, что оптимальный план достигнут.

При улучшении плана циклическими переносами пользуются приемом, заимствованным из симплекс-метода: на каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, т.е. заполняют одну клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток.

Можно доказать, что для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует цикл (и притом единственный), одна из вершин которого лежит в этой клетке, а все остальные в базисных клетках. Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить. Количество единиц груза (x), которые можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла.

Пример 1. Распределительный метод решения транспортной задачи.

Найти оптимальный план перевозок транспортной задачи, имеющей следующую таблицу издержек:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:
A_1	10	7	6	8	31
A_2	5	6	5	4	48
A_3	8	7	6	7	38
Заявки:	22	34	41	20	117

Решение:

Методом «северо-западного» угла найдем опорный план перевозок:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:
A_1	10 22	7 9	6	8	31
A_2	5	6 25	5 23	4	48
A_3	8	7	6 18	7 20	38
Заявки:	22	34	41	20	117

1. Составленный с помощью метода «северо-западного угла» опорный план имеет шесть базисных клеток в соответствующей ему транспортной таблице, что позволяет его использовать без модификаций для дальнейшего решения задачи.

r = n + m – 1 = 4 + 3 – 1 = 6

Посчитаем теперь стоимость найденного опорного плана:

L = 22×10 + 9×7 + … = 796

Попытаемся улучшить найденный опорный план перевозок методом циклических переносов.

2. Вычислим цену цикла для каждой свободной клетки. Количество свободных клеток в транспортной таблице данного опорного плана равно: k = 3×2 = 6.

$$\gamma_{13} = 6 - 5 + 6 - 7 = 0,$$

$$\gamma_{14} = 8 - 7 + 6 - 5 + 6 - 7 = 1,$$

$$\gamma_{21} = 5 - 10 + 7 - 6 = (-4),$$

$$\gamma_{24} = 4 - 7 + 6 - 5 = (-2),$$

$$\gamma_{31} = 8 - 10 + 7 - 6 + 5 - 6 = (-2),$$

$$\gamma_{32} = 7 - 6 + 5 - 6 = 0.$$

3. Для всех свободных переменных (клеток) с отрицательной ценой цикла вычислим максимальное количество груза, которое можно перенести по соответствующему циклу. Очевидно, что максимальное количество груза, которое можно переместить по некоторому выбранному циклу будет равно минимальному значению груза среди отрицательных клеток цикла.

$$\max\ x_{21} = \min(22, 25) = 22,$$

$$\max\ x_{24} = \min(20, 23) = 20,$$

$$\max\ x_{31} = \min(22, 25, 18) = 18.$$

4. Теперь для всех свободных переменных с отрицательной ценой циклов вычислим характеристику $\gamma_{ij} \cdot \max x_{ij}$. Полученные значения будем использовать при выборе конкретного цикла пересчета на данной итерации алгоритма.

ij	2,1	2,4	31
g	- 4	- 2	- 2
x	22	20	18
gx	- 88	- 40	- 36

5. Выберем ту свободную переменную, которой соответствует наименьшее значение величины $\gamma_{ij} \cdot \max x_{ij}$ и перенесем $\max x_{ij}$ единиц груза по циклу, соответствующему выбранной переменной: (ij) = (2,1);g21 = - 4; $\max x_{21} = 22$.

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:
− + + − A_1	10 22	7 9	6	8	31
A_2	5	6 25	5 23	4	48
A_3	8	7	6 18	7 20	38

Заявки:	22	34	41	20	117

Таким образом, мы уменьшим значение целевой функции L – стоимость плана перевозок – на 88 единиц. Новому улучшенному плану перевозок будет соответствовать следующая таблица перевозок:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:
A_1	10	7 31	6	8	31
A_2	5 22	6 3	5 23	4	48
A_3	8	7	6 18	7 20	38
Заявки:	22	34	41	20	117

Полученный на этапе 5 первой итерации алгоритма новый план перевозок имеет шесть базисных клеток в соответствующей ему транспортной таблице (см. таблицу выше), что позволяет его использовать без модификаций для дальнейшего решения задачи.

r = 6

Стоимость найденного плана перевозок равна:

L = 31×7 + 22×5 + … = 708

Попытаемся опять улучшить найденный опорный план перевозок. Для этого перейдем к пункту 2 алгоритма:

2. Вычислим цену цикла для каждой свободной переменной:
$\gamma_{11} = 10 - 7 + 6 - 5 = 4,$

$\gamma_{13} = 6 - 5 + 6 - 7 = 0,$

$\gamma_{14} = 8 - 7 + 6 - 5 + 6 - 7 = 1,$

$\gamma_{24} = 4 - 7 + 6 - 5 = (-2),$

$\gamma_{31} = 8 - 5 + 5 - 6 = 2,$

$\gamma_{32} = 7 - 6 + 5 - 6 = 0.$

3. Вычислим максимальное количество груза, которое можно перенести по циклу с отрицательной ценой. Результаты расчетов, проделанных в предыдущем пункте, показали, что данная таблица содержит всего одну переменную и соответствующую ей свободную клетку. Таким образом, на данной итерации алгоритма нет необходимости в выборе цикла переноса.

$\max\ x_{24} = \min\ (20, 23) = 20$.

4. Для единственной свободной переменной рассчитаем значение критерия $\gamma_{ij} \cdot \max\ x_{ij}$: $\gamma_{24} \cdot (\max\ x_{24}) = -40$.

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:
A_1	10	7 31	6	8	31
A_2	5 22	6 3	5 23	4	48
A_3	8	7	6 18	7 20	38
Заявки:	22	34	41	20	117

Перенесем $\max x_{24} = 20$ единиц груза по циклу (2,4)+, (3,4)-, (3,3)+, (2,3)-, уменьшив этим значение целевой функции на 40 единиц. Новому улучшенному плану перевозок будет соответствовать следующая таблица перевозок:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:
A_1	10	7 31	6	8	31
A_2	5 22	6 3	5 3	4 20	48
A_3	8	7	6 38	7	38
Заявки:	22	34	41	20	117

Полученный на этапе 5 первой итерации алгоритма новый план перевозок имеет шесть базисных клеток в соответствующей ему транспортной таблице (см. таблицу выше), что позволяет его использовать без модификаций для дальнейшего решения задачи.

r = 6

Стоимость найденного плана перевозок равна:

L = 31×7 + 22×5 + … = 668

Попытаемся опять улучшить найденный опорный план перевозок. Для этого перейдем к пункту 2 алгоритма:

2. Вычислим цену цикла для каждой свободной переменной:

$\gamma_{11} = 10 - 7 + 6 - 5 = 4,$

$\gamma_{13} = 6 - 5 + 6 - 7 = 0,$

$\gamma_{14} = 8 - 4 + 6 - 7 = 3,$

$\gamma_{31} = 8 - 5 + 5 - 6 = 2,$

$\gamma_{32} = 7 - 6 + 5 - 6 = 0,$

$\gamma_{34} = 7 - 6 + 5 - 4 = 2.$

3. Так как не существует циклов свободных переменных с отрицательной ценой, полученный план перевозок является оптимальным. Стоимость оптимального плана перевозок, как было посчитано ранее, составляет 668 единиц.

Рассмотрим еще один пример решения классической транспортной задачи методом циклических переносов. В следующем примере мы рассмотрим такую транспортную задачу, применение к которой метода «северо-западного» угла для нахождения опорного плана даст вырожденный опорный план. Таким образом, этот пример проиллюстрирует решение транспортной задачи с вырожденным планом перевозок.

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Распределительный метод решения транспортной задачи обладает одним недостатком: нужно отыскивать и описывать циклы для всех свободных клеток и вычислять их цены. Этого недостатка лишен другой метод решения транспортной задачи, который называется метод потенциалов.

Пусть задана некоторая классическая транспортная задача:

$$\min L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i \in \{1..m\})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j \in \{1..n\})$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Будем условно считать, что каждый из пунктов отправления A_i вносит за перевозку единицы груза платеж α_i. В свою очередь каждый пункт назначения B_j также вносит за перевозку единицы груза платеж β_j.

Будем называть «псевдостоимостью» перевозки единицы груза по некоторому маршруту величину, равную сумме внесенных платежей пунктом отправления и пунктом назначения:

$$\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

Для удобства дальнейших рассуждений обозначим всю совокупность платежей пунктов отправления и пунктов назначения $\alpha_1 \dots \alpha_m, \beta_1 \dots \beta_n$ через (α_i, β_j). Докажем теперь общие положения о платежах.

Теорема о платежах транспортной задачи

Для заданной совокупности платежей (α_i, β_j) суммарная псевдостоимость плана перевозок, равная величине:

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} x_{ij}.$$

при любом допустимом плане перевозок (x_{ij}) не зависит от конкретного плана перевозок, то есть сохраняет одно и то же постоянное значение.

Теорема об оптимальном плане транспортной задачи

Если для всех базисных клеток некоторого допустимого плана перевозок псевдостоимость совпадает со стоимостью перевозки по соответствующему маршруту, то есть $(x_{ij} > 0), \tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, а для всех свободных клеток псевдостоимость не превышает стоимости перевозки, то есть $(x_{ij} = 0), \tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$, то рассматриваемый допустимый план перевозок является оптимальным.

Нетрудно догадаться, что эта теорема справедлива и для вырожденного плана, в котором некоторые из базисных переменных равны нулю. Действительно то, что в базисных клетках перевозки строго положительны, для доказательства несущественно: достаточно, чтобы они были неотрицательны.

Таким образом, нами доказано, что признаком оптимальности допустимого плана перевозок (x_{ij}) является выполнение двух условий:

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} \quad \forall(i, j): x_{ij} \in B \qquad (a)$$

$$\tilde{c}_{ij} \le c_{ij} \quad \forall(i, j): x_{ij} \notin B \qquad (б)$$

План перевозок, обладающий таким свойством, называется потенциальным, а соответствующие ему платежи (α_i, β_j) - потенциалами пунктов A_i и B_j.

Оптимальный план перевозок можно построить методом последовательных приближений, задаваясь сначала какой-то произвольной системой платежей, удовлетворяющих условию (а). Затем следует улучшить план, одновременно меняя систему платежей так, чтобы они приближались к потенциалам. При улучшении плана перевозок нам помогает следующее свойство платежей и псевдостоимостей:

Для любой системы платежей (α_i, β_j), удовлетворяющей условию (а), каждая свободная клетка имеет цену цикла, равную разности между стоимостью и псевдостоимостью в этой клетке транспортной таблицы:

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - \tilde{c}_{ij}.$$

Таким образом, можно предположить следующий алгоритм решения классической транспортной задачи методом потенциалов:

1. Взять любой опорный план перевозок, в котором отмечены $m + n - 1$ базисные клетки.

2. Определить для этого плана платежи (α_i, β_j) исходя из требования, чтобы в любой базисной клетке псевдостоимости были равны стоимостям:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}.$$

Очевидно, что один из платежей можно назначить произвольно, например, положить равным нулю, так как количество уравнений вида $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ всего равно величине $m + n - 1$, а число неизвестных $m + n$.

3. Подсчитать псевдостоимости $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ для всех свободных клеток. Если окажется, что выполняется условие $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$ (условие (а)), то рассматриваемый план перевозок является оптимальным.

4. Если условие (б) не выполняется, то есть $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$ хотя бы в одной свободной клетке, то следует улучшить план путем переноса перевозок по циклу любой свободной клетки с отрицательной ценой $(\tilde{c}_{ij} > c_{ij})$.

5. Перейти к пункту 2.

Важно заметить, что понятие цикла в методе потенциалов ничем не отличается от такого же понятия в распределительном методе. Таким образом, мы не будем здесь повторно рассматривать вопросы, связанные с правилами формирования и использования циклов в транспортной таблице.

Платежи пунктов отправления и пунктов назначения, а также псевдостоимости соответствующих маршрутов будем размещать в транспортной таблице, как показано ниже:

Сток Исток	Π_1	…	Π_n	Запасы: $\sum a_i$	Платежи: α_i
C_1	$\tilde{c}_{11}$ c_{11} x_{11}	… … …	$\tilde{c}_{1n}$ c_{1n} x_{1n}	a_1	α_1
…	… … …	… … …	… … …	…	…
C_m	$\tilde{c}_{m1}$ c_{m1} x_{m1}	… … …	$\tilde{c}_{mn}$ c_{mn} x_{mn}	a_m	α_m
Заявки: $\sum b_j$	b_1	…	b_n	$\sum_i a_i = \sum_i b_i$	
Платежи: β_j	β_1	…	β_n		

Рассмотренным выше понятиям платежей за перевозку и псевдостоимостей можно дать следующую экономическую интерпретацию.

Пусть поставщики A_i и потребители B_j действуют как единая экономическая система, а платежи (α_i, β_j) - реальные платежи, которые участники системы A_i и B_j вынуждены платить за перевозку единицы груза «перевозчику».

Перевозка единицы груза из пункта A_i в пункт B_j объективно стоит c_{ij} условных единиц. В то же время соответствующий поставщик и потребитель вместе платят за эту же перевозку сумму в $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ условных единиц.

Тогда с точки зрения вносимых за перевозку груза платежей оптимальным будет такой план перевозок, при котором пункты отправления и назначения A_i и B_j не переплачивают «перевозчику» ничего сверх объективной стоимости перевозок, то есть выполняется условие $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$.

Проиллюстрируем описанный выше алгоритм решения классической транспортной задачи методом потенциалов на нескольких примерах. Здесь, как и при рассмотрении распределительного метода, мы рассмотрим два примера решения транспортной задачи.

Для того, чтобы дать читателю возможность сравнить решение задачи различными методами и понять преимущества и недостатки этих методов по сравнению друг с другом, примеры данного раздела будут идентичны уже рассмотренным нами примерам.

Пример 3. Решение транспортной задачи методом потенциалов.

Пусть задана некоторая классическая транспортная задача. Требуется найти методом потенциалов оптимальный план перевозок этой транспортной задачи, если она имеет следующую таблицу издержек:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
A_1	10	7	6	8	31	
A_2	5	6	5	4	48	

A_3	8	7	6	7	38	
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:						

Решение:

1. Методом «северо-западного» угла найдем опорный план перевозок (см. таблицу ниже).

r = n + m – 1 = 4 + 3 – 1 = 6

Посчитаем теперь стоимость найденного методом «северо-западного» угла опорного плана:

L = 22×10 + 9×7 + … = 796

Попытаемся улучшить найденный опорный план перевозок, используя циклические перестановки, описанные в алгоритме метода потенциалов.

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
A_1	10 22	7 9	6	8	31	
A_2	5	6 25	5 23	4	48	
A_3	8	7	6 18	7 20	38	
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:						

2. Определим для этого плана платежи (α_i, β_j) исходя из требования, чтобы в любой базисной клетке псевдостоимости были равны стоимостям:

Псевдостоимости будем записывать в левом верхнем углу. Один из платежей, например α_1, выбираем произвольно $(\alpha_1 = 0)$.

$\alpha_1 + \beta_1 = 10 \Rightarrow \beta_1 = 10$

$\alpha_1 + \beta_2 = 7 \Rightarrow \beta_2 = 7$

$\alpha_2 + \beta_2 = 6 \Rightarrow \alpha_2 = -1$

$\alpha_2 + \beta_3 = 5 \Rightarrow \beta_3 = 6$

$\alpha_3 + \beta_3 = 6 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$\alpha_3 + \beta_4 = 7 \Rightarrow \beta_4 = 7$

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
A_1	10 10 22	7 7 9	6	8	31	0

A_2	5	6 6 25	5 5 23	4	48	-1
A_3	8	7	6 6 18	7 7 20	38	0
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:	10	7	6	7		

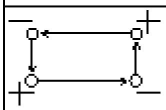
3. Подсчитаем псевдостоимости для всех свободных клеток:

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
A_1	10 10 22	7 7 9	6 6	7 8	31	0
A_2	9 5	6 6 25	5 5 23	6 4	48	-1
A_3	10 8	7 7	6 6 18	7 7 20	38	0
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:	10	7	6	7		

Так как для некоторых свободных клеток – (2,1), (2,4), (3,1), (3,2) – не выполняется условие $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$, то рассматриваемый план перевозок не является оптимальным.

4. В соответствии с алгоритмом улучшим найденный план путем переноски груза циклу любой свободной клетки транспортной таблицы, в которой не выполняется условие $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$. В качестве такой клетки возьмем, например, свободную клетку (2,1), так как именно в ней имеет место максимальная разница между стоимостью и пседостоимостью:

$\tilde{c}_{21} - c_{21} = 9 - 5 = 4$

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
 A_1	10 10 22	7 7 9	6 6	7 8	31	0
A_2	9 5	6 6 25	5 5 23	6 4	48	-1
A_3	10 8	7 7	6 6 18	7 7 20	38	0
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:	10	7	6	7		

В результате циклического переноса получим новый план перевозок (см. таблицу ниже).

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
A_1	10	7 31	6	8	31	
A_2	5 22	6 3	5 23	4	48	
A_3	8	7	6 18	7 20	38	
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:						

5. Перейдем к пункту 2.

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
A_1	6 10	7 7 31	6 6	7 8	31	0
− + + − A_2	5 5 22	6 6 3	5 5 23	6 4	48	-1
A_3	6 8	7 7	6 6 18	7 7 20	38	0
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:	6	7	6	7		

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
A_1	10	7 31	6	8	31	
A_2	5 22	6 3	5 3	4 20	48	
A_3	8	7	6 38	7	38	
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:						

Сток Исток	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы:	Платежи:
A_1	6 10	7 7 31	6 6	5 8	31	0
A_2	5 5 22	6 6 3	5 5 3	4 4 20	48	-1
A_3	6 8	7 7	6 6 38	5 7	38	0
Заявки:	22	34	41	20	117	
Платежи:	6	7	6	5		

Из анализа последней транспортной таблицы следует, что полученный план перевозок является оптимальным, так он удовлетворяет условиям (а) и (б). Рассчитаем стоимость найденного оптимального плана:

L = 31×7 + 22×5 + 3×6 + 3×5 + ×20×4 + 38×6 = 668

Как и следовало ожидать, мы получили тот же самый ответ, что и при решении этой задачи распределительным методом.

5. Экономико-математический анализ и корректировка оптимальных планов задач, решаемых методами линейного программирования.

Любая экономико-математическая модель лишь упрощенно, грубо отражает реальный экономический процесс, и это упрощение существенно сказывается на получаемых результатах.

Получить оптимальное решение задачи линейного программирования можно с помощью компьютера, если предварительно подготовить и ввести в компьютерную программу необходимые данные. Но исследователя вряд ли бы устроила заключительная симплекс-таблица, из которой можно было бы получить только список переменных и их значения. Ведь для экономистов важно не столько найти оптимальный план задачи, сколько провести исчерпывающий экономико-математический анализ модели.

На самом же деле результирующая симплекс-таблица содержит весьма важные данные, лишь небольшую часть которых составляют оптимальные значения переменных. Из симплекс-таблицы можно получить информацию относительно:

1. Оптимального решения;
2. Статуса ресурсов;
3. Ценности каждого вида ресурсов;
4. Чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов, вариациям коэффициентов целевой функции и интенсивности потребления ресурсов.

Сведения, относящиеся к первым трем пунктам можно получить из итоговой симплекс-таблицы. Получение информации, относящейся к четвертому пункту, требует дополнительных вычислений.

С точки зрения практического использования результатов решения задач линейного программирования классификация переменных на базисные и небазисные не имеет значения и при анализе оптимального решения может не учитываться. Переменные, отсутствующие в симплекс таблице в столбце «базисные переменные», обязательно имеют нулевое значение. Значения остальных переменных приводятся в столбце «свободные члены».

Статус ресурса определяется тем является ли он дефицитным или недефицитным, то есть полное или частичное его использование предусматривает оптимальное решение задачи. Соответствующую информацию можно получить по значениям дополнительных переменных. Положительные значения которых указывают на неполное использование соответствующего ресурса, т. е. данный ресурс является недефицитным. Если же дополнительная переменная равна нулю, то это свидетельствует о полном потреблении ресурса.

Если в результате анализа выявляется, что дефицитным является ни один ресурс, а несколько, возникает вопрос: какому из дефицитных ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств на увеличение их запасов, с тем чтобы получить от них максимальную отдачу. Ответ на этот вопрос можно получить, рассмотрев ценность различных ресурсов.

Ценность ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения Z, приходящегося на единицу прироста объема данного ресурса. Ценность ресурса нельзя отождествлять с действительной ценой ресурса, по которой возможна его закупка, так как ценность ресурса – это некоторая экономическая мера, количественно характеризующая ресурс относительно полученного оптимального значения Z.

Таким образом, анализ модели не менее важен, чем получение оптимального решения по модели, а в некоторых случаях анализ дает больше информации для принятия решения, чем само решение.

1.3 Лекция (2 часа)

Тема: «Основные понятия теории планирования эксперимента. Многофакторный эксперимент.Методы описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах»

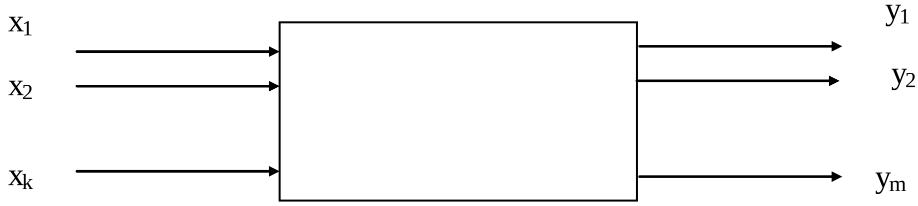
1.3.1. Вопросы лекции:

1. Основные понятия и определения теории планирования эксперимента
2. Статистические оценки исследуемых процессов
3. Воспроизводимость опытов
4. Математические планы экспериментов
5. Опыт, эксперимент
6. Представление результатов экспериментов
7. Статистический анализ
8. Методы статистического анализа

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные понятия и определения теории планирования эксперимента

В рамках теории планирования эксперимента исследуемый объект управления представляется в виде абстрактного "черного ящика", у которого различают входные и выходные переменные.



Независимые входные переменные, влияющие на протекание процесса в объекте управления, называются факторами (температура, давление и т.д.). Они обозначаются x1, x2, ...,xk .

Зависимые выходные переменные, количественно характеризующие протекающий процесс (производительность и т.д.), называются откликами (реакциями) и обозначаются y1, y2,...,ym.

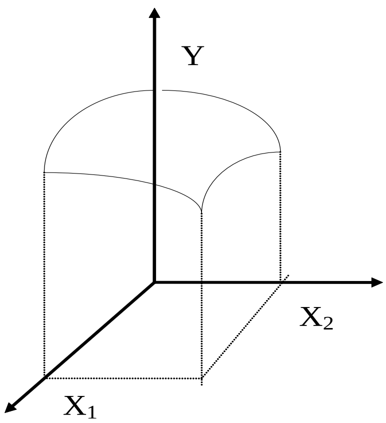
Между откликом и факторами существует вполне определенная связь, которая называется функцией отклика и представляется в виде отношения:

yj=fj(x1, x2, ...,xk), где j=1,2,...m.

Пространство с координатами x1, x2, ...,xk называется факторным пространством, а геометрическое изображение функции отклика в факторном пространстве называется поверхностью отклика.

Наглядность введенным понятиям дает их геометрическая интерпретация. Поверхность отклика может быть изображена на факторной плоскости как рельеф. Если число влияющих факторов больше двух, то для изображения поверхности отклика используют ее двумерное сечение при фиксированных остальных факторах. Эксперимент не может быть реализован во всех точках факторного пространства, а лишь принадлежащих допустимой области. Значения, которые может принимать в эксперименте каждый фактор, называются уровнями. Исследователю заранее неизвестна зависимость f_j. Она находится по данным эксперимента, который необходимо построить так, чтобы при минимальных затратах ресурсов (например, минимальном числе опытов), варьируя по специальным правилам значениями входных переменных, построить математическую модель системы и оценить ее характеристики.

При построении модели выделяют влияющие на ее поведение факторы и определяют экспериментально их влияние на функцию отклика. Полученная экспериментально функция отклика аппроксимируется математической функцией, представляющей математическую модель объекта.



Существенной особенностью многих процессов является их детерминированно-стохастическая природа. Т.е. чаще всего экспериментально полученный отклик является случайной величиной. Природа случайности обусловлена погрешностью измерительной аппаратуры (исключая методические и статические ошибки), стохастической природой отклика и факторов и наличием неучтенных в модели факторов. Вследствие этого параметры математических моделей, полученных экспериментальным методом, отражают стохастические особенности протекания процесса и определяются статистическими методами.

2. Статистические оценки исследуемых процессов

В настоящее время хорошо разработана теория оценивания линейных по параметрам математических моделей. Идентификацию нелинейных моделей проводят либо с использованием приближенных оценок либо путем линеаризации модели.

В линейном приближении можно считать, что измеренное значение отклика представляет собой сумму трех слагаемых:

$$y = \mu + \theta \cdot x + \varepsilon,$$

где μ - истинное значение отклика,

$\theta \cdot x$ - вклад обусловленный стохастической природой фактора,

ε - постоянный стохастический вклад из-за погрешностей измерений.

Поэтому при обработке данных необходимо учитывать их стохастическую природу. Обычно полагают, что ε имеет нормальное распределение.

Статистические методы обработки опытных данных позволяют уточнить детали вероятностной модели. В качестве статистических оценок выходных переменных объекта управления, определяемых на основе эксперимента, в силу наличия у них случайных составляющих используются средние значения и дисперсии.

Истинные значения параметров распределения выходных переменных являются результатом обработки так называемой генеральной совокупности всех возможных измерений, под которой подразумевается теоретически бесконечная выборка. В результате проведения эксперимента исследователь имеет некоторую совокупность измерений, являющуюся составной частью генеральной совокупности и называемую выборкой объемом n измерений.

Для такой выборки используют следующие статистические характеристики:

а) выборочное среднее значение - $$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

б) выборочная дисперсия - $$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2,$$

в) выборочное среднее квадратичное отклонение - $$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Заметим, что данные оценки должны быть несмещенными и состоятельными. Это подразумевает, что математическое ожидание оценки параметра равно генеральному значению этого параметра, а при увеличении объема выборки оценки параметра сходятся по вероятности к генеральному значению.

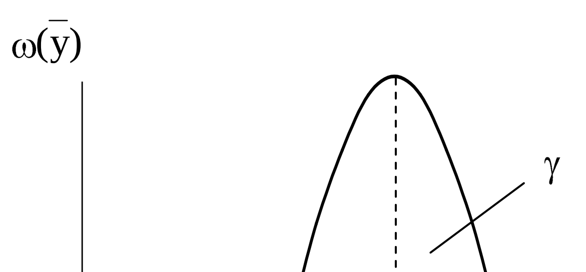
Выборочные дисперсии и средние квадратичные отклонения характеризуют рассеяние случайных результатов измерений относительно среднего арифметического. Это рассеяние объясняется действием случайных возмущающих факторов, имеющих место в самом исследуемом процессе и в измерительном тракте. При усреднении случайные ошибки, характеризующие каждое отдельное измерение взаимно компенсируются. Из чего следует положение – чем больше объем выборки, тем точнее оценивается истинное значение выходной переменной.

Полученные при проведении экспериментов оценки математического ожидания (среднего значения) функций отклика являются точечными оценками.

Помимо точечных используют также интервальную оценку - числовой интервал (θ_1, θ_2) определенный по результатам выборки, относительно которого можно утверждать, что он с вероятностью близкой к 1 (доверительной вероятностью) содержит значение искомого параметра генеральной совокупности.

Учитывая наличие случайной составляющей в получаемой по результатам эксперимента оценки выходного параметра, можно сказать что среднее арифметическое по результатам оценки нескольких выборок является случайной величиной, которая во многих случаях распределена по нормальному закону, математическим ожиданием которого является истинное значение выходного параметра.

Кривая плотности распределения случайной величины $\bar{y}$ представлена на рисунке.



Данный рисунок дает наглядное представление понятия доверительной вероятности, под которой будем понимать вероятность попадания истинного значения в интервал $P(|\theta^* - \theta| < \Delta) = P(\theta^* - \Delta < \theta < \theta^* + \Delta) = \gamma$, где θ^* и θ есть оценка и истинное значение параметра соответственно.

Величину Δ, равную половине ширины доверительного интервала называют точностью оценки, а вероятность γ - доверительной вероятностью или надежностью. Обычно точность Δ выражают в долях среднего квадратичного отклонения выборочного среднего:

$\Delta = t\sigma_{\bar{y}}$, где $\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$, t – табличная величина, зависящая от значения доверительной вероятности.

Из данной таблицы следует известное для нормального распределения случайных величин правило трех сигм, в соответствии с которым истинный результат с вероятностью 0,997 лежит в доверительном интервале:

$$\bar{y} - 3\sigma_{\bar{y}} \le y \le \bar{y} + 3\sigma_{\bar{y}}.$$

В основе расчета t лежит использование статистики с распределением Стьюдента.

3. Воспроизводимость опытов

Важное значение для оценки возможности применения к тому или иному эксперименту математических методов теории планирования эксперимента имеет понятие воспроизводимости опытов.

Рассмотрим для простоты однофакторную модель. При различных условиях, но при постоянном значении фактора, проведем серии опытов, каждый из которых содержит k независимых испытаний (измерений, опытов) по определению значения функции отклика.

Т.е. в каждой серии j проводится k параллельных опытов при одинаковых условиях.

Для каждой серии вычисляют среднее арифметическое функции отклика -

$\bar{y}_j = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_{ji},$ где j=1,2,...N , j - номер серии, k -число параллельных опытов, проведенных при одинаковых условиях. Обычно N и k берут не очень большое, около 4 .

Затем вычисляют дисперсию для каждой серии параллельных опытов -

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(y_{ji} - \bar{y}_j)^2, \qquad j=1,2...N.$$

Заметим, что выборка имеет k степеней свободы, т.к. все ее члены независимы. Дисперсия имеет k-1 степень свободы, т.к. значения входящих членов связаны через среднее значение. Для получения несмещенной оценки сумма квадратов делится не на k, а на k-1 (число степеней свободы). Дисперсия является мерой неопределенности экспериментально найденного математического ожидания функции отклика. Оценка дисперсии является случайной величиной. Поэтому необходимо определить получены ли величины дисперсии от одной генеральной совокупности, вызванной погрешностями измерения, или и от других, вызванных неучтенными факторами. При малом разбросе величин дисперсий можно считать, что дисперсии обусловлены одной генеральной совокупностью, т.е. источник погрешностей стабилен и по-видимому это погрешности измерений. В этом случае можно считать опыты воспроизводимыми.

В качестве критерия оценки воспроизводимости опытов используют следующий – опыт считают воспроизводимым, если

$Gp \le G$, (1)

где Gp – расчетный критерий Кохрана - $G_p = \dfrac{\max(\sigma_j^2)}{\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2}$ - отношение наибольшей из оценок дисперсии к сумме всех оценок дисперсий.

Значения G, определяющие границу при которой опыты воспроизводимы, даны в специальных таблицах для доверительной вероятности P=0.95. Для определения G по таблицам необходимо знать общее число дисперсий N и число f=k-1 степеней свободы, где k-число параллельных опытов. Величина G убывает с ростом числа степеней свободы и количества дисперсий.

Если условие (1) не выполняется, то математические методы планирования эксперимента к данному эксперименту применять нельзя.

Оценку погрешности проведенного эксперимента дают:

оценка дисперсии воспроизводимости – $\sigma_y^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{j}^{N}\sigma_j^2$,

оценка дисперсии среднего значения - $\sigma_{\bar{y}}^2 = \dfrac{\sigma_y^2}{k}$

4. Математические планы экспериментов

Различают два основных вида экспериментов – пассивный и активный.

При пассивном эксперименте объект исследования находится в режиме нормальной эксплуатации, в процессе которой имеют место случайные отклонения входных факторов и соответствующие им изменения выходного параметра. Исследователь фиксирует в случайные моменты времени совокупность значений входных факторов и соответствующие им значения выходного параметра. Полученные в результате обработки результаты пассивного эксперимента справедливы в очень узком диапазоне входных факторов. В пассивном эксперименте каждому опыту соответствует одно измерение. При планировании пассивного эксперимента определяются продолжительность эксперимента, интервал между опытами и количество опытов.

Активный эксперимент предусматривает возможность в каждом опыте устанавливать основные (исследуемые) факторы на желаемых уровнях, то есть задавать их значения и стабилизировать на время измерения выходного параметра. При активном эксперименте каждому опыту соответствует ряд измерений (проводится несколько параллельных опытов при одних и тех же условиях). Планирование активного эксперимента включает:

- установление уровней основных факторов в каждом опыте,
- определение общего количества опытов,
- определение числа параллельных опытов.

Наибольшее применение на практике нашел активный эксперимент. Рассмотрим его основные планы.

Для унификации планов основные факторы измеряются не в натуральном, а в условном масштабе:

$$X = \frac{x - x_0}{\Delta x},$$

где $x_0 = \dfrac{x_{min} + x_{max}}{2}$ - центр эксперимента для данного фактора,

$\Delta x = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2}$ - интервал варьирования данного фактора.

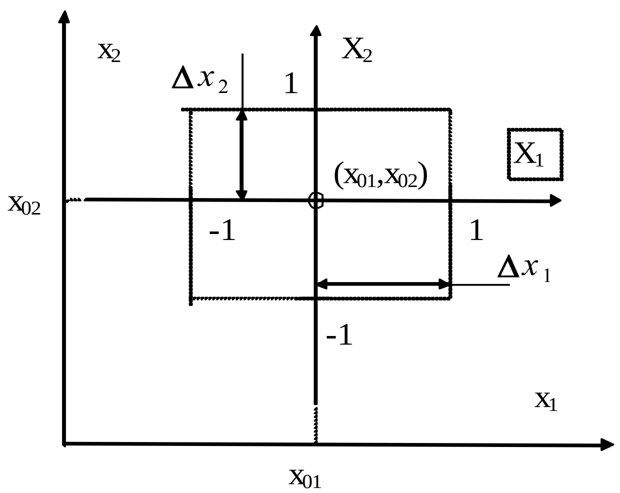
Легко заметить, что при $x=x_{min}$ $X=-1$, при $x=x_0$ $X=0$, а при $x=x_{max}$ $X=+1$.

Разложим функцию отклика в ряд Тейлора в окрестностях нового начала координат:

$y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2 X_2+\dots \beta_nX_n +\beta_{12}X_1X_2 +\dots\beta_{n-1,n}X_{n-1}X_n +\beta_{11}X_1^2+\beta_{22}X_2^2+\dots\beta_{nn}X_n^2 + \dots$

где $\beta_0 = y(0,0,..0)$ - значение функции отклика в начале координат,

$$\beta_i = \frac{dy}{dX_i};\quad \beta_{ij} = \frac{d^2y}{dX_i dX_j};\quad \beta_{ii} = \frac{d^2y}{dX_i dX_i}.$$



Чтобы подчеркнуть истинные значения коэффициентов их обозначают "b", подразумевая под этим соответствующие выборочные оценки, а математическое уравнение протекания процесса записывают в виде

$y=b_0+b_1X_1+b_2 X_2+\dots b_nX_n +b_{12}X_1X_2 +\dots b_{n-1,n}X_{n-1}X_n +b_{11}X_1^2+b_{22}X_2^2+\dots b_{nn}X_n^2 + \dots$

Данное уравнение называют уравнением регрессии, а коэффициенты - коэффициентами регрессии.

Обычно ограничиваются линейной частью разложения и членами, содержащими произведения факторов в первой степени (парными взаимодействиями). Такие планы называются планами первого порядка:

$y=b0+b1X1+b2\ X2+\dots\ bnXn+b12X1X2+\dots bn-1,nXn-1Xn$.

Такой подход позволяет находить уравнение локального участка поверхности отклика. Координаты уравнения находятся на основе экспериментальных данных, которые несут на себе отпечаток погрешностей измерения.

В некоторых случаях используют планы второго порядка, которые учитывают не только линейные эффекты и парные взаимодействия, но и квадратичные эффекты. Для них уравнения регрессии имеют вид:

$y=b0+b1X1+b2\ X2+\dots\ bnXn+b12X1X2+\dots bn-1,nXn-1Xn+b11X12+\dots+bnnXn2$.

В планах первого порядка основные факторы варьируются на двух уровнях – верхнем и нижнем.

План, в котором имеют место все возможные комбинации основных факторов на всех уровнях варьирования, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Количество опытов в ПФЭ равно $N=2n$, где n-число факторов.

На основании таблицы ПФЭ можно получить таблицу дробного факторного эксперимента (ДФЭ). В ДФЭ количество опытов меньше, чем в ПФЭ в разы, кратные числу 2.

Различают следующие виды ДФЭ:

- полуреплика от ПФЭ - $N=2n-1$,
- четвертьреплику от ПФЭ - $N=2n-2$,
- одну восьмую реплики от ПФЭ - $N=2n-3$ и т.д.

Использование ДФЭ приводит к сокращению числа опытов ценой уменьшения получаемых эффектов в уравнении регресии.

5. Опыт, эксперимент

Под экспериментом будем понимать совокупность операций совершаемых над объектом исследования с целью получения информации о его свойствах. Эксперимент, в котором исследователь по своему усмотрению может изменять условия его проведения, называется активным экспериментом. Если исследователь не может самостоятельно изменять условия его проведения, а лишь регистрирует их, то это пассивный эксперимент.

Важнейшей задачей методов обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача построения математической модели изучаемого явления, процесса, объекта. Ее можно использовать и при анализе процессов и при проектировании объектов. Можно получить хорошо аппроксимирующую математическую модель, если целенаправленно применяется активный эксперимент. Другой задачей обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача оптимизации, т.е. нахождения такой комбинации влияющих независимых переменных, при которой выбранный показатель оптимальности принимает экстремальное значение.

Опыт – это отдельная экспериментальная часть.

План эксперимента – совокупность данных определяющих число, условия и порядок проведения опытов.

Планирование эксперимента – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям, совокупность действий направленных на разработку стратегии экспериментирования (от получения априорной информации до получения работоспособной математической модели или определения оптимальных условий). Это целенаправленное управление экспериментом, реализуемое в условиях неполного знания механизма изучаемого явления.

В процессе измерений, последующей обработки данных, а также формализации результатов в виде математической модели, возникают погрешности и теряется часть информации, содержащейся в исходных данных. Применение методов планирования эксперимента позволяет определить погрешность математической модели и судить о ее адекватности. Если точность модели оказывается недостаточной, то применение методов планирования эксперимента позволяет модернизировать математическую модель с проведением дополнительных опытов без потери предыдущей информации и с минимальными затратами.

Цель планирования эксперимента – нахождение таких условий и правил проведения опытов при которых удается получить надежную и достоверную информацию об объекте с наименьшей затратой труда, а также представить эту информацию в компактной и удобной форме с количественной оценкой точности.

Пусть интересующее нас свойство (Y) объекта зависит от нескольких (n) независимых переменных (X1, X2, …, Xn) и мы хотим выяснить характер этой зависимости - Y=F(X1, X2, …, Xn), о которой мы имеем лишь общее представление. Величина Y – называется “отклик”, а сама зависимость Y=F(X1,X2, …, Xn) – “функция отклика”.

Отклик должен быть определен количественно. Однако могут встречаться и качественные признаки Y. В этом случае возможно применение рангового подхода. Пример рангового подхода - оценка на экзамене, когда одним числом оценивается сложный комплекс полученных сведений о знаниях студента.

Независимые переменные X1, X2, …, Xn – иначе факторы, также должны иметь количественную оценку. Если используются качественные факторы, то каждому их уровню должно быть присвоено какое-либо число. Важно выбирать в качестве факторов лишь независимые переменные, т.е. только те которые можно изменять, не затрагивая другие факторы. Факторы должны быть однозначными. Для построения эффективной математической модели целесообразно провести предварительный анализ значимости факторов (степени влияния на функцию), их ранжирование и исключить малозначащие факторы.

Диапазоны изменения факторов задают область определения Y. Если принять, что каждому фактору соответствует координатная ось, то полученное пространство называется факторным пространством. При n=2 область определения Y представляется собой прямоугольник, при n=3 – куб, при n >3 - гиперкуб.

При выборе диапазонов изменения факторов нужно учитывать их совместимость, т.е. контролировать, чтобы в этих диапазонах любые сочетания факторов были бы реализуемы в опытах и не приводили бы к абсурду. Для каждого из факторов указывают граничные значения

$X_{i\min} \le X_i \le X_{i\max}$, i=1,... n.

Регрессионный анализ функции отклика предназначен для получения ее математической модели в виде уравнения регрессии

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n; B_1, B_2, \dots, B_m) + e,$$

где B1, …, Bm – некоторые коэффициенты; e – погрешность.

Среди основных методов планирования, применяемых на разных этапах исследования, используют:

планирование отсеивающего эксперимента, основное значение которого выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;

планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т.е. составление планов для объектов с качественными факторами;

планирование регрессионного эксперимента, позволяющего получать регрессионные модели (полиномиальные и иные);

планирование экстремального эксперимента, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования;

планирование при изучении динамических процессов и т.д.

Инициатором применения планирования эксперимента является Рональд А. Фишер, другой автор известных первых работ – Френк Йетс. Далее идеи планирования эксперимента формировались в трудах Дж. Бокса, Дж. Кифера. В нашей стране - в трудах Г.К. Круга, Е.В. Маркова и др.

В настоящее время методы планирования эксперимента заложены в специализированных пакетах, широко представленных на рынке программных продуктов, например: StatGrapfics, Statistica, SPSS, SYSTAT и др.

2. Представление результатов экспериментов

При использовании методов планирования эксперимента необходимо найти ответы на 4 вопроса:

Какие сочетания факторов и сколько таких сочетаний необходимо взять для определения функции отклика?

Как найти коэффициенты B0, B1, …, Bm?

Как оценить точность представления функции отклика?

Как использовать полученное представление для поиска оптимальных значений Y?

Геометрическое представление функции отклика в факторном пространстве X1, X2, …, Xn называется поверхностью отклика (рис. 1).

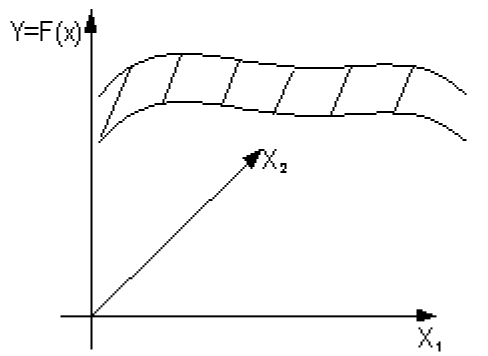


Рис. 1. Поверхность отклика

Если исследуется влияние на Y лишь одного фактора X1, то нахождение функции отклика - достаточно простая задача. Задавшись несколькими значениями этого фактора, в результате опытов получаем соответствующие значения Y и график Y =F(X) (рис. 2).

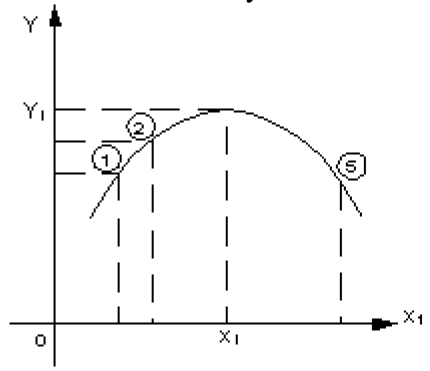
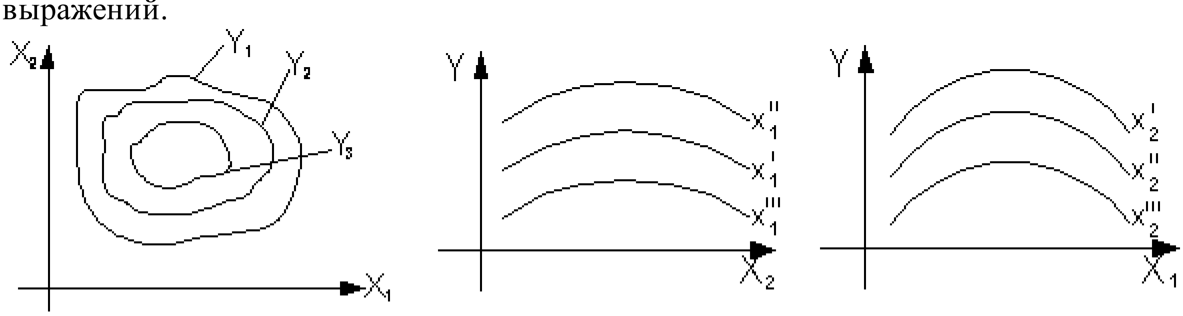


Рис. 2. Построение функции отклика одной переменной по опытным данным

По его виду можно подобрать математическое выражение функции отклика. Если мы не уверены, что опыты хорошо воспроизводятся, то обычно опыты повторяют несколько раз и получают зависимость с учетом разброса опытных данных.

Если факторов два, то необходимо провести опыты при разных соотношениях этих факторов. Полученную функцию отклика в 3х-мерном пространстве (рис. 1) можно анализировать, проводя ряд сечений с фиксированными значениями одного из факторов (рис. 3). Вычлененные графики сечений можно аппроксимировать совокупностью математических выражений.



а) б) в)

Рис. 3. Сечения поверхности отклика при фиксированных откликах (а) и переменных (б,в).

При трех и более факторах задача становится практически неразрешимой. Если и будут найдены решения, то использовать совокупность выражений достаточно трудно, а часто и не реально.

Например, пусть необходимо исследовать влияние U, f и Rr на Мп и Р2 асинхронного двигателя (АД) (рис. 4).

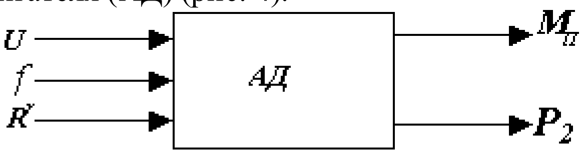


Рис. 4. Исследование влияния U, f и Rr на Мп и Р2 АД

Если в диапазоне изменения каждого фактора взять хотя бы по пять точек

U, В	170	180	190	200	210	220
f, Гц	40	45	50	55	60	65
R^r, Ом	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6 ,

то для того чтобы выполнить опыты при всех возможных сочетаниях значений факторов (их три) необходимо выполнить 53=125 опытов и сформировать по 52=25 кривых для каждой из двух функций отклика. Если мы хотим хотя бы продублировать опыты чтобы снизить погрешность, то число опытов пропорционально возрастает, поэтому произвольное выполнение опытов при числе факторов более двух и использование их результатов - практически нереально.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

7. Статистический анализ

В статистическом анализе производится обработка некоторой случайной выборки, под которой понимаются результаты N последовательных и независимых экспериментов со случайной величиной или событием. Выборка должна
быть состоятельной (презентативной), т.е. чтобы объем обрабатываемой информации был достаточен для получения результатов с требуемой точностью и надежностью.

Используется для исследования процессов и объектов по результатам массовых экспериментов со случайными величинами или событиями. Примером статистического характера процесса может служить появление неисправностей при работе технической системы управления, а исследование случайностей, как инструмента исследования, может иллюстрировать вероятностные методы поиска экстремума некоторой функции.

Наиболее употребительными методами статистического анализа систем управления являются: регрессионный анализ; корреляционный анализ; дисперсионный анализ; ковариационный анализ; анализ временных рядов; метод главных компонентов; факторный анализ.

Регрессионный анализ

Регрессионный анализ ставит своей задачей исследование зависимости одной случайной величины от ряда других случайных и неслучайных величин (регрессия — зависимость математического ожидания случайной величины от значений других случайных величин). Например, после проведения N экспериментов на статистической модели получен набор реализаций случайных величин {Xi,Yi},i= 1, 2, 3, ...,n, где X является независимой переменной, а Y — функцией. Обработка этого массива случайных величин позволяет представить их в виде детерминированной линейной регрессивной модели типа:

Y = a + bY, (3.1)

где коэффициенты a иb рассчитываются согласно методу наименьших квадратов таким образом, чтобы квадраты отклонений случайных величинYi от значений функций (3.1) на множестве X i были наименьшими, т.е.

$$\sum_{i}^{N}(Y - Y_i)^2 = \min. \qquad (3.2)$$

В случае нескольких независимых переменных регрессивная модель представляется линейным полиномом

$$Y = a + \sum_{j=1}^{k} b_j x \Delta x_j;\ \ \Delta x_j = (x_j - x_j^{(0)}),\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k, \qquad (3.3)$$

где xj(0)являются базовыми значениями всех k переменных, в окрестностях которых анализируется характер исследуемого процесса.

Выражение (3.3) представляет собой линейную функцию, однако, если значения Ax. достаточно велики или функция Y существенно нелинейна, то можно использовать разложение более высокого порядка.

При анализе регрессионной модели (3.3) значения коэффициентов bj показывают степень влияния j-й переменной на функцию Y, что позволяет разделить все переменные на существенные и несущественные. Однако наибольший интерес регрессионная модель представляет для прогноза поведения функций Y. В практической деятельности регрессионный анализ часто используется для создания так называемой эмпирической модели, когда, обрабатывая результаты наблюдений (или характеристики существующих систем), получают регрессионную модель и используют ее для оценки перспективных систем или поведения системы при гипотетических условиях.

Точность и надежность получаемых оценок зависят от числа наблюдений (реализаций, экспериментов) и расположения прогностических значений x относительно базовых (т.е. известных на некоторый момент времени) xj(0). Чем больше разность∆xj, тем меньше точность прогноза.

2. Методы статистического анализа

Корреляционный анализ

Корреляционный анализ используется для определения степени линейной взаимосвязи между случайными величинами (корреляция -- зависимость между случайными величинами, выражающая тенденцию одной величины возрастать или убывать при возрастании или убывании другой).

Основными задачами корреляционного анализа являются оценка корреляционных характеристик и проверка статистических гипотез о степени (значимости) связи между случайными величинами.

Корреляционной характеристикой является коэффициент корреляции, равный математическому ожиданию произведений отклонений случайных величин x их от своих математических ожиданий и нормированный относительно среднеквадратических отклонений данных случайных величин.

Если число случайных величин больше двух ($r > 2$), то составляется квадратная корреляционная матрица размером ($r \times r$), элементами которой являются коэффициенты корреляцииkij, а диагональные элементы равны единице (т.е.kij = 1). Коэффициенты корреляции изменяются от нуля до единицы, и чем больше его значение, тем теснее связь между случайными величинами.

Оценки коэффициентов корреляции рассчитываются по значениям оценок математических ожиданий и среднеквадратических отклонений, полученных путем статистической обработки результатов реализаций случайных величин (см. [6.8; 6.28]).

Дисперсионный анализ

Дисперсионный анализ используется для проверки статистических гипотез о влиянии качественных факторов на показатели, т.е. факторов, не поддающихся количественному измерению (например, качественный фактор -организация производства, влияющий на количественный показатель -прибыль от производства). В этом заключается его отличие от регрессионного анализа, в котором факторы имеют количественную меру (например, количественный фактор — затраты на производство).

В дисперсионном анализе качественный фактор представляется j-ми возможными состояниями (например, возможными схемами организации производства), для оценки которых по каждому из них проводитсяnj экспериментов $\left(\sum_{j=1}^{j} n_j = N\right)$. Далее рассчитываются статистические оценки в каждойnj группе экспериментов и в общей выборкеN,а затем анализируется соотношение между ними. По этому соотношению принимается или отвергается гипотеза о влиянии качественного фактора на показатель.

Ковариационный анализ

Ковариационный анализ используется для создания и изучения вероятностных моделей процессов, в которых присутствуют одновременно как количественные, так и качественные факторы, т.е. он объединяет регрессионные и дисперсионные методы. Модель включает в себя регрессионные и дисперсионные факторы, первые служат для проверки гипотез о значимости количественных факторов, а вторые — качественных.

Метод временных рядов

Анализ временных рядов используется при исследовании дискретного случайного процесса, протекающего на интервале времени T (см. [6.44]).

Результаты экспериментов или наблюдений, полученные на данном интервале, представляются в виде временного ряда, каждое значение Y. которого включает детерминированную f(t) и случайную z(t) составляющие:

$$Yi = f(t) + z(t).$$

Детерминированная составляющая описывает влияние детерминированных факторов в момент времени t, влияние же множества случайных факторов описывает случайная составляющая. Детерминированную часть временного ряда называюттрендом. Этот временной ряд описывается так называемой трендовой моделью:

$$y_i = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i + \varphi_i(t) + z(t),$$

где $\alpha 0$, αi. — коэффициенты тренда;

k - - количество функций времени, линейная комбинация которых определяет детерминированную составляющую;

$\varphi i(t)$ - функция времени.

В процессе анализа вид функции времени $\varphi i(t)$ постулируется исследователем в виде рабочей гипотезы. Это может быть степенная функция tn, либо тригонометрическая, например, sin(wi(t)), где wi- круговая частота изменения i-й функции. Коэффициенты тренда и оценку дисперсии случайной составляющей определяют путем проведения статистической обработки результатов эксперимента или наблюдений.

С помощью представления случайного процесса в виде временных рядов можно, во-первых, исследовать динамику этого процесса, во-вторых, выделить факторы, существенным образом влияющие на показатели, и определить периодичность их максимального воздействия, в-третьих, провести интегральный или точечный прогноз показателя Y на некоторый промежуток времениΔt(точечный прогноз указывает лишь точку, возле которой может находиться прогнозируемый показатель, интервальный - интервал нахождения этого показателя с некоторой заданной вероятностью) (см. [6.25]).

Метод главных компонентов

Метод главных компонентов используется при рассмотрении некоторого множества случайных значений показателей Yi, i = 1, 2, 3, ...,k в целях определения общих для них факторов (компонентов), от которых все они зависят. Степень зависимости i-го показателя от j-го компонента отражается величиной aij, называемой нагрузкой i-го показателя на j-й компонент.

Результатом анализа является модель главных компонентов, в которой каждый показатель представлен суммой произведений компонентов и их нагрузок:

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\, f_j\ ,$$

где fj- центрированные, нормированные и некоррелированные компоненты (случайные величиныf1 иf2 называются некоррелированными, если коэффициент их корреляции равен нулю; случайная величина называется центрированной, если ее математическое ожидание равно нулю; центрированная случайная величина называется нормированной, если ее дисперсия равна единице). Модель главных компонентов показывает, что и в какой степени определяет исследуемые показатели, а также объясняет связи между ними.

Факторный анализ

Факторный анализ по своей сути совпадает с методом главных компонентов, однако позволяет представить показатели через меньшее количество факторов (компонентов), поэтому используется при исследовании сложных систем управления, с большим числом показателей и сложными взаимосвязями между ними.

Предполагается, что за множеством показателей системы стоит небольшое число независимых скрытых параметров, называемых факторами. Они определяют значения показателей и взаимосвязь между ними. Степень взаимосвязи между фактором и показателем описывается факторной нагрузкой, количественное значение которой равно коэффициенту корреляции между ними. Если фактор связан со всеми показателями, то он называется генеральным, если с некоторой группой, то групповым, и наконец, если существует связь только с одним показателем, то фактор называется специфическим.

Следовательно, показатели, имеющие высокую нагрузку на общий фактор, обладают общим свойством, которому можно дать название, исходя из физического смысла данной группы показателей. Процедура факторного анализа состоит в переходе от высокоразмерного пространства, выраженного матрицей {yij},(i= 1, 2, 3, ...,k,j= 1, 2, 3, ...,n) значений i-х показателей вj-х экспериментах (наблюдениях), к низкоразмерному факторному пространству {rij}, (i= 1, 2, 3, ...,k; j = 1, 2, 3, ...,т; т < п, т = т(п)),описываемых дляi-х показателей.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа)

Тема: «Общая модель линейного программирования в каноническом и неканоническом представлении. Основные теоремы ЛП. Графический метод решения ЗЛП. Симплекс-метод. Двойственные задачи линейного программирования»

2.1.1 Задание для работы:

1. Графический метод решения ЗЛП.
2. Решение ЗЛП симплекс-методом
3. Двойственные задачи.
4. Программное обеспечение решения задач линейного программирования на ПК.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Решить графическим методом типовую задачу оптимизации.

Задача 1. На имеющихся у фермера 400 га земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требуют на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей, - 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед. Однако согласно этому договору фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.

Фермеру хотелось бы знать, сколько гектаров нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум, и почему?

Решение.

Обозначим через x1 сколько гектаров нужно засеять кукурузы, через x2 – сои. Так как у фермера всего имеется 400 га земли, то первое ограничение задачи имеет вид: x1+ x2 ? 400. Найдем общие затраты на сев и уборку кукурузы и сои: (200x1+100x2) ден. ед. Фермер получил на расходы ссуду в 60 тыс. ден., поэтому следующее ограничение имеет вид: 200x1+100x2 ? 60 000. Найдем, сколько центнеров зерна соберет фермер: (30x1+60x2) ц. Вместимость склада составляет 21 тыс. центнеров, поэтому следующее ограничение имеет вид: 30x1+60x2 ? 21 000. Выясним сколько ден. ед. получит фермер по договору за собранное зерно: (30x1·3+60x2·6) ден. ед.

Построим экономико-математическую модель задачи:

max f(X) = 90x1+120x2

x1+ x2 <= 400

200x1+100x2 <= 60 000

30x1+60x2 <= 21 000

x1,2 ≥ 0

Решим задачу графическим методом.

Последнее ограничение означает, что область решений будет лежать в первой четверти декартовой системы координат.

Этап 1. Определим множество решений первого неравенства. Оно состоит из решения уравнения и строгого неравенства. Решением уравнения служат точки прямой x1+x2-400=0. Построим прямую по двум точкам (0;400) и (400;0), которые легко получить в ре-

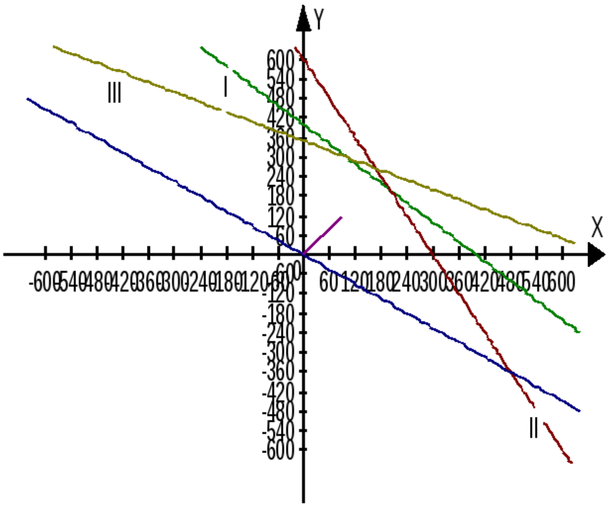
зультате последовательного обнуления одной из переменных. На рисунке обозначим ее цифрой I.
Множество решений строгого неравенства — одна из полуплоскостей, на которую делит плоскость построенная прямая. Какая из них является искомой, можно выяснить при помощи одной контрольной точки. Если в произвольно взятой точке, не принадлежащей прямой, неравенство выполняется, то оно выполняется и во всех точках той полуплоскости, которой принадлежит контрольная точка, и не выполняется во всех точках другой полуплоскости. В качестве такой точки удобно брать начало координат. Подставим координаты (0; 0) в неравенство $x1+x2-400<0$, получим $-400 < 0$, т.е. оно выполняется. Следовательно, областью решения неравенства служит нижняя полуплоскость.
Аналогичным образом построим области решения двух других неравенств
$200x1+100x2-60\,000=0$; $x1 = 0$, $x2 = 600$, $x1 = 300$, $x2 = 0$ (на рисунке прямая II);
$200x1+100x2-60\,000<0$ при $x1 = x2 = 0$, $-60\,000<0$ выполняется, берется левая полуплоскость.
$30x1+60x2-21\,000=0$ $x1 = 0$, $x2 = 350$, $x1 = 700$, $x2 = 0$ (на рисунке прямая III);
$30x1+60x2-21\,000<0$ при $x1 = x2 = 0$, $-21\,000<0$ выполняется, берется нижняя полуплоскость.
Заштрихуем общую область для всех неравенств. Обозначим вершины области латинскими буквами и определим их координаты, решая систему уравнений двух пересекающихся соответствующих прямых. Например, определим координаты точки B, являющейся точкой пересечения первой и третьей прямой:

$x1+x2-400=0$, $x1 = 100$; $x2 = 300$, $30x1+60x2-21\,000=0$

Вычислим значение целевой функции в этой точке:

$f(X)= 90x1+120x2=90\cdot 100 + 120\cdot 300 = 45000$.

Аналогично поступим для других точек, являющихся вершинами области ABCDO, представляющей собой область допустимых решений рассматриваемой ЗЛП. Координаты этих вершин имеют следующие значения: т. A(0;350), т. B(100;300), т.C(200;200), т. D(300;0), т. O(0;0).
Этап 2. Приравняем целевую функцию постоянной величине a: $90x1+120x2 = a$.
Это уравнение является множеством точек, в котором целевая функция принимает значение, равное a. Меняя значение a, получим семейство параллельных прямых, каждая из которых называется линией уровня.
Пусть a=0, вычислим координаты двух точек, удовлетворяющих соответствующему уравнению $90x1+120x2 = 0$. В качестве одной из этих точек удобно взять точку O(0;0), а так как при $x1 = 4$, $x2 = -3$ то в качестве второй точки возьмем точку G(4;-3). Через эти две точки проведем линию уровня $f(X)= 90x1+120x2 = 0$.
Этап 3. Для определения направления движения к оптимуму построим вектор-градиент, координаты которого являются частными производными функции f(X), т.е. (90;120) Чтобы построить этот вектор, нужно соединить точку (90;120) с началом координат. При максимизации целевой функции необходимо двигаться в направлении вектора-градиента, а при минимизации — в противоположном направлении.
В нашем случае движение линии уровня будем осуществлять до ее пересечения с точкой B, далее она выходит из области допустимых решений. Следовательно, именно в этой точке достигается максимум целевой функции. Отсюда легко записать решение исходной ЗЛП: max f(X) =45000 и достигается при $x1 = 100$, $x2=300$. Следовательно, чтобы получить максимальную прибыль, фермер должен засеять 100 га земли кукурузой, 300 га – соей. При этом он получит 45 тыс. ден. ед. при реализации зерна по договору.
Если поставить задачу минимизации функции $f(X) = 90x1+120x2$ при тех же ограничениях, линию уровня необходимо смещать параллельно самой себе в направлении, противоположном вектору-градиенту. В нашем случае минимум функции будет в точке O(0;0). Это означает, что фермер не получит ни чего, если не засеет поле зерновыми культурами.



Задача 2 Предприятие выпускает два вида продукции используя три вида ресурсов. Приняты обозначения:

А – матрица норм затрат сырья;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

В – запасы ресурсов; $B = (в_1 \quad в_2 \quad в_3)$

С – прибыль на единицу продукции $C = (c_1 \quad c_2)$

С помощью следующих данных составить математическую модель. Определить план выпуска изделий, обеспечивающих максимальную прибыль с помощью графического метода.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 90 \\ 120 \\ 40 \end{bmatrix}; \qquad C = (5;2)$$

Решение задачи.

Обозначим через x1 количество единиц продукции первого вида, а через x2 – количество единиц продукции второго. Тогда, учитывая количество единиц сырья, расходуемое на изготовление продукции, а так же запасы сырья, получим систему ограничений:

x1+3*x2<=90
4*x1+2*x2<=120
x1+x2<=40
x1,x2 >=0; - условие неотрицательности переменных.

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x1 и x2. Реализация x1 единиц продукции первого вида и x2 единиц продукции второго дает соответственно 5x1 и 2x2 ден. ед. прибыли, суммарная прибыль С = 5x1 + 2x2. Условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому x1 и x2 (план выпуска продукции) могут быть и дробными числами. Требуется найти такие x1 и x2, при которых функция С достигает максимум, т.е. найти максимальное значение линейной функции С = 5x1 + 2x2 при ограничениях.

Математическая модель задачи: Cmax = 5x1 + 2x2

Система ограничений:

x1+3x2<=90
4x1+2x2<=120
x1+x2<=40
x1,x2 >=0; - условие неотрицательности переменных.

Решение задачи с использованием графического симплекс-метода.
Построим систему координат и проведем прямые ограничивающие область допустимых решений (ОДР), построив их, соответственно, по неравенствам системы ограничений. Чтобы построить прямую нужно знать координаты двух точек. Координаты точек прямых соответствующих неравенствам:

Неравенство	x11	x21	x12	x22
x1+3x2<=90	90	0	0	30
4x1+2x2<=120	30	0	0	60
x1+x2<=40	40	0	0	40

Построим вектор целевой функции C(5;2). Система координат с областью допустимых решений OABCD и вектором целевой функции C приведена на рис.

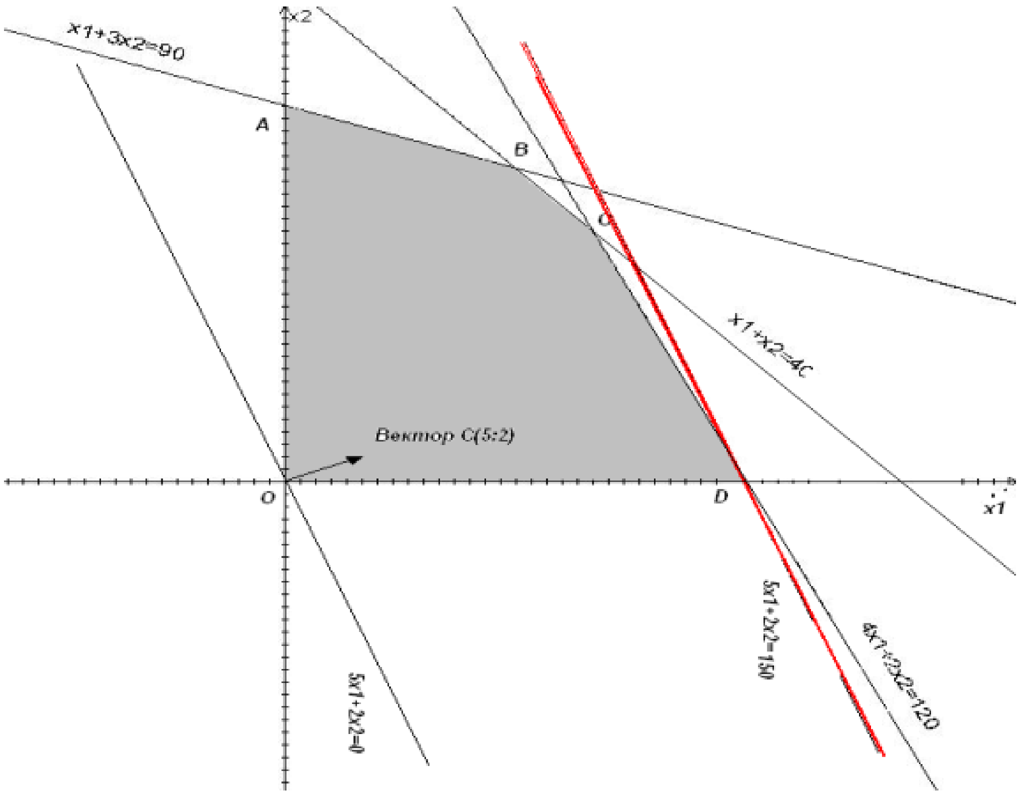


Рис. График области допустимых решений.
Построим линию уровня 5x1+2x2 = 0, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору C (5;2). Будем передвигать ее в направлении вектора C, в результате чего находим точку, в которой функция принимает максимальное значение – точку D. При дальнейшем перемещении она уже не будет иметь общих точек с областью допустимых решений OABCD. Точка D имеет координаты (30;0). Cmax = 5*30+2*0=150
Ответ: Для того чтобы получить максимальную прибыль в размере 150 ден. ед., необходимо запланировать производство 30 ед. продукции первого вида, а продукцию второго вида не выпускать совсем.
Решение задачи с использованием метода симплекс-таблиц.
Задача 1. Приведем математическую модель задачи к каноническому виду, избавившись от неравенств посредством ввода дополнительных переменных:
Целевая функция:
C max = 5x1+2x2+0x3+0x4+0x5
Система ограничений:
x1+3x2+x3=90
4x1+2x2+x4=120

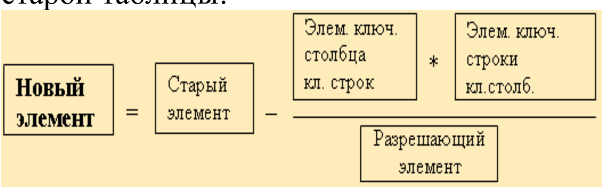
x1+x2+x5=40
Проведем векторный анализ системы ограничений. Выберем единичные вектора, позволяющие получить систему координат и указать в ней координаты одной из вершин симплекса.
P0 - вектор свободных коэффициентов
Pi - вектор коэффициентов при переменной xi
Расширенная целевая функция: C max = 5x1+2x2+0x3+0x4+0x5
Вектора:

P0	P1(x1)	P2(x2)	P3(x3)	P4(x4)	P5(x5)
90	1	3	1	0	0
120	4	2	0	1	0
40	1	1	0	0	1

Базисными могут быть только единичные вектора. Базис:
Базисный вектор №1: P3(x3)
Базисный вектор №2: P4(x4)
Базисный вектор №3: P5(x5)
Заполним первую таблицу:

№	Базис	Коэффициенты при базисе	P0	5	2	0	0	0
				P1	P2	P3	P4	P5
1	P3	0	90	1	3	1	0	0
2	P4	0	120	4	2	0	1	0
3	P5	0	40	1	1	0	0	1
C max =			0	-5	-2	0	0	0

При просмотре последней (индексной) строки среди коэффициентов этой строки (исключая столбец свободных членов) находим наименьшее отрицательное число: -5 (первый столбец - ключевой).
Просматривая первый столбец таблицы (ключевой) выбираем среди положительных коэффициентов столбца тот, для которого абсолютная величина отношения соответствующего свободного члена (находящегося в столбце свободных членов) к этому элементу минимальна – 4. Этот коэффициент называется разрешающим, а строка, в которой он находится ключевой;
Замещаемый базисный вектор: P4 (2-я строка)
Новый базисный вектор: P1 (1-й столбец)
Заменяем базисный вектор P4 на P1.
Строим новую таблицу, содержащую новые названия базисных переменных, для этого:
- разделим каждый элемент ключевой строки (исключая столбец свободных членов) на разрешающий элемент и полученные значения запишем в строку с измененной базисной переменной новой симплекс таблицы.
- строка разрешающего элемента делится на этот элемент и полученная строка записывается в новую таблицу на то же место.
- в новой таблице все элементы ключевого столбца = 0, кроме разрезающего, он всегда равен 1.
- столбец, у которого в ключевой строке имеется 0,в новой таблице будет таким же.
- строка, у которой в ключевом столбце имеется 0,в новой таблице будет такой же.
- в остальные клетки новой таблицы записывается результат преобразования элементов старой таблицы:



В результате получили новую симплекс-таблицу, отвечающую новому базисному решению:

№	Базис	Коэффициенты при базисе	P0	5	2	0	0	0
				P1	P2	P3	P4	P5
1	P3	0	60	0	2.5	1	-0.25	0
2	P1	5	30	1	0.5	0	0.25	0
3	P5	0	10	0	0.5	0	-0.25	1
C max =		150	0	0.5	0	1.25	0	

Просматривая строку целевой функции (индексную), видим, что в ней нет отрицательных значений, значит, оптимальное решение получено.

Из таблицы получим значения переменных целевой функции:

x1	x2	x3	x4	x5
30	0	60	0	10

Целевая функция: С max = 5*30+2*0

Ответ: Для того чтобы получить максимальную прибыль в размере 150 ден. ед., необходимо запланировать производство 30 ед. продукции первого вида, а продукцию второго вида не выпускать совсем (ответ совпадает с ответом, полученным графическим методом).

Задача 2. С.\ х. предприятие производит и продаёт продукцию двух видов: «1 Продукт» и «2 Продукт». Для производства продукции используются ресурсы двух категорий: А и В. Расходы ресурсов А и В на производство единицы продукции каждого вида, запасы продуктов и цены продуктов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Ресурсы	Расход ресурсов на ед. продукции		Запасы ресурсов
	1 Продукт	2 Продукт	
А	1	2	3
В	3	1	3
Количество продукции	x_1	x_2	
Цены	2(ден. ед.)	1(ден. ед.)	

Выяснить, какое количество продукции каждого вида надо производить предприятию (составить план производства), чтобы получить максимум прибыли.

Задание.

1. Составить математическую модель задачи.
2. Решить задачу в Excel.

Решение. 1. Составить математическую модель задачи. Для составления математической модели задачи прежде всего введём переменные (неизвестные) задачи: x_1- количество продукции 1-го вида, а x_2 - количество продукции 2-го вида, производимые предприятием.

Ограниченность запасов ресурсов приводит к ограничениям на x_1 и x_2: ограничения на расход ресурса А $x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 3$,

ограничения на расход ресурса В $3 \cdot x_1 + x_2 \le 3$.
Кроме того, $x_1, x_2 \ge 0$.

Качество решения задачи определяется с помощью целевой функции задачи $Z(x_1, x_2)$ - функции, определяющей доход предприятия от продажи продукции: $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$.
Задача об определении плана производства продукции свелась к следующей математической задаче: найти вектор (x_1, x_2) (план производства), координаты которого удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 3 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

и условиям неотрицательности $x_1, x_2 \ge 0$, который доставляет максимум целевой функции $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$.
Эту математическую задачу принято записывать в виде

$$Z = 2 \cdot x_1 + x_2 \to \max \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 3 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 \le 3 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad (3)$$

и называть математической моделью данной производственной задачи.

Подобные задачи называются задачами линейного программирования. Они изучаются в разделе математики, называемом математическим программированием. Так как переменные x_1 и x_2 входят в систему ограничений (2) и целевую функцию Z (1) линейно, то эту задачу математического программирования называют задачей линейного программирования.

Множество точек декартовой плоскости (x_1, x_2), координаты которых удовлетворяют системе ограничений (2) и условиям неотрицательности (3), называется областью допустимых решений задачи линейного программирования (областью допустимых планов). В данной задаче она представляет собой выпуклый четырёхугольник.

Значения x_1^* и x_2^* из области допустимых планов, при которых Z принимает наибольшее значение в этой области, называются оптимальными(оптимальный план), а соответствующее наибольшее значение $Z^* = 2 \cdot x_1^* + x_2^*$ является оптимальным значением прибыли. Таким образом, задача о распределении ресурсов является задачей оптимизации, и её математической моделью служит задача линейного программирования, заключающаяся в поиске оптимального плана и оптимального значения целевой функции.

Задачей оптимизации может быть поиск наименьшего значения.

2. Решение задачу в Excel.

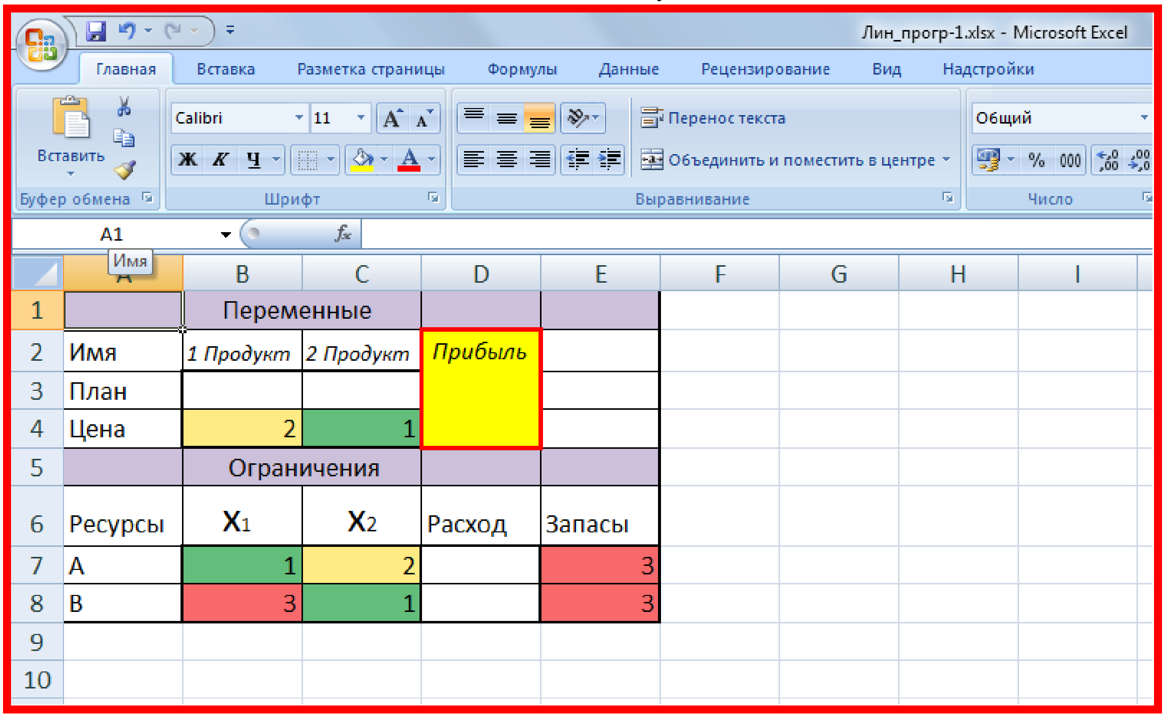
Ввод данных и формул в таблицу Excel. Открыть Книгу Excel, Лист1.

-Объединим ячейки B1 и C1. Для этого выделить ячейки, нажать правую кнопку мыши. В появившемся окне вызвать «Формат ячеек», затем «Выравнивание» и поставить галочку против опции «объединение ячеек», нажать ОК. В объединённые ячейки впишем заголовок «Переменные».

-В ячейку A2 вписать «Имя», в A3- «План», в ячейку A4 «Цена», в B2- «1 Продукт», в C2- «2 Продукт», в D2 « Прибыль».

-В ячейки B4 и C4 заносятся значения цен на продукцию.

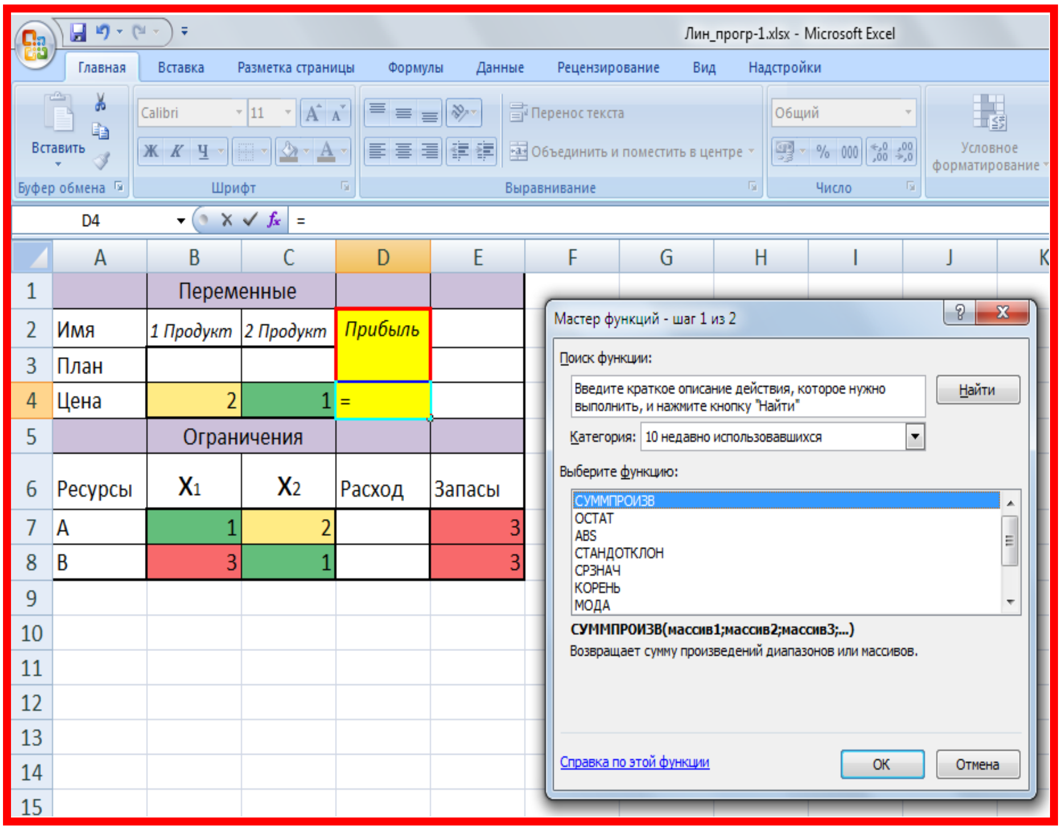
-Для переменных x_1 и x_2 отводятся ячейки B3 и C3. Это изменяемые (рабочие) ячейки, В них исходные данные не заносятся и в результате решения задачи в эти ячейки будут вписаны оптимальные значения. Таблица данных будет иметь вид

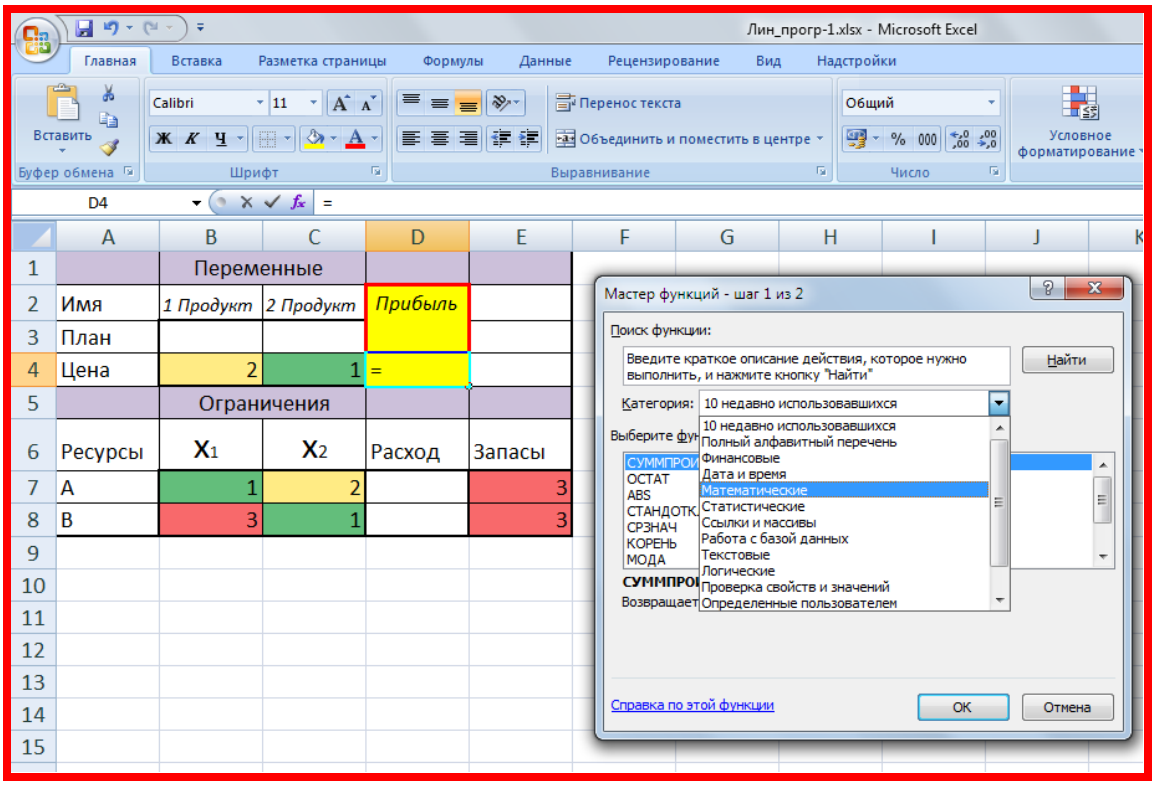


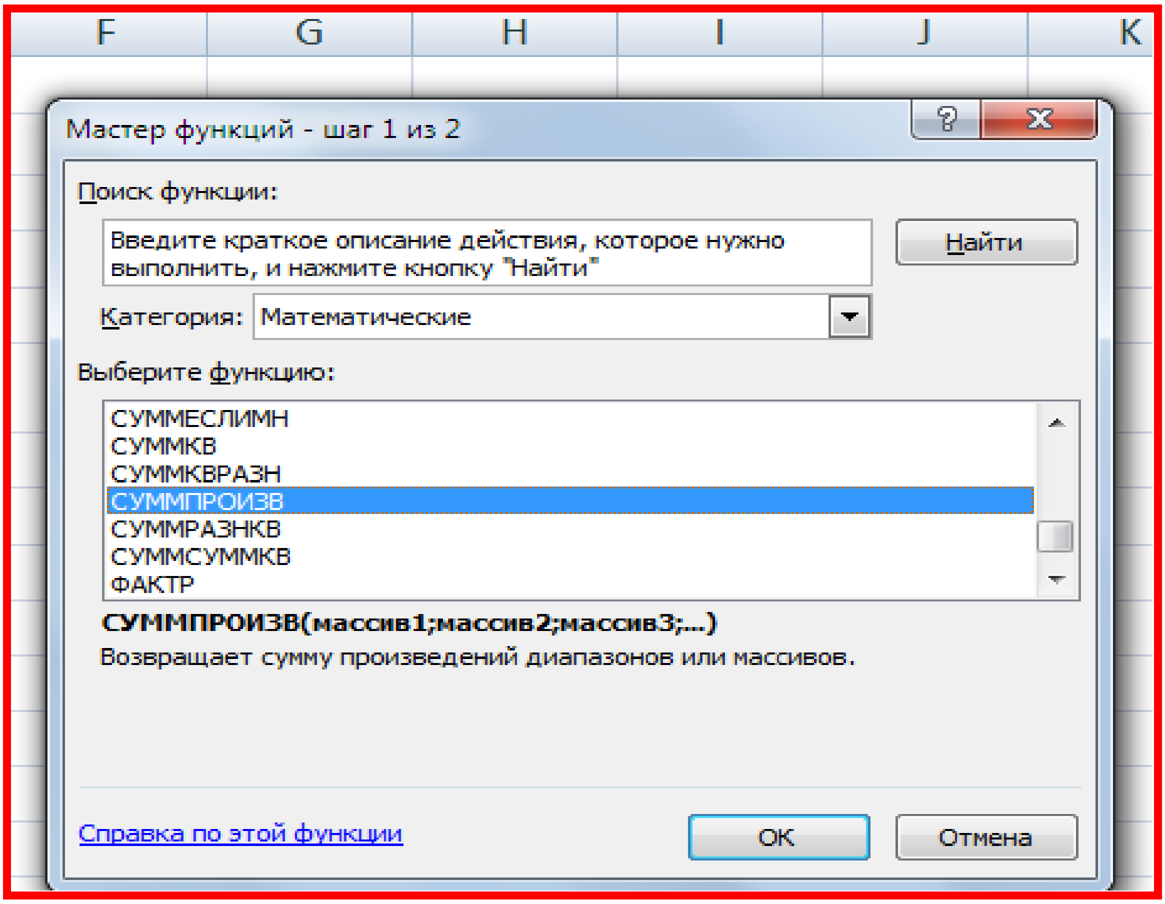
	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2	Имя	*1 Продукт*	*2 Продукт*	*Прибыль*	
3	План				
4	Цена	2	1		
5		Ограничения			
6	Ресурсы	X_1	X_2	Расход	Запасы
7	A	1	2		3
8	B	3	1		3
9					
10					

-В ячейке D4 после окончания решения задачи будет указана оптимальное значение прибыли(целевая ячейка). С этой целью в ячейку D4 вводится формула для вычисления значений целевой функции $Z = 2 \cdot x_1 + x_2$. Для этого надо выполнить следующие операции:
1) курсор в D4, выделить эту ячейку,

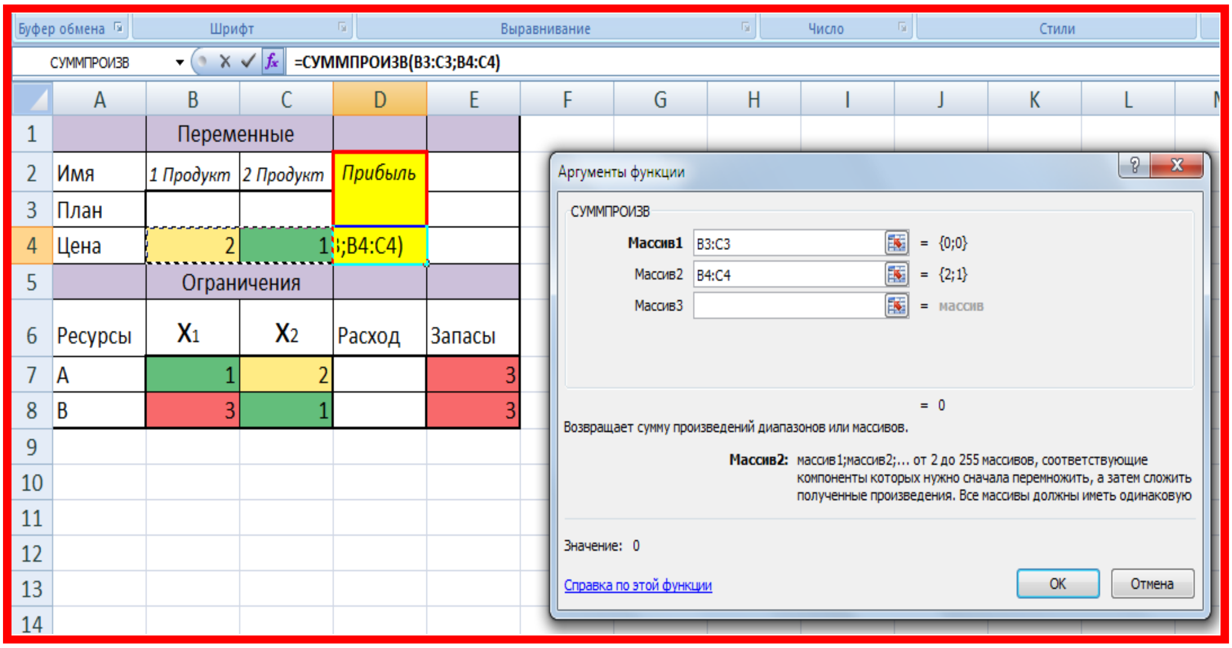
2) щёлкнув по кнопке f_x вызвать Мастера функций, в открывшемся окне в категории «10 недавно использовавшихся» выбрать «Математические», а затем «СУММПРОИЗВ», ОК.

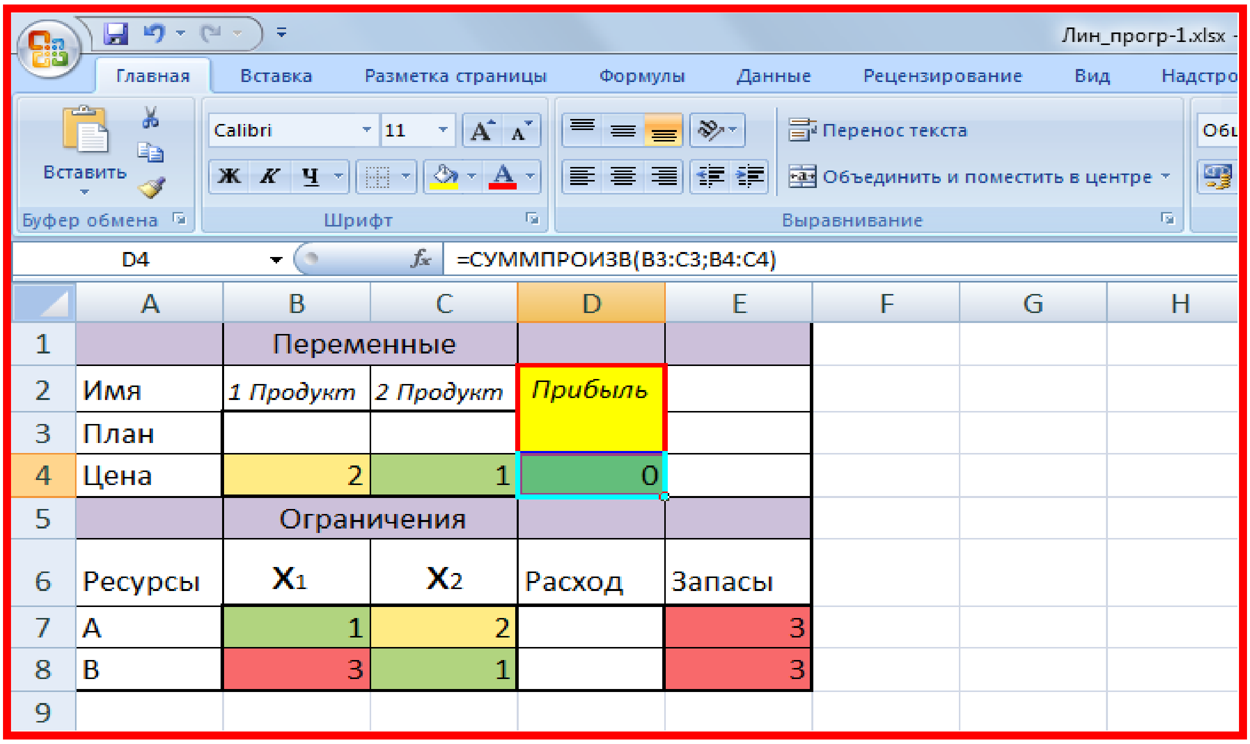

Лин_порог-1.xlsx - Microsoft Excel
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Надстройки
Вставить
Буфер обмена
Calibri
11
Шрифт
Перенос текста
Объединить и поместить в центре
Выравнивание
Общий
Число
Условное форматирование
D4
=
Переменные
Имя
1 Продукт
2 Продукт
Прибыль
План
Цена
2
1
=
Ограничения
Ресурсы
X1
X2
Расход
Запасы
A
1
2
3
B
3
1
3
Мастер функций - шаг 1 из 2
Поиск функции:
Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"
Найти
Категория:
10 недавно использовавшихся
Выберите функцию:
СУММПРОИЗВ
ОСТАТ
ABS
СТАНДОТКЛОН
СРЗНАЧ
КОРЕНЬ
МОДА
СУММПРОИЗВ(массив1;массив2;массив3;...)
Возвращает сумму произведений диапазонов или массивов.
Справка по этой функции
ОК
Отмена


Лин_порог-1.xlsx - Microsoft Excel
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Надстройки
Вставить
Буфер обмена
Calibri
11
Шрифт
Перенос текста
Объединить и поместить в центре
Выравнивание
Общий
Число
Условное форматирование
D4
=
Переменные
Имя
1 Продукт
2 Продукт
Прибыль
План
Цена
2
1
=
Ограничения
Ресурсы
X1
X2
Расход
Запасы
A
1
2
3
B
3
1
3
Мастер функций - шаг 1 из 2
Поиск функции:
Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"
Найти
Категория:
10 недавно использовавшихся
10 недавно использовавшихся
Полный алфавитный перечень
Финансовые
Дата и время
Математические
Статистические
Ссылки и массивы
Работа с базой данных
Текстовые
Логические
Проверка свойств и значений
Определенные пользователем
ОСТАТ
ABS
СРЗНАЧ
КОРЕНЬ
МОДА
Справка по этой функции
ОК
Отмена



В появившемся окне «Аргументы функции» в поле «Массив 1» ввести адреса изменяемых ячеек B3:C3(протаскивая курсор мыши по ячейкам), в поле «Массив 2» вводятся адреса ячеек с ценами на продукцию B4:C4, «Массив 3» игнорируется. Нажать ОК. В ячейке D4 появится число 0.



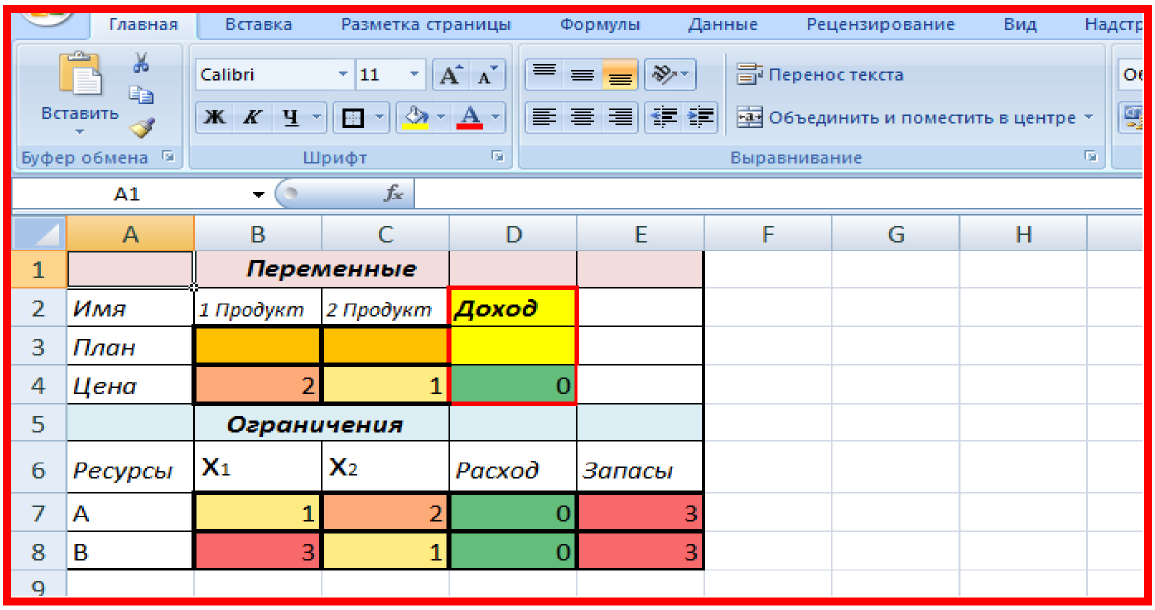


	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Переменные						
2	Имя	*1 Продукт*	*2 Продукт*	*Прибыль*				
3	План							
4	Цена	2	1	0				
5		Ограничения						
6	Ресурсы	X_1	X_2	Расход	Запасы			
7	A	1	2		3			
8	B	3	1		3			
9								

-Объединить ячейки B5 и C5 и вписать «Ограничения», в A6- «Ресурсы», в B6 и C6 x_1 и x_2, в D6 «Расход», в E6 «Запасы», A7 и A8 значки ресурсов,
в поле B7:C8- нормы расхода ресурсов.

-В ячейку D7 вводится формула вычисления израсходованного ресурса A $x_1 + 2 \cdot x_2$, в ячейку D8- формула израсходованного ресурса B $3 \cdot x_1 + x_2$
(также, как и формула целевой функции).
- В ячейки E7 и E8 вносим размеры запасов ресурсов.

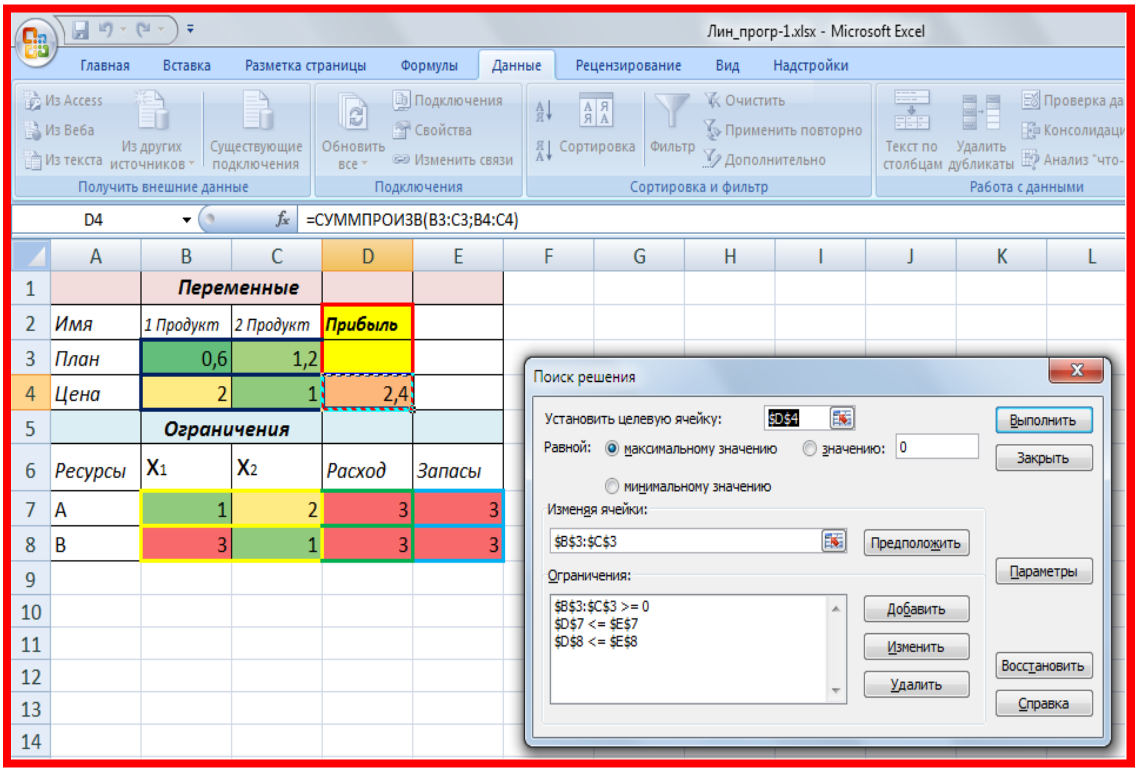
Данные и формулы введены. Интерфейс задачи будет иметь вид



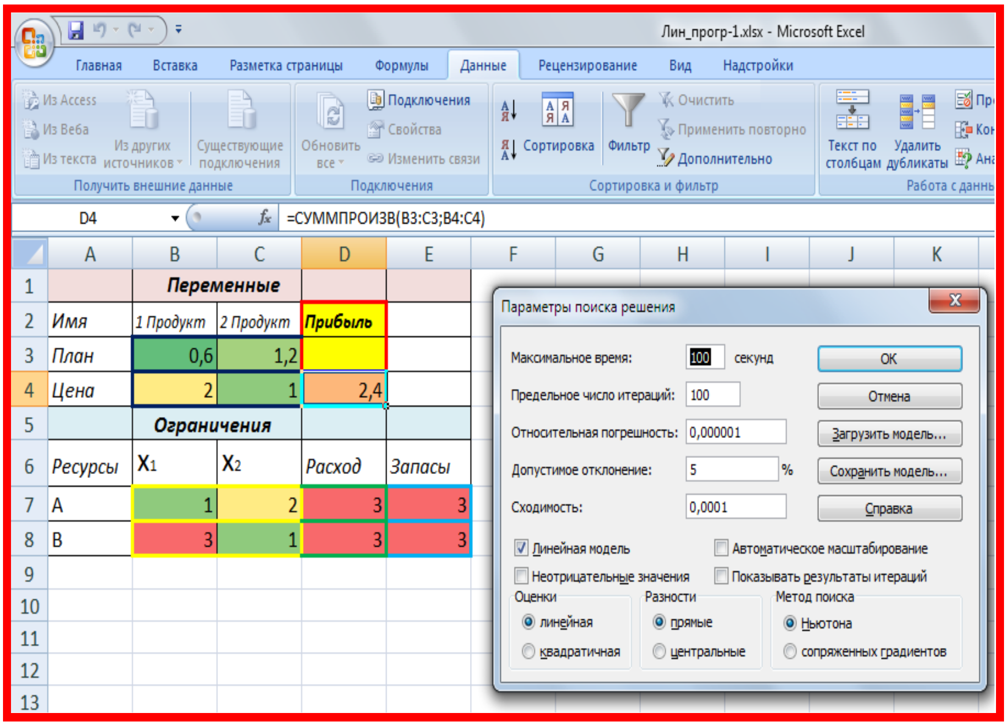
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		***Переменные***						
2	*Имя*	*1 Продукт*	*2 Продукт*	***Доход***				
3	*План*							
4	*Цена*	2	1	0				
5		***Ограничения***						
6	*Ресурсы*	X_1	X_2	*Расход*	*Запасы*			
7	A	1	2	0	3			
8	B	3	1	0	3			
9								

Использование надстройки Excel «Поиск решения».

Надстройка Excel «Поиск решения» при первом использовании должна быть предварительно активирована. Открыв Excel, нажать кнопки «Office» → «Параметры Excel» → «Надстройки» → «Неактивные надстройки приложений» → выделить строку «Поиск решения» → «Управление: надстройки Excel» → «перейти» → ОК.
Щёлкнув на ленте кнопку «Данные», затем «Поиск решений» откроем окно «Поиск решений».

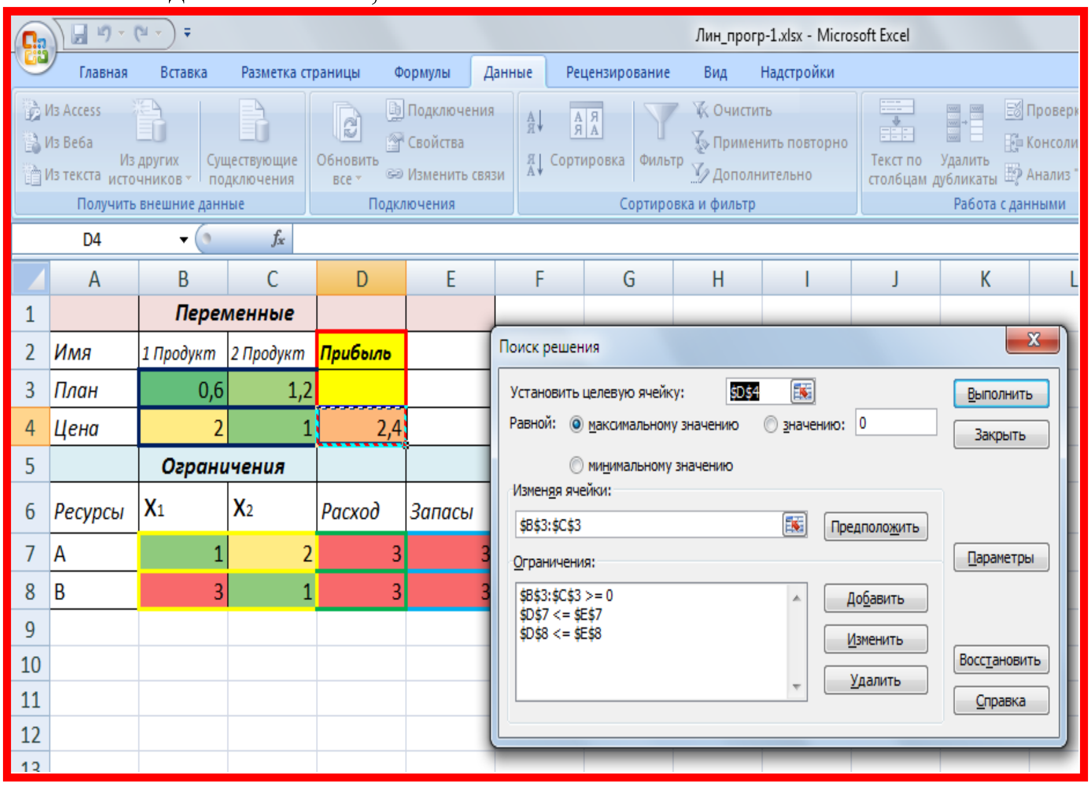


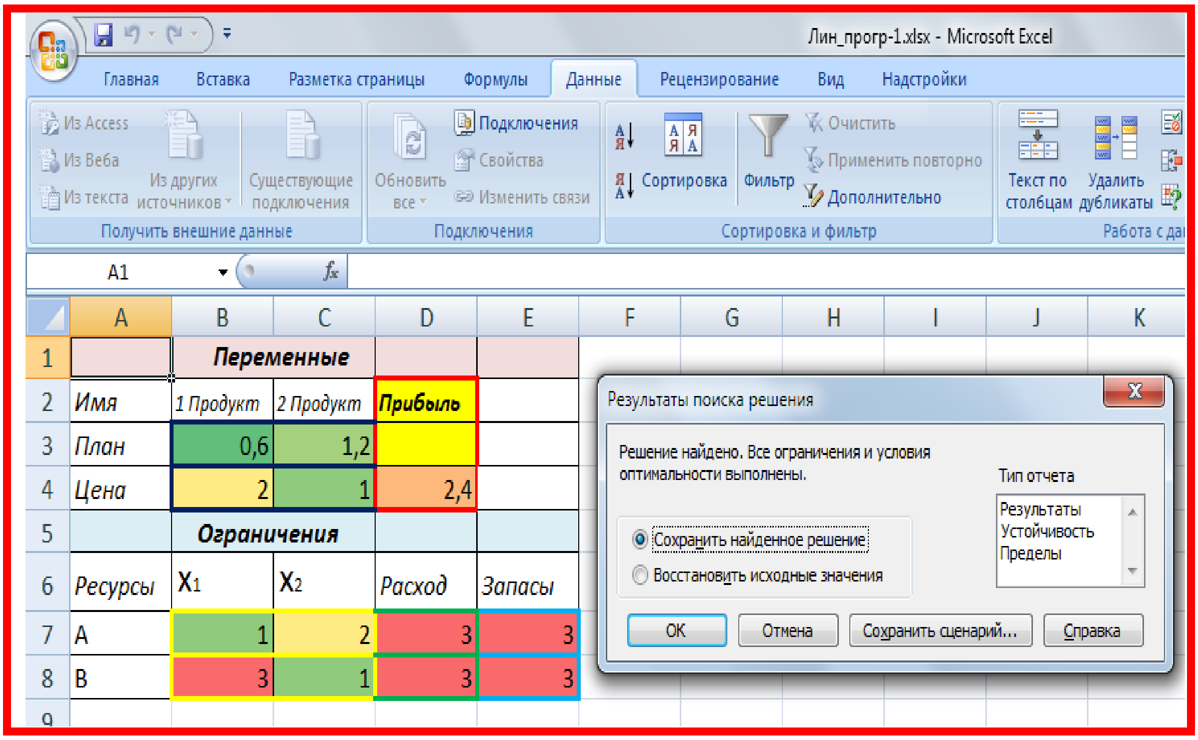
-В поле «Установить целевую ячейку» ввести адрес целевой ячейки D4, щёлкнув по ней курсором мыши.
-Выбрать «равной максимальному значению».
-В поле «изменяя ячейки» указать адреса B3:C3.
-В поле «Ограничения» щёлкнуть «Добавить». После появления поля «Добавление ограничения» в поле «Ссылка на ячейку:» сделать ссылку на ячейку D7, выбрать знак <=, в поле «Ограничение:» ввести адрес ячейки с запасом ресурса А- E7. Вновь выбрать «Добавить» провести ввод ограничения по ресурсу В, затем по ограничению $x_1, x_2 \geq 0$. После этого нажать ОК.
Настройка параметров решения задачи.
Выбрав в окне «Поиск решений» опцию «Параметры» в появившемся окне «Параметры поиска решения»установить флажок в поле «Линейная модель». При таком выборе при решении задачи будет использоваться симплекс-метод. Остальные значения можно оставить без изменения. Нажать ОК.



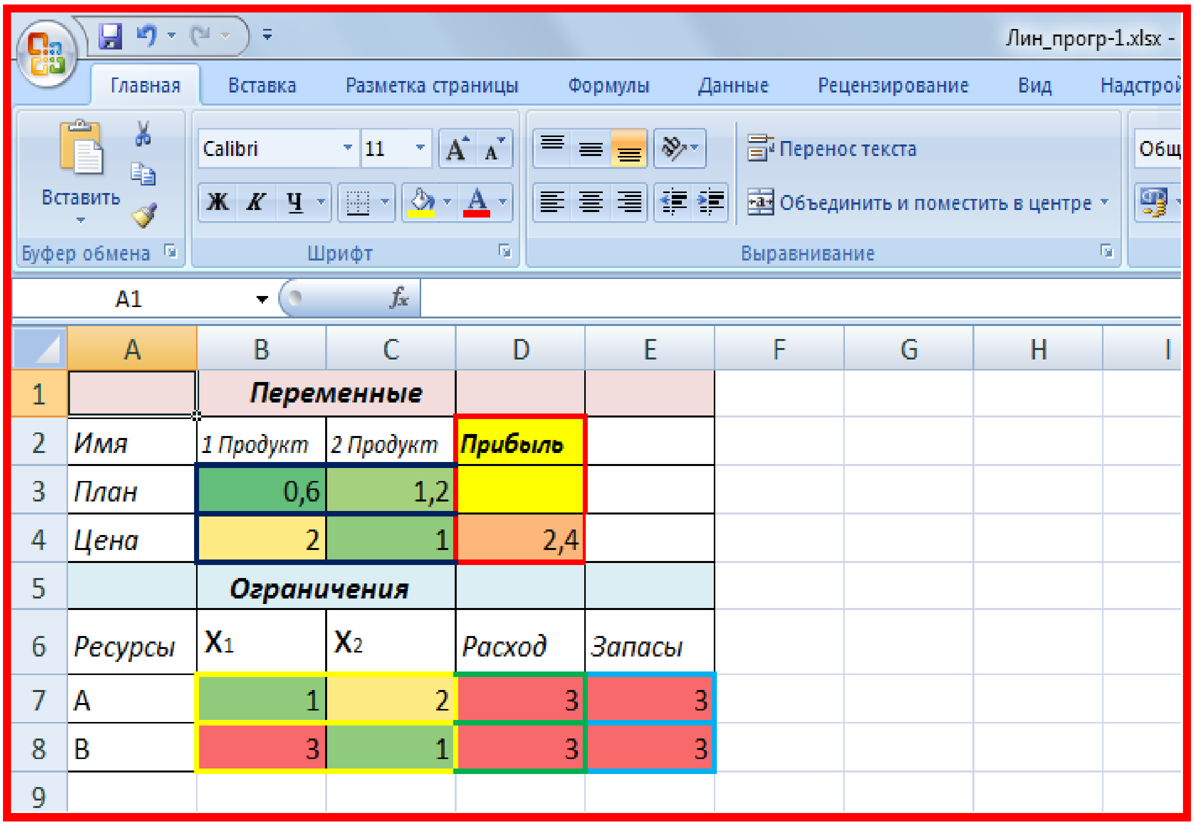
Завершение решения задачи и просмотр результатов.

В окне «Поиск решений» нажимаем кнопку «Выполнить». Появляется окно «Результаты поиска решения». Можно выбрать тип отчёта, сохранить найденное решение или восстановить исходные значения, ОК.





В ячейках B3 и C3 появятся оптимальные значения плана 0,6 и 1,2, а в ячейке D4 оптимальное значение прибыли 2,4. Задача решена.



Задача. Составляется комбинированный корм из трёх злаков: кукурузы, овса и ржи. Калорийность и содержание витамина С в одном килограмме каждого злака, а также цена одного кг каждого злака указаны в таблице:

	Кукуруза	Овёс	Рожь
Калорийность(ккал)	200	175	100
Содержание С (в Гр)	5	1	3
Цена (руб.)	6	4	1

Составить наиболее дешёвый комбинированный корм, 1кг которого содержал бы не менее 125 ккал и не менее 2г витамина С.

Решение.

1. Составление математической модели задачи. Обозначим содержание кукурузы, овса и ржи в 1кг комбикорма через x_1, x_2, x_3 соответственно, а стоимость злаков в комбикорме Z. Тогда математическая модель задачи об оптимизации производства комбикорма формулируется следующим образом: найти вектор $X = x_1; x_2; x_3$ (называемый планом), доставляющий минимум целевой функции задачи (функции затрат)

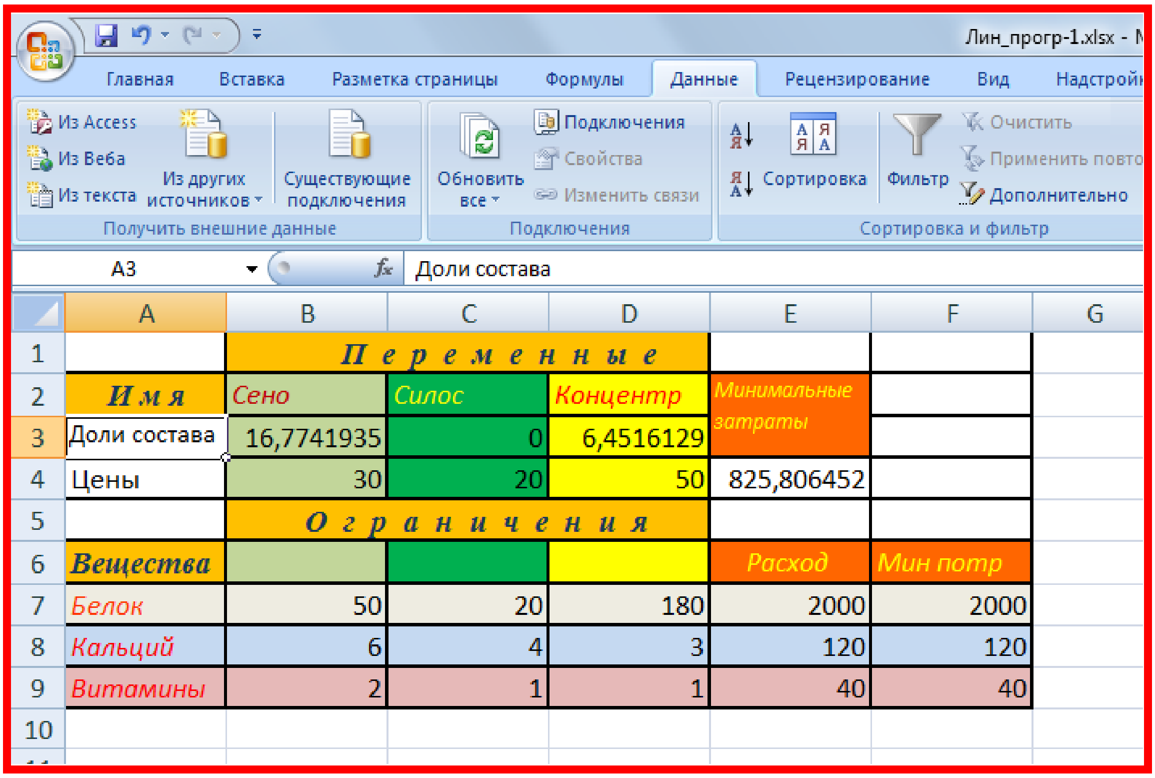
$$Z = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 \rightarrow \min ,$$

координаты которого x_1, x_2, x_3 удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} 200 \cdot x_1 + 175 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 \geq 125, \\ 5 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0.\ x_2 \geq 0.\ x_3 \geq 0 .$$

2. Решение задачи в Excel.



2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- ознакомились с основными понятиями линейного, математического программирования, теории двойственности, основными теоремами и свойствами моделей ЗЛП;
- усвоили теоретические основы симплекс метода;
- выработали навыки применения графического метода решения ЗЛП, симплекс- метода.

2.2 Практическое занятие 2-3 (4 часа)

Тема: «Постановка задач линейного программирования транспортного типа. Базовая транспортная модель. Методы решения задач транспортного типа»

2.2.1 Задание для работы:

1. Метод северо-западного угла. Метод учета наименьшей поставки.
2. Циклы, оценки циклов, оценки клеток. Перераспределение поставок в цикле.
3. Методика получения оптимального распределения поставок.
4. Программное обеспечение решения задач транспортного типа на ПК

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Задача 1. В регионе расположено несколько НГДУ, обеспечивающих определённые объёмы добычи нефти, которая поступает в НПЗ, расположенные в различных регионах страны и имеющие различные производственные мощности. В силу разноудалённости потребителей от НГДУ затраты на транспортировку нефти различаются.
В задаче необходимо составить план закрепления поставщиков за потребителями, который учитывает, по возможности, наиболее полное удовлетворение потребителей НПЗ и при этом обеспечивает минимальные затраты на транспортировку нефти.
Введены условные обозначения:
i – индекс НГДУ, i=1,m
m – общее число НГДУ в регионе
j – индекс НПЗ, j=1,n
n – общее число НПЗ.
Известно:
a_i - объёмы добычи нефти в i-ом НГДУ, тыс.т.;
b_j - потребность j-го НПЗ в нефти, тыс.т.;
c_{ij} - издержки на транспортировку 1000 т. нефти, тыс. руб.

b_j a_i	180	190	110	210	200	120
490	5	7	8	4	6	9
270	7	2	5	8	6	7
380	5	4	7	6	9	8

Модель задачи. В качестве неизвестных задачи принимаются переменные x_{ij}, означающие объём перевозок нефти i-го НГДУ к j-му НПЗ. В качестве коэффициентов целевой функции выступают издержки на перевозку 1000 т. нефти. Целевая функция минимизируется. Модель задачи записывается в общем виде, при этом необходимо учесть, что по исходным данным задача является открытой.
Имеем транспортную задачу с избытком запасов:
$\sum ai > \sum bj$ (где i=1..m ; j=1..n).
490+270+380>180+190+110+210+200+120
1140>1010 C max = 150;

Требуется найти такой план перевозок (X), при котором все заявки будут выполнены, а общая стоимость перевозок минимальна. Очевидно, при этой постановке задачи некоторые условия-равенства транспортной задачи превращаются в условия-неравенства, а некоторые — остаются равенствами.

n

$\sum$ Xi,j ? ai (i=1, ... , m);

j=1

m

$\sum$ Xi,j = bj (j=1, ... , n).

i=1

Мы получаем следующую задачу:

x11+x12+x13+x14+x15+x16 <= 490

x21+x22+x23+x24+x25+x26 <= 270

x31+x32+x33+x34+x35+x36 <= 380

x11+x21+x31 = 180

x13+x23+x33 = 190

x14+x24+x34 = 110

x12+x22+x32 = 210

x15+x25+x35 = 200

x16+x26+x36 = 120

xij $\geq$ 0 для i = 1,2,3; j = 1,2,3,4,5,6;

Kmin=5x11+7x12+8x13+4x14+6x15+9x16+7x21+2x22+5x23+8x24+6x25+7x26+5x31+4x32+7x33+ +6x34+9x35+8x36;

Решение задачи.

Данную транспортную задачу необходимо решить методом потенциалов. Поскольку по исходным данным имеем открытую задачу, то до начала её решения следует получить закрытую модель.

Для этого, сверх имеющихся n пунктов назначения B1, B2, ... , Bn, введём ещё один, фиктивный, пункт назначения Bn+1, которому припишем фиктивную заявку, равную избытку запасов над заявками

bn+1 = $\sum$ ai - $\sum$ bj , b7 = 1140 – 1010= 130, а стоимость перевозок из всех пунктов отправления в фиктивный пункт назначения b7 будем считать равным нулю. Введением фиктивного пункта назначения Bn+1 с его заявкой bn+1 мы сравняли баланс транспортной задачи и теперь его можно решать как обычную транспортную задачу с правильным балансом.

Первоначальный опорный план поставок построим на основе метода северо-западного угла:

bjai	180	190	110	210	200	120	130
490	180	119 0	111 0	10			
270	7	2	5	8 200	6 70	7	
380					113 0	120	130

Стоимость перевозок по данному плану составляет: 7300 тыс. руб.

Решим задачу с применением метода потенциалов.

Для этого плана можно определить платежи (αi и βj), так, чтобы в каждой базисной клетке выполнялось условие : αi + βj = ci,j (*)

Уравнений (*) всего m + n - 1, а число неизвестных равно m + n. Следовательно, одну из этих неизвестных можно задать произвольно (например, равной нулю). После этого из m

+ n - 1 уравнений (*) можно найти остальные платежи αi, βj, а по ним вычислить псевдостоимости: $ui,j= \alpha i + \beta j$ для каждой свободной клетки.
Если оказалось, что все эти псевдостоимости не превосходят стоимостей ui,j □ ci,j ,
то план потенциален и, значит, оптимален. Если же хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость больше стоимости (как в нашем примере), то план не является оптимальным и может быть улучшен переносом перевозок по циклу, соответствующему данной свободной клетке. Цена этого цикла ровна разности между стоимостью и псевдостоимостью в этой свободной клетке.

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 5 180	7 7 190	8 8 110	4 4 10	6 2	9 1	0 -7	0
270	7 9	2 11	5 12	8 8 200	6 6 70	7 5	0 -3	4
380	5 12	4 14	7 15	6 11	9 9 130	8 8 120	0 0 130	7
□i	5	7	8	4	2	1	-7	

Мы получили в семи клетках иi,j □ ci,j , теперь можно построить цикл в любой из этих клеток. Выгоднее всего строить цикл в той клетке, в которой разность иi,j̃ ci,j максимальна. В нашем случае для построения цикла берем клетку (3,2):

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 5 180	7 -130 7 190	8 8 110	4 +130 4 10	6 2	9 1	0 -7	0
270	7 9	2 11	5 12	8 -130 8 200	6 +130 6 70	7 5	0 -3	4
380	5 12	4 +130 14	7 15	6 11	9 -130 9 130	8 8 120	0 0 130	7
□i	5	7	8	4	2	1	-7	

Теперь будем перемещать по циклу число 130, так как оно является минимальным из чисел, стоящих в клетках, помеченных знаком -. При перемещении мы будем вычитать 130 из клеток со знаком - и прибавлять к клеткам со знаком + .
После этого необходимо подсчитать потенциалы αi и βj и цикл расчетов повторяется:
Стоимость перевозок по данному плану составляет: 6000 тыс. руб.

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 5 180	7 -60 7 60	8 8 110	4 +60 4 140	6 2	9 11	0 3	0
270	7 9	2 +60 11	5 12	8 -60 8 70	6 6 200	7 15	0 7	4

380	5 2	4 4 130	7 5	6 1	9 - 1	8 8 120	0 0 130	-3
□i	5	7	8	4	2	11	3	

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 5 180	7 - 2	8 -10 8 110	4 +10 4 200	6 2	9 2	0 - 6	0
270	7 9	2 2 60	5 +10 12	8 -10 8 10	6 6 200	7 6	0 - 2	4
380	5 11	4 4 130	7 14	6 10	9 8	8 8 120	0 0 130	6
□i	5	-2	8	4	2	2	-6	

Стоимость перевозок по данному плану составляет: 5460 тыс. руб.

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 5 180	7 5	8 -100 8 100	4 4 210	6 +100 9	9 9	0 1	0
270	7 2	2 2 60	5 +100 5 10	8 1	6 -100 6 200	7 6	0 - 2	-3
380	5 4	4 4 130	7 7	6 3	9 8	8 8 120	0 0 130	-1
□i	5	5	8	4	9	9	1	

Стоимость перевозок по данному плану составляет: 5390 тыс. руб.

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 -100 5 180	7 2	8 5	4 4 210	6 +100 6 100	9 6	0 - 2	0
270	7 5	2 +100 2 60	5 5 110	8 4	6 -100 6 100	7 6	0 - 2	0
380	5 +100 7	4 -100 4 130	7 7	6 6	9 8	8 8 120	0 0 130	2
□i	5	2	5	4	6	6	-2	

Стоимость перевозок по данному плану составляет: 5090 тыс. руб.

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 5 80	7 4	8 7	4 4 210	6 6 200	9 8	0 0	0

270	7 3	2 2 160	5 5 110	8 2	6 4	7 6	0 - 2	-2
380	5 5 100	4 4 30	7 7	6 4	9 6	8 8 120	0 0 130	0
□i	5	4	7	4	6	8	0	

Стоимость перевозок по данному плану составляет: 4890 тыс. руб. Псевдостоимости ui,j = $\alpha i + \beta j$ для всех свободных клеток не превышают стоимостей, план оптимален. Kmin=4890

Ответ: план закрепления поставщиков за потребителями, который учитывает, по возможности, наиболее полное удовлетворение потребителей НПЗ и при этом обеспечивает минимальные затраты на транспортировку нефти представлен ниже (Стоимость перевозок по данному плану составляет 4890 тыс. руб.):

bjai	180	190	110	210	200	120	130
490	5 80	7	8	4 210	6 200	9	0
270	7	2 160	5 110	8	6	7	0
380	5 100	4 30	7	6	9	8 120	0 130

Используя данные предыдущей задачи, решить транспортную задачу, построив первоначальный опорный план поставок методом минимальной стоимости.

Решение задачи.

Первоначальный опорный план поставок построим на основе метода минимальной стоимости.

bjai	180	190	110	210	200	120	130
490	5	7	8	4 210	6 15 0	9	0 130
270	7	2 190	5 80	8	6	7	0
380	5 180	4	7 30	6	9 50	8 120	0

Стоимость перевозок по данному плану составляет: 5040 тыс. руб.

Применяем метод потенциалов.

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 2	7 1	8 4	4 4 210	6 +50 6 150	9 5	0 -50 0 130	0
270	7 3	2 2 190	5 5 80	8 5	6 7	7 6	0 1	1
380	5 5 180	4 4	7 7 30	6 7	9 -50 9 50	8 8 120	0 +50 3	3
□i	2	1	4	4	6	5	0	

bjai	180	190	110	210	200	120	130	αi
490	5 5	7 4	8 7	4 4 210	6 6 200	9 8	0 0 80	0
270	7 3	2 2 190	5 5 80	8 2	6 4	7 6	0 -	-2

							2	
380	5 5 180	4 4	7 7 30	6 4	9 6	8 8 120	0 0 50	0
□i	5	4	7	4	6	8	0	

Стоимость перевозок по данному плану составляет: 4890 тыс. руб. Псевдостоимости ui,j = αi + βj для всех свободных клеток не превышают стоимостей, план оптимален (стоимость совпадает с полученной стоимостью задачи №3, но план перевозок альтернативен).

Ответ: план закрепления поставщиков за потребителями, который учитывает, по возможности, наиболее полное удовлетворение потребителей НПЗ и при этом обеспечивает минимальные затраты на транспортировку нефти представлен ниже (Стоимость перевозок по данному плану составляет 4890 тыс. руб.):

Задача 2. Четыре отделения сельхозпредприятия B_1, B_2, B_3, B_4 закупают корма у трёх поставщиков A_1, A_2, A_3. Запасы кормов у поставщиков, потребности сельхозпредприятия в кормах и стоимость перевозки единицы продукта от поставщика к потребителю даны в таблице.

Потребители / Поставщики	Потребители				Запасы кормов у поставщиков
	B1	B2	B3	B4	
A1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	$a_1 = 15$
A2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	$a_2 = 25$
A3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	$a_3 = 5$
	$b_1 = 5$	$b_2 = 15$	$b_3 = 15$	$b_4 = 10$	45
	Потребность в кормах				

Значительную часть расходов с /х предприятия составляют именно транспортные расходы. Минимизировать расходы предприятия: составить такой план перевозок, при котором суммарные транспортные расходы будут минимальными, все запасы поставщиков будут вывезены, все потребности отделений с.\ х. предприятия будут удовлетворены.

1. Математическая модель задачи. Обозначим через x_{ij} количество кормов, перевозимое от поставщика A_i к потребителю B_j, c_{ij} - стоимость перевозок по этому маршруту, $i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4$.

Целевая функция: транспортные расходы на перевозку кормов вычисляются по формуле

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} \cdot x_{ij} = 10 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 20 \cdot x_{13} + 11 \cdot x_{14} +$$

$$+12 \cdot x_{21} + 7 \cdot x_{22} + 9 \cdot x_{23} + 20 \cdot x_{24} +$$

$$+0 \cdot x_{31} + 14 \cdot x_{32} + 16 \cdot x_{33} + 18 \cdot x_{34} \quad \to \min.$$

Ограничения на переменные задачи.

Ограничения вывоза: из A_1 $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 15$,

из A_2 $x_{21} + x_{22} + x_{13} + x_{14} = 25$, из A_3 $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=5$.

Ограничения ввоза: ввоз в B_1 $x_{11}+x_{21}+x_{31}=5$,

ввоз в B_2 $x_{12}+x_{22}+x_{32}=15$,

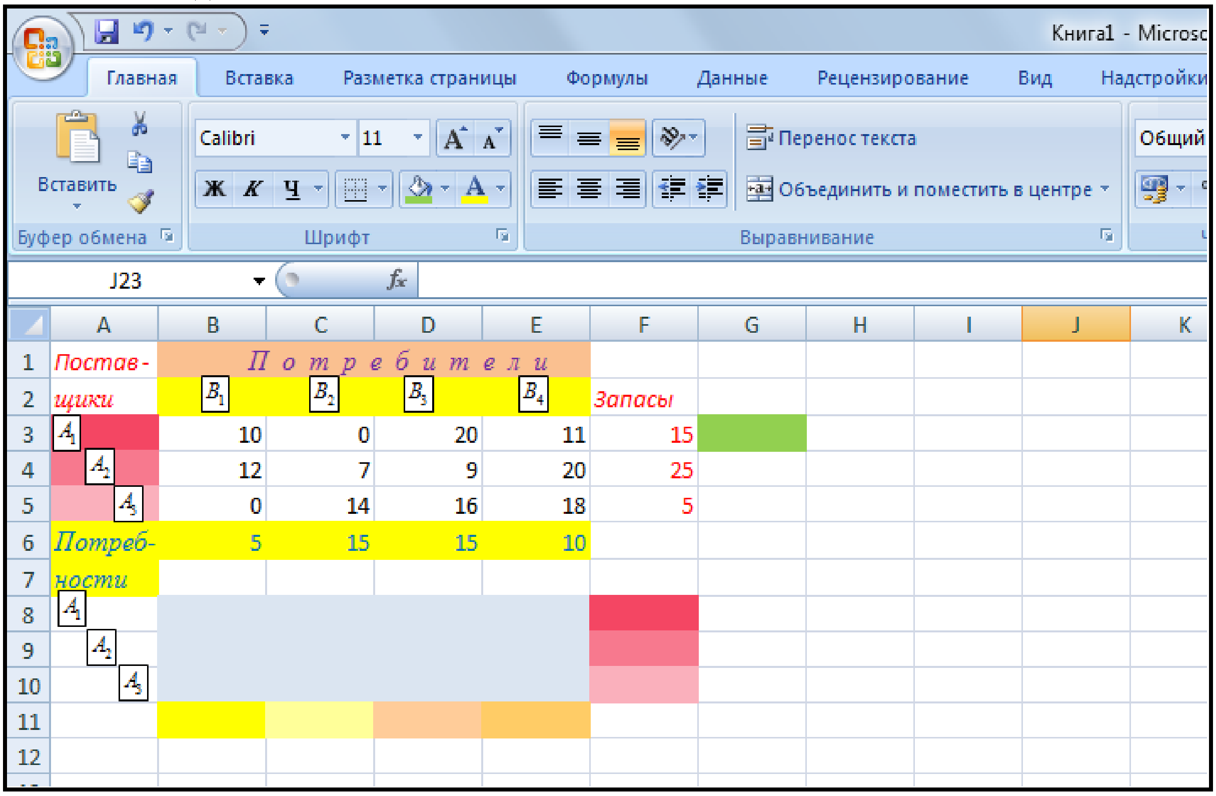
ввоз в B_3 $x_{13}+x_{23}+x_{33}=15$,

ввоз в B_4 $x_{14}+x_{24}+x_{34}=10$.

Ограничения на знаки(значения) переменных: $x_{ij}\geq 0$.

Задача закрытого типа : $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3+b_4=45$.

2. Решение задачи в Excel.

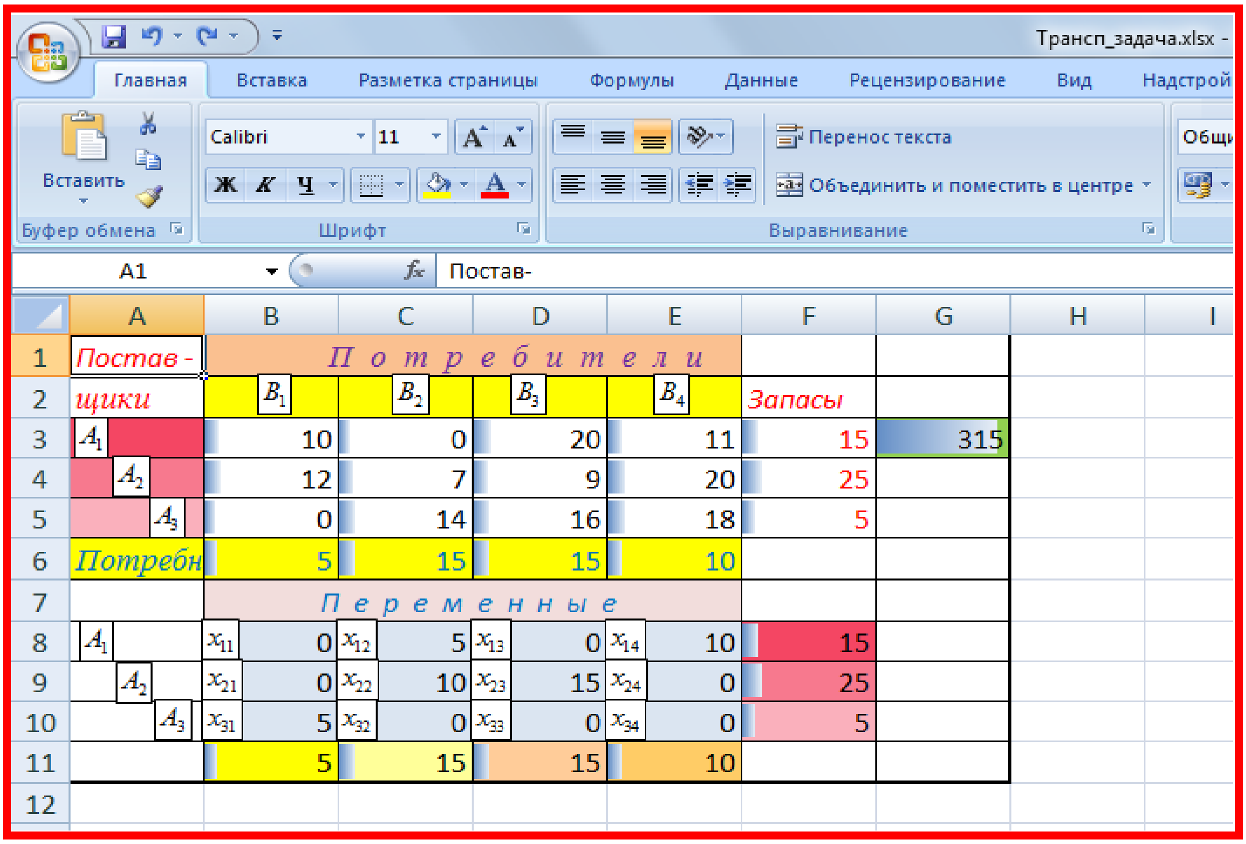


J23 | f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Постав-	П о т р е б и т е л и						
2	щики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы		
3	A_1	10	0	20	11	15		
4	A_2	12	7	9	20	25		
5	A_3	0	14	16	18	5		
6	Потреб-	5	15	15	10			
7	ности							
8	A_1							
9	A_2							
10	A_3							
11								
12								

G3 | f_x | =СУММПРОИЗВ(B3:E5;B8:E10)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Постав-	П о т р е б и т е л и						
2	щики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы		
3	A_1	10	0	20	11	15	315	
4	A_2	12	7	9	20	25		
5	A_3	0	14	16	18	5		
6	Потребн	5	15	15	10			
7		П е р е м е н н ы е						
8	A_1	x_{11} 0	x_{12} 5	x_{13} 0	x_{14} 10	15		
9	A_2	x_{21} 0	x_{22} 10	x_{23} 15	x_{24} 0	25		
10	A_3	x_{31} 5	x_{32} 0	x_{33} 0	x_{34} 0	5		
11		5	15	15	10			
12								
13								



«Решение задачи о назначениях с Excel»

Задача о назначениях. Производится классификация 7 болезней животных (птицы) по 5 категориям. Результаты тестирования каждого заболевания уровень опасности заболевания) по каждой категории выражены в баллах по 10-балльной шкале и представлены матрицей

$C =$

*	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
S_1	7	5	7	6	7
S_2	6	4	8	4	9
S_3	8	6	4	3	8
S_4	7	7	8	5	7
S_5	5	9	7	9	5
S_6	6	8	6	4	7
S_7	7	7	8	6	4

Определить самые опасные заболевания в каждой из 5 категорий так, чтобы сумма баллов выбранных заболеваний была наибольшей (суммарный уровень опасности выбранных заболеваний был наибольшим). Каждое заболевание может быть самым опасным только в одной категории и все категории должны быть заняты.

Решение.

1. Математическая модель задачи. Обозначим через x_{ij} переменные задачи:

$x_{ij} = 1$, если заболевание S_i выбирается самым опасным в категории P_j;

$x_{ij} = 0$, если заболевание S_i не является самым опасным в категории P_j;

c_{ij} - уровень опасности заболевания S_i (количество баллов по результатам тестирования) в категории P_j,

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; \; j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Целевая функция: суммарный уровень опасности всех заболеваний в баллах вычисляется по формуле

$$Z = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{5} c_{ij} \cdot x_{ij} = 7 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 7 \cdot x_{13} + 6 \cdot x_{14} + 7 \cdot x_{15} +$$

$$+ 6 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 8 \cdot x_{23} + 4 \cdot x_{24} + 9 \cdot x_{25} +$$

$$+ 8 \cdot x_{31} + 6 \cdot x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 3 \cdot x_{34} + 8 \cdot x_{35} +$$

$$+ 7 \cdot x_{41} + 7 \cdot x_{42} + 8 \cdot x_{43} + 5 \cdot x_{44} + 7 \cdot x_{45} +$$

$$+ 5 \cdot x_{51} + 9 \cdot x_{52} + 7 \cdot x_{53} + 9 \cdot x_{54} + 5 \cdot x_{55} +$$

$$+ 6 \cdot x_{61} + 8 \cdot x_{62} + 6 \cdot x_{63} + 4 \cdot x_{64} + 7 \cdot x_{65} +$$

$$+ 7 \cdot x_{71} + 7 \cdot x_{72} + 8 \cdot x_{73} + 6 \cdot x_{74} + 4 \cdot x_{75} \to \max.$$

Ограничения на переменные задачи.

Ограничения на лидерство одного заболевания: каждое заболевание может быть самым опасным только в одной категории

для S_1 $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$,

для S_2 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$,

для S_3 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$,

для S_4 $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$,

для S_5 $x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$,

для S_6 $x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 1$,

для S_7 $x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} = 1$.

Ограничения по занятости категорий: в каждой категории может быть только один лидер

для P_1 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,

для P_2 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,

для P_3 $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15$,

для P_4 $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10$,

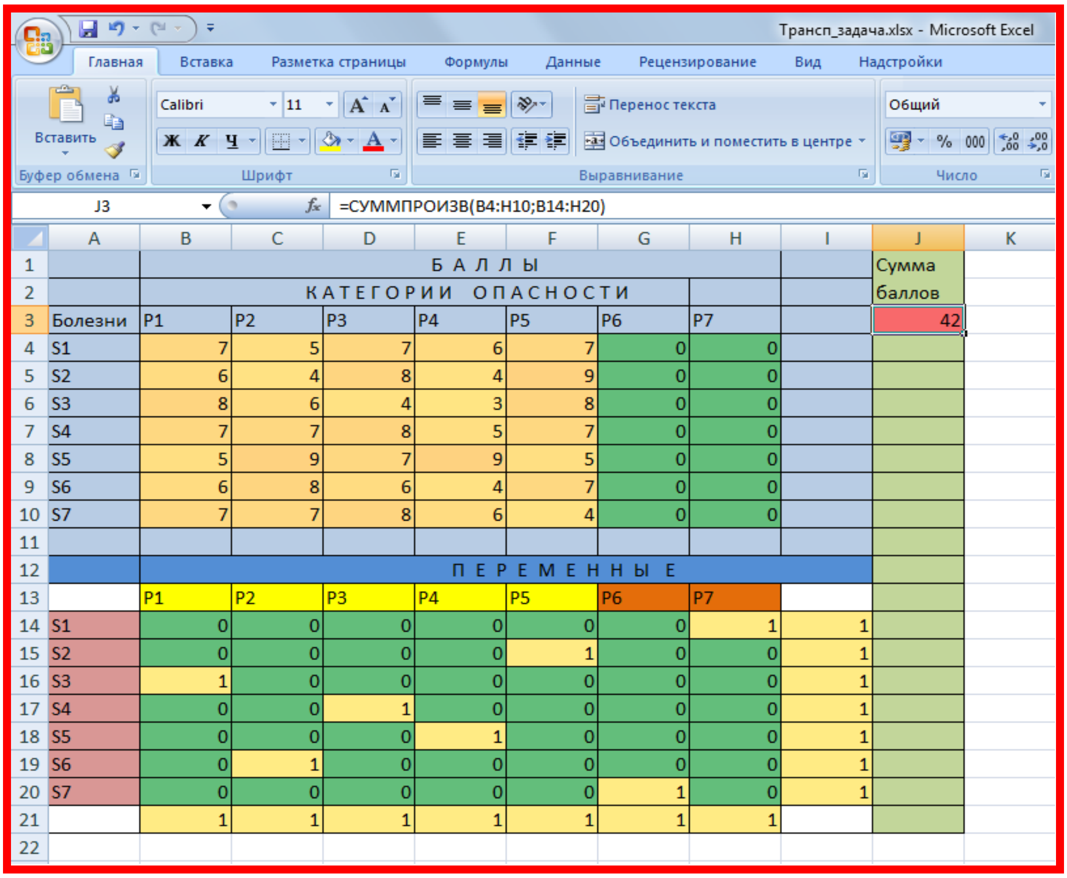
для P_2 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 1$,

Ограничения на знаки (значения) переменных: $x_{ij} \geq 0$, x_{ij} - двоичные числа.

Задача открытого типа: вводятся две фиктивные категории с нулевыми столбцами баллов. Матрица C^* становится квадратной.

$$C^* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c||c|c|} \hline * & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ \hline S_1 & 7 & 5 & 7 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ \hline S_2 & 6 & 4 & 8 & 4 & 9 & 0 & 0 \\ \hline S_3 & 8 & 6 & 4 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ \hline S_4 & 7 & 7 & 8 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ \hline S_5 & 5 & 9 & 7 & 9 & 5 & 0 & 0 \\ \hline S_6 & 6 & 8 & 6 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ \hline S_7 & 7 & 7 & 8 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

2. Решение задачи в Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Б А Л Л Ы								Сумма
2		К А Т Е Г О Р И И О П А С Н О С Т И								баллов
3	Болезни	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		42
4	S1	7	5	7	6	7	0	0		
5	S2	6	4	8	4	9	0	0		
6	S3	8	6	4	3	8	0	0		
7	S4	7	7	8	5	7	0	0		
8	S5	5	9	7	9	5	0	0		
9	S6	6	8	6	4	7	0	0		
10	S7	7	7	8	6	4	0	0		
11										
12		П Е Р Е М Е Н Н Ы Е								
13		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		
14	S1	0	0	0	0	0	0	1	1	
15	S2	0	0	0	0	1	0	0	1	
16	S3	1	0	0	0	0	0	0	1	
17	S4	0	0	1	0	0	0	0	1	
18	S5	0	0	0	1	0	0	0	1	
19	S6	0	1	0	0	0	0	0	1	
20	S7	0	0	0	0	0	1	0	1	
21		1	1	1	1	1	1	1		
22										

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- ознакомились с теоретическими основами решения транспортной задачи, методами первичного распределения поставок;
- усвоили алгоритмы методов северо-западного угла, метода учета наименьшей стоимости, построения и оценки циклов;
- выработали навыки по оптимизации распределения поставок методом потенциалов, распределительным методом.

2.3 Практическое занятие 4-6

Тема: «Методы описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах»

2.3.1 Задание для работы:

1. Постановка задачи линейного корреляционного анализа

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

Постановка задачи линейного корреляционного анализа формулируется в следующем виде:

Имеется матрица наблюдений вида (4.1). Необходимо определить оценки коэффициентов корреляции для всех или только для заданных пар параметров и оценить их значимость. Незначимые оценки приравниваются к нулю. Допущения:

- выборка имеет достаточный объем. Понятие достаточного объема зависит от целей анализа, требуемой точности и надежности оценки коэффициентов корреляции, от количества факторов. Минимально допустимым считается объем, когда количество наблюдений не менее чем в 5–6 раз превосходит количество факторов;
- выборки по каждому фактору являются однородными. Это допущение обеспечивает несмещенную оценку средних величин;
- матрица наблюдений не содержит пропусков.

Если необходима проверка значимости оценки коэффициента корреляции, то требуется соблюдение дополнительного условия – распределение вариант должно подчиняться нормальному закону.

Задача анализа решается в несколько этапов:

- проводится стандартизация исходной матрицы;
- вычисляются парные оценки коэффициентов корреляции;
- проверяется значимость оценок коэффициентов корреляции, незначимые оценки приравниваются к нулю. По результатам проверки делается вывод о наличии связей между вариантами (факторами).

Пример 4.1. Результаты наблюдений за характеристиками канала представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№ пп	Пропускная способность канала, кбит/с	Соотношение сигнал/шум,	Остаточное затухание, на частоте, Гц дБ,		
		дБ	1020	1800	2400
	X1	X2	X3	X4	X5
1	26,37	41,98	17,66	16,05	22,85
2	28,00	43,83	17,15	15,47	23,25
3	27,83	42,83	15,38	17,59	24,55
4	31,67	47,28	18,39	16,92	26,59
5	23,50	38,75	18,32	15,66	26,22
6	21,04	35,12	17,81	17,00	27,52
7	16,94	32,07	21,42	16,77	25,76
8	37,56	54,25	26,42	15,68	23,10
9	18,84	32,70	17,23	15,92	23,41

10	25,77	40,51	30,43	15,29	25,17
11	33,52	49,78	21,71	15,61	25,39
12	28,21	43,84	28,33	15,70	24,56
13	28,76	44,03	30,42	16,87	24,45
14	24,60	39,46	21,66	15,25	23,81
15	24,51	38,78	25,77	16,05	24,48

Необходимо определить наличие линейных корреляционных связей между пропускной способностью и остальными факторами. Предполагается, что выборки по всем вариантам подчиняются нормальному закону. Проверку гипотезы о значимости оценок коэффициентов корреляции произвести с уровнем значимости а, равным 0,1.

Решение. Стандартизация исходной матрицы начинается с вычисления выборочной средней m1, несмещенной оценки дисперсии m2 и среднеквадратического отклонения s по каждой варианте, табл.4.2.

Таблица 4.2

Оценка параметра распределения	Варианта				
	X1	X2	X3	X4	X5
m 1	26,47	41,68	21,87	16,12	24,74
m 2	29,10	36,47	26,37	0,52	1,88
s	5,39	6.04	5,13	0,72	1,37

В результате перехода к величинам $u_{ij} = (x_{ij} - \mu_j)/\sigma_j$ формируется стандартизованная матрица исходных данных, табл. 4.3.

Таблица 4.3

№ пп	Пропускная способность	Соотношение сигнал/шум,	Остаточное затухание, на частоте, Гц		
	канала, кбит/с	дБ	1020	1800	2400
	U1	U2	U3	U4	U5
1	–0,02	0,05	–0,82	–0,10	–1,38
2	0,28	0,36	–0,92	–0,90	–1,09
3	0,25	0,19	–1,26	2,03	–0,14
4	0,96	0,93	–0,68	1,10	1,35
5	–0,55	–0,49	–0,69	–0,64	1,08
6	–1,01	–1,09	–0,79	1,21	2,03
7	–1,77	–1,59	–0,09	0,90	0,74

8	2,06	2,08	0,89	–0,61	–1,20
9	–1,42	–1,49	–0,90	–0,28	–0,97
10	–0,13	–0,19	1,67	–1,15	0,31
11	1,31	1,34	–0,03	–0,71	0,47
12	0,32	0,36	1,26	–0,58	–0,13
13	0,42	0,39	1,66	1,03	–0,21
14	–0,35	–0,37	–0,04	–1,21	–0,68
15	–0,36	–0,48	0,76	–0,10	–0,19

Оценки коэффициентов корреляции $\rho_{1k} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} u_{1i} u_{ki}$ (k = 2, 3, 4) представлены в табл. 4.4. В этой же таблице приведены значения статистик критерия Стьюдента $t = \left|\rho_{1k}\right| \sqrt{n-2} / \sqrt{1-\rho_{1k}^{2}}$ для вычисленных оценок коэффициентов корреляции при n= 15.

Таблица 4.4

	X2	X3	X4	X5
r 1 j	0,93	0,25	– 0,13	– 0,22
t	9,12	0,93	0,47	0,81

Критическое значение tкр (n–2; a) = tкр (13; 0,1) = 1,77. Статистика критерия больше критического значения только для r 12. Это означает, что только для указанного коэффициента оценка значима (коэффициент корреляции генеральной совокупности не равен нулю), а остальные коэффициенты следует признать равными нулю.

Корреляционная зависимость не обязательно устанавливается только для двух величин, с ее помощью можно анализировать связи между несколькими вариантами (множественная корреляция). А кроме линейной существуют и другие виды корреляции.

Регрессионный анализ. Постановка задачи. Одной из типовых задач обработки многомерных ЭД является определение количественной зависимости показателей качества объекта от значений его параметров и характеристик внешней среды. Примером такой постановки задачи является установление зависимости между временем обработки запросов к базе данных и интенсивностью входного потока. Время обработки зависит от многих факторов, в том числе от размещения искомой информации на внешних носителях, сложности запроса. Следовательно, время обработки конкретного запроса можно считать случайной величиной. Но вместе с тем, при увеличении интенсивности потока запросов следует ожидать возрастания его среднего значения, т.е. считать, что время обработки и интенсивность потока запросов связаны корреляционной зависимостью.

Постановка задачи регрессионного анализа формулируется следующим образом. Имеется совокупность результатов наблюдений вида (4.1). В этой совокупности один столбец соответствует показателю, для которого необходимо установить функциональную зависимость с параметрами объекта и среды, представленными остальными столбцами. Будем обозначать показатель через y* и считать, что ему соответствует первый столбец матрицы наблюдений. Остальные т–1 (m > 1) столбцов соответствуют параметрам (факторам) x2, x3, …, xт .

Требуется: установить количественную взаимосвязь между показателем и факторами. В таком случае задача регрессионного анализа понимается как задача выявления такой функциональной зависимости y* = f(x2 , x3 , …, xт), которая наилучшим образом описывает имеющиеся экспериментальные данные. ***Допущения***:

- количество наблюдений достаточно для проявления статистических закономерностей относительно факторов и их взаимосвязей;
- обрабатываемые ЭД содержат некоторые ошибки (помехи), обусловленные погрешностями измерений, воздействием неучтенных случайных факторов;
- матрица результатов наблюдений является единственной информацией об изучаемом объекте, имеющейся в распоряжении перед началом исследования.

Функция f(x2 , x3 , …, xт), описывающая зависимость показателя от параметров, называется уравнением (функцией) регрессии. Термин "регрессия" (regression (лат.) – отступление, возврат к чему-либо) связан со спецификой одной из конкретных задач, решенных на стадии становления метода, и в настоящее время не отражает всей сущности метода, но продолжает применяться.

Решение задачи регрессионного анализа целесообразно разбить на несколько этапов:
- предварительная обработка ЭД;
- выбор вида уравнений регрессии;
- вычисление коэффициентов уравнения регрессии;
- проверка адекватности построенной функции результатам наблюдений.

Предварительная обработка включает стандартизацию матрицы ЭД, расчет коэффициентов корреляции, проверку их значимости и исключение из рассмотрения незначимых параметров (эти преобразования были рассмотрены в рамках корреляционного анализа). В результате преобразований будут получены стандартизованная матрица наблюдений U (через y будем обозначать стандартизованную величину y*) и корреляционная матрица r .

Стандартизованной матрице U можно сопоставить одну из следующих геометрических интерпретаций:

в m-мерном пространстве оси соответствуют отдельным параметрам и показателю. Каждая строка матрицы представляет вектор в этом пространстве, а вся матрица – совокупностьnвекторов в пространстве параметров;

в n-мерном пространстве оси соответствуют результатам отдельных наблюдений. Каждый столбец матрицы – вектор в пространстве наблюдений. Все вектора в этом пространстве имеют одинаковую длину, равную $\sqrt{n}$. Тогда угол между двумя векторами характеризует взаимосвязь соответствующих величин. И чем меньше угол, тем теснее связь (тем больше коэффициент корреляции).

В корреляционной матрице особую роль играют элементы левого столбца – они характеризуют наличие или отсутствие линейной зависимости между соответствующим параметром ui (i =2, 3, …, т) и показателем объекта y. Проверка значимости позволяет выявить такие параметры, которые следует исключить из рассмотрения при формировании линейной функциональной зависимости, и тем самым упростить последующую обработку.

Выбор вида уравнения регрессии. Задача определения функциональной зависимости, наилучшим образом описывающей ЭД, связана с преодолением ряда принципиальных трудностей. В общем случае для стандартизованных данных функциональную зависимость показателя от параметров можно представить в виде

$$y = f(u1,\ u2,\ ...up) + e \tag{4.5}$$

где f – заранее не известная функция, подлежащая определению;

e - ошибка аппроксимации ЭД.

Указанное уравнение принято называть выборочным уравнением регрессии y на u. Это уравнение характеризует зависимость между вариацией показателя и вариациями факторов. А мера корреляции измеряет долю вариации показателя, которая связана с вариацией факторов. Иначе говоря, корреляцию показателя и факторов нельзя трактовать как связь их уровней, а регрессионный анализ не объясняет роли факторов в создании показателя.

Еще одна особенность касается оценки степени влияния каждого фактора на показатель. Регрессионное уравнение не обеспечивает оценку раздельного влияния каждого фактора на показатель, такая оценка возможна лишь в случае, когда все другие факторы не связаны с изучаемым. Если изучаемый фактор связан с другими, влияющими на показатель, то будет получена смешанная характеристика влияния фактора. Эта характеристика содержит как непосредственное влияние фактора, так и опосредованное влияние, оказанное через связь с другими факторами и их влиянием на показатель.

В регрессионное уравнение не рекомендуется включать факторы, слабо связанные с показателем, но тесно связанные с другими факторами. Не включают в уравнение и факторы, функционально связанные друг с другом (для них коэффициент корреляции равен 1). Включение таких факторов приводит к вырождению системы уравнений для оценок коэффициентов регрессии и к неопределенности решения.

Функция f должна подбираться так, чтобы ошибка e в некотором смысле была минимальна. Существует бесконечное множество функций, описывающих ЭД абсолютно точно (e = 0), т.е. таких функций, которые для всех значений параметров uj,2 , uj,3 , …, uj,т принимают в точности соответствующие значения показателя yi , i =1, 2, …, п. Вместе с тем, для всех других значений параметров, отсутствующих в результатах наблюдений, значения показателя могут принимать любые значения. Понятно, что такие функции не соответствуют действительной связи между параметрами и показателем.

В целях выбора функциональной связи заранее выдвигают гипотезу о том, к какому классу может принадлежать функция f, а затем подбирают "лучшую" функцию в этом классе. Выбранный класс функций должен обладать некоторой "гладкостью", т.е. "небольшие" изменения значений аргументов должны вызывать "небольшие" изменения значений функции (ЭД содержат некоторые ошибки измерений, а само поведение объекта подвержено влиянию помех, маскирующих истинную связь между параметрами и показателем).

Простым, удобным для практического применения и отвечающим указанному условию является класс полиномиальных функций

$$y = a_0 + \sum_{j=2}^{m} a_j u_j + \sum_{j=2}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} a_{jk} u_j u_k + \sum_{j=2}^{m} a_{jj} u_j^2 + \ldots + \varepsilon. \tag{4.6}$$

Для такого класса задача выбора функции сводится к задаче выбора значений коэффициентов a0 , aj , ajk , …, ajj , … . Однако универсальность полиномиального представления обеспечивается только при возможности неограниченного увеличения степени полинома, что не всегда допустимо на практике, поэтому приходится применять и другие виды функций.

Частным случаем, широко применяемым на практике, является полином первой степени или уравнение линейной регрессии

$$y = a_0 + \sum_{j=2}^{m} a_j u_j + \varepsilon \tag{4.7}$$

Это уравнение в регрессионном анализе следует трактовать как векторное, ибо речь идет о матрице данных,

$$y_i = a_0 + \sum_{j=2}^{m} a_j u_{ij} + \varepsilon_i \quad ,i=1, 2, \ldots , n. \tag{4.8}$$

Обычно стремятся обеспечить такое количество наблюдений, которое превышало бы количество оцениваемых коэффициентов модели. Для линейной регрессии при п > т количество уравнений превышает количество подлежащих определению коэффициентов полинома. Но и в этом случае нельзя подобрать коэффициенты таким образом, чтобы ошибка в каждом скалярном уравнении обращалась в ноль, так как к неизвестным относятся aj и e i , их количество n + т – 1, т.е. всегда больше количества уравнений п. Аналогичные рассуждения справедливы и для полиномов степени, выше первой.

Для выбора вида функциональной зависимости можно рекомендовать следующий подход:

в пространстве параметров графически отображают точки со значениями показателя. При большом количестве параметров можно строить точки применительно к каждому из них, получая двумерные распределения значений;

- по расположению точек и на основе анализа сущности взаимосвязи показателя и параметров объекта делают заключение о примерном виде регрессии или ее возможных вариантах;

- после расчета параметров оценивают качество аппроксимации, т.е. оценивают степень близости расчетных и фактических значений;

- если расчетные и фактические значения близки во всей области задания, то задачу регрессионного анализа можно считать решенной. В противном случае можно попытаться выбрать другой вид полинома или другую аналитическую функцию, например периодическую.

Вычисление коэффициентов уравнения регрессии. Систему уравнений (4.8) на основе имеющихся ЭД однозначно решить невозможно, так как количество неизвестных всегда больше количества уравнений. Для преодоления этой проблемы нужны дополнительные допущения. Здравый смысл подсказывает: желательно выбрать коэффициенты полинома так, чтобы обеспечить минимум ошибки аппроксимации ЭД. Могут применяться различные меры для оценки ошибок аппроксимации. В качестве такой меры нашла широкое применение среднеквадратическая ошибка. На ее основе разработан специальный метод оценки коэффициентов уравнений регрессии – метод наименьших квадратов (МНК). Этот метод позволяет получить оценки максимального правдоподобия неизвестных коэффициентов уравнения регрессии при нормальном распределения вариант, но его можно применять и при любом другом распределении факторов. В основе МНК лежат следующие положения:

- значения величин ошибок и факторов независимы, а значит, и некоррелированы, т.е. предполагается, что механизмы порождения помехи не связаны с механизмом формирования значений факторов;

- математическое ожидание ошибки e должно быть равно нулю (постоянная составляющая входит в коэффициент a0), иначе говоря, ошибка является центрированной величиной;

- выборочная оценка дисперсии ошибки $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$ должна быть минимальна.

Рассмотрим применение МНК применительно к линейной регрессии стандартизованных величин. Для центрированных величин uj коэффициент a0 равен нулю, тогда уравнения линейной регрессии

$$\hat{y}_i = \sum_{j=2}^{m} a_j u_{i,j} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}$$

(4.9)

Здесь введен специальный знак "^", обозначающий значения показателя, рассчитанные по уравнению регрессии, в отличие от значений, полученных по результатам наблюдений.

По МНК определяются такие значения коэффициентов уравнения регрессии, которые обеспечивают безусловный минимум выражению

$$w=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=2}^{m}a_j u_{ij}\right)^2 .$$

(4.10)

Минимум находится приравниванием нулю всех частных производных выражения (4.10), взятых по неизвестным коэффициентам, и решением системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial a_k}=-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=2}^{m}a_j u_{i,j}\right)u_{i,k}=0,\quad k=\overline{2,m}$$

(4.11)

Последовательно проведя преобразования и используя введенные ранее оценки коэффициентов корреляции

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i u_{ik}-\sum_{j=2}^{m}a_j u_{i,j}\ u_{i,k}\right)=0,\quad k=\overline{2,\ m};$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i u_{i,k}-\sum_{j=2}^{m}a_j\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_{i,j}\ u_{i,k}\ =0,\quad k=\overline{2,m}\ ,$$

получим

$$\rho_{y,k}-\sum_{j=2}^{m}a_j\rho_{j,k}=0,\quad k=\overline{2,m}$$

.

(4.12)

Итак, получено m–1 линейных уравнений, что позволяет однозначно вычислить значения a2, a3, …, am.

Если же линейная модель неточна или параметры измеряются неточно, то и в этом случае МНК позволяет найти такие значения коэффициентов, при которых линейная модель наилучшим образом описывает реальный объект в смысле выбранного критерия среднеквадратического отклонения.

Когда имеется только один параметр, уравнение линейной регрессии примет вид $\hat{y}=a_2u_2$ = a2 u2 . Коэффициент a2 находится из уравнения r y,2 – a2 r 2,2 = 0. Тогда, учитывая, что r 2,2 = 1, искомый коэффициент

a2 = r y,2.

(4.13)

Соотношение (4.13) подтверждает ранее высказанное утверждение, что коэффициент корреляции является мерой линейной связи двух стандартизованных параметров.

Подставив найденное значение коэффициента a2 в выражение для w, с учетом свойств центрированных и нормированных величин, получим минимальное значение этой функции, равное 1– r 2y,2. Величину 1– r 2y,2 называют остаточной дисперсией случайной величины y относительно случайной величины u2. Она характеризует ошибку, которая получается при замене показателя функцией от параметра . Только при |r y,2 | = 1 остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, не возникает ошибки при аппроксимации показателя линейной функцией.

Переходя от центрированных и нормированных значений показателя и параметра

$$\frac{x_1-\mu_1(x_1)}{\sigma(x_1)}=\rho_{y,2}\frac{x_2-\mu_1(x_2)}{\sigma(x_2)}\ ,$$

можно получить для исходных величин

$$\hat{y}=x_1=\mu_1(x_1)-\rho_{y,2}\,\mu_1(x_2)\frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)}+\rho_{y,2}\frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)}x_2 .$$

(4.14)

Это уравнение также линейно относительно коэффициента корреляции. Нетрудно заметить, что центрирование и нормирование для линейной регрессии позволяет понизить на единицу размерность системы уравнений, т.е. упростить решение задачи определения коэффициентов, а самим коэффициентам придать ясный смысл.

Применение МНК для нелинейных функций практически ничем не отличается от рассмотренной схемы (только коэффициент a0 в исходном уравнении не равен нулю).

Например, пусть необходимо определить коэффициенты параболической регрессии

• = a0 + a2 u2 + a22 u22.

Выборочная дисперсия ошибки

$$w=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_2u_{i,2}-a_{22}u_{i,2}^2\right)^2 .$$

На ее основе можно получить следующую систему уравнений

После преобразований система уравнений примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial a_0}=-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_2u_{i,2}-a_{22}u_{i,2}^2\right)=0,\\ \dfrac{\partial w}{\partial a_1}=-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_2u_{i,2}-a_{22}u_{i,2}^2\right)u_{i,2}=0,\\ \dfrac{\partial w}{\partial a_2}=-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-a_0-a_1u_{i,2}-a_{22}u_{i,2}^2\right)u_{i,2}^2=0.\end{cases}$$

Учитывая свойства моментов стандартизованных величин, запишем

$$\begin{cases}\mu_1(y)-a_0-a_2\mu_1(u_2)-a_{22}=0,\\ \rho_{y,2}-a_0\mu_1(u_2)-a_2-a_{22}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_{i,2}^3=0,\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_iu_{i,2}^2-a_0-a_2\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_{i,2}^3-a_{22}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_{i,2}^4=0.\end{cases}$$

Определение коэффициентов нелинейной регрессии основано на решении системы линейных уравнений. Для этого можно применять универсальные пакеты численных методов или специализированные пакеты обработки статистических данных.

С ростом степени уравнения регрессии возрастает и степень моментов распределения параметров, используемых для определения коэффициентов. Так, для определения коэффициентов уравнения регрессии второй степени используются моменты распределения параметров до четвертой степени включительно. Известно, что точность и достоверность оценки моментов по ограниченной выборке ЭД резко снижается с ростом их порядка. Применение в уравнениях регрессии полиномов степени выше второй нецелесообразно.

Качество полученного уравнения регрессии оценивают по степени близости между результатами наблюдений за показателем и предсказанными по уравнению регрессии значениями в заданных точках пространства параметров. Если результаты близки, то задачу регрессионного анализа можно считать решенной. В противном случае следует изменить уравнение регрессии (выбрать другую степень полинома или вообще другой тип уравнения) и повторить расчеты по оценке параметров.

При наличии нескольких показателей задача регрессионного анализа решается независимо для каждого из них.

Анализируя сущность уравнения регрессии, следует отметить следующие положения. Рассмотренный подход не обеспечивает раздельной (независимой) оценки коэффициентов – изменение значения одного коэффициента влечет изменение значений других. Полученные коэффициенты не следует рассматривать как вклад соответствующего параметра в значение показателя. Уравнение регрессии является всего лишь хорошим аналитическим описанием имеющихся ЭД, а не законом, описывающим взаимосвязи параметров и показателя. Это уравнение применяют для расчета значений показателя в заданном диапазоне изменения параметров. Оно ограниченно пригодно для расчета вне этого диапазона, т.е. его можно применять для решения задач интерполяции и в ограниченной степени для экстраполяции.

Главной причиной неточности прогноза является не столько неопределенность экстраполяции линии регрессии, сколько значительная вариация показателя за счет неучтенных в модели факторов. Ограничением возможности прогнозирования служит условие стабильности неучтенных в модели параметров и характера влияния учтенных факторов модели. Если резко меняется внешняя среда, то составленное уравнение регрессии потеряет свой смысл. Нельзя подставлять в уравнение регрессии такие значения факторов, которые значительно отличаются от представленных в ЭД. Рекомендуется не выходить за пределы одной трети размаха вариации параметра, как за максимальное, так и за минимальное значения фактора.

Прогноз, полученный подстановкой в уравнение регрессии ожидаемого значения параметра, является точечным. Вероятность реализации такого прогноза ничтожна мала. Целесообразно определить доверительный интервал прогноза. Для индивидуальных значений показателя интервал должен учитывать ошибки в положении линии регрессии и отклонения индивидуальных значений от этой линии. Средняя ошибка прогноза показателя y для фактора x составит

$$m_{\text{ош}}[x_k] = \sqrt{m^2(y_k) + \sigma^2(y)},$$

где $m(y_k) = \sigma\ (y)\sqrt{1/n + [x_k - \mu_1(x)]^2 / \sum_{i=1}^{n}[x_i - \mu_1(x)]^2}$ – средняя ошибка положения линии регрессии в генеральной совокупности при x = xk;

s 2(y)= $\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}[y_i - \mu_1(y)]^2$ – оценка дисперсии отклонения показателя от линии регрессии в генеральной совокупности;

xk – ожидаемое значение фактора.

Доверительные границы прогноза, например, для уравнения регрессии (4.14), определяются выражением y[xk] ± mош[xk].

Отрицательная величина свободного члена a0 в уравнении регрессии для исходных переменных означает, что область существования показателя не включает нулевых значений параметров. Если же a0 > 0, то область существования показателя включает нулевые значения параметров, а сам коэффициент характеризует среднее значение показателя при отсутствии воздействий параметров.

Задача 4.2.Построить уравнение регрессии для пропускной способности канала по выборке, заданной в табл. 4.1.

Решение. Применительно к указанной выборке построение аналитической зависимости в основной своей части выполнено в рамках корреляционного анализа: пропускная способность зависит только от параметра "соотношение сигнал/шум". Остается подставить в выражение (4.14) вычисленные ранее значения параметров. Уравнение для пропускной способности примет вид

• = 26,47– 0,93 . 41,68 . 5,39/6,04+0,93 . 5,39/6,03 . x = – 8,121+0,830x.
Результаты расчетов представлены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

№ пп	Пропускная способность	Соотношение сигнал/шум	Значение функции, кбит/с	Погрешность, кбит/с
	канала, кбит/с	дБ		
	Y	X	$\hat{y}$	e
1	26,37	41,98	26,72	–0,35
2	28,00	43,83	28,25	–0,25
3	27,83	42,83	27,42	0,41
4	31,67	47,28	31,12	0,55
5	23,50	38,75	24,04	–0,54
6	21,04	35,12	21,03	0,01
7	16,94	32,07	18,49	–1,55
8	37,56	54,25	36,90	0,66
9	18,84	32,70	19,02	–0,18
10	25,77	40,51	25,50	0,27
11	33,52	49,78	33,19	0,33
12	28,21	43,84	28,26	–0,05
13	28,76	44,03	28,42	0,34
14	24,60	39,46	24,63	–0,03
15	24,51	38,78	24,06	0,45

Остаточная дисперсия стандартизованной величины Y относительно стандартизованной величины X равна 1– 0,932 = 0,14, т.е. является малой величиной. Погрешность аппроксимации и величина остаточной дисперсии показывают высокую точность линейной модели, поэтому задачу регрессионного анализа можно считать решенной. Свободный член уравнения регрессии отрицательный, следовательно, область существования показателя не включает нулевое значение параметра "отношение сигнал/шум", что вытекает из сущности параметра (при нулевом уровне сигнала передача информации невозможна).