

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Факультет среднего профессионального образования**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

**Специальность 21.02.05 Земельно-имущественные отношения**

**Форма обучения очная**

**Оренбург 2022 г.**

## Лекция № 1(2 часа)

### Тема: «Матрицы и определители»

1 Вопросы лекции:

1.1 Матрицы, виды матриц.

1.2 Действия над матрицами. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

1.3 Определители квадратных матриц и их свойства.

1.4. Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителей.

1.5. Обратная матрица.

## 2. Краткое содержание вопросов

### Матрицы, виды матриц.

*Определение.* Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: А – матрица,  $a_{ij}$  - элемент матрицы,  $i$  – номер строки, в которой стоит данный элемент,  $j$  – номер соответствующего столбца;  $m$  – число строк матрицы,  $n$  – число ее столбцов.

*Определение.* Числа  $m$  и  $n$  называются размерностями матрицы.

*Определение.* Матрица называется квадратной, если  $m = n$ . Число  $n$  в этом случае называют порядком квадратной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*Определение.* Матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется нулевой.

*Определение.* Матрица вида

называется единичной.

### Действия над матрицами. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

*Определение.* Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с теми же номерами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для удобства все операции будем вводить для матриц размерности  $3 \times 3$ .

1. Сложение матриц: Чтобы сложить две матрицы нужно сложить соответствующие элементы этих матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

2. Вычитание матриц: Выполняется аналогично сложению.

3. Умножение матрицы на число: Чтобы умножить матрицу на число необходимо каждый элемент матрицы умножить на данное число:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

#### 4. Умножение матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

*Определение.* Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

1. перестановка любых двух строк (столбцов) матрицы;
2. умножение любой строки (столбца) на произвольное, отличное от нуля, число;
3. сложение любой строки (столбца) с другой строкой (столбцом), умноженной (умноженным) на произвольное, отличное от нуля, число.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Определение.* Матрица вида называется ступенчатой.

Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над элементами матрицы.

#### Определители квадратных матриц и их свойства.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Определение.* Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего вправый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

*Определение.* Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

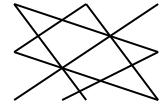
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$



аналогичным образом относительно побочной диагонали:

#### Основные свойства определителей.

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).

Свойство 1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

Свойство 2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

Свойство 4. Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.

Свойство 5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. При перестановке двух строк определителя он умножается на  $-1$ .

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

#### Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителей.

Определение. Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение:  $a_{ij}$  — выбранный элемент определителя,  $M_{ij}$  — его минор.

$$\text{Пример. Для } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} a_{21} = -5, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$$

*Определение.* Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента  $i+j$  есть число четное, или число, противоположное минору, если  $i+j$  нечетно, т.е.  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

### Обратная матрица.

*Определение.* Квадратная матрица А называется обратимой, если существует квадратная матрица Х той же размерности, удовлетворяющая соотношениям  $A \cdot X = X \cdot A = E$ .

Матрица Х называется обратной к матрице А и обозначается  $A^{-1}$ , т.е.  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ .

*Обратную матрицу  $A^{-1}$  можно найти по следующей формуле:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^T, \text{ где } |A| \text{ – определитель матрицы } A, A^T \text{ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы } A.$$

## Лекция № 2 (2 часа)

### Тема: «Системы линейных алгебраических уравнений»

#### 1 Вопросы лекции:

- 1.1 Определение системы линейных уравнений.
- 1.2 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
- 1.3 Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

#### 2. Краткое содержание вопросов

##### Определение системы линейных уравнений.

*Определение.* Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1)$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i$  – числа,  $x_j$  – неизвестные,  $n$  – число неизвестных,  $m$  – число уравнений.

*Определение.* Решением линейной системы называется набор чисел  $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ , которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

##### Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Замечание. Линейная система может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Условия существования и количества решений линейной системы будут изучены в дальнейшем, а пока рассмотрим способы нахождения единственного решения системы,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных:

Пусть  $a_{11} \neq 0$  (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на  $a_{11}$  и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на  $a_{ii}$ , где  $i$  – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при  $x_1$  во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_{n2}x_2 + \dots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{array} \right.$$

Таким же образом можно исключить  $x_2$  из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \ddot{a}_{12}x_2 + \dots + \ddot{a}_{1n}x_n = \ddot{b}_1 \\ x_2 + \dots + \ddot{a}_{2n}x_n = \ddot{b}_2 \\ \dots \\ x_n = \ddot{b}_n \end{array} \right.$$

Здесь символами  $\tilde{a}_{ij}, \ddot{a}_{ij}, \tilde{b}_i$  и  $\ddot{b}_i$  обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы единственным образом определяется  $x_n$ , а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

**Замечание.** Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество  $0=0$ . Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида  $0=1$  (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

### Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Правило Крамера.

Рассмотрим систему (1). Назовем главным определителем этой системы определитель  $\Delta$ , элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Предположим сначала, что  $\Delta \neq 0$ . Умножим каждое уравнение системы на алгебраические дополнения  $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$  элементов  $j$ -го столбца  $\Delta$ .

Сложив затем все уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^n x_i (a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \dots + a_{ni} A_{nj}) = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}$$

$$a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \dots + a_{ni} A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{(j\text{-й столбец})}$$

Отметим, что

(Результат получен из разложения определителя по j-му столбцу). Такой определитель равен 0 при  $i \neq j$  и равен  $\Delta$  при  $i=j$ . Правая часть равенства представляет собой определитель  $\Delta$ , в котором вместо i-го столбца стоит столбец свободных членов системы.

Назовем такой определитель  $\Delta_{x_i}$ . Рассматривая  $i=1,2,\dots,n$ , получим систему,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{array} \right. . \quad \text{Разделив все уравнения на } \Delta, \text{ найдем эквивалентную исходной:}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} . \quad \text{единственное решение:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \dots \\ 0 \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{array} \right. .$$

Предположим теперь, что  $\Delta=0$ . Тогда система (2.6) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \\ \dots \\ 0 \cdot x_n = 0 \end{array} \right. .$$

В этом случае, если все  $\Delta_{x_i}=0$ , система выглядит так: и имеет бесконечно много решений. Если же хотя бы один из  $\Delta_{x_i} \neq 0$ , система решений не имеет.

Таким образом, правило Крамера позволяет найти единственное решение системы или сделать вывод о существовании бесконечного числа решений либо об их отсутствии:

1) Если  $\Delta \neq 0$ , система (1) имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} .$$

2) Если  $\Delta=\Delta_{x_i}=0$ , система имеет бесконечно много решений.

3) Если  $\Delta=0$ , а хотя бы один из  $\Delta_{x_i} \neq 0$ , система не имеет решений.

## Лекция № 3 (2 часа)

### Тема: «Основные понятия теории множеств»

#### 1 Вопросы лекции:

##### 1.1 Числовые множества.

#### 2. Краткое содержание вопросов

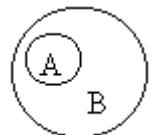
##### Числовые множества.

Понятие множества является первоначальным математическим понятием, т.е. таким понятием, которое можно только показать на примерах. Множества мы будем в дальнейшем обозначать большими латинскими буквами, например, A, B, C и т.д. Иногда множества будут задаваться просто перечислением их элементов и для этого будет использоваться запись вида, где в {...} будут перечисляться элементы множества A. Например,  $A = \{a, b, c\}$  есть множество, состоящее из элементов a, b и c. Обозначение  $a \in A$  означает, что элемент a принадлежит множеству A, а обозначение  $a \notin A$  или  $a \not\in A$  означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Знаком  $\emptyset$  будет обозначаться так называемое пустое множество, т.е. такое множество, в котором нет ни одного элемента.

##### Операции над множествами.

###### 1. Вхождение или включение множеств.

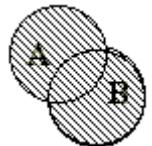
Говорят, что множество A входит в множество B (обозначение  $A \subset B$ ) или множество B включает множество A (обозначение  $B \supset A$ ) если из того, что некоторый элемент  $a \in A$  следует, что  $a \in B$  (запись  $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ ). Эту операцию можно пояснить следующим рисунком.



Из него видно, что если  $A \subset B$ , то множество B шире множества A, т. е. содержит большее число элементов. Если одновременно  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то означает, что множества A и B совпадают, или равны друг другу (обозначение  $A=B$ ).

###### 2. Объединение или сумма множеств.

Множество C называют объединением или суммой множеств A и B (обозначение  $C = A \cup B$ ) если оно состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B, т.е.  $a \in C$  означает, что  $a \in A$ , или  $a \in B$  или  $a \in A \text{ и } B$  одновременно. Это можно записать так:  $C = \{a : a \in A \vee a \in B\}$ , где знак  $\vee$  есть символ логического сложения (читается “или”). Эта операция может быть пояснена следующим рисунком.



Операция  $\cup$  обладает обычными свойствами:

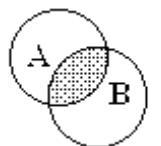
- 1)  $A \cup B = B \cup A$ ;
- 2)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .

$$\bigcup_{k=1}^n A_k$$

Для суммы множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  используют обозначение

###### 3. Пересечение или произведение множеств.

Множество C называется пересечением или произведением множеств A и B (обозначается  $C = A \cap B$ ) если оно состоит из элементов, принадлежащих одновременно множеству A и множеству B. Это можно записать так:  $C = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$ , где знак  $\wedge$  есть символ логического умножения (читается “и”). Эта операция может быть пояснена следующим рисунком.



Операция  $\cap$  обладает свойствами:

- 1)  $A \cap B = B \cap A$ ;
- 2)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .

По отношению друг к другу операции  $\cap$  и  $\cup$  обладают следующими свойствами:

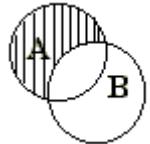
- 1).  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$   
(сравн.  $(a+b)c = (ac+bc)$ )
- 2).  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$$\bigcap_{k=1}^n A_k$$

Для пересечения множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  используют символ  $\bigcap_{k=1}^n A_k$ .

#### 4. Вычитание или разность множеств.

Множество С называется разностью множеств  $A$  и  $B$  (обозначается  $C = A \setminus B$ ), если оно состоит из элементов, принадлежащих  $A$ , но не принадлежащих  $B$ . (Это можно записать так:  $C = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$ ). Данный рисунок поясняет эту операцию.



В дальнейшем нам наиболее часто придется иметь дело с двумя множествами.

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  – множество всех целых положительных чисел и  
 $Z = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \dots\}$  – множество всех целых чисел.

## Лекция № 4 (2 часа)

### Тема: «Комплексные числа»

#### 1 Вопросы лекции:

- 1.1. Множество комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа.
- 1.2. Действия над комплексными числами.
- 1.3. Формула Муавра.
- 1.4. Извлечение корня  $n$ -ой степени из комплексного числа.
- 1.5. Геометрическая интерпретация.

#### 2 Краткое содержание вопросов

**Множество комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексного числа.**

Комплексные числа  $\mathbb{C}$  – это пара  $(a, b)$  действительных чисел с заданным определенным образом операциями умножения и сложения. Комплексное число  $z = (a, b)$  записывают как  $z = a + b \cdot i$ ,

Число  $a$  называется *действительной частью* числа  $z$ , а число  $b$  – *мнимой частью* числа  $z$ . Их обозначают  $Re z$  и  $Im z$  соответственно:

$$a = Re z, \quad b = Im z.$$

Элемент  $i$  (мнимая единица) такой, что  $i^2 = -1$ .

Комплексное число  $a + 0i$  отождествляется с действительным числом  $a$ , т.е.  $a + 0i = a$ , в частности,  $0 + 0i = 0$ . Числа вида  $bi$  ( $b \neq 0$ ) называют чисто мнимыми.

Правило равенства. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны коэффициенты мнимых частей.

Т.е., если  $a + bi = c + di$ , то  $a = c$ ,  $b = d$ : и, обратно, если  $a = c$ ,  $b = d$ , то  $a + bi = c + di$ .

Точка координатной плоскости, соответствующая комплексному числу  $z = x + yi$ : ее координатами могут быть расстояние  $r$  от начала координат и величина угла  $j$  между положительной полуосью  $Ox$  и лучом  $Oz$ .

Модуль комплексного числа как арифметическое (неотрицательное) значение корня:

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол  $j$  между положительной полуосью  $Ox$  и лучом  $Oz$  называют аргументом комплексного числа  $z = x + yi$ .

Сопряженные комплексные числа  $z = x + yi$  и  $\bar{z} = x - yi$  имеют один и тот же модуль

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и аргументы, отличающиеся знаком: } j = -j.$$

В отличие от модуля аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Аргумент одного и того же комплексного числа может иметь бесконечно много значений, отличающихся друг от друга на число, кратное  $360^\circ$ .

Пусть точке с координатами  $(x; y)$  соответствует комплексное число  $z = x + yi$ . Запишем это комплексное число через его модуль и аргумент. Воспользуемся определением тригонометрических функций синуса и косинуса:

$$x = r \cos j; y = r \sin j.$$

Тогда число  $z$  выражается через модуль и аргумент следующим образом:  $z = x + yi = r(\cos j + i \sin j)$ .

Выражение  $z = r(\cos j + i \sin j)$  называют тригонометрической формой комплексного числа, в отличии от выражения  $z = x + yi$ , называемого алгебраической формой комплексного числа.

### Действия над комплексными числами.

Сложение комплексных чисел выполняется по правилу:  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Вычитание комплексных чисел. Сложение допускает обратную операцию: для любых двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  всегда можно найти такое число  $z = x + iy$ , что  $z_2 + z = z_1$ . Таким образом,  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ .

Видим, что обе операции совершенно аналогичны действиям с векторами. Однако на следующей операции аналогия заканчивается.

Умножение комплексных чисел. Приняв во внимание, что  $i^2 = -1$ , и группируя действительные и мнимые части, находим

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Тот же результат можно представить и в тригонометрической форме: если

$$z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

$$\text{то } z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

(при умножении комплексных чисел перемножаются их модули и складываются аргументы).

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению: если  $z = z_1 : z_2$  и  $z_2 \neq 0$ , то частное  $z$  от деления  $z_1$  на  $z_2$  есть число, удовлетворяющее равенству  $zz_2 = z_1$ :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

### Формула Муавра.

Возведение в степень комплексного числа, т.е. вычисление  $z^n$  также может быть выполнено двумя способами. С одной стороны, можно  $n$  раз воспользоваться формулой умножения (формулой бинома Ньютона)

$$z^n = (x+iy)^n = (x^n - C_n^2 x^{n-2} y^2 + C_n^4 x^{n-4} y^4 - \dots) + i(nx^{n-1} y - C_n^3 x^{n-3} y^3 + C_n^5 x^{n-5} y^5 - \dots)$$

Здесь  $C_n^j$  означает биномиальный коэффициент:  $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ . С другой стороны, вспомнив правило умножения чисел в тригонометрической форме, можно получить формулу Муавра:

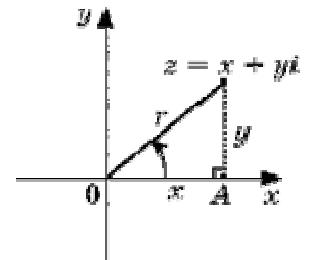
$$z^n = r^n(\cos \phi + i \sin \phi)^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

Извлечение корня из комплексного числа или вычисление числа  $w = \sqrt[n]{z}$  такого, что  $w^n = z$  может быть произведено с использованием формулы Муавра

$$w = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\phi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\phi + 2\pi k}{n} \right)$$

Здесь параметр  $k$  может пробегать любые целые значения, но реально последняя формула содержит только  $n$  различных значений для  $w$ ; они соответствуют  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ . На комплексной плоскости все эти значения расположены на окружности радиуса  $\sqrt[n]{r}$  с центром в начале координат и они делят эту окружность на  $n$  равных дуг.

### Геометрическая интерпретация.



Геометрическая интерпретация комплексных чисел состоит в том, что каждому комплексному числу  $z = x + yi$  ставится в соответствие точка  $(x, y)$  координатной плоскости таким образом, что действительная часть комплексного числа представляет собой абсциссу, а коэффициент при мнимой части – ординату точки.

### Лекция № 5 (2 часа)

#### Тема: «Предел функции. Производная»

##### 1 Вопросы лекции:

- 1.1 Предел функции в точке. Теоремы о пределах.
- 1.2 Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их связь и основные свойства.
- 1.3 Раскрытие неопределенностей.
- 1.4 Первый и второй замечательные пределы. Обобщенный второй замечательный предел.
- 1.5 Таблица эквивалентных бесконечно малых, ее использование при вычислении пределов.
- 1.6 Непрерывность функции в точке и на промежутке.
- 1.7 Приращение аргумента и приращение функции.
- 1.8 Понятие производной функции.
- 1.9 Геометрический, механический, биологический смыслы производной.
- 1.10 Правила дифференцирования.
- 1.11 Производные основных элементарных функций.

## 2. Краткое содержание вопросов

### Предел функции в точке. Теоремы о пределах.

Пусть  $a$  – точка числовой прямой,  $a \in (b; c)$ . Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $E = \{x | x \in (b; c) \setminus \{a\}\}$ .

Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  (обозначается  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ), если для любого положительного числа  $\varepsilon (\forall \varepsilon > 0)$  существует такое положительное число  $\delta (\exists \delta > 0)$  такое, что для любого  $x (\forall x)$  такого, что  $0 < |x - a| < \delta, x \in E$ , выполнено неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Число  $A_1$  называется *пределом функции*  $f(x)$  слева в точке  $a$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in (a - \delta; a)$  выполняется неравенство  $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ .

Число  $A_2$  называется *пределом функции*  $f(x)$  справа в точке  $a$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in (a; a + \delta)$  выполняется неравенство  $|f(x) - A_2| < \varepsilon$ .

Предел слева обозначается  $A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  предел справа –  $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$

Эти пределы характеризуют поведение функции слева и справа от точки  $a$ . Их часто называют односторонними пределами.

Если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такая  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta, x \neq a$ , выполняется неравенство  $|f(x)| > \varepsilon$ , то говорят, что функция  $f(x)$  имеет в точке  $a$  бесконечный предел:

Если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любого  $x > \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , то говорят, что предел функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к плюс бесконечности, равен  $A$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

Аналогично формулируется определение предела при  $x$ , стремящемся к минус бесконечности:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

### Свойства пределов

Если существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и существует  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B;$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A - B;$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B;$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

**Теорема:** Если в некоторой окрестности точки  $a$  выполняется неравенство  $g(x) < f(x) < h(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

**Замечание.** В дальнейшем будем пользоваться тем, что для любой элементарной функции  $f(x)$  и любой точки  $a$  из ее области определения справедливо соотношение  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

### Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их связь и основные свойства.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ , если для любого положительного числа  $C$  существует окрестность точки  $a$  такая, что  $|f(x)| > C$  для любого  $x$  из выбранной окрестности точки  $a$  и принадлежащего области определения функции  $f(x)$ . Обозначение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty)$$

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , если для любого положительного числа  $C$  существует окрестность точки  $a$  такая, что  $|f(x)| < C$  для любого  $x$  из выбранной окрестности точки  $a$  и принадлежащего области определения функции  $f(x)$ . Обозначение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Сформулируем основные соотношения для бесконечно больших и бесконечно малых функций.

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ , и обратно, если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \infty$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = +\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = +\infty$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \infty$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A \neq 0, f_2(x) \neq 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$ .

### Раскрытие неопределенностей.

#### Вычисление предела в случае неопределенности

При вычислении пределов могут возникнуть ситуации, когда непосредственное применение теорем о свойствах пределов, бесконечно больших и бесконечно малых функций не дает возможность их вычислить. Такое положение возможно в следующих случаях:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad (\text{символически обозначается } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix});$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (\text{символически обозначается } \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x));$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (\text{символически обозначается } [0 \cdot \infty]).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x));$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (\text{символически обозначается } [\infty - \infty]).$$

В том случае, когда имеет место неопределенность, для вычисления предела – “раскрытия неопределенности” – преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные соотношения или сравнения поведения функций при стремлении  $x \rightarrow a$  (соотношения эквивалентностей).

### Первый и второй замечательные пределы.

Для вычисления пределов часто используют так называемые замечательные пределы:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e. \end{aligned}}$$

**Таблица эквивалентных бесконечно малых, ее использование при вычислении пределов.**

Функция  $f(x)$  эквивалентна функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$  ( $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow a$ ), если существует такая функция  $\alpha(x)$ , что  $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ .

#### Основные эквивалентности при $x \rightarrow 0$

$$\sin x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\begin{aligned} a^x - 1 &\sim x \ln a \\ \ln(1 + x) &\sim x \\ \log_a(1 + x) &\sim \frac{x}{\ln a} \\ (1 + x)^m - 1 &\sim mx \end{aligned}$$

### Непрерывность функции в точке и на промежутке.

Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке $x_0$ , если предел функции при  $x \rightarrow x_0$  равен значению функции в этой точке.

Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной на некотором промежутке, если она непрерывна в каждой точке данного промежутка.

### Приращение аргумента и приращение функции.

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , определенную на некотором интервале  $(a; b)$ .

**Определение.** Разность  $x - x_0 = \Delta x$  ( $x, x_0 \in (a; b)$ ) называют *приращением аргумента* в точке  $x_0$ .

**Определение.** Разность  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$  называют *приращением функции*  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

### Понятие производной функции.

**Определение.** Если существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к 0, то его называют *производной функции в точке*  $x_0$  и обозначают  $f'(x_0)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Нахождение производной называется дифференцированием функции.

### Геометрический, механический, биологический смыслы производной.

**Геометрический смысл производной** состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке  $x_0$ ; **физический смысл** – в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении  $s = s(t)$  в момент времени  $t_0$ ; **биологический смысл**: если зависимость между числом особей популяции микроорганизмов  $y$  и временем  $t$  ее размножения задана уравнением  $y = p(t)$ , то  $p'(t)$  – производительность жизнедеятельности популяции микроорганизмов в момент времени  $t$ .

### Правила дифференцирования.

1.  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$
2.  $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x);$
3.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$
4.  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x),$  где  $c$  – число;
5.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, g(x) \neq 0$

### Производные основных элементарных функций.

$$(c)' = 0,$$

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$

$$\text{частные случаи: } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$\text{частный случай: } (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$\text{частный случай: } (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

## Лекция № 6 (2 часа)

Тема: «Приложение производной»

1 Вопросы лекции:

- 1.1 Исследование функции с помощью производных. Общий план исследования.
- 1.2 Признаки возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.
- 1.3 Признаки выпуклости и вогнутости функции. Нахождение точек перегиба.

### 2. Краткое содержание вопросов

**Исследование функции с помощью производных. Общий план исследования.**

1. Найти область определения функции.
2. Определить поведение функции на границах области определения.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти промежутки знакопостоянства.
5. Исследовать функцию на четность и периодичность.
6. Найти промежутки монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции.
9. Исследовать функцию на существование вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.
10. Построить график функции.

**Признаки возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.**

**Теорема.** Для того чтобы дифференцируемая на промежутке  $X$  функция  $y = f(x)$  была возрастающей (убывающей) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $x \in X$  выполнялось условие  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ).

**Определение.** Точку  $x_0 \in D(f)$  называют точкой максимума (минимума) функции  $y = f(x)$  с областью определения  $D(f)$ , если существует интервал  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , где  $\delta > 0$ ,

содержащийся в  $D(f)$ , такой, что для каждого  $x \neq x_0$  из этого интервала выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ).

Другими словами, точка  $x_0$  — точка максимума (минимума), если значение функции в этой точке больше (меньше), чем значение функции во всех других точках интервала  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  с центром в точке  $x_0$ , принадлежащего области определения.

**Определение.** Точки максимума и минимума называют *точками экстремума* функции, а значения функции в этих точках называют *экстремумами функции*.

**Признак экстремума:** Если функция  $y = f(x)$  возрастает (убывает) на некотором интервале  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , содержащемся в  $D(f)$  и убывает (возрастает) на интервале  $(x_0; x_0 + \delta)$ , содержащемся в  $D(f)$ , то точка  $x_0 \in D(f)$  — точка локального максимума (минимума) функции  $y = f(x)$ .



$= f(x)$ .

### Признаки выпуклости и вогнутости функции. Нахождение точек перегиба.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  выпукла вверх (выпукла вниз) в точке  $x_0$ , если существует интервал  $(x_0 + \delta; x_0 - \delta), \delta > 0$  такой, что для всех его точек  $x$  касательная к графику функции в точке  $M(x_0; y_0)$  лежит выше (ниже) графика.

**Теорема:** Для того чтобы график дважды дифференцируемой на интервале  $(a; b)$  функции  $y = f(x)$  был выпуклым вверх (выпуклым вниз) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $x \in (a; b)$  выполнялось неравенство

$$f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0).$$

Точки, в которых  $f''(x) = 0$  или не существует, называют точками перегиба графика функции  $y = f(x)$ .

### Лекция № 7 (2 часа)

Тема: «Неопределенный и определенный интеграл»

#### 1 Вопросы лекции:

- 1.1 Первообразная и ее свойства.
- 1.2 Неопределенный интеграл, его свойства.
- 1.3 Таблица неопределенных интегралов.
- 1.4 Простейшие приемы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей. Рекуррентная формула.
- 1.5 Задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Понятие интегральной суммы. Определенный интеграл.
- 1.6 Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла.
- 1.7 Простейшие приложения определенного интеграла.

#### 2. Краткое содержание вопросов

Первообразная и ее свойства.

*Определение.* Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на интервале  $X=(a,b)$  (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала  $f'(x) = f(x)$  является производной для  $F(x)$ , т.е.

Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции  $f(x)$  требуется найти функцию  $F(x)$ , производная которой равна  $f(x)$ . Первообразная определена неоднозначно: для функции

$\frac{1}{1+x^2}$  первообразными будут и функция  $\arctg x$ , и функция  $\arctg x - 10$ :  
 $(\arctg x)' = (\arctg x - 10)' = \frac{1}{1+x^2}$ . Для того, чтобы описать все множество первообразных функции  $f(x)$ , рассмотрим

### Свойства первообразной.

1. Если функция  $F(x)$  - первообразная для функции  $f(x)$  на интервале  $X$ , то функция  $F(x) + C$ , где  $C$  - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для  $f(x)$  на этом интервале. (Док-во:  $F'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$ ).

2. Если функция  $F(x)$  - некоторая первообразная для функции  $f(x)$  на интервале  $X=(a,b)$ , то любая другая первообразная  $F_1(x)$  может быть представлена в виде  $F_1(x) = F(x) + C$ , где  $C$  - постоянная на  $X$  функция.

3. Для любой первообразной  $F(x)$  выполняется равенство  $dF(x) = f(x) dx$ .

Из этих свойств следует, что если  $F(x)$  - некоторая первообразная функции  $f(x)$  на интервале  $X$ , то всё множество первообразных функции  $f(x)$  (т.е. функций, имеющих производную  $f(x)$  и дифференциал  $f(x) dx$ ) на этом интервале описывается выражением  $F(x) + C$ , где  $C$  - произвольная постоянная.

### Неопределенный интеграл, его свойства.

*Определение.* Множество всех первообразных  $F(x) + C$  для функции  $f(x)$  на  $(a; b)$  называют **неопределенным интегралом** и обозначают  $\int f(x) dx$ .  $f(x)$  называется подинтегральной функцией,  $f(x) dx$  – подинтегральным выражением,  $x$  – переменной интегрирования.

### Свойства неопределенного интеграла

1.  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ ;
2.  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ ;
3.  $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$ ;
4.  $(\int f(x) dx)' = f(x)$ ;
5.  $\int dF(x) = F(x) + C$ ;

### Таблица неопределенных интегралов.

- 1)  $\int 0 dx = C$ ;
- 2)  $\int 1 dx = x + C$ ;
- 3)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ ;
- 4)  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$ ;
- 5)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), \int e^x dx = e^x + C$ ;

- 6)  $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ ;
- 7)  $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ ;
- 8)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right)$ ;
- 9)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z})$ ;
- 10)  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ ;
- 11)  $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C$ ;
- 12)  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln \frac{1+x}{1-x} + C$ ;
- 13)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ ;
- 14)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$ .

**Простейшие приемы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей. Рекуррентная формула.**

### 1. Метод непосредственного интегрирования.

Интеграл вычисляется с помощью таблицы основных неопределенных интегралов и правил интегрирования.

### 2. Метод замены переменной.

Пусть требуется найти неопределенный интеграл  $\int f(x) \, dx$ , который нельзя вычислить с помощью таблицы интегралов и правил интегрирования. Обозначим подинтегральную функцию или ее часть за новую переменную  $g(x) = t$ . Выразим переменную  $x$  через  $t$ :  $x = \varphi(t)$  и найдем  $dx$ :

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$$

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

Таким образом,

### 3. Метод интегрирования по частям.

Пусть функции  $U(x)$  и  $V(x)$  имеют непрерывные производные на некотором промежутке  $(a; b)$ . Тогда на этом промежутке справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int U \, dV = UV - \int V \, dU$$

Как правило, данным методом пользуются, когда подинтегральная функция представлена произведением функций. Тогда одну функцию обозначают за  $U$ , а оставшееся выражение за  $dV$ , так чтобы вновь полученный интеграл стал легче.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

4. Для **интегрирования рациональной функции**, где  $P(x)$  и  $Q(x)$  - полиномы, используется следующая последовательность шагов:

1. Если дробь неправильная (т.е. степень  $P(x)$  больше степени  $Q(x)$ ), преобразовать ее в правильную, выделив целое выражение;
2. Разложить знаменатель  $Q(x)$  на произведение одночленов и/или несократимых квадратичных выражений;
3. Разложить рациональную дробь на простейшие дроби, используя *метод неопределенных коэффициентов*;
4. Вычислить интегралы от простейших дробей.

Рассмотрим указанные шаги более подробно.

### **Шаг 1. Преобразование неправильной рациональной дроби**

Если дробь неправильная (т.е. степень числителя  $P(x)$  больше степени знаменателя  $Q(x)$ ), разделим многочлен  $P(x)$  на  $Q(x)$ . Получим следующее выражение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \text{ где } \frac{R(x)}{Q(x)} - \text{правильная рациональная дробь.}$$

### **Шаг 2. Разложение знаменателя на простейшие дроби**

Запишем многочлен знаменателя  $Q(x)$  в виде

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} (x^2 + px + q)^{\mu} \cdots (x^2 + rx + s)^{\nu},$$

где квадратичные функции являются несократимыми, то есть не имеющими действительных корней.

### **Шаг 3. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей.**

Запишем рациональную функцию в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \dots + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\ &+ \frac{Kx+L}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{K_1x+L_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{K_{\mu-1}x+L_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \dots + \frac{Mx+N}{(x^2+rx+s)^{\nu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+rx+s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{x^2+rx+s}. \end{aligned}$$

Общее число неопределенных коэффициентов  $A_i, B_i, K_i, L_i, M_i, N_i, \dots$  должно быть равно степени знаменателя  $Q(x)$ .

Затем умножим обе части полученного уравнения на знаменатель  $Q(x)$  и приравняем коэффициенты при слагаемых с одинаковыми степенями  $x$ . В результате мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_i, B_i, K_i, L_i, M_i, N_i, \dots$ . Данная система всегда имеет единственное решение. Описанный алгоритм представляет собой *метод неопределенных коэффициентов*.

### **Шаг 4. Интегрирование простейших рациональных дробей.**

Простейшие дроби, полученные при разложении произвольной правильной рациональной дроби, интегрируются с помощью следующих шести формул:

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = \ln|x-a|$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}$$

У дробей с квадратичным знаменателем сначала необходимо выделить полный квадрат:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \int \frac{Ax+B'}{(t^2+m^2)^k},$$

$$\text{где } t = x + \frac{p}{2}, \quad m^2 = \frac{4q-p^2}{4}, \quad B' = B - \frac{Ap}{2}. \quad \text{Затем применяются следующие формулы:}$$

$$3. \int \frac{tdt}{t^2+m^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2+m^2)$$

$$4. \int \frac{tdt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}}$$

$$5. \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{m}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$$

Интеграл  $\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$  может быть вычислен за  $k$  шагов с помощью формулы редукции

$$6. \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}$$

1. Формулы приведения позволяют понизить или повысить степень подынтегральной функции и последовательно свести интеграл к известному. Этот процесс можно рассматривать как задание *рекуррентной функции*, то есть такой функции, вид которой определяется через её значения при меньшем значении некоторого параметра. В нашем случае этим параметром будет показатель степени.

Рассмотрим интеграл вида:

$$\int [f(x)]^n dx, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Применим к нему интегрирование по частям, полагая  $u = [f(x)]^n$ , тогда:

$$\int [f(x)]^n dx = x[f(x)]^n - n \int [f(x)]^{n-1} x f'(x) dx.$$

Если удастся каким-либо способом представить интеграл  $\int [f(x)]^{n-1} x f'(x) dx = \varphi(x) + C \int [f(x)]^{n-1} dx$ , где  $\varphi(x)$  некоторая функция (возможно содержащая какой-то интеграл функции от  $x$  и  $f'(x)$ , но не содержащая в явной форме интеграл от  $[f(x)]^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ),  $C = \text{const}$ , то мы можем выразить интеграл через интеграл с меньшей степенью:

$$\int [f(x)]^n dx = \varphi(x) + C \int [f(x)]^{n-1} dx$$

или, если рассматривать интеграл как функцию параметра  $n$ :

$$I_n = \varphi(x) + C I_{n-1}.$$

Заменяя  $n$  на  $n+1$ , будем иметь выражение, связывающее последующее значение с предыдущим:

$$I_{n+1} = \varphi(x) + C I_n.$$

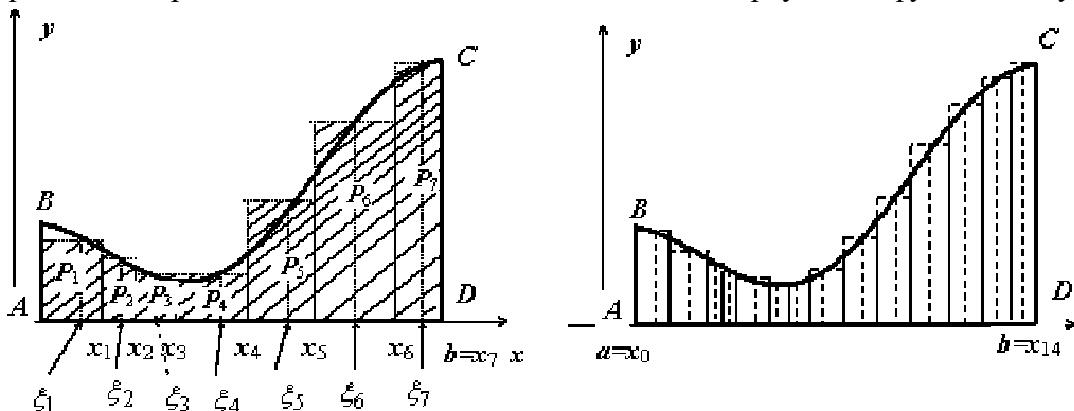
В общем случае:

$$I_{n+1} = \varphi(x) + C_1 I_n + C_2 I_{n-1} + \dots$$

**Задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Понятие интегральной суммы. Определенный интеграл.**

#### Вычисление площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке  $[a,b]$  ( $b > a$ ) задана непрерывная функция  $y = f(x)$ , принимающая на этом отрезке неотрицательные значения:  $f(x) \geq 0$  при  $x \in [a, b]$ . Требуется определить площадь  $S$  криволинейной трапеции  $ABCD$ , ограниченной снизу отрезком  $[a, b]$ , слева и справа - прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , сверху - функцией  $y = f(x)$ .



Для решения этой задачи разделим произвольным образом основание  $AD$  фигуры точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  на  $n$  частей  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ; символом  $\Delta x_i$  будем обозначать длину  $i$ -го отрезка:  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$ . На каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  выберем произвольную точку  $\xi_i$ , найдём  $f(\xi_i)$ , вычислим

произведение  $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$  (это произведение равно площади прямоугольника  $P_i$  с основанием  $[x_{i-1}, x_i]$  и высотой  $\xi_i$ ) и просуммируем эти произведения по всем прямоугольникам. Полученную сумму обозначим  $S_{\text{ступ}}$  ступенчатой фигуры, т.е.

$$S_{\text{ступ}} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

$S_{\text{ступ}}$  равно площади ступенчатой фигуры, образованной прямоугольниками  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; на левом рисунке эта площадь заштрихована.  $S_{\text{ступ}}$  не равна искомой площади  $S$ , она только даёт некоторое приближение к  $S$ . Для того, чтобы улучшить это приближение, будем увеличивать количество  $n$  отрезков таким образом, чтобы максимальная длина этих

отрезков  $\max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i$  стремилась к нулю (на рисунке ступенчатые фигуры изображены при  $n = 7$  (слева) и при  $n = 14$  (справа)). При  $\max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) разница между  $S_{\text{ступ}}$  и  $S$  будет тоже стремиться к нулю, т.е.

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ i=1,2,\dots,n}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

### Определение определённого интеграла.

Пусть на отрезке  $[a,b]$  задана функция  $y = f(x)$ . Разобъём отрезок  $[a,b]$  произвольным образом на  $n$  частей точками  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ; длину  $i$ -го отрезка обозначим  $\Delta x_i$ :  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ; максимальную из длин отрезков обозначим  $\lambda$ :  $\lambda = \max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i$ .

На каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  выберем произвольную точку  $\xi_i$  и составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Сумма  $\sigma$  называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм  $\sigma$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , не зависящий ни от способа разбиения отрезка  $[a,b]$  на части  $[x_{i-1}, x_i]$ , ни от выбора точек  $\xi_i$ , то функция  $f(x)$  называется интегрируемой по отрезку  $[a,b]$ , а этот предел называется определённым интегралом от функции  $f(x)$  по отрезку  $[a,b]$  и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx$$

Функция  $f(x)$ , как и в случае неопределённого интеграла, называется подынтегральной, числа  $a$  и  $b$  - соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Кратко определение иногда записывают так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ i=1,2,\dots,n}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

В этом определении предполагается, что  $b > a$ . Для других случаев примем, тоже по

определению:

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \int_a^a f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Если  $b=a$ , то  $\int_a^a f(x)dx = 0$ ; если  $b < a$ , то  $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$ .

### Теорема существования определённого интеграла.

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a,b]$ , то она интегрируема по этому отрезку.

### Геометрический смысл определённого интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Если  $f(x) > 0$  на отрезке  $[a,b]$ , то  $\int_a^b f(x)dx$  равен площади криволинейной трапеции  $ABCD$ , ограниченной снизу отрезком  $[a,b]$ , слева и справа - прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , сверху - функцией  $y = f(x)$ .

### Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла.

#### Вычисление определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , и  $F(x)$  - некоторая первообразная функции  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.** Если  $u(x)$ ,  $v(x)$  - непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

**Замена переменной в определённом интеграле. Теорема.** Пусть функция  $x = \varphi(t)$

1. определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ ,
2.  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ,
3. функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

### Свойства определённого интеграла.

**1. Линейность.** Если функции  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  интегрируемы по отрезку  $[a,b]$ , то по этому отрезку интегрируема их линейная комбинация  $Af(x) + Bg(x)$  ( $A, B = \text{const}$ ),

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]dx = A \int_a^b f(x)dx + B \int_a^b g(x)dx$$

**2. Аддитивность.** Если  $y = f(x)$  интегрируема по отрезку  $[a,b]$  и точка  $c$  принадлежит этому отрезку, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. **Интеграл от единичной функции** ( $f(x) = 1$ ). Если  $f(x) = 1$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dx = b - a$$

**4. Теорема об интегрировании неравенств.** Если в любой точке  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство  $f(x) \leq g(x)$ , и функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  интегрируемы по отрезку  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

### 5. Теоремы об оценке интеграла.

**5.1.** Если на отрезке  $[a, b]$  функция удовлетворяет неравенству  $m \leq f(x) \leq M$ , то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

**5.2.** Если функция  $f(x)$  интегрируема по отрезку  $[a, b]$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**6. Теорема о среднем.** Если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то существует точка  $c \in [a, b]$ , такая что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

### Простейшие приложения определенного интеграла.

Выше был описан геометрический смысл определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции.

Если же  $f(x) \leq 0$  на  $[a ; b]$ , то  $-f(x) \geq 0$  на  $[a ; b]$ . Поэтому площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = - \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (2)$$

Наконец, если линия  $y = f(x)$  пересекает ось  $Ox$ , то отрезок  $[a ; b]$  надо разбить на части, в пределах которых  $f(x)$  не меняет знака, и к каждой части применить ту из формул (1) или (2), которая ей соответствует.

### Вычисление длины дуги и площади поверхности.

Длиной дуги называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю.

Длина дуги  $AB$ , заданной уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$  ( $f(x)$  — функция, имеющая на  $[a ; b]$

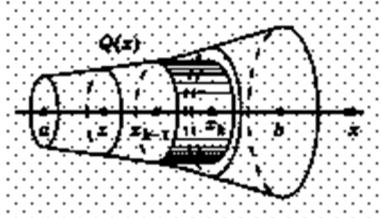
непрерывную производную), выражается формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4)$$

а площадь  $S$  поверхности вращения этой дуги вокруг оси  $Ox$  — формулой

Объем  $V$  тела  $B$ , заключенного между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ , у которого площадь перпендикулярного оси  $Ox$  сечения для каждого  $x$  из отрезка  $[a ; b]$  есть функция  $Q(x)$  ( $Q(x)$  непрерывна на  $[a ; b]$ ), находится по формуле

$$V = \int_a^b Q(x) dx \quad (6)$$



В частности, если тело образовано вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой  $y =$

$$f(x) (f(x) \geq 0), \text{ осью } Ox \text{ и прямыми } x=a, x=b, (a < b), \text{ то } \mathcal{Q}(x) = \pi f^2(x), \text{ а значит, } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad \text{или}$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (7)$$

## Лекция № 8 (2 часа)

Тема: «Теория вероятности и математическая статистика»

### 1 Вопросы лекции:

- 1.1 Теория вероятностей.
- 1.2 Элементы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.
- 1.3 События, виды событий: достоверное, невозможное, случайное. Случайные процессы.
- 1.4 Относительная частота событий и ее свойства. Классическое определение вероятности и ее свойства.
- 1.5 Сложение и умножение событий.
- 1.6 Совместные, несовместные, зависимые и независимые события.
- 1.7 Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.
- 1.8 Теорема полной вероятности. Формулы Байеса.
- 1.9 Понятие случайной величины. Примеры случайных величин. Виды случайных величин.
- 1.10 Дискретная случайная величина, ее закон распределения.
- 1.11 Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Свойства математического ожидания и дисперсии ДСВ.
- 1.12 Непрерывная случайная величина. Интегральная функция распределения и ее свойства.

### 2. Краткое содержание вопросов

#### Теория вероятностей.

Теория вероятностей – это математическая наука о количественных закономерностях моделей случайных явлений независимо от их конкретной природы.

#### Элементы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.

*Комбинаторикой* называется раздел математики, изучающий вопрос о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

*Размещениями* из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов ( $m \leq n$ ) называются комбинации, составленные из данных  $n$  элементов по  $m$  элементов и отличающиеся либо самими элементами, либо порядком элементов.

*Число различных размещений* из  $n$  элементов по  $m$  элементов (обозначение:  $A_n^m$ ) определяется по формуле  $A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - m + 1)$ .

*Перестановками* из  $n$  различных элементов называются размещения их этих  $n$  элементов по  $n$ .

Как видно из определений, перестановки можно считать частным случаем размещений при  $m = n$ .

Следовательно, число всех перестановок из  $n$  элементов (обозначение:  $P_n$ ) находится по формуле  $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

*Сочетаниями* из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов называются комбинации, составленные из данных  $n$  элементов по  $m$  элементов и отличающиеся хотя бы одним элементом.

Отметим *разницу* между сочетаниями и размещениями: в сочетаниях не учитывается порядок элементов, а в размещениях — учитывается. Число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$

элементов (обозначение:  $C_n^m$ , иногда  $\binom{n}{m}$ ) находится по формуле  $C_n^m = \frac{n!}{m! (n - m)!}$

*Свойства сочетаний.* 1.  $C_n^1 = n$ ;  $C_n^0 = C_n^n = 1$

$$2. \quad C_n^m = C_n^{n-m} \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$3. \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \quad 4. \quad C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

**События, виды событий: достоверное, невозможное, случайное.**

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются **испытаниями**.

Примерами испытаний являются: бросание монеты, извлечение шара из урны, бросание игральной кости.

Результат, исход испытания называется **событием**.

Событиями являются: выпадение герба или цифры, взятие белого или черного шара, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости. Для обозначения событий используются заглавные буквы латинского алфавита:  $A, B, C$  и т. д.

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события  $A$  и  $\bar{A}$  называются противоположными, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит.

Событие называется **достоверным**, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и **невозможным**, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Событие  $A$  называется **случайным**, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

**Относительная частота событий и ее свойства. Классическое определение вероятности и ее свойства.**

**Определение. Относительной частотой (частостью) события называется число**

$$P^*(A) = \frac{M}{N}, \quad (11.4.1)$$

где  $M$  — число появлений события  $A$ ,  $N$  — общее число проведенных испытаний.

**Свойства частоты события.**

1<sup>o</sup>. Частота события — величина безразмерная и изменяется на множестве

$$[0, 1] = \{P^*(A) : 0 \leq P^*(A) \leq 1\}. \quad (11.4.2)$$

2<sup>o</sup>. Частота достоверного события равна 1.

3<sup>o</sup>. Частота невозможного события равна 0.

4<sup>o</sup>. Частота случайного события изменяется на множество  $(0, 1)$ .

Свойства 1<sup>o</sup>—4<sup>o</sup> легко доказываются с помощью определения частоты и классификации событий. Так, например, пусть событие  $A$  достоверно. Это означает, что в серии из  $N$  испытаний оно наступило  $N$  раз

$$P^*(A) = \frac{N}{N} = 1.$$

**Вероятностью**  $P(A)$  события  $A$  называется отношение числа элементарных событий,

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

благоприятствующих событию  $A$ , к числу всех элементарных событий, т. е.

Из классического определения вероятности следует: 1) **вероятность достоверного события** равна единице; 2) **вероятность невозможного события** равна нулю; 3) **вероятность любого события**  $A$  удовлетворяет условию  $0 \leq P(A) \leq 1$ ; 4) **элементарные события являются равновероятными**, т. е. обладают одной и той же вероятностью.

**Сложение и умножение событий.**

**Суммой** событий А и В называют событие С, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А или В.

**Произведением** событий  $A$  и  $B$  называют событие  $C$ , состоящее в совместном наступлении событий  $A$  и  $B$ .

**Совместные, несовместные, зависимые и независимые события.**

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет.

В противном случае события  $A$  и  $B$  называют зависимыми.

**Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность.**

**Теорема.** Вероятность суммы двух несовместных событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий:  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

Точно так же формулируется теорема и для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

**Следствие.** Сумма вероятностей противоположных событий  $A$  и  $\bar{A}$  равна единице:  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .

Пусть  $A$  и  $B$  — зависимые события. **Условной вероятностью**  $P_{A|B}$  события  $B$  называется вероятность события  $B$ , найденная в предположении, что событие  $A$  уже наступило.

**Теорема 1.** Вероятность произведения двух зависимых событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:  $P(AB) = P(A) \cdot P_{A|B}$  (1)

**Теорема 2.** Вероятность произведения двух независимых событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятностей этих событий:  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$  (2)

**Теорема.** Вероятность суммы двух совместимых событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ . Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то их произведение  $A \cdot B$  — невозможное событие и, следовательно,  $P(A \cdot B) = 0$ , т. е.  $P(A+B) = P(A) + P(B)$

**Теорема полной вероятности. Формулы Байеса.**

**Теорема.** Пусть интересующее нас случайное событие может произойти при некоторых условиях  $H_1, H_2, \dots, H_n$  (гипотезы), которые сами являются образующими полную

$$\sum_{i=1}^n H_i = \Omega$$

группу случайными событиями:  $H_i \cdot H_j = U$  — невозможное событие при любых  $i \neq j$ . Тогда вероятность события  $A$  при этих условиях может быть определена соотношением

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$$

В ряде случаев приходится иметь дело с опытами, в которых случайным образом может присутствовать то или иное условие. Проводится опыт и по полученным результатам возникает необходимость выяснить, какова вероятность того, что в проведенном опыте присутствовало одно из возможных случайных условий.

**Теорема (Байеса).** Пусть  $H_1, H_2, \dots, H_n$  — полная группа событий. Тогда

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P_{H_j}(A)}$$

**Понятие случайной величины. Примеры случайных величин. Виды случайных величин.**

Случайной величиной называется переменная, которая может принимать те или иные значения в зависимости от различных обстоятельств.

Случайная величина называется дискретной, если все ее значения изолированы и их можно занумеровать.

Случайная величина называется непрерывной, если ее значения заполняют конечный или бесконечный промежуток.

Случайные величины обозначают заглавными латинскими буквами  $A, B, C$ , и т.д., а их значения малыми латинскими буквами  $x_1, x_2, x_3$ , и т.д.

## Дискретная случайная величина, ее закон распределения.

### Закон распределения дискретной случайной величины

Функция  $P(x)$ , связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, представляет собой закон распределения дискретной, случайной величины. Его удобно задавать в виде таблицы, в верхней строчке которой расположены все возможные значения случайной величины, а в нижней строчке расположены соответствующие им вероятности:  $p_i = P(X = x_i)$ .

Значение	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Вероятность	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

События  $X = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются несовместимыми и единственными возможными, т.е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма вероятностей их равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Закон распределения можно представить графически. Для этого на плоскости в прямоугольной системе координат строят точки с координатами  $(x_i, p_i)$ . А затем соединяют их последовательно отрезками прямой. В результате получают многоугольник распределения вероятностей случайной величины.

**Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Свойства математического ожидания и дисперсии ДСВ.**

#### Математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Свойства:

- 1)  $M(C) = C$ ,  $C$  - постоянная;
- 2)  $M(CX) = CM(X)$ ;
- 3)  $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$ , где  $X_1, X_2$  - независимые случайные величины;
- 4)  $M(X_1 X_2) = M(X_1)M(X_2)$ .

#### Дисперсия

$$D(X) = M |(X - M(X))^2|, \quad D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Свойства:

- 1)  $D(C) = 0$ ;
- 2)  $D(CX) = C^2 D(X)$ ;
- 3)  $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$ , где  $X_1, X_2$  - независимые случайные величины.

#### Среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

## Непрерывная случайная величина. Интегральная функция распределения и ее свойства.

Интегральной функцией распределения случайной величины  $X$  называется функция  $F(x)$ , выражаяющая для каждого  $x$  вероятность того, что случайная величина  $X$  примет какое-нибудь значение, меньшее  $x$ :

$$F(x) = P(X < x).$$

#### Свойства функции распределения

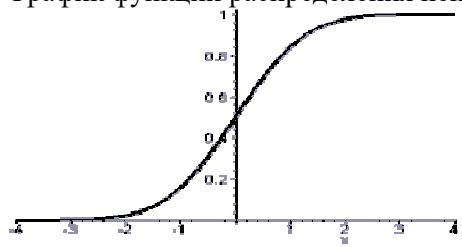
1. Если  $F(x)$  – интегральная функция распределения, то  $0 \leq F(x) \leq 1$  для любого  $x$ . Это следует из определения функции распределения, поскольку вероятность любого события заключена в промежутке от 0 до 1.

2. Функция распределения не убывает и  $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ .
3. Если  $F$  – функция распределения, то  $F(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $F(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ .
4. Если  $x$  – есть точка непрерывности функции распределения случайной величины  $X$ , то  $P(X = x) = 0$ .

5. Если  $x_1$  – есть точка непрерывности для функции распределения  $F$  случайной величины  $X$ , то

$$p(x_1 \leq X < x_2) = p(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

График функции распределения непрерывной случайной величины имеет вид



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Факультет среднего профессионального образования**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ  
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
ЕН.01 Математика**

**Специальность 21.02.05 Земельно-имущественные отношения**

**Форма обучения очная**

Оренбург, 2022 г.

## 1 Матрицы и определители.

### 1.1 Вопросы к занятию

1. Действия с матрицами.
2. Обратная матрица.
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Определители второго порядка.
5. Определители третьего порядка.
6. Определители высших порядков.

1.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующих вопросах: условия, накладываемые на матрицы для операций сложение, вычитание и произведение матриц; условия существования обратной матрицы. При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на следующих вопросах: правило треугольника, применение миноров и алгебраических дополнений к вычислению определителей: разложение определителя по элементам строки или столбца.

**Пример 1.** Даны 2 матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Найти:  $A + B$ ,  $A - B$ ,  $AxB$ ,  $A^T$ .

**Решение:** Согласно определению операций над матрицами:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 0+1 \\ 4+0 & 2+1 & 1+2 \\ 1+3 & 1+1 & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 & 0-1 \\ 4-0 & 2-1 & 1-2 \\ 1-3 & 1-1 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 11 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Пример 2.** Методом элементарных преобразований найти  $A^{-1}$  для матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Решение. Приписываем к исходной матрице справа единичную матрицу того же порядка:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

С помощью элементарных преобразований столбцов приведем левую “половину” к единичной, совершая одновременно точно такие преобразования над правой матрицей.

Для этого поменяем местами первый и второй столбцы:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \text{ К третьему столбцу прибавим первый, а ко}\right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

второму - первый, умноженный на -2:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

удвоенный второй, а из третьего - умноженный на 6 второй;

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Прибавим третий столбец к первому и второму:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

следний столбец на -1: Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной матрицей к данной матрице A. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Пример 3.** Вычислить определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 18 - 21 = -3,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 7 \cdot 2 = 16 - 14 = 2,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = 4 - 7 = -3,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 7 \cdot 0 = -2 - 0 = -2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \cdot 0 -$$

$$-(-2) \cdot 7 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 3 \cdot 0 = -28 + 0 + 0 - 14 - 0 - 0 = -42$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 7 & 3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 6 \cdot 0 -$$

$$-(-2) \cdot 7 \cdot (-3) - 0 \cdot 6 \cdot (-4) - 3 \cdot 3 \cdot 0 = -84 + 0 + 42 - 0 - 0 - -126$$

**Пример 4.** Составить минор  $M_{23}$ , полученный из исходной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 3 & 7 & 15 \\ 4 & 8 & 16 \end{vmatrix}$$

**Пример 5.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ .

Решение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

**Пример 6.** Вычислить  $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{14} + 0 \cdot A_{11} =$$

$$= (-4) \cdot A_{12} + A_{22} + A_{32} = (-4) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-2) + (-16) - (-12) = -12$$

## 2. Системы линейных уравнений.

### 2.1 Вопросы к занятию

1. Системы линейных уравнений. Операции над уравнениями систем.
2. Основная и расширенная матрицы.
3. Ранг системы линейных уравнений. Критерий совместности системы.
4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
5. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.

2.2. При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на составлении основной и расширенной матриц для системы и составлении системы по известным

основной и расширенной матрицам, на правилах приведения матрицы к треугольному виду, определения ранга системы линейных уравнений, сравнение рангов основной и расширенной матриц.

**Пример 1.** Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Почти всегда здесь должна находиться единица. Вообще говоря, устроит и  $-1$  (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения.

Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Нули получаем как раз с помощью преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой  $(2, -1, 3, 13)$ . Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на  $-2$ . Умножаем первую строку на  $-2$ :  $(-2, -4, 2, -18)$ . И последовательно проводим сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на  $-2$ :

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой  $(3, 2, -5, -1)$ . Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на  $-3$ . Умножаем первую строку на  $-3$ :  $(-3, -6, 3, 27)$ . И к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на  $-3$ :

$$\begin{array}{cccc}
 0 & -4 & -2 & -28 \\
 \| & \| & \| & \| \\
 -3 & -6 & 3 & -27 \\
 + & + & + & + \\
 3 & 2 & -5 & -1
 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг: Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов последователен:

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & \textcircled{-5} & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на  $-5$  (поскольку там все числа делятся на  $5$  без остатка). Заодно делим третью строку на  $-2$ , ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array} \right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль

здесь:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & 14 \end{array} \right)$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на  $-2$ :

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Делим третью строку на  $3$ .

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ y-z=1 \\ z=4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат:  $z = 4$

Смотрим на второе уравнение:  $y - z = 1$ . Значение «зет» уже известно, таким образом:

$$y - 4 = 1$$

$$y = 5$$

И, наконец, первое уравнение:  $x + 2y - z = 9$ . «Игрек» и «зет» известны:

$$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$$

$$x + 6 = 9$$

$$x = 3$$

Ответ:  $x = 3, y = 5, z = 4$

### Пример 2:

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

**Решение:** Решим систему по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ = 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0, \text{ значит, система имеет единственное решение.}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = \\ = 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = \\ = 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = \\
 &= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60 \\
 x_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1
 \end{aligned}$$

Ответ:  $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$ .

### 3 Основные понятия теории множеств

#### 3.1 Вопросы к занятию

- Числовые множества. Операции над множествами.

3.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на приоритет операций над множествами.

**Пример 1.** Пусть  $A$  есть отрезок  $[1, 3]$ ,  $B$  - отрезок  $[2, 4]$ ; тогда объединением  $A \cup B$  будет отрезок  $[1, 4]$ , пересечением  $A \cap B$  - отрезок  $[2, 3]$ , разностью  $A \setminus B$  - полуинтервал  $[1, 2)$ ,  $B \setminus A$  - полуинтервал  $(3, 4]$ .

### 4 Комплексные числа.

#### 4.1 Вопросы к занятию

- Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
- Решение квадратных уравнений.
- Тригонометрическая форма комплексного числа.
- Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
- Использование формулы Муавра. Извлечение корня  $n$ -ой степени из комплексного числа.
- Области Комплексной плоскости.

4.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на приоритет извлечения квадратного корня из отрицательного числа, решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом, на вычислении модуля и аргумента комплексного числа, правилах изображения комплексного числа на комплексной плоскости.

$$(5+3i)+(3-i)=8+2i;$$

$$(5+3i)-(3-i)=2+4i;$$

$$(3+2i)(4-i)=12-3i+8i-2i^2=14+5i;$$

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)} = \frac{-11+29i}{74} = -\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i;$$

**Пример 2.** Решите уравнение:

a)  $x^2 - 6x + 13 = 0$

*Решение.* Найдем дискриминант по формуле

$$D = b^2 - 4ac.$$

Так как  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 13$ , то

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16;$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = 4i.$$

Корни уравнения находим по формулам

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

$$x_1 = \frac{6 - 4i}{2} = \frac{2(3 - 2i)}{2} = 3 - 2i;$$

$$x_2 = \frac{6 + 4i}{2} = \frac{2(3 + 2i)}{2} = 3 + 2i.$$

**Пример 3.** Записать в тригонометрической форме комплексное число  $z = 1 + i$ .

*Решение.*

$$1) \text{ Так как } a = 1, b = 1, \text{ то } r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

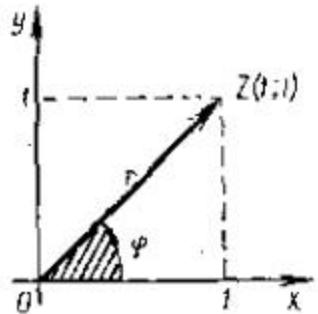
2) Изобразим число  $z$  геометрически (рис.). Мы видим, что числу  $z$  соответствует точка  $Z$ , лежащая в I четверти, и вектор  $z$ .

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} \quad \sin \varphi = \frac{b}{r} \quad \text{т. е.}$$

3) Составим соотношения

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$\varphi = 45^\circ \text{ или } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Этим соотношениям соответствует в I четверти угол

$$r = \sqrt{2}, \varphi = 45^\circ \text{ или } \varphi = \frac{\pi}{4},$$

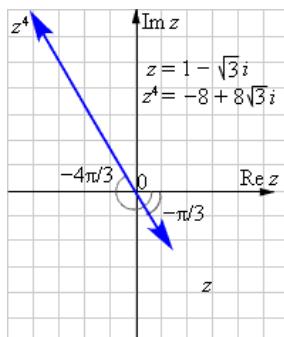
4) Так как

то тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид

$$z = 1 + i = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

**Пример 4.** Вычислить  $z^4$ , если  $z = 1 - \sqrt{3}i$ .

*Решение:* Как было найдено в предыдущем примере, данное число в тригонометрической



форме имеет вид  $z = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right)$ . По первой формуле

Муавра получаем:

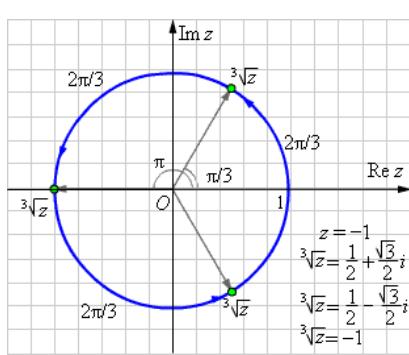
$$\begin{aligned} z^4 &= 2^4 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right)^4 = 2^4 \left( \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^4 \left( -\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right) = 2^4 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^3 (\sqrt{3}i - 1) = 8(\sqrt{3}i - 1). \end{aligned}$$

Ответ.  $8(\sqrt{3}i - 1)$ .

**Пример 5.** Найти  $\sqrt[3]{-1}$

*Решение:* Представим число  $-1$  в тригонометрической форме:  $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$ . По второй формуле Муавра получаем:

$$z_k = \sqrt[3]{-1} = 1 \cdot \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), k = 0, 1, 2.$$



Получаем последовательно:

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

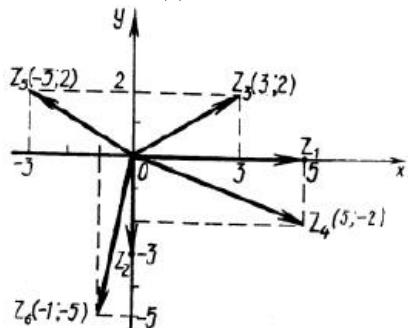
$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\pi + i \sin\pi = -1 + 0 = -1;$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, -1.$$

**Пример 6.** Изобразить на плоскости числа  $z_1 = 5$ ;  $z_2 = -3i$ ;  $z_3 = 3 + 2i$ ;  $z_4 = 5 - 2i$ ;  $z_5 = -3 + 2i$ ;  $z_6 = -1 - 5i$ .

*Решение.* Заданные числа изображены на рис.



## 5 Предел функции. Производная.

### 5.1 Вопросы к занятию

1. Предел функции.
2. Раскрытие неопределенности « $\frac{0}{0}$ ».
3. Раскрытие неопределенности « $\frac{\infty}{\infty}$ ».
4. Раскрытие неопределенности « $\infty - \infty$ ».
5. Первый замечательный предел.
6. Таблица эквивалентных бесконечно малых.
7. Использование второго замечательного предела для раскрытия неопределенности  $(1^\infty)$ .
8. Обобщенный второй замечательный предел.
9. Приращение аргумента и приращение функции.
10. Вычисление производной по определению и по правилам и формулам.
11. Геометрический, механический и биологический смыслы производной.
12. Производная сложной функции.
13. Вычисление производных высших порядков.

5.2. При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на связь бесконечно больших и бесконечно малых функций, правила раскрытия основных неопределенностей; на приведении предела к виду первого замечательного предела, использовании таблицы эквивалентных бесконечно малых, приведении предела к виду второго замечательного предела; на применении таблицы производных основных элементарных функций.

ций и правил дифференцирования, применение производной к задачам физики и биологии, правило вычисления производной сложной функции.

**Пример 1.** Найти  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ .

Решение. Пользуясь свойствами пределов получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 1)} = \frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1} = \frac{3}{-3} = -1.$$

**Пример 2.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 4}{6x^2 + 8x + 9}$ .

Решение. Имеем неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 4}{6x^2 + 8x + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{6} = \infty.$$

**Пример 3.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$ .

Решение. Имеем неопределенность вида  $\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty}$ . Умножим и разделим выражение  $(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$  на выражение ему сопряженное, то есть на  $(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (x-1)}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = 0.$$

**Пример 4.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x + 3}$ .

Решение. Имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4).$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)}{(x-3)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

**Пример 5.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$

Решение.

Подставляем значение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{0}{0}$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Смотрим в [таблицу неопределенностей](#) для определения метода решения. Комбинация синуса и его аргумента подсказывает нам о применении первого замечательного предела, но для этого сначала нужно немного преобразовать выражение. Домножим на  $3x$  и числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \sin(3x)}{3x \cdot (2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3x}{2x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(3x)}{3x} \right) = 1$$

В силу следствия из первого замечательного предела  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(3x)}{3x} \right) = 1$ , поэтому приходим к результату:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \right) = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2}$$

**Пример 6.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2}$

Решение.

Подставляем значение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2} = \frac{1 - \cos(2 \cdot 0)}{3 \cdot 0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \langle \frac{0}{0} \rangle$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Преобразуем числитель, используя формулы тригонометрии.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2} = \langle \frac{0}{0} \rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x)}{3x^2}$$

Стало видно, что здесь можно применить первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(4x)}{3x}$$

**Пример 7.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(4x)}{3x}$

Решение.

Подставляем значение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(4x)}{3x} = \frac{\arcsin(4 \cdot 0)}{3 \cdot 0} = \langle \frac{0}{0} \rangle$$

Пришли к неопределенности ноль делить на ноль. Сделаем замену.

Пусть

$$\arcsin(4x) = t \Rightarrow$$

$$\sin(\arcsin(4x)) = \sin(t)$$

$$4x = \sin(t) \Rightarrow x = \frac{1}{4} \sin(t)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin(4x)) = \arcsin(4 \cdot 0) = 0, \text{ следовательно, } t \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Тогда предел после замены переменной примет вид:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(4x)}{3x} = \langle \frac{0}{0} \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{3 \cdot \frac{1}{4} \sin(t)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{t}{\sin t} \right) = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

**Пример 8.** Пример.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{4}}$$

Вычислить предел

Решение.

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{4}} = \left( 1 - \frac{2}{\infty^2 + 1} \right)^{\frac{\infty^2 + 1}{4}} = (1 - 0)^\infty = \langle 1^\infty \rangle$$

Пришли к неопределенности единицы в степени бесконечность. Смотрим в таблицу неопределенностей для определения метода решения и останавливаемся на применении второго замечательного предела.

Сделаем замену переменных. Пусть

$$t = -\frac{x^2 + 1}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{4} = -\frac{t}{2}$$

Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $t \rightarrow -\infty$

Исходный	предел	после	замены	примет	вид:
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right)^{\frac{x^2 + 1}{4}} = \langle 1^\infty \rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$					

Пример 9. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

Решение.

Подставляем бесконечность:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)^x = \left(\frac{1-0}{1+0}\right)^x = \langle 1^\infty \rangle$$

Пришли к неопределенности единицы в степени бесконечность, которая указывает на применение второго замечательного предела. Выделим целую часть в основании показательно степенной функции:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

Тогда предел запишется в виде:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \langle 1^\infty \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^x$$

Сделаем замену переменных. Пусть

$$t = -\frac{x+1}{2} \Rightarrow 2t = -x-1 \Rightarrow x = -2t-1$$

Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $t \rightarrow \infty$

Исходный предел после замены примет вид:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x &= \langle 1^\infty \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-2t-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-2t} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-2t} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{-2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{-1} = e^{-2} \cdot (1+0)^{-1} = e^{-2} \end{aligned}$$

В преобразованиях были использованы свойства степени и свойства пределов.

Пример 10. Найти производную функции  $y = 3\cos x$ .

Решение:

$$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)' = 3(-\sin x)$$

$$y = 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11\operatorname{ctg} x$$

Пример 11. Найти производную функции

Решение:

$$\begin{aligned}
y' &= \left( 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 1 \operatorname{ctg} x \right)' = \\
&= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left( 2x^{\frac{1}{3}} \right)' + (x^{-2})' - (1 \operatorname{ctg} x)' = \\
&= (6)' + (x)' + 3(x^2)' - (\sin x)' - 2\left( x^{\frac{1}{3}} \right)' + (x^{-2})' - 11(\operatorname{ctg} x)' = \\
&= 0 + 1 + 3 \cdot 2x - \cos x - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + (-2) \cdot x^{-3} - 11 \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \\
&= 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

**Пример 12.** Найти производную функции  $y = x^3 \arcsin x$ .

Решение:

$$\begin{aligned}
y' &= (x^3 \arcsin x)' = (x^3)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' = \\
&= 3x^2 \arcsin x + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\quad y = \frac{2(3x-4)}{x^2+1}
\end{aligned}$$

**Пример 13.** Найти производную функции  $y = \frac{2(3x-4)}{x^2+1}$ .

Решение:

$$\begin{aligned}
y' &= \left( \frac{2(3x-4)}{x^2+1} \right)' = 2 \cdot \left( \frac{3x-4}{x^2+1} \right)' = \\
&= 2 \cdot \left( \frac{(3x-4)'(x^2+1) - (3x-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \right) = \\
&= 2 \cdot \left( \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x-4) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \right) = 2 \cdot \left( \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 8x}{(x^2+1)^2} \right) = \\
&= \frac{2(-3x^2 + 8x + 3)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

## 6 Приложение производной.

6.1 Вопросы к занятию

1. Исследование функций с помощью производной по плану.

6.2. При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применении признаков монотонности, признаков выпуклости и вогнутости функции к исследованию, вычисление односторонних пределов и применение их к построению графика, нахождении асимптот графика функции.

**Деловая игра по теме:** «Построение графиков».

**Используемые технологии:**

- ИКТ (аудиозапись, презентация)
- технология интерактивного обучения

**Цели урока:**

**Методическая цель урока:**

Формирование системы общих компетенций и повышение мотивации к изучению математики.

**Цель личностного развития (воспитательная):**

- воспитывать у студентов коммуникативные навыки
- культуру умственного труда
- дальнейшее формирование навыков самоорганизации

**Обучающие цели:**

- Строить графики функций по свойствам, уметь читать графики
- способствовать формированию умений работать с текстовой информацией, анализировать, сопоставлять, сравнивать и обобщать материал.

**Развивающие цели:**

- развитие умения формулировать собственную точку зрения, высказывать и аргументировать ее
- способствовать развитию умения публичного выступления.

**Виды деятельности на уроке:**

- индивидуальная, групповая;
- мыслительная деятельность: продуктивная и репродуктивная;
- речевая.

**Дидактические средства обучения:**

- задания для групп;
- презентация;
- справочник по математике
- аудиозапись.

**Межпредметные связи:**

- физика;
- русский язык;
- литература;
- информатика.

**Ход урока**

**1. Организационный  
момент**

Подготовить студентов к работе на уроке

Цель:

Задачи преподавателя:

1.Сформировать общий настрой студентов на эффективную работу на занятии

2. Проверить готовность кабинета и группы к работе

Методы:	1. Самопроверка 2. Беседа
Задачи студентов:	1. Проверить свою готовность к уроку 2. Настроиться на эффективную работу
Методы:	1. Самопроверка 2. Взаимопроверка
Содержание этапа	Взаимное приветствие Учет присутствующих Настрой студентов на работу, организация внимания
Наводящий вопрос	Знание законов природы дало человеку возможность объяснить и предсказать её разнообразные явления. “Математическими портретами” закономерностей природы служат функции.
Предполагаемый ответ	А что же такое функция?
Речь преподавателя:	Функция – это математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами.
	Вы знаете, что существует несколько способов задания функции.
	Вспомните, какие способы задания функций вы знаете? Чем они отличаются?
Речь преподавателя:	Табличный, аналитический, графический Какой, из перечисленных способов самый наглядный? (Графический)
	Сообщения цели и задач урока.
	Итак, тема нашего урока - Исследование функций и построение графиков.

Материал урока очень важен. Во-первых, много заданий этой темы входят в экзаменационные работы.

Предполагаемый ответ  
Во-вторых, практически во всех дисциплинах мы сталкиваемся с графиками.

Приведите примеры, на каких уроках, кроме математики, вы сталкиваетесь с графиками.

На прошлых уроках вы занимались чтением графиков по заданному алгоритму.

Представьте, пожалуйста, нам этот алгоритм.

Схема исследования функции.

1. Область определения.
2. Область значений.
3. Чётность, нечётность.
4. Нули функции (точки пересечения с осью  $Ox$  и  $Oy$ ).
5. Промежутки возрастания и убывания.
6. Экстремумы функции.

**2. Опрос студентов по пройденному матери- алу.**

Вам представлен график функции. Прочитайте его.  
(Обучающийся работает у доски)

Цель:

Установить правильность и осознанность полученных знаний на предыдущих уроках, а также устраниТЬ пробелы в знаниях.

Задачи преподавателя:

1. Установить правильность и различия терминов.
2. Определить типичные ошибки в терминологии
3. Способствовать повторению пройденного материала.
4. Произвести своевременную коррекцию в знаниях и умениях.

Методы:

1. Фронтальный опрос.
  2. Работа с алгоритмом исследования функций.
1. Закрепить понятия, пройденные на прошлом занятии.
- Задачи студентов:
2. Научиться осуществлять самопроверку.

### **3 Закрепление учебного материала**

Цель:

Формирование умений обобщать результаты, делать выводы. Анализировать рабочую ситуацию, нести ответственность за результаты своей работы.

Задачи преподавателя:

1. Определить план работы в микрогруппах
2. Создать ситуацию успеха
3. Оказывать необходимую помощь студентам при выполнении заданий
4. Систематизировать знания и умения и навыки по прошедшему материалу, на данном этапе.

Методы:

1. Интерактивные и активные методы
2. Иллюстративный.

Задачи студентов:

1. Работать с дополнительной литературой
2. Применять изученный алгоритм при решении поставленной задачи
3. Выполнить сравнительный анализ ввода формул различными способами
4. Аккуратно вести конспект.
5. Строить графики

Методы:

1. Беседа
2. Анализ
3. Конспектирование.

Речь преподавателя:

Вы разделены на микрогруппы. Каждая группа – это отдел на кафедре.

На этом этапе урока мы формируем умение обобщать результаты, делать выводы. Анализировать рабочую ситуацию, нести ответственность за результаты своей работы. Осуществлять поиск и использование информации, работать в команде.)

Представляю отделы: (*Отдел проектирования и чертежей, творческий отдел, информационный отдел, отдел исследования*).

К нам на кафедру пришло письмо. (Приложение 1)

Заведующий кафедрой (преподаватель) читает письмо.

Так как студент пропустил занятия по уважительной причине, мы должны ему помочь. Я предлагаю написать учебное пособие по пропущенной теме.

Для того чтобы хорошо работала вся кафедра, нужна слаженная работа всех отделов.

План работы кафедры.

1. Работа в отделах (групповая работа)
2. Производственное совещание (отчет групп)
3. Подведение итогов.

(Студенты в группах выполняют свои задания и представляют их на производственном совещании).

Задания для микрогрупп:

### **Отдел проектирования и чертежей**

На координатной плоскости построить график по заданным координатам. Является ли построенный график функцией?

(4;-4), (4;-6), (8,5;-7,5), (9;-7), (9;-6), (9,5;-5), (9,5;-3,5),  
(10;-3), (9,5;-2,5), (4;5), (3;6), (2;6), (0;5), (-3;5), (-7;3), (-9;-1), (-8;-5),  
(-8;-7), (-4,5;-8), (-4,5;-7), (-5;-6,5), (-5;-6), (-4,5;-5), (-4;-5), (-4;-7),  
(-1;-7), (-1;-6), (-2;-6), (-1;-4), (1;-8), (3;-8), (3;-7), (2;-7), (2;-6),  
(3;-5), (3;-6), (5;-7),

(7;-7), ухо (6;-4), (6;-3), (7;-2,5), (7,5;-3), глаз (8;-6)

### **Творческий отдел**

Написать СИНКВЕЙН по теме «Графики»

**1 строка** - название стихотворения, тема, обычно существительное;

**2 строка**- два прилагательных, раскрывающих тему синквейна;

**3 строка**- три глагола, описывающих действия по теме синквейна;

**4 строка**- фраза, предложение, цитата или крылатое вы-

ражение, выражающее свое

отношение к теме;

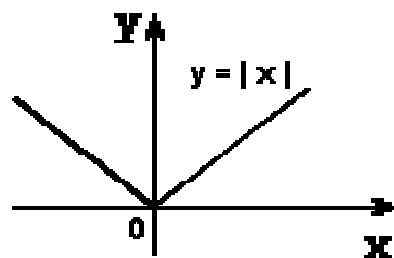
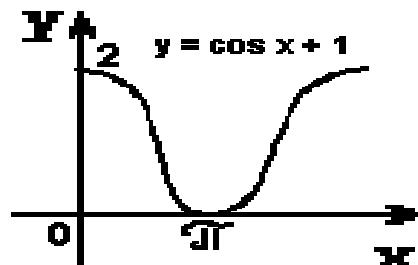
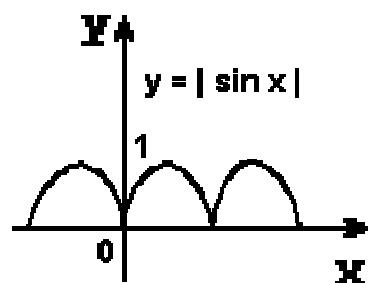
**5 строка-** слово-резюме, дающее новую интерпретацию темы.

**Сопоставить пословицы графикам функций:**

«Повторение - мать учения»

"Как аукнетсяся, так и откликнется"

"Любишь с горы кататься, люби и саночки возить".

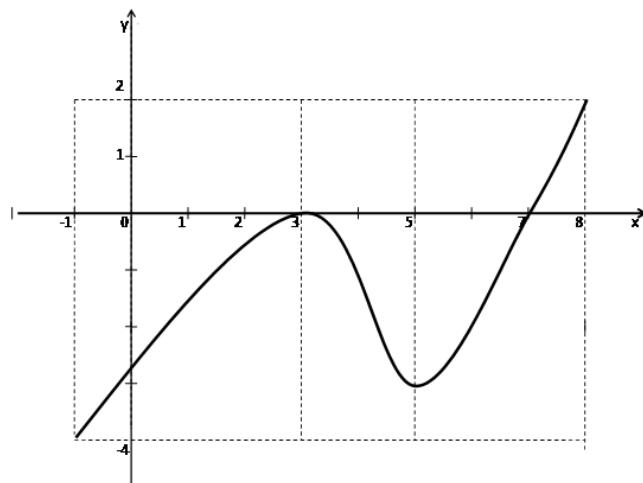


**Информационный отдел.**

Найти, обработать и систематизировать теоретический материал по данной теме.

**Отдел исследования**

*Исследовать функции, заданные графиками.*



*Построить график функции, если известны её свойства:*

1. область определения  $x \in [-6; 6]$ ;
2. Область значений  $y \in [-2; 5]$ ;
3. Точки пересечения с осями координат:  
 $\text{OX}: (-4; 0); (-2; 0)$   
 $\text{OY}: (0; 2)$
4. промежутки возрастания  $[-3; 1]$  и  $[4; 6]$   
 промежутки убывания  $[-6; -3]$  и  $[1; 4]$
5. экстремумы функции:  
 точки максимума:  $(1; 3)$   
 Точки минимума:  $(-3; -2)$  и  $(4; 1)$
6. Дополнительные точки:  $(-6; 3)$  и  $(6; 5)$

#### *Производственное совещание.*

Каждый отдел представляет результаты своей работы. Заведующий кафедрой (преподаватель), все отчеты складывает в единую картину и проводит рефлексию. Результатом работы получается учебное пособие по теме «Исследование функций и построение графиков»

#### **4. Рефлексия**

Цель:

Провести анализ собственной деятельности и деятельности студентов на уроке

Задачи преподавателя:

1. Инициировать и интенсифицировать рефлексию студентов по поводу своего психо - эмоционального состояния, мотивации, своей деятельности и взаимодействия с преподавателем и одногруппниками.
2. Обеспечить усвоение студентами принципов саморегуляции и сотрудничества.

Методы:

Лист учета знаний

Анкета

Задачи студента:

1. Восстановление последовательности выполненных действий;
2. Формулирование результатов

Речь преподавателя:

Наш урок подходит к завершению. Предлагаю вам оценить сегодняшнее мероприятие. У каждого из вас есть карточка с вопросами:

(Что понравилось на уроке? Что не понравилось на уроке? Чем заинтересовал урок?)

Наш урок мы начали со слов «...нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира...» Сегодня вы показали сообразительность, смекалку, остроумие. Вы с достоинством прошли все испытания и показали хорошие знания по данной теме и смогли их применить в нестандартной ситуации.

## **5. Задание на дом**

Цель:

Сообщение студентам о домашнем задании, методики его выполнения, проверка понимания студентами содержание работы и способов выполнения домашнего задания.

Домашнее задание:

У нас почти готово пособие по данной теме. Но так как наш студент обучается по специальности технология машиностроения, мне хочется, чтобы в нашей работе была информация о применении графиков функций в профессии Технология машиностроения. Итак, вашим заданием будет к следующему совещанию, найти эту информацию

Подведение итогов урока, выставление оценок.

## **Приложения с диадактическими материалами**

### **Приложение 1**

Письмо

Здравствуйте уважаемые преподаватели кафедры математики!

Я, по уважительной причине, пропустил уроки по теме «Построение графиков функций». Скоро зачет. К этому зачету нужно знать все основные определения по данной теме, уметь исследовать функции и строить графики, проявить себя творчески пользуясь графическим методом исследования функций. Я пытался собрать всю необходимую информацию в интернете, но по моим запросам входит огромное количество сайтов с различной информацией. Помогите, пожалуйста.

### **Приложение 2**

**Что понравилось на уроке?**

**Что не понравилось на уроке?**

## Чем заинтересовал урок?

### Приложение 3

#### **Синквейн.**

Одна из технологий которая помогает нам в работе - развитие *критического мышления* учащихся.

Технология представляет собой целостную систему, формирующую навыки работы с информацией через чтение и письмо. Она представляет собой совокупность разных приемов и техник, ориентированных на поддержание интереса учащихся к процессу обучения, пробуждение исследовательской и творческой активности; она представляет ученику условия для осмыслиения материала и помогает ему обобщить приобретенные знания.

**СИНКВЕЙН** – малая стихотворная форма, используемая для фиксации эмоциональных оценок, описания своих текущих впечатлений, ощущений и ассоциаций.

**СИНКВЕЙН** – короткое литературное произведение, характеризующее предмет (тему), состоящее из пяти строк, которое пишется по определённому плану.

**СИНКВЕЙН** – это средство творческого самовыражения.

В переводе с французского слово «**синквейн**» означает стихотворение, состоящее из пяти строк, которое пишется по определенным правилам.

**Для чего используются:**

- обогащает словарный запас;*
- подготавливает к краткому пересказу;*
- учит формулировать идею (ключевую фразу);*
- позволяет почувствовать себя хоть на мгновение творцом;*
- получается у всех.*

**Правила написания синквейна таковы:**

На **первой** строчке записывается одно слово – **существительное**. Это и есть тема синквейна.

На **второй** строчке пишутся два **прилагательных**, раскрывающих тему синквейна.

На **третьей** строчке записываются три **глагола**, описывающих действия, относящиеся к теме синквейна.

На **четвертой** строчке размещается целая **фраза**, предложение, состоящее из нескольких слов, с помощью которого учащийся характеризует тему в целом, высказывает свое отношение к теме. Таким предложением может быть крылатое выражение, цитата, пословица или составленная самим учащимся фраза в контексте с темой.

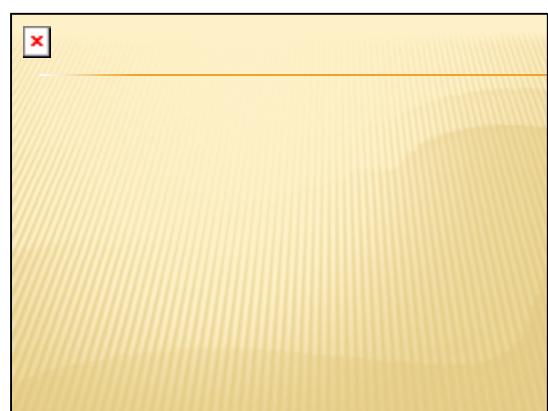
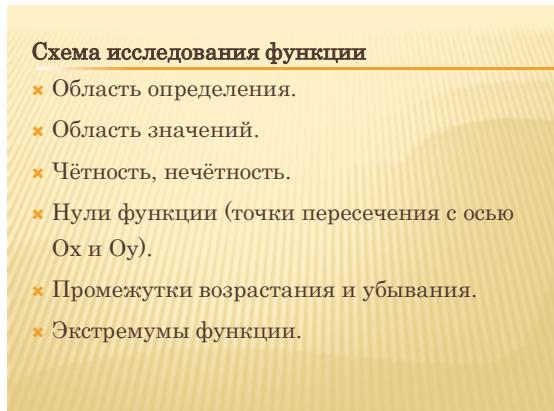
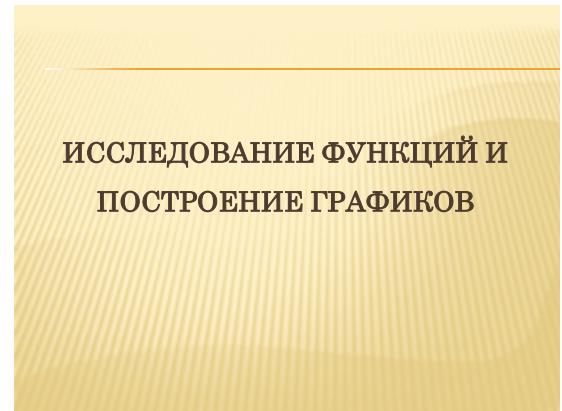
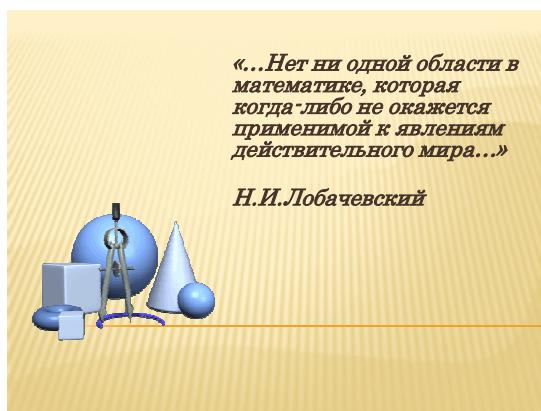
**Пятая строчка – это слово-резюме**, которое дает новую интерпретацию темы, выражает личное отношение учащегося к теме.

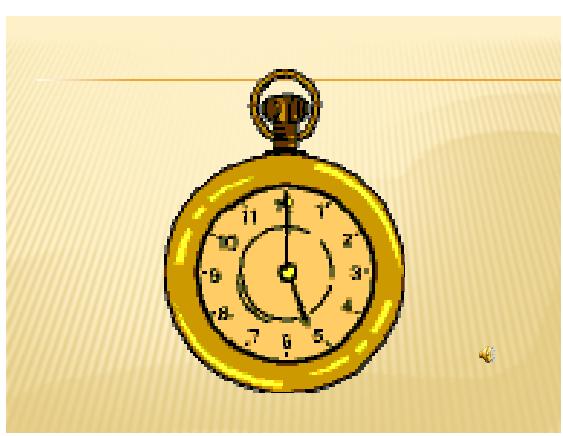
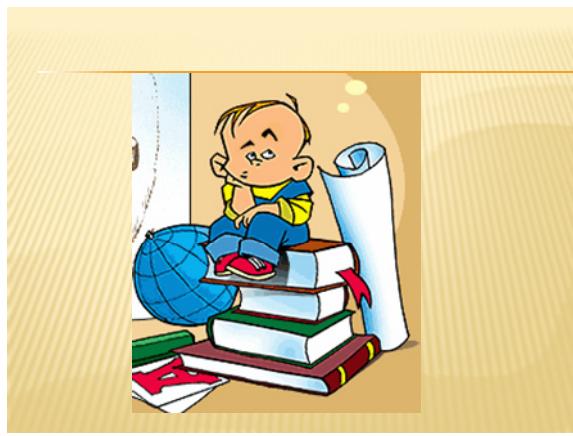
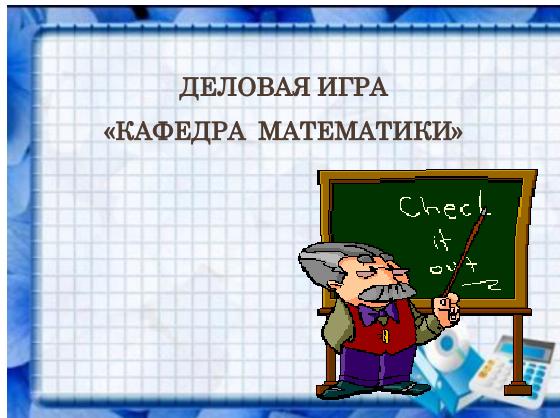
процедура составления синквейна позволяет гармонично сочетать элементы всех трех основных образовательных систем: информационной, деятельностной и личностно ориентированной.

Умение учащегося составлять синквейны по той или иной теме свидетельствует о степени владения учащимся учебного материала этой темы, в частности, является показателем того, что учащийся:

- знает содержание учебного материала темы;
- умеет выделять наиболее характерные особенности изучаемого явления, процесса, структуры или вещества;
- умеет применять полученные знания для решения новой для него задачи.

## Презентация к уроку



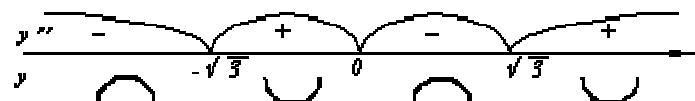


**Пример.** Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x}{1+x^2}$ .

- Область определения функции  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ . Точек разрыва нет.

Пересечение с осью  $Ox$ :  $x = 0, y = 0$ .

Функция нечетная, следовательно, можно исследовать ее только на промежутке  $[0, +\infty)$ .



$$2. \quad y' = \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}. \text{ Критические точки: } x_1 = 1; x_2 = -1.$$

$$y_{\min} = f(-1) = -\frac{1}{2}.$$

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}.$$

$$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3}.$$

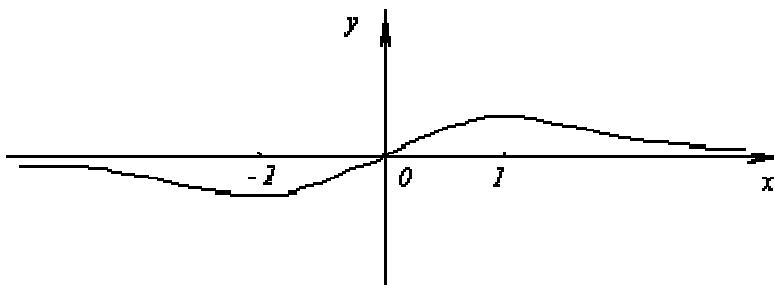
$$\frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = 0. \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

$$3. \quad f(\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4$$

4. a) Вертикальных асимптот нет

$$6) \quad x \rightarrow +\infty: \quad k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+x^2} \right) = 0. \quad \text{Асимптота } y = 0.$$

$$x \rightarrow -\infty: \quad k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \quad b = 0. \quad y = 0$$



## 7 Неопределенный и определенный интеграл.

### 7.1 Вопросы к занятию

1. Вычисление неопределенного интеграла.
2. Метод непосредственного интегрирования.
3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
4. Метод интегрирования по частям.
5. Интегрирование рациональных дробей.
6. Вычисление определенного интеграла.
7. Вычисление площади криволинейной трапеции.

7.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на то, что интегрирование является обратной операцией к дифференцированию, применении свойств неопределенного интеграла к решению примеров, на формулы замены переменной, и на то, что после отыскания интеграла от новой переменной необходимо вернуться к исходной переменной, сделав обратную подстановку, на то, что после применения формулы интегрирования по частям полученный интеграл может быть решен так же по формуле интегрирования по частям; на проверке отсутствия точек разрыва функции на промежутке интегрирования, применение свойств интеграла для решения примеров, применение формулы Ньютона-Лейбница (очередность подстановки верхнего и нижнего пределов интегрирования), на непрерывность и неотрицательность функции на промежутке интегрирования.

## **Деловая игра по теме: "Вычисление интегралов"**

### **Цели урока:**

1. Обучающая цель: Систематизировать практические и теоретические знания, выработать умение находить неопределенный и определенный интегралы. Развивать культуру устного вычисления определенных интегралов
2. Развивающая цель: Развивать мышление и речь обучающихся. Развивать навыки самостоятельного мышления, интеллектуальные навыки (анализ, синтез, сравнение, сопоставление), внимание, память;
3. Воспитательная цель: Содействовать воспитанию интереса к математике, активности, мобильности, используя при этом здоровьесберегающие технологии ведения урока (урок-игра).

### **Задачи урока:**

- ✓ Развитие познавательного интереса к предмету;
- ✓ воспитание самостоятельности, настойчивости при достижении конечного результата.
- ✓ формирование культуры учебной деятельности и информационной культуры;
- ✓ обеспечить повторение основных понятий.

### **Форма проведения:** урок-игра

**Тип урока:** урок обобщения и закрепления

### **Оборудование:**

1. Меню для каждого столика, табличка с номером стола.
2. Картинки блюд, с разноуровневыми заданиями.
3. “Хлеб”- бланки со справочными материалами, помогающими при нахождении интегралов.
4. Презентация
5. Задания выполнимые на доске

### **Предварительная подготовка к проведению урока:**

- разбить группу на группы по 4 человека (распределить по столикам в кафе)
- приготовить разноцветные бланки задач соответственно меню, таблички с номерами столов (в том числе vip стол для гостей урока), бланки со справочным материалом, помогающих при нахождении интегралов (так называемый “Хлеб”), картинки предлагаемых блюд с разноуровневыми заданиями.

## **План урока**

1. Организационный момент.
2. Проверка Д.З. Историческая справка. (Сообщение)
3. Работа устно. Проверка “кредитоспособности”.
4. Закрепление изученного материала. Приём официантами заказов от каждого столика.
  - Нахождение неопределенных интегралов. (Холодные закуски).
  - Вычисление определенных интегралов. (Первые блюда).
  - Вычисление площади криволинейной трапеции. (Вторые блюда)
5. Рефлексия. (Напитки).
6. Подведение итогов урока.

## **Ход урока**

### **1. Организационный момент**

- Сегодняшний урок я хочу начать со слов:

*“Чтобы переваривать знания,  
их надо поглощать с аппетитом”*

*A. Франс*

- мы сегодня с вами посетим необычное кафе, математическое, с названием «Интеграл».

Почему такое название, как вы думаете?

- Да, именно потому, что сейчас изучаем эту тему.

- А как вы думаете, откуда возникло понятие интеграла?

Ответы: Понятие интеграла и интегральное исчисление возникли из потребности вычислять площади (квадратуру) любых фигур и объёмы (кубатуру) произвольных тел.

### **2. Проверка домашнего задания (сообщение)**

**Евдокс Книдский :** - Я доказал теоремы об объёме пирамиды; теоремы о том, что площади двух кругов относятся, как квадраты их радиусов. При доказательстве применил так называемый метод «исчерпывания».

**Архимед:** Через две тысячи лет метод «исчерпывания» был преобразован в метод интегрирования, с помощью которого удалось объединить самые разные задачи – вычисление площади, объёма, массы, работы, давления, электрического заряда, светового потока и многие, многие другие.

Что представляет собой «метод исчерпывания»?

**Официант:** Рассмотрим пример, предположим, что надо вычислить объём лимона, имеющего неправильную форму, и поэтому применить какую-либо известную формулу объёма нельзя. С помощью взвешивания найти объём также трудно, так как плотность лимона в разных частях его разная.

Поступим следующим образом. Разрежем лимон на тонкие дольки. Каждую дольку приблизённо можно считать цилиндром, радиус основания, которого можно измерить. Объём такого цилиндра вычислить легко по готовой формуле. Сложив объёмы маленьких цилиндров, мы получим приближенное значение объёма всего лимона. Приближение будет тем точнее, чем на более тонкие части мы сможем разрезать лимон.

**Архимед:** Я продолжил развивать идеи своих предшественников, определил длину окружности, площадь круга, объём и поверхность шара, показал, что определение объёмов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объёма цилиндра, т.е определил интегралы.

**Евдокс Книдский :** Что же такое интеграл?

**Иоганном Бернулли:** Слово «интеграл» произошло от латинского *integer* — целый, то есть целая, вся — площадь.

**Лейбниц:** Современное обозначение неопределенного интеграла было введено мной в 1675 году. Я адаптировал интегральный символ , образованный из буквы S — в символ  $\int_a^b f(x)dx$ .

- Ну, а теперь перейдём к трапезе.

Сегодня, вы должны отведать в нашем кафе комплексный обед, представленный из холодных закусок –нахождение неопределенных интегралов, первые блюда - вычисление определенных интегралов. Вторые блюда - вычисление площади криволинейной трапеции. За каждые блюда вы получаете баллы, официанты фиксируют все набранные баллы и в конце вам предоставляют счет.

Первым делом давайте проверим, а кредитоспособны ли вы? Хватит ли у вас знаний по теме "Интегралы", чтобы вкусить всю прелесть этих блюд? Ну что же, приступим.

### **3. Работа устно. Проверка "кредитоспособности". (См. приложение)**

**Задание 1.**Продолжите предложение: (Вопросы высвечиваются на доске)

1. Если для любого  $x$  из множества  $X$  выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ , то функцию  $F(x)$  для функции  $f(x)$ , называют .... **первообразной**;

2. Любая первообразная для функции  $f$  на промежутки  $I$  может быть записана виде.....

$$F(x) + C$$

3. Совокупность всех первообразных функций  $F(x) + C$  для данной функции  $f(x)$  называется ... **неопределенный интеграл функции  $f(x)$**

4. С помощью формулы Ньютона – Лейбница находят...**определенный интеграл;**

5. Пусть на отрезке  $[a;b]$  оси  $Ox$  задана непрерывная функция  $f(x)$ , не имеющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком  $[a;b]$  и прямыми  $x = a$  и  $x=b$ , называют.....**крайолинейной трапецией**

**Задание 2:** Исправите ошибку. (См. приложение)

1). Исправить ошибки в записи  $\int 2 dx = 2 + C; \quad (2x + C)$

$$\int -5 dx = 5x \quad (-5x + C)$$

$$\int 3x^2 dx = 3x^2 \quad (x^3 + C)$$

$$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{x} \quad \left( \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C \right)$$

$$\int_0^1 4x^3 dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = 4 * \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = 4 - 0 = 1 = 4 \int_0^1 x^3 dx = 4 * \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = 4 - 0 = 1 \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

#### 4. Закрепление изученного материала

Администраторы-официанты принимают заказы.

- Перед вами на столах лежит меню сегодняшнего дня. Самостоятельно выбирайте блюдо, обратите внимание, что предлагаемые блюда разные по сытности и стоимости. Стоимость каждого блюда обозначена в баллах.

1. Официанты разносят холодные закуски.

Приступайте. Желаю вам приятного аппетита!

**Задание 1. Найти неопределенные интегралы:**

**Салат «Весна» - 3 балла**

- 1)  $\int (3x^2 + 5) dx;$
- 2)  $\int (2x - 7) dx;$
- 3)  $\int (8x^3 - \sin x + 8) dx;$
- 4)  $\int (6x^2 - \cos x + 11) dx;$

Ответы: 1)  $x^3 + 5x + C$ ; 2)  $x^2 + 7x + C$ ; 3)  $2x^4 + \cos x + 8x + C$ ;  
 4)  $2x^3 - \sin x + 11x + C$ ;

### Салат «Интегральная рапсодия» - 4 балла

$$1) 3) \int (9x^2 + \sin x - 15) dx; 2) \int x(1-2x)^3 dx$$

Ответы: 1)  $3x^3 - \cos x - 15x + C$ ; 2) Решение

$$\begin{aligned} \int x(1-2x)^3 dx &= \int x(1-6x+12x^2-8x^3) dx = \int (x - 6x^2 + 12x^3 - 8x^4) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 12 \cdot \frac{x^4}{4} - 8 \cdot \frac{x^5}{5} + C = \frac{x^2}{2} - 2x^3 + 3x^4 - \frac{8x^5}{5} + C, \text{ где } C = const \end{aligned}$$

3)

### Салат «Неопределенная мечта» - 5 баллов

$$1) \int \sqrt[3]{x^2} dx$$

**Решение**  $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{5} + C$

$$\int \frac{x \sin x + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x} dx$$

**Решение.**

Разделим почленно на  $x$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \sin x + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x} dx &= \int \left( \sin x + x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \int \left( \sin x + x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{x} \right) dx \end{aligned}$$

Согласно свойствам неопределенного интеграла, интеграл от суммы равен сумме интегралов от каждого из слагаемых:

$$\int \frac{x \sin x + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x} dx = \int \sin x dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int \frac{dx}{x}$$

Получили сумму табличных интегралов, которые в свою очередь равны

$$\begin{aligned} \int \frac{x \sin x + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x} dx &= \int \sin x dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int \frac{dx}{x} = \\ &= -\cos x + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \ln x + C = -\cos x + \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{2} + \ln x + C \end{aligned}$$

Ответ.  $\int \frac{x \sin x + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x} dx = -\cos x + \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{2} + \ln x + C$

Обучающиеся выполняют задания.

- Вы так увлечены предлагаемыми блюдами нашей интегральной кухни, что даже забыли о "хлебе"! Сейчас вам "хлеб" будет очень кстати.

- Проводится смена блюд. И сейчас на ваших столах появятся прекрасные интегральные первые блюда.

2. Официанты разносят первые блюда.

**Задание 2. Найти определенные интегралы:**

**Борщ с интегралом** - 3 балла

$$1) \int_0^1 (2x - 7) dx; \quad 2) \int_0^1 (3x^2 + 1) dx; \quad 3) \int_0^1 (5x^4 - 8) dx;$$

**Ответы:** 1)  $(x^2 - 7x) \Big|_0^1 = -6$ ; 2)  $(x^3 + x) \Big|_0^1 = 2$ ; 3)  $(x^5 - 8x) \Big|_0^1 = -7$ ;

**Суп из курицы (интегральное искусство)** – 4 балла

$$1) \int_1^2 (3x^2 + 5) dx; \quad 2) \int_1^2 x^{-2} + 7 dx. \quad 3) \int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

**Ответы:** 1)  $(x^3 + 5x) \Big|_1^2 = 12$ ; 2)  $(x^{-1} + 7x) \Big|_1^2 = 6\frac{1}{2}$

$$3) \int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2 \cdot 5} - \left( -\frac{1}{2 \cdot 3} \right) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15};$$

**Окрошка** - 5 баллов

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx \quad 2) \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx$$

1) Решение

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx = \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{12} - 0 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4};$$

2) Решение

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( 1 + 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \right) dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( 1 + \sin \frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= \left. \left( x - 2 \cos \frac{x}{2} \right) \right|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \left( \frac{2\pi}{3} - 2 \cos \frac{2\pi}{6} \right) - (0 - 2 \cos 0) = \frac{2\pi}{3} - 1 + 2 = \frac{2\pi}{3} + 1;$$

(Официанты проверяют работы, выставляют баллы в оценочный лист)

3. Официанты разносят вторые блюда.

Блинчики с мясом «Равновесие»:

**Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:**

**Блинчики с «интегралом»- 3 балла**

1.  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Фигуру необходимо аккуратно изобразить.

**Ответы:**  $\frac{1}{3}$  кв.ед.,

**Плов «Интегральная фантазия» - 4 балла**

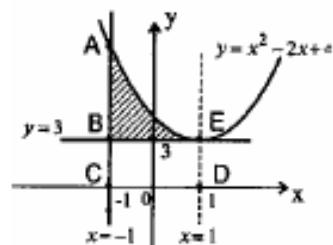
1.  $y = x^2 - 2x + 4$ ;  $y = 3$ ;  $x = -1$ . Фигуру необходимо аккуратно изобразить.

**Ответ:**  $\frac{2}{3}$  кв. ед

$$b) x^2 - 2x + 4 = 3, x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0, x = 1;$$

$$S_{ABE} = S_{ACDE} - S_{BCDE} = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 4) dx - 2 \cdot 3 =$$

$$= \left( \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^1 - 6 = \frac{8}{3} - 6 = 2 \frac{2}{3};$$



**«Интегральный бифштекс»- 5 балла**

$$y = x^2 - 4x; y = 4 - x^2.$$

**Ответ:**  $\frac{8}{3}$  кв. ед

a)  $x^2 - 4x + 4 = 4 - x^2$ ;  
 $2x^2 - 4x = 0; x^2 - 2x = 0; x = 2; x = 0;$

$$S_{ACBD} = S_{AOBD} - S_{AOBC} = \int_0^2 (4 - x^2) dx -$$

$$-\int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left( 2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right)_0^2 =$$

$$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

(Официанты проверяют работы, выставляют баллы в оценочный лист)

#### 4) Напитки: коктейль «Интеграл» (см. приложение)

(Официанты проверяют работы, выставляют баллы в оценочный лист, суммируют набранные баллы, выводят средний балл)

#### 5) Подведение итогов.

В соответствии с количеством набранных баллов каждый посетитель кафе получит “бонусы” в журнал.

#### Пример 1.

$$\int (2 - 3^x)^2 dx = \int (4 - 4 \cdot 3^x + 3^{2x}) dx = 4 \int dx - 4 \int 3^x dx + \int 9^x dx =$$

#### Пример 2.

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = (\text{пусть } x = 2 \sin t, \text{ тогда } dx = 2 \cos t dt) =$$

$$\int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = \int 2 \sqrt{1 - \sin^2 t} 2 \cos t dt = 4 \int \cos^2 t dt = \quad (\text{используем формулу})$$

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a \quad ) = \quad 4 \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = 2 \int dt + 2 \int \cos 2t dt = 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t + C =$$

$$= 2t + 2 \sin t \cos t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, использовали выражение:

$$\sin t = \frac{x}{2}, \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, t = \arcsin \frac{x}{2}.$$

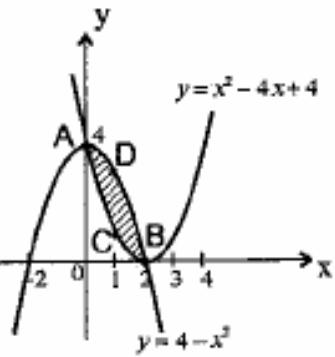
**Замечание.** В примерах 1 и 2 использовали подстановку вида:  $x = \varphi(t)$  и формулу.

Подстановку  $x = \varphi(t)$  выбирают так, чтобы правая часть формулы приобрела более удобный для интегрирования вид.

#### Пример 3.

$$\int (x-1)e^x dx \left| \begin{array}{l} u = x-1, du = dx \\ dv = e^x dx, v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right. = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C$$

#### Пример 4.



$$\int \frac{dx}{x(x-5)^2}$$

$$\frac{1}{x(x-5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x-5)^2}$$

$$1 = A(x^2 - 10x + 25) + Bx^2 + Cx$$

$$x^2 | A+B=0$$

$$x^1 | -10A+C=0$$

$$x^0 | 25A=1$$

$$A = \frac{1}{25}, B = -\frac{1}{25}, C = \frac{2}{5}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-5)^2} = \frac{1}{25} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{25} \int \frac{(x-10)dx}{(x-5)^2} = \frac{1}{25} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{25} \int \frac{(x-5)dx}{(x-5)^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{(x-5)^2} =$$

$$= \frac{1}{25} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{25} \int \frac{d(x-5)}{(x-5)} + \frac{1}{5} \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{1}{25} \ln x - \frac{1}{25} \ln(x-5) - \frac{1}{5(x-5)} + C$$

**Пример 5.**

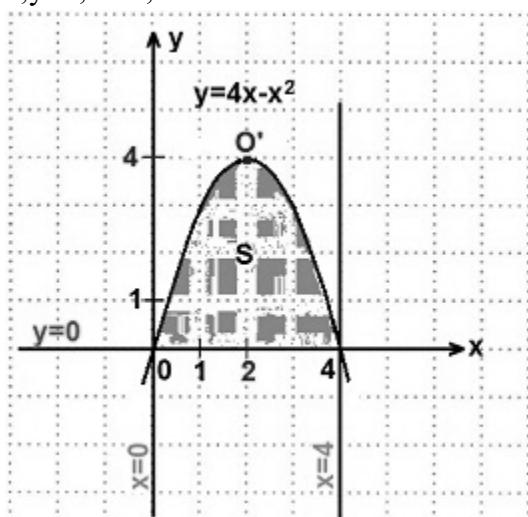
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

**Пример 6.**

$$\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \begin{cases} x = 2\sin t, \sqrt{4-x^2} = 2\cos t, dx = 2\cos t dt, \\ 2\sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/6, 2\sin t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \pi/3 \end{cases} = 4 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 t \cdot dt = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2t) \cdot dt =$$

$$= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2t) \cdot dt = 2 \left[ t \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right] = 2 \left[ \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \left( \sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{\pi}{3}$$

**Пример 7.** Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:  $y=4x-x^2$ ;  $y=0$ ;  $x=0$ ;  $x=4$ .



**Решение.** Строим графики данных линий.

1)  $y=4x-x^2$  — парабола (вида  $y=ax^2+bx+c$ ). Запишем данное уравнение в общем виде:  $y=-x^2+4x$ . Ветви этой параболы направлены вниз, так как первый коэффициент  $a=-1<0$ .

Вершина параболы находится в точке  $O'(m; n)$ , где

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2; \quad n = y(m) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4.$$

$O'(2; 4)$ . Нули функции (точки пересечения графика с осью  $Ox$ ) найдем из уравнения:  $4x-x^2=0$ .

Выносим  $x$  за скобки, получаем:  $x(4-x)=0$ .

Отсюда,  $x=0$  или  $x=4$ . Абсциссы точек найдены, ордината равна нулю — искомые точки:  $(0; 0)$  и  $(4; 0)$ .

2)  $y=0$  — это ось  $Ox$ ; 3)  $x=0$  — это ось  $Oy$ ; 4)  $x=4$  — прямая, параллельная оси  $Oy$  и отстоящая от нее на 4 единичных отрезка вправо.

Площадь построенной криволинейной трапеции находим по (ф. Н-Л). У нас  $f(x)=4x-x^2$ ,  $a=0$ ,  $b=4$ .

$$S = \int (4x - x^2) dx = \left( 4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = \left( 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) = 2 \cdot 8^2 - \frac{8^3}{3} = \\ = 32 - \frac{64}{3} = 32 - 21\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

**Ответ:**  $S=10\frac{2}{3}$  (кв. ед.)

## 8 Теория вероятности и математическая статистика

### 8.1 Вопросы к занятию

1. Сочетания.
2. Размещения.
3. Перестановки.
4. Случайные процессы.
5. Относительная частота события.
6. Подсчет вероятности события.
7. Дискретная случайная величина (ДСВ). Закон распределения ДСВ.
8. Числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

8.2 При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на правильность выбора формулы для решения данной задачи, важность порядка в составленных подмножествах, наличие или отсутствие повторений элементов в каждом из составляемых подмножеств; на определении дискретной случайной величины, и на то, что сумма вероятностей в таблице распределения случайной величины равна 1.

**Пример 1.** Записать все размещения без повторений объемом 2, которые можно составить из элементов множества  $\{1, 2, 3\}$ .

Число таких размещений определяем по формуле (4.1)  $A^{\underline{2}} = 3 \cdot 2 = 6$ .

Это будут следующие размещения  $(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)$ .

**Пример 2.** Записать все перестановки из элементов множества  $\{1,2,3\}$ .

Число перестановок определяем как  $P^3 = 3! = 2 \cdot 3 = 6$ . Это будут следующие перестановки

$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)$ .

**Пример 3.** Сколькими способами можно составить список из 25 студентов.

Число всех способов, очевидно, определяется числом всех перестановок из 25

разных элементов и вычисляется как  $P^{25} = 25!$

**Пример 4.** Сколькими способами можно выбрать 5 номеров из 36?

Число таких способов будет равно числу неупорядоченных выборок без повторений объемом 5, которые можно составить из 36 элементов, т.е. это будут сочетания по 5 элементов. Число их будет равно

$$C_{36}^5 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 376992.$$

**Пример 5** Лотерея состоит из 1000 билетов, среди них 200 выигрышных. Наугад вынимается один билет из 1000. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

*Решение:* различных исходов в этом примере 1000 ( $n=1000$ ). В интересующее нас событие A входят 200 исходов ( $m=200$ ). Таким образом,

$$p(A) = \frac{200}{1000} = 0,2$$

**Пример 6.** В коробке лежат 200 белых, 100 красных и 50 зеленых шаров. Наудачу вынимается один шар. Чему равны вероятности получить шар белого, красного или зеленого цвета?

*Решение:* Рассмотрим события: A={вынули белый шар}, B={вынули красный шар}, C={вынули зеленый шар}. n=350, тогда

$$P(A) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7},$$

$$P(B) = \frac{100}{350} = \frac{2}{7};$$

$$P(C) = \frac{50}{350} = \frac{1}{7}.$$

**Пример 7** К каким классам событий (возможное, невозможное, достоверное) относятся: а) расстояние между двумя произвольными городами меньше, чем 50 тысяч километров; б) наугад выбранное слово русского языка заканчивается буквами «нзо»; в) Вася выигрывает в лотерее?

*Решение.*

Первое из событий достоверное, а второе – невозможное. Третье событие может произойти, а может не произойти – оно является возможным, но не достоверным.

**Пример 8.** Укажите события, противоположные данным: а) на кубике выпало 1; б) Света получила на экзамене «5»; в) после ночи наступает утро?

*Решение*

а) На кубике не выпало 1; б) Света не получила на экзамене «5» (в том случае, если Света сдавала экзамен, то можно утверждать, что Света получила какую-то другую оценку); в) после ночи не наступает утро. Заметим, что событие, противоположное событию в) является невозможным (во всяком случае, в нашей обыденной жизни).

**Пример 9.** Совместны ли события: а) на первом кубике выпало 1, а на втором – 2; б) Юра пошёл в школу, а завтра будет дождь; в) Иванов в настоящее время является президентом страны, и Петров является президентом той же страны.

*Решение.*

Пара событий из примера а) совместна, так как может произойти одновременно. Точно так же совместна и пара событий б). Пара событий в) несовместна, так как не может произойти одновременно.

**Пример 10.** Пакеты акций компаний А, В и С могут дать доход владельцу с вероятностью 0,7, 0,8, 0,6 соответственно. Найти вероятность того, что владелец пакетов акций различных фирм получит доход а) только по одному пакету акций; б) хотя бы по одному пакету акций.

а) Пусть событие А состоит в том, чтобы получить доход только по одному пакету акций. Рассмотрим такие события:

A1 - получить прибыль от акций предприятия А,

A2 - получить прибыль от акций предприятия В,

A3 - получить прибыль от акций предприятия С.

Соответствующие вероятности событий равны:

$$p(A_1) = 0,7, p(A_2) = 0,8, p(A_3) = 0,6.$$

$$p(A) = p(A_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1) \cdot p(A_2) \cdot p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot p(A_3) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,188.$$

б) Рассмотрим событие В, состоящее в том, что владелец не получит прибыли. Тогда, принимая обозначения предыдущего пункта, получим:

$$p(B) = p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot p(\bar{A}_3) = 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,024.$$

Событие  $\bar{B}$ , противоположное событию В, состоит в том, чтобы получить прибыль хотя

бы по одному пакету акций. Следовательно,

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,976.$$

**Пример 11.** На заводе, изготавливающем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой, второй, третьей машиной?

Решение. Пусть событие  $A = \{\text{выбрать дефектный болт}\}$ .

Выдвигаем три гипотезы:

$$H_1 = \{\text{болт изготовлен первой машиной}\}, P(H_1) = 0,25, P(A/H_1) = 0,05;$$

$$H_2 = \{\text{болт изготовлен второй машиной}\}, P(H_2) = 0,35, P(A/H_2) = 0,04;$$

$$H_3 = \{\text{болт изготовлен третьей машиной}\}, P(H_3) = 0,4, P(A/H_3) = 0,02.$$

$$\text{а) } P(A) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,0345;$$

$$\text{б) } P(H_1/A) = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,0345} = \frac{25}{69};$$

$$P(H_2/A) = \frac{0,35 \cdot 0,04}{0,0345} = \frac{28}{69};$$

$$P(H_3/A) = \frac{0,4 \cdot 0,02}{0,0345} = \frac{16}{69}.$$

**Пример 12.** Дискретная случайная величина  $X$  задана таблицей распределения:

X	2	3	5	6
P	0,5	0,2	0,2	0,1

Найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

Решение. Найдем математическое ожидание:  $M(X) = 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 = 3,2$ .

Дисперсию вычислим по формуле  $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ .

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0,5 + 3^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,2 + 6^2 \cdot 0,1 = 12,4,$$

$$D(X) = 12,4 - (3,2)^2 = 2,16,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2,16} \approx 1,47$$

**Пример 13.** Пусть случайная величина имеет следующий закон распределения

$\xi$	-1	0	2
P	1/4	1/4	1/2

Вычислить математическое ожидание  $M\xi$ , дисперсию  $D\xi$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$ .

Решение. По определению математическое ожидание  $\xi$  равно

$$M\xi = -1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 = 1/4.$$

$$\text{Далее, } M\xi^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 1/4 + 0^2 \cdot 1/4 + 2^2 \cdot 1/4 = 5/4, \quad \text{а} \quad \text{потому}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 5/4 - 1/16 = 19/16.$$

$$\text{Среднеквадратическое отклонение } \sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{19}/4.$$

**Пример 14.** Для пары случайных величин из задачи 3 вычислить  $M(\xi\eta)$ .

Решение. Пользуемся формулой, указанной выше. А именно, в каждой клетке таблицы выполняем указанную операцию (т.е. умножение значений  $x_i$  и  $y_i$ ) и результат умно-

жаем на вероятность в клетке, и все это суммируем по всем клеткам таблицы. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} M(\xi\eta) &= -1 \cdot 1 \cdot 1/16 + -1 \cdot 2 \cdot 3/16 + 0 \cdot 1 \cdot 1/16 + 0 \cdot 2 \cdot 3/16 + 1 \cdot 1 \cdot 1/8 + 1 \cdot 2 \cdot 3/8 = \\ &= -1/16 - 3/8 + 1/8 + 3/4 = 7/16 \end{aligned}$$

**Пример 15.** Найти интегральную функцию распределения случайной величины  $X$ , заданной рядом распределения:

$X$	1	2	3
$P$	0,3	0,2	0,5

и построить ее график.

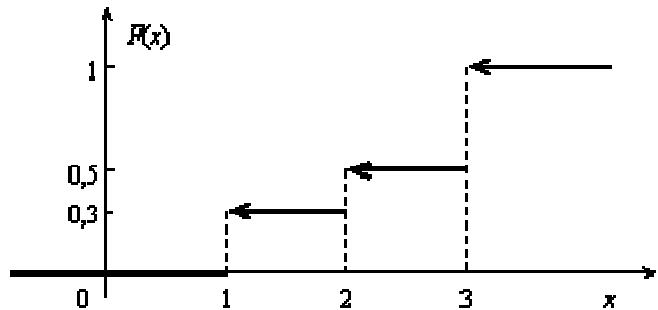
Решение. Пусть  $x \leq 1$ , тогда  $F(x) = 0$ , так как событие  $X < x$  будет невозможным. Если  $1 < x \leq 2$ , то на основании равенства имеем  $F(x) = p_1 = 0,3$ . Если  $2 < x \leq 3$ , то  $F(x) = p_1 + p_2 = 0,5$ .

Если  $x > 3$ , то  $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$ .

Окончательно получаем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ 0,3, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 0,5, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

График функции  $F(x)$  изображен на рис.



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Факультет среднего профессионального образования**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ  
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

**Специальность 21.02.05 Земельно-имущественные отношения**

**Форма обучения очная**

**Оренбург, 2022 г.**

## **ВВЕДЕНИЕ**

Данное учебно-методическое пособие предназначено для выполнения самостоятельных работ по дисциплине «Математика» для студентов специальностей «Земельно-имущественные отношения» 2 курса очной формы обучения. Пособие соответствует требованиям федерального государственного образовательного стандарта СПО и рабочей программы по дисциплине.

Так как самостоятельная работа является обязательным условием организации учебного процесса, то данное пособие призвано способствовать приобретению студентами необходимых умений и навыков при выполнении индивидуальных работ, развитию логического мышления, умению применять полученные знания в профессиональной деятельности.

Учебно-методическое пособие содержит задания для самостоятельных работ и подробные методические указания по их выполнению с разобранными примерами. Также в пособии присутствуют таблицы и формулы, которые помогут студенту решить задания.

В процессе изучения данной дисциплины студент должен выполнить все предлагаемые задания. Номер варианта в каждом из нихдается лично преподавателем и соответствует номеру студента в учебном журнале.

Время, выбранное на самостоятельную работу по данной(ым) теме(ам) обосновано: сложностью материала, большим объемом вычислительных действий и преобразований.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

### Задание 1

Выполните действия с матрицами.

1) докажите, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

2) найдите  $A \cdot A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

3) найдите  $B^{-1} \cdot B$ , если  $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ ;

4) найдите  $A^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

5) найдите  $B^3$ , если  $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ;

6) докажите, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , где  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ ;

7) найдите  $A^{-1} \cdot A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

8) найдите  $B \cdot B^{-1}$ , если  $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ;

9) найдите  $A^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ;

10) найдите  $B^3$ , если  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

11) докажите, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , где  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ;

12) найдите  $A \cdot A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;

13) найдите  $B^{-1} \cdot B$ , если  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ;

14) найдите  $A^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

15) найдите  $B^3$ , если  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ;

16) докажите, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , где  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ;

17) найдите  $A^{-1} \cdot A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ;

18) найдите  $B \cdot B^{-1}$ , если  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

19) найдите  $A^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

20) найдите  $B^3$ , если  $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ ;

21) докажите, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ;

22) найдите  $A \cdot A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ;

23) найдите  $B^{-1} \cdot B$ , если  $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ ;

24) найдите  $A^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

25) найдите  $B^3$ , если  $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

## Задание 2

Решите систему линейных уравнений тремя способами:

- а) по формулам Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- в) методом Гаусса.

1)  $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \\ x - y + 4z = -2 \end{cases}$ ;      2)  $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$ ;      3)  $\begin{cases} 2x + 3y + z = -3 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = -7 \end{cases}$ ;

- 4)  $\begin{cases} 2x+3y-2z=0 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+4y+2z=1 \end{cases}$ ;      5)  $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+2z=6 \\ x+y+5z=-1 \end{cases}$ ;      6)  $\begin{cases} 3x+2y+2z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ 4x+3y+3z=5 \end{cases}$ ;
- 7)  $\begin{cases} 3x+4y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ x+2y+2z=-4 \end{cases}$ ;      8)  $\begin{cases} 2x-2y-3z=3 \\ x+y+2z=-1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$ ;      9)  $\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ 2x+y-z=-7 \\ x-5y+2z=2 \end{cases}$ ;
- 10)  $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 3x+2y+z=10 \end{cases}$ ;      11)  $\begin{cases} x-y+z=4 \\ x+2y+2z=2 \\ 4x+3y-5z=0 \end{cases}$ ;      12)  $\begin{cases} x+6y+z=5 \\ 3x-4y-2z=8 \\ 5x+2y+3z=3 \end{cases}$ ;
- 13)  $\begin{cases} x-2y+4z=11 \\ 2x+y-6z=-2 \\ 3x+6y+2z=-1 \end{cases}$ ;      14)  $\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ x-6y-2z=-1 \\ 4x-3y+8z=-1 \end{cases}$ ;      15)  $\begin{cases} 3x+2y+2z=12 \\ 2x-3y+3z=14 \\ 4x+y-6z=9 \end{cases}$ ;
- 16)  $\begin{cases} 2x+4y+z=4 \\ 3x+6y+2z=4 \\ 4x-2y-3z=1 \end{cases}$ ;      17)  $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+2y+5z=5 \\ 3x+4y+7z=2 \end{cases}$ ;      18)  $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ x+5y+2z=5 \\ 2x+3y+4z=3 \end{cases}$ ;
- 19)  $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \end{cases}$ ;      20)  $\begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-3z=-4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$ ;      21)  $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8 \end{cases}$ ;
- 22)  $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4 \end{cases}$ ;      23)  $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8 \end{cases}$ ;      24)  $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ 2x+y-z=-5 \\ 5x-y+3z=4 \end{cases}$ ;
- 25)  $\begin{cases} x+5y-z=-1 \\ 2x+y-2z=7 \\ x-4y+z=0 \end{cases}$ .

### Задание 3

Составьте множества  $A$  и  $B$  из чисел, соответствующих вашему полному имени и фамилии (без повторений). Для этого запишите весь алфавит и рядом с каждой буквой подпишите ее номер. Выполните следующие операции с получившимися множествами:

- $A \cup B$ ;
- $A \cap B$ ;
- $A \setminus B$ ;
- $B \setminus A$ ;
- $A \times B$  и результат изобразите на числовой плоскости.

**Задание 4**

Выполните действия с комплексными числами.

1)  $\frac{1-3i}{i-2} + \frac{4i+1}{3i-1};$

2)  $\frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i};$

3)  $\frac{4+3i}{3-4i} - \frac{5-4i}{4+5i};$

4)  $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i};$

5)  $\frac{2-3i}{1+2i} - \frac{1+2i}{2-3i};$

6)  $\frac{-1-2i}{-3+i} + \frac{i-3}{-2i-1};$

7)  $\frac{-1-3i}{-3+i} + \frac{2+i}{-1+2i};$

8)  $\frac{4-i}{1+4i} + \frac{1+2i}{2-i};$

9)  $\frac{-2+i}{3-2i} - \frac{3-2i}{-2+i};$

10)  $\frac{5-4i}{4+3i} - \frac{4-3i}{5+4i};$

11)  $\frac{-2+3i}{4+i} + \frac{4+i}{-2+3i};$

12)  $\frac{-1-2i}{2+i} - \frac{3-i}{1+3i};$

13)  $\frac{1+3i}{3-i} - \frac{-2-i}{1-2i};$

14)  $\frac{4+i}{1-2i} + \frac{1+2i}{2-3i};$

15)  $\frac{1+3i}{i-2} - \frac{4i+1}{3i+1};$

16)  $\frac{5+2i}{2-5i} + \frac{3-4i}{4-3i};$

17)  $\frac{4+3i}{3-4i} + \frac{5-4i}{4-5i};$

18)  $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i};$

19)  $\frac{2-3i}{1+2i} + \frac{1+2i}{2-3i};$

20)  $\frac{-1-2i}{-3+i} - \frac{i-3}{2i+1};$

21)  $\frac{4-i}{1+4i} - \frac{1+2i}{2+i};$

22)  $\frac{-2+i}{3-2i} + \frac{3-2i}{2+i};$

23)  $\frac{5-4i}{4+3i} + \frac{4-3i}{5+4i};$

24)  $\frac{-1-3i}{-3+i} - \frac{2+i}{1+2i};$

25)  $\frac{1+3i}{3-i} + \frac{2-i}{1+2i}.$

**Задание 5.**

Найдите пределы функций.

1) а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8x + 1}{3x^2 - x + 4};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x^2};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x+1} \right)^x$

2) а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5};$

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 5x - 8}{2x^2 - 3x - 5};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5};$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{4x}; \quad \Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+2} \right)^{2x-4}$$

$$3) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 6x + 8}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} (3x \operatorname{ctg} 2x); \quad \Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x+5} \right)^{7x}$$

$$4) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 4x}; \quad \Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{3x-4} \right)^{1-6x}$$

$$5) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 3}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 + 3x - 4};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 10x}; \quad \Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2 + 2}{4x^2 - 1} \right)^{5x^2}$$

$$6) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{5x}; \quad \Delta) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-3}{2n+5} \right)^{3n+2}$$

$$7) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x + 5}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^7}{2x^5 - 8x^7};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}; \quad \Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3}{2x^2 - 4} \right)^{3x}$$

$$8) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 6x \cdot \operatorname{ctg} 2x); \quad \Delta) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+2}{3n-4} \right)^{2n-7}$$

$$9) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2x - 3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 + 2x^3 - 1}{3x^2 - 2x^4 + x};$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^3 - 2}{5x^3 + 1} \right)^{-6x^3}$$

$$10) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4};$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x);$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-6}{n-4} \right)^{4n+2}$$

$$11) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 5x + 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 2x}{x^3 - x^4};$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3}{\sin^3 2x};$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x^{10} - 3}{7x^{10} + 2} \right)^{-2x^{10}}$$

$$12) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\arcsin 2x};$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n-3}{5n+6} \right)^{n-3}$$

$$13) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 + 8};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + x}{x^3 + 2x^4};$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^3}{\sin^3 3x};$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x^5 - 1}{6x^5 + 2} \right)^{x^5}$$

$$14) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6};$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} 6x};$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n-5}{4n-3} \right)^{3n+5}$$

$$15) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^3 + x + 10};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 3x - 2};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5 - 4x^2 - 6x^3};$$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{10x^3};$   
 д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+5}{3x-1} \right)^{2x^2}$

16) а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6};$   
 б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6};$   
 в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x};$   
 д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-5}{2n+3} \right)^{4n-5}$

17) а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 13x + 3};$   
 б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x + 12};$   
 в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x + 4};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 3x};$   
 д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - 2x^2}{3 + 3x^2} \right)^{-\frac{4}{x}}$

18) а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 4};$   
 б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1};$   
 в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x - x^2}{2x^2 + x - 1};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 2x};$   
 д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n-1}{3n+6} \right)^{2n+3}$

19) а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - x - 1};$   
 б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1};$   
 в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{3 + 2x^3 + 5x^5};$   
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sin x^3};$   
 д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3 + 7}{2x^3 + 2} \right)^{6x^4}$

20) а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x + 1};$   
 б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{4 - 3x - x^2};$   
 в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8x + 1}{3x^2 - x + 4};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$   
 д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n-3}{5n+4} \right)^{n+4}$

21) а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2};$   
 б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6};$   
 в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 4}{x^2 - x + 1};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin 6x};$   
 д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-3} \right)^x$

$$22) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - x^2 + 4}{x^2 - 2x - 8};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 4}{3 + x - 4x^2};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^4};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x+1} \right)^x$$

$$23) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{2x^3 + 5x - 1};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 3x}{x^3};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+0,5}$$

$$24) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{5x^6 - 7x^2 - 2};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 8x}{2x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x-3} \right)^x$$

$$25) \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 11x + 6};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 11x + 6};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^2 + 5};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 9x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{3x}.$$

### Задание 6

Найдите значения производных  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  указанной функции в точке  $x_0$ .

$$1) y = \frac{x}{x^2 + 1}, x_0 = 1;$$

$$2) y = x \cdot \sin(x^2 + 1), x_0 = 0;$$

$$3) y = \ln(1 + x^2), x_0 = -1;$$

$$4) y = \sqrt{x + \sqrt{x}}, x_0 = 1;$$

$$5) y = x \cdot e^{x^2}, x_0 = -1;$$

$$6) y = \arcsin(x^2), x_0 = 0;$$

$$7) y = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}, x_0 = 0;$$

$$8) y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}, x_0 = 1;$$

$$9) y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x_0 = 1;$$

$$10) y = \sqrt[3]{\sin x + x}, x_0 = 0,5;$$

$$11) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1} - 1}, x_0 = 0;$$

$$12) y = \sqrt[3]{x + \frac{1}{x}}, x_0 = 1;$$

$$13) y = e^{x^2-x}, x_0 = 0;$$

$$14) y = \operatorname{tg} x, x_0 = 1;$$

$$15) y = c \operatorname{tg} x, x_0 = 0;$$

$$16) y = \frac{x^2 + 5}{x}, x_0 = 1;$$

$$17) y = e^{-3x^2}, x_0 = 0;$$

$$18) y = \ln(x^2 - 4), x_0 = 1;$$

$$19) y = x \cdot \cos(x^2 + 1), x_0 = -1;$$

$$20) y = \arccos(x^2), x_0 = 0;$$

$$21) y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}, x_0 = 1;$$

$$22) y = \cos\left(\frac{1}{x}\right), x_0 = 1;$$

$$23) y = x^2 \cdot e^x, x_0 = -1;$$

$$24) y = \sqrt[3]{x + \cos x}, x_0 = 0,5;$$

$$25) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} + 1}, x_0 = 0.$$

### Задание 7

Исследуйте данную функцию и постройте ее график.

$$1) y = 3x^3 - 15x^2 + 36$$

$$2) y = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$$3) y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

$$4) y = 2x^4 - 4x^2 + 3$$

$$5) y = 6x^2 - 3x^4 + 1$$

$$6) y = 2x^3 - 3x^2 + 7$$

$$7) y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

$$8) y = 3x^4 - 6x^2 + 1$$

$$9) y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

$$10) y = 3x^4 - 8x^3 + 1$$

$$11) y = x^3 - 12x$$

$$12) y = x^4 - 2x^2 - 3$$

$$13) y = x^3 + 3x^2$$

$$14) y = 2x^4 - x^2$$

$$15) y = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$16) y = x^4 - 4x^2 + 3$$

$$17) y = -x^3 + 6x^2$$

$$18) y = x^3 - 3x$$

$$19) y = -x^4 + 2x^2$$

- 20)  $y = x^3 - 6x^2 + 5x$   
 21)  $y = x^3 - 12x^2 + 36$   
 22)  $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$   
 23)  $y = 6x^2 - 3x^4 + 5$   
 24)  $y = 3x^4 - 8x^3 - 2$   
 25)  $y = x^3 - 3x + 4$

### Задание 8

Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделайте чертеж.

- 1)  $y = x - 1, y = x^2 - 4x + 3$   
 2)  $y = x - 3, y = x^2 + 4x - 3$   
 3)  $y = 1 - x, y = 3 - 2x - x^2$   
 4)  $y = x, y = 2 + 2x - x^2$   
 5)  $y = x^2 - x + 1, y = x + 1$   
 6)  $y = 2 - 2x^2, y = x + 1$   
 7)  $y = x^2 + 3x + 1, y = -2x - 3$   
 8)  $y = -3x^2 + 21x - 11, y = 3x + 4$   
 9)  $y = 2x - 3, y = -x^2 + 3x - 1$   
 10)  $y = 3 + 2x - x^2, y = x + 1$   
 11)  $y = 2x - 10, y = \frac{1}{3}(x - 5)^2$   
 12)  $y = x^2 + 4x + 3, y = x + 3$   
 13)  $y = x^2 - 2x - 1, y = x - 1$   
 14)  $y = x^2, y = x + 2$   
 15)  $y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1$   
 16)  $y = x^2 - 2x, y = x + 1$   
 17)  $y = 9 - x^2, y = 0$   
 18)  $y = 4x - x^2, y = 0$   
 19)  $y = x^2 - 2x + 3, y = 6$   
 20)  $y = x^2 + 2x + 3, y = 6$   
 21)  $y = x^2 - 4x, y = 0$   
 22)  $y = x^2 - 3, OX, x = -1, x = 1$   
 23)  $y = -x^2 + 9, OX, x = 0, x = 2$   
 24)  $y = x^2 + 1, OX, x = 1, x = 4$   
 25)  $y = x^2, OX, x = -1, x = 1$

### Задание 9

Задан закон распределения случайной величины  $X$  (в первой строке таблицы даны возможные значения величины  $X$ , а во второй строке указаны вероятности  $p$  этих возможных значений). Постройте многоугольник распределения и найдите:

- а) математическое ожидание  $M(X)$ ;  
 б) дисперсию  $D(X)$ ;  
 в) среднее квадратическое отклонение  $\sigma$ ;  
 г) функцию распределения  $F(x)$  и постройте ее график.

1)

$X$	23	25	28	29
$p$	0,3	0,2	0,1	0,4

2)

$X$	18	22	23	26
$p$	0,3	0,1	0,2	0,4

3)

$X$	12	14	16	20
$p$	0,5	0,1	0,2	0,2

4)

$X$	78	80	84	85
$p$	0,3	0,1	0,2	0,4

5)

$X$	25	27	30	32
$p$	0,4	0,2	0,1	0,3

6)

$X$	35	39	42	46
$p$	0,3	0,4	0,2	0,1

7)

$X$	31	34	37	40
$p$	0,5	0,1	0,3	0,1

8)

$X$	37	41	43	45
$p$	0,5	0,2	0,1	0,2

9)

$X$	24	26	28	30
$p$	0,2	0,1	0,3	0,4

10)

$X$	45	47	50	52
$p$	0,4	0,1	0,3	0,2

11)

$X$	28	32	34	36
-----	----	----	----	----

$p$	0,2	0,5	0,2	0,1
-----	-----	-----	-----	-----

12)

$X$	25	28	30	33
$p$	0,2	0,3	0,4	0,1

13)

$X$	21	25	28	31
$p$	0,4	0,3	0,1	0,2

14)

$X$	46	49	51	55
$p$	0,1	0,2	0,3	0,4

15)

$X$	17	20	23	27
$p$	0,3	0,2	0,1	0,4

16)

$X$	16	21	25	27
$p$	0,3	0,1	0,2	0,4

17)

$X$	30	32	35	40
$p$	0,5	0,2	0,1	0,2

18)

$X$	60	64	67	70
$p$	0,3	0,4	0,1	0,2

19)

$X$	56	58	60	64
$p$	0,4	0,2	0,3	0,1

20)

$X$	12	16	19	21
$p$	0,1	0,5	0,1	0,3

21)

$X$	42	45	48	52
$p$	0,4	0,1	0,2	0,3

22)

$X$	53	55	58	61
$p$	0,4	0,2	0,1	0,3

23)

$X$	13	15	18	19
$p$	0,2	0,2	0,1	0,5

24)

$X$	34	36	40	42
$p$	0,3	0,1	0,2	0,4

25)

$X$	65	68	72	74
$p$	0,1	0,2	0,4	0,3

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

### Задание 1

Выполните действия с матрицами.

а) докажите, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

*Решение*

Умножив по очереди строки матрицы  $A$  на столбцы  $B$ , получим:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-3) \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) & 6 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 6 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) & 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 1 & 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+10-14 & 6+7 & 8+15-21 \\ 6+6-8 & 18+4 & 24+9-12 \\ 5-4+6 & 15-3 & 20-6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 2 \\ 4 & 22 & 21 \\ 7 & 12 & 23 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находим произведение  $B \cdot A$ :

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 7 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) \\ (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 5 & (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) & (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+18+20 & 5+9-8 & 7+12-12 \\ 4+15 & 10-6 & 14+(-9) \\ -4+6-15 & -10+3+6 & -14+4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 6 & 7 \\ 19 & 4 & 5 \\ -13 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ ;

б) найдите  $A \cdot A^{-1}$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

*Решение*

Чтобы найти  $A \cdot A^{-1}$ , нужно сначала получить матрицу  $A^{-1}$  – обратную для матрицы  $A$ . Находим определитель матрицы  $A$  по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 84 + 100 - 105 + 16 + 90 = -207 + 206 = -1 \neq 0, \text{ значит,}$$

данная матрица невырожденная.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27; & A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34; \\ & & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24. \end{aligned}$$

Составим вспомогательную матрицу  $B^*$ :

$$B^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}.$$

Составим транспонированную матрицу  $B^{*T}$ , заменив в матрице  $B^*$  строки столбцами:

$$B^{*T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

Составим обратную матрицу  $A^{-1}$  по формуле  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} B^{*T}$ :

$$A^{-1} = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение  $A \cdot A^{-1}$ :

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-38) + 7 \cdot 27 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 41 + 7 \cdot (-29) & 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-34) + 7 \cdot 24 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-38) + 4 \cdot 27 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 41 + 4 \cdot (-29) & 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-34) + 4 \cdot 24 \\ 5 \cdot 1 + (-2)(-38) + (-3)27 & 5 \cdot (-1) + (-2)41 + (-3)(-29) & 5 \cdot 1 + (-2)(-34) + (-3)24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

При вычислении  $A^{-1} \cdot A$ , т.е обратная матрица  $A^{-1}$  умножается слева от прямой матрицы  $A$ , в результате также получается единичная матрица  $E$ . Это является проверкой при выполнении действий над матрицами вида  $A \cdot A^{-1}$  и  $A^{-1} \cdot A$ ;

в) найдите  $B^3$ , если

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

*Решение*

Так как действие  $B^3$  можно представить как  $B^3 = B \cdot B \cdot B = B^2 \cdot B$ , то выполним сначала действие  $B^2$ . Умножив по очереди строки матрицы  $B$  на столбцы  $B$ , получим:

$$\begin{aligned} B^2 &= B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) & -2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 & -2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+6-8 & 3+4 & 4+9-12 \\ 2-6 & 6+3 & 8-9 \\ -2+2+6 & -6-3 & -8+3+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -4 & 9 & -1 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично выполним умножение матрицы  $B^2$  на матрицу  $B$ :

$$\begin{aligned} B^3 &= B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -4 & 9 & -1 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) & -1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) \\ -4 \cdot 1 + 9 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) & -4 \cdot 3 + 9 \cdot 0 - 1 \cdot 1 & -4 \cdot 4 + 9 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) \\ 6 \cdot 1 - 9 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) & 6 \cdot 3 - 9 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 6 \cdot 4 - 9 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+14-2 & -3+1 & -4+21-3 \\ -4+18+2 & -12-1 & -16+27+3 \\ 6-18-8 & 18+4 & 24-27-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 14 \\ 16 & -13 & 14 \\ -20 & 22 & -15 \end{pmatrix}.$$

## Задание 2

Решите систему линейных уравнений тремя способами:

- а) по формулам Крамера;
- б) с помощью обратной матрицы;
- в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

- а) по формулам Крамера.

*Решение*

Составим четыре определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ — главный, составлен из коэффициентов при неизвестных.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ — составлен из главного, заменой столбца коэффициентов при } x \text{ на столбец свободных членов, аналогично:}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вычисляем составленные определители по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 24 - 9 - 4 + 4 = 10 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 16 - 6 - 0 + 10 = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 12 + 0 + 15 - 8 - 0 = 20$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 30 - 0 - 5 - 8 = 15.$$

Находим решение по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

$$x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{20}{10} = 2; \quad z = \frac{15}{10} = 1,5.$$

Проверка:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1,5 = 0 \text{ "и"} \\ 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 + 4 \cdot 1,5 = 5 \text{ "и"} \\ 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 - 1,5 = 2 \text{ "и"} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 2 \\ z = 1,5 \end{cases}$$

б) с помощью обратной матрицы.

*Решение*

Составим три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ – из коэффициентов при неизвестных.}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ – столбцевая из неизвестных.}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ – из свободных членов.}$$

Систему можно записать в виде:  $A \cdot X = H$ , где матрица  $X$  находится по формуле  $X = A^{-1} \cdot H$ . Таким образом, нужно найти матрицу  $A^{-1}$ , обратную для матрицы  $A$ .

Находим определитель матрицы  $A$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow A \text{ невырожденная.}$$

Составим алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; \\ A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 14; & A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \\ A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10; \\ A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1; & A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5. \\ A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8; \end{aligned}$$

Составим матрицу  $B$  из полученных алгебраических дополнений:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 14 & 5 \\ -1 & 8 & 5 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Составим транспонированную матрицу  $B^T$ , заменив строки столбцами:

$$B^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу  $A^{-1}$  составим по формуле  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot B^T$ , таким образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу  $X$  по формуле  $X = A^{-1} \cdot H$ :

$$X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 + 5 \cdot 2 \\ 14 \cdot 0 + 8 \cdot 5 + (-10) \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = 2 \\ z = 1,5 \end{cases}$

в) методом Гаусса.

*Решение*

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Используя элементарные преобразования, преобразуем расширенную матрицу системы.

*1-й шаг.* Так как  $a_{11} \neq 0$ , то умножая первую строку матрицы на числа  $(-2)$  и  $(-3)$  и прибавляя полученные строки соответственно ко второй и третьей строкам, исключим переменную  $x$  из всех строк, начиная со второй:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \end{array} \right).$$

*2-й шаг.* Так как теперь  $a_{22} = -5 \neq 0$ , то умножая вторую строку на  $(-1)$  и прибавляя полученную строку к третьей, исключим из нее переменную  $y$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array} \right).$$

*3-й шаг.* Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -5y + 10z = 5 \\ -2z = -3 \end{cases}.$$

*4-й шаг.* Используя обратный ход метода Гаусса, найдем из третьего уравнения

$$z = \frac{-3}{-2} = 1,5; \quad \text{из второго} \quad y = \frac{5 - 10z}{-5} = \frac{5 - 10 \cdot 1,5}{-5} = 2 \quad \text{и из первого уравнения}$$

$$x = 3z - 2y = 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 2 = 0,5.$$

Ответ:  $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = 2 \\ z = 1,5 \end{cases}.$

### Задание 3

Составьте множества  $A$  и  $B$  из чисел, соответствующих вашему полному имени и фамилии (без повторений). Для этого запишите весь алфавит и рядом с каждой буквой подпишите ее номер. Выполните следующие операции с получившимися множествами:

- а)  $A \cup B;$
- б)  $A \cap B;$
- в)  $A \setminus B;$
- г)  $B \setminus A;$
- д)  $A \times B$  и результат изобразите на числовой плоскости.

#### *Решение*

Запишем алфавит и рядом с каждой буквой подписываем соответствующий ей по порядку номер.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	

Составим множества  $A$  и  $B$  из чисел, соответствующих полному имени и фамилии (без повторений):

*Иван Петров*

$$A = \{10, 3, 1, 15\}, \quad B = \{17, 6, 20, 18, 16, 3\}.$$

Выполним операции с получившимися множествами:

а)  $A \cup B.$

Так как объединению множеств  $A$  и  $B$  принадлежат элементы, входящие в  $A$  или  $B$ , при этом одинаковые элементы зачисляются только один раз, то

$$A \cup B = \{1, 3, 6, 10, 15, 16, 17, 18, 20\};$$

б)  $A \cap B.$

Пересечению множеств принадлежат элементы, входящие одновременно во множество  $A$  и во множество  $B$ . Следовательно,  $A \cap B = \{3\}$ ;

в)  $A \setminus B.$

По определению во множество  $A \setminus B$  должны входить те элементы множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ . Поэтому  $A \setminus B = \{1, 10, 15\}$ ;

г)  $B \setminus A$ .

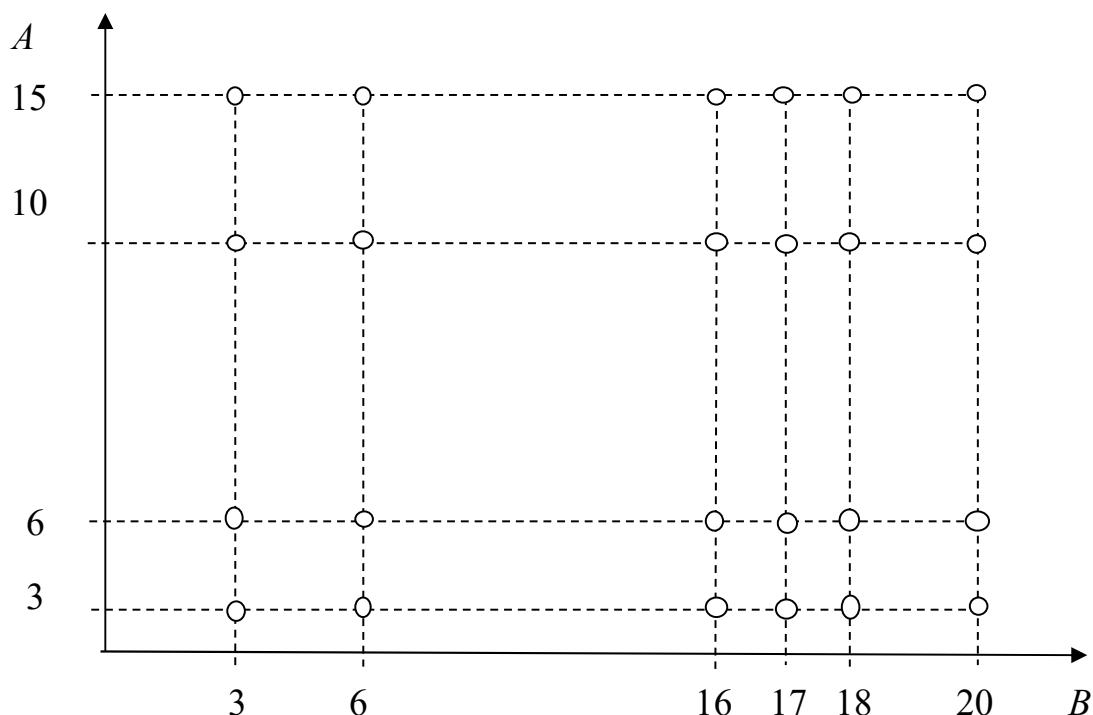
Аналогично, множество  $B \setminus A = \{6, 16, 17, 18, 20\}$ ;

д)  $A \times B$ .

Так как декартовым произведением (прямым произведением) множеств  $A$  и  $B$  называется совокупность пар элементов  $(a_i; b_i)$ , где первый элемент пары  $a_i$  принадлежит множеству  $A$ , а второй элемент пары  $b_i$  принадлежит множеству  $B$ , тогда получаем:

$$A \times B = \{(1,3), (1,6), (1,16), (1,17), (1,18), (1,20), (3,3), (3,6), (3,16), (3,17), (3,18), (3,20), (10,3), (10,6), (10,16), (10,17), (10,18), (10,20), (15,3), (15,6), (15,16), (15,17), (15,18), (15,20)\}$$

Результат изобразим на числовой плоскости. По оси  $X$  обозначим элементы множества  $B$ , по оси  $Y$  – элементы множества  $A$ . Получившиеся пары обозначаем точками на числовой плоскости.



#### Задание 4

Выполните действия с комплексными числами.

$$\frac{2+3i}{4+i} - \frac{4-i}{2-3i}$$

*Решение*

Умножим числитель и знаменатель дробей на числа, сопряженные знаменателям:

$$z = \frac{2+3i}{4+i} - \frac{4-i}{2-3i} = \frac{(2+3i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} - \frac{(4-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}.$$

Затем в каждой дроби выполним произведение числителей и знаменателей, причем в знаменателе используем формулу сокращенного умножения – разность квадратов  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ :

$$z = \frac{8 - 2i + 12i - 3i^2}{16 - i^2} - \frac{8 + 12i - 2i - 3i^2}{4 - 9i^2}.$$

Рассматривая подобные слагаемые и используя основное правило комплексных чисел  $i^2 = -1$ , получаем:

$$z = \frac{8 + 10i + 3}{16 + 1} - \frac{8 + 10i + 3}{4 + 9} = \frac{11 + 10i}{17} - \frac{11 + 10i}{13} = \frac{11}{17} + \frac{10i}{17} - \left( \frac{11}{13} + \frac{10i}{13} \right).$$

Группируя действительные и мнимые части и приводя их к общему знаменателю, запишем получившееся комплексное число:

$$z = \left( \frac{11}{17} - \frac{11}{13} \right) + \left( \frac{10i}{17} - \frac{10i}{13} \right) = \frac{143 - 187}{221} + \frac{130 - 170}{221}i = -\frac{44}{221} - \frac{40}{221}i.$$

### Задание 5

Найдите пределы функций.

a)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x+5}{x-5}$

*Решение*

На основании непрерывности функции в точке  $x = 7$  искомый предел равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x+5}{x-5} = \frac{3 \cdot 7 + 5}{7 - 5} = \frac{26}{2} = 13;$$

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 4x - 4}$

*Решение*

Для раскрытия неопределенности вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на множитель  $(x - 2)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \left( x + \frac{1}{2} \right) (x - 2)}{3 \left( x + \frac{2}{3} \right) (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{3x + 2} = \frac{5}{8}.$$

Здесь предварительно имеем  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного трехчлена.

$$1) \text{ числитель } x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 2;$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2).$$

$$2) \text{ знаменатель } x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6}; \quad x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = 2;$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2);$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 - x + 2}$$

*Решение*

Имеем неопределенность вида  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ . Учитывая, что поведение числителя и знаменателя при  $x \rightarrow \infty$  определяется членами с наибольшими показателями степеней (соответственно  $3x^2$  и  $x^2$ ), разделим числитель и знаменатель на  $x^2$ , т.е. на  $x$  с наибольшим показателем степени числителя и знаменателя. Используя теоремы о пределах, получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 - x + 2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3,$$

так как

$$\frac{5}{x} \rightarrow 0; \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0; \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ и } \frac{2}{x^2} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x}$$

*Решение*

Имеем неопределенность вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . Используя первый замечательный предел вида

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ получим:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{8x}{\sin 8x} \cdot \frac{4}{8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{4x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{8x}{\sin 8x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x-1} \right)^{4x}$$

*Решение*

Имеем неопределенность вида  $[1^\infty]$ , так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{2x-1} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x = \infty$ . Используя второй

замечательный предел вида  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ , выделим у дроби целую часть:

$$\frac{2x-3}{2x-1} = \frac{(2x-1)-2}{2x-1} = 1 - \frac{2}{2x-1}.$$

Тогда получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x-1} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{2x-1} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 - \frac{2}{2x-1} \right)^{-\frac{2x-1}{2}} \right)^{\frac{2}{2x-1} \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{8x}{2x-1} \right)} = e^{-4}.$$

### Задание 6

Найдите значения производных  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  указанной функции в точке  $x_0$ :

$$y = x^3 \cdot e^{3x}, x_0 = 1.$$

*Решение*

Функция  $y$  представляет собой произведение двух функций:  $u = x^3$ ,  $v = e^{3x}$ . Используя правило дифференцирования  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  и таблицу производных основных, получим первую производную функции:

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 \cdot e^{3x})' = (x^3)' \cdot e^{3x} + x^3 \cdot (e^{3x})' = 3x^2 \cdot e^{3x} + x^3 \cdot e^{3x} \cdot (3x)' = \\ &= 3x^2 \cdot e^{3x} + 3x^3 \cdot e^{3x} = 3e^{3x}(x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Находим значение первой производной в точке  $x_0 = 1$ :

$$y'(1) = 3 \cdot e^{3 \cdot 1} \cdot (1^2 + 1^3) = 3e^3 \cdot 2 = 6e^3.$$

Получим вторую производную функции  $y$  или первую производную функции  $y'$ , которая также представляет собой произведение двух функций:  $u = 3e^{3x}$  и  $v = x^2 + x^3$ . Здесь, помимо правила производной произведения, будем использовать правило производной суммы  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ :

$$y'' = (y')' = (3e^{3x}(x^2 + x^3))' = (3e^{3x})' \cdot (x^2 + x^3) + 3e^{3x} \cdot (x^2 + x^3)' =$$

$$\begin{aligned}
&= 3e^{3x} \cdot (3x)' \cdot (x^2 + x^3) + 3e^{3x} \cdot \left( (x^2)' + (x^3)' \right) = 3e^{3x} \cdot 3 \cdot (x^2 + x^3) + 3e^{3x} \cdot (2x + 3x^2) = \\
&= 3e^{3x} \cdot 3 \cdot (x^2 + x^3) + 3e^{3x} \cdot (2x + 3x^2) = 3e^{3x} (3x^3 + 6x^2 + 2x).
\end{aligned}$$

Найдем значение второй производной в точке  $x_0 = 1$ :

$$y''(1) = 3 \cdot e^{3 \cdot 1} \cdot (3 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1) = 3e^3 \cdot 11 = 33e^3.$$

Получим третью производную функции  $y$  или первую производную функции  $y''$ , которая также представляет собой произведение двух функций:  $u = 3e^{3x}$  и  $v = 3x^3 + 6x^2 + 2x$ :

$$\begin{aligned}
y''' &= (y'')' = (3e^{3x}(3x^3 + 6x^2 + 2x))' = (3e^{3x})' \cdot (3x^3 + 6x^2 + 2x) + 3e^{3x} \cdot (3x^3 + 6x^2 + 2x)' = \\
&= 3e^{3x} \cdot (3x)' \cdot (3x^3 + 6x^2 + 2x) + 3e^{3x} \cdot \left( (3x^3)' + (6x^2)' + (2x)'' \right) = \\
&= 3e^{3x} \cdot 3 \cdot (3x^3 + 6x^2 + 2x) + 3e^{3x} \cdot (9x^2 + 12x + 2) = 3e^{3x} (9x^3 + 27x^2 + 18x + 2).
\end{aligned}$$

Найдем значение второй производной в точке  $x_0 = 1$ :

$$y'''(1) = 3 \cdot e^{3 \cdot 1} \cdot (9 \cdot 1^3 + 27 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 2) = 3e^3 \cdot 56 = 168e^3.$$

Ответ:  $y'(1) = 6e^3$ ;  $y''(1) = 33e^3$ ;  $y'''(1) = 168e^3$ .

### Задание 7

Исследуйте данную функцию и постройте ее график:  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ .

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на четность-нечетность;
- 3) найти вертикальные асимптоты;
- 4) исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты;
- 5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
- 6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;
- 7) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

### Решение

1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е.  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида), так как  $y(-x) \neq \pm y(x)$ .
3. Вертикальных асимптот нет, так как функция определена при всех действительных

значениях  $x$ .

4. Поведение функции в бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \pm\infty, \text{ т.е. график данной функции асимптот не имеет.}$$

5. Экстремумы и интервалы монотонности.

Находим первую производную:

$$y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 - 12x + 9;$$

$$y' = 0 \text{ при } 3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Решая данное уравнение, получим:

$$D = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 144 - 108 = 36 = 6^2;$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{12 - 6}{6} = 1; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{12 + 6}{6} = 3,$$

т.е. критические точки  $x_1 = 1, x_2 = 3$ . Эти точки делят область определения функции на три промежутка:  $(-\infty; 1), (1; 3), (3; +\infty)$ .

$x$	$(-\infty; 1)$	$x_1 = 1$	$(1; 3)$	$x_2 = 3$	$(3; +\infty)$
$y'$	+	0	-	0	+
$y$		max		min	

В первом и последнем из них  $y'(x) > 0$ , в промежутке  $x \in (1; 3)$  производная  $y'(x) < 0$ . Следовательно, в промежутках  $x \in (-\infty; 1), x \in (3; +\infty)$  функция возрастает, а в промежутке  $x \in (1; 3)$  – убывает. При переходе через точку  $x_1$  производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку  $x_2$  – с минуса на плюс. То есть  $x_1$  и  $x_2$  – точки экстремума. Находим значение функции в точках экстремума:

$$y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1; \quad y(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3.$$

Таким образом,  $(1; 1)$  – точка максимума,  $(3; -3)$  – точка минимума.

6. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Находим вторую производную:

$$y'' = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12; \quad y'' = 0 \text{ при } 6x - 12 = 0; \quad \text{отсюда получаем } x = 2.$$

Точка  $x = 2$  делит область определения функции на два промежутка:  $x \in (-\infty; 2)$  и  $x \in (2; +\infty)$ .

$x$	$(-\infty; 2)$	$x = 2$	$(2; +\infty)$
$y''$	-	0	+
$y$		точка перегиба	

В первом из них  $y'' < 0$ , т.е. кривая выпукла вверх, а во втором  $y'' > 0$ , т.е. кривая выпукла вниз.

Следовательно, точка  $x = 2$  является точкой перегиба. Находим значение функции в этой точке:

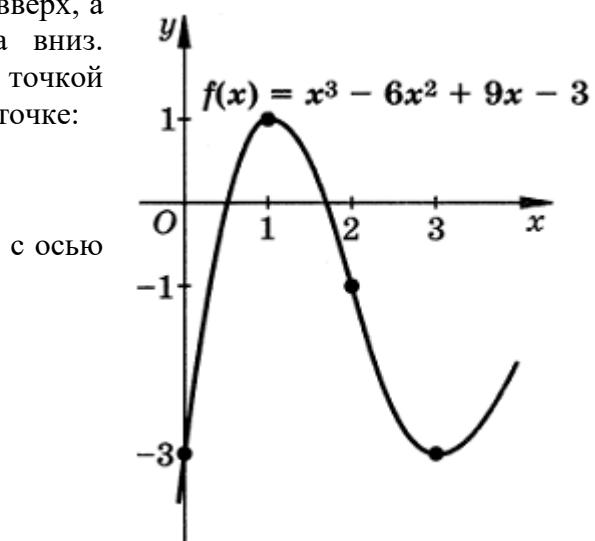
$$y(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = -1.$$

Таким образом,  $(2; -1)$  – точка перегиба.

7. Находим точку пересечения графика

$OY$ : при  $x = 0$  значение функции

$$y(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 3 = -3.$$



Точки пересечения графика функции с осью  $OX$  найти затруднительно, так как для этого необходимо решить кубическое уравнение  $y(x) = 0$ .

По полученным точкам построим приближенный график данной функции.

### Задание 8

Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделайте чертеж.

$$y = -x; \quad y = 2x - x^2$$

*Решение*

Сделаем чертеж:

$y = -x$  – прямая,

$y = 2x - x^2$  – парабола, ветви направлены вниз, ось симметрии  $x = 1$ .

Найдем точки пересечения параболы  $y = 2x - x^2$  и прямой  $y = -x$ , решив систему этих уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

Получим:

$$-x = 2x - x^2$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

Проектируя фигуру на ось абсцисс, видим, что искомая площадь – это площадь фигуры, заключенной между кривыми; при этом на отрезке  $[0;3]$ :

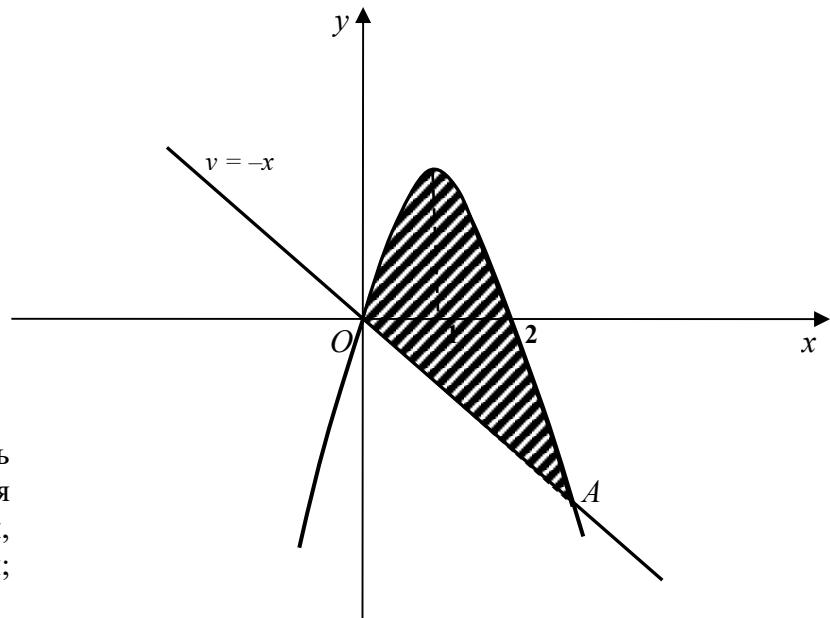
$$y_2 = 2x - x^2 \geq y_1 = -x.$$

Применим формулу для вычисления площадей плоских фигур:

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx,$$

где пределами интегрирования будут абсциссы точек  $O$  и  $A$ :

$$S = \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x)) dx$$



С помощью формулы Ньютона – Лейбница вычислим значение площади фигуры:

$$S = \int_0^3 (3x - x^2) dx = 3 \int_0^3 x dx - \int_0^3 x^2 dx = \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27}{2} - \frac{18}{2} = \frac{9}{2}$$

Ответ:  $S = 4,5 (e\text{d}^2)$ .

### Задание 9

Задан закон распределения случайной величины  $X$  (в первой строке таблицы даны возможные значения величины  $X$ , а во второй строке указаны вероятности  $p$  этих возможных значений). Постройте многоугольник распределения и найдите:

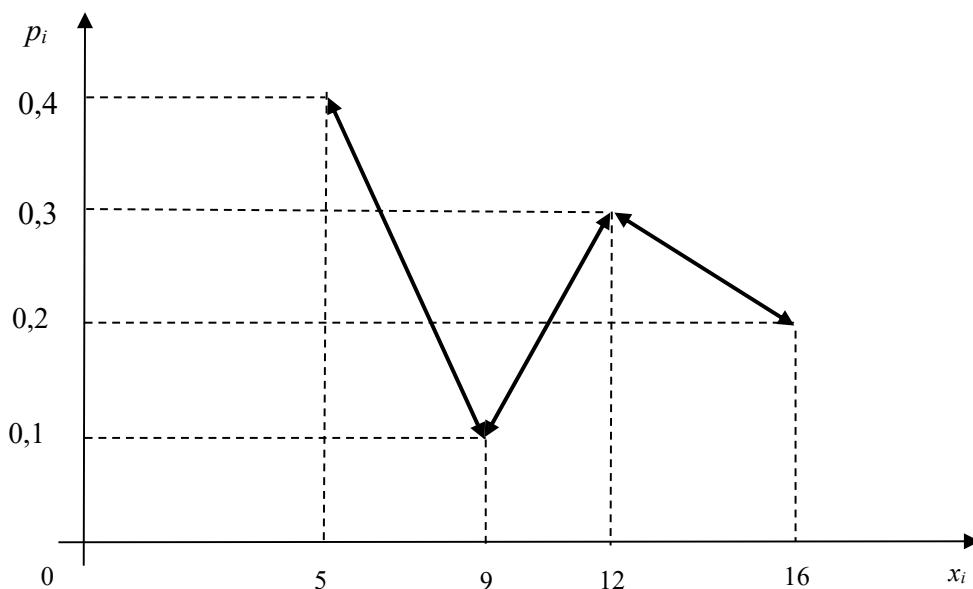
- а) математическое ожидание  $M(X)$ ;
- б) дисперсию  $D(X)$ ;
- в) среднее квадратическое отклонение  $\sigma$ ;
- г) функцию распределения  $F(x)$  и постройте ее график.

$X$	5	9	12	16
$p$	0,4	0,1	0,3	0,2

Решение

Построим многоугольник распределения.

Строим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения  $x_i$ , а по оси ординат – соответствующие вероятности  $p_i$ . Построим точки  $M_1(5;0,4)$ ;  $M_2(9;0,1)$ ;  $M_3(12;0,3)$  и  $M_4(16;0,2)$ . Соединив эти точки отрезками прямых, получим искомый многоугольник распределения.



- а) математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений  $X$  на их вероятности, т.е.

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$M(X) = 5 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,2 = 2 + 0,9 + 3,6 + 3,2 = 9,7 ;$$

б) вычислим дисперсию по формуле  $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ . Для этого нужно найти  $M(X^2)$ . Запишем закон распределения  $X^2$ :

$X^2$	25	81	144	256
$p$	0,4	0,1	0,3	0,2

Найдем математическое ожидание  $M(X^2)$ :

$$M(X^2) = 25 \cdot 0,4 + 81 \cdot 0,1 + 144 \cdot 0,3 + 256 \cdot 0,2 = 10 + 8,1 + 43,2 + 51,2 = 112,5 .$$

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X) = 112,5 - 9,7^2 = 18,41 ;$$

в) найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{18,41} = 4,29 ;$$

г) если  $x \leq 5$ , то  $F(x) = 0$ . Действительно, значений, меньших числа 5, величина  $X$  не принимает.

Следовательно, при  $x \leq 5$  функция  $F(x) = P(X < x) = 0$ .

Если  $5 < x \leq 9$ , то  $F(x) = 0,4$ . Действительно,  $X$  может принять значение 5 с вероятностью 0,4.

Если  $9 < x \leq 12$ , то  $F(x) = 0,5$ . Действительно,  $X$  может принять значение 5 с вероятностью 0,4 и значение 9 с вероятностью 0,1; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое,  $X$  может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью  $0,4 + 0,1 = 0,5$ .

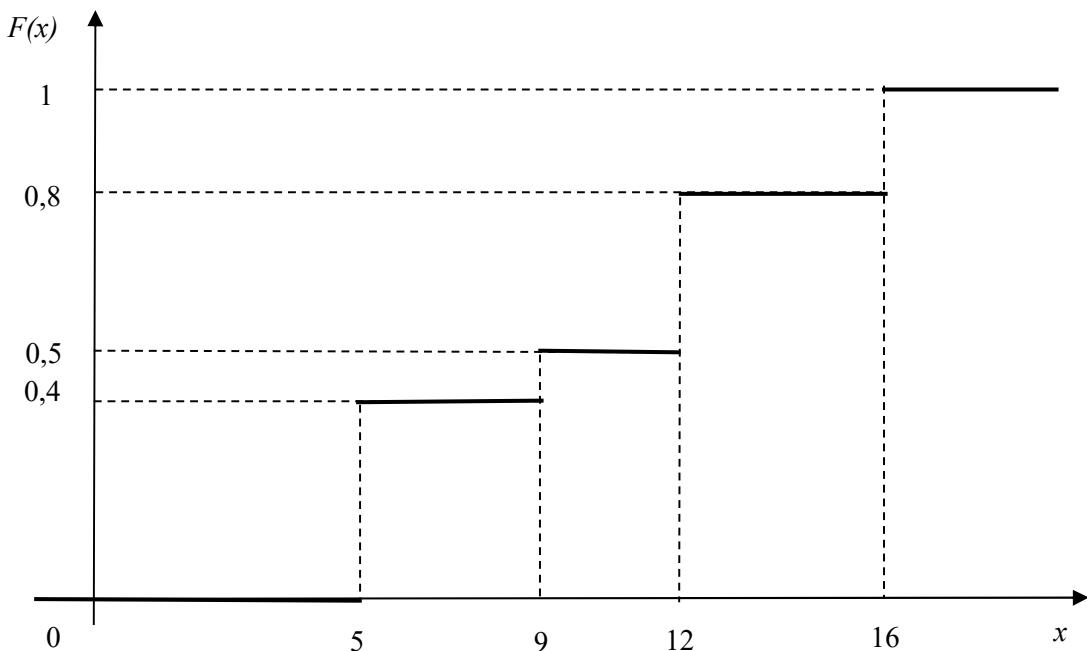
Если  $12 < x \leq 16$ , то  $F(x) = 0,8$ . Действительно,  $X$  может принять значение 5 с вероятностью 0,4, значение 9 с вероятностью 0,1 и значение 12 с вероятностью 0,3; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое,  $X$  может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью  $0,4 + 0,1 + 0,3 = 0,8$ .

Если  $x > 16$ , то  $F(x) = 1$ . Действительно, событие  $X \leq 16$  достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 5 \\ 0,4 & \text{при } 5 < x \leq 9 \\ 0,5 & \text{при } 9 < x \leq 12 \\ 0,8 & \text{при } 12 < x \leq 16 \\ 1 & \text{при } x > 16 \end{cases} .$$

Построим график этой функции.



## ТАБЛИЦЫ И ФОРМУЛЫ

1. Правила дифференцирования:

1) производная постоянной равна нулю:

$$C' = 0;$$

2) производная аргумента равна единице:

$$x' = 1;$$

3) производная суммы (разности) двух функций:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

4) производная произведения функций:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

5) постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x);$$

6) производная частного функций:

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)};$$

7) производная сложной функции:

$$(f(kx + \varepsilon))' = k \cdot f'(kx + \varepsilon).$$

Пусть  $y = f(u(x))$  – сложная функция,  $y = f(u)$  и  $u = u(x)$ . Тогда:

$$y'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

2. Таблица основных производных:

Функция $y$	Производная $y'$	Функция $y$	Производная $y'$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$e^x$	$e^x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$		

3. Правила интегрирования:

1) постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx;$$

2) интеграл от суммы (разности) двух функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

3) интеграл от сложной функции:

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + C$$

4. Таблица основных

неопределенных интегралов:

$\int 0dx = C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 1, a \neq 1$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x \frac{x}{a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 + a^2} \right  + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	

5. Формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  – первообразная, вычисляемая как неопределенный интеграл.