ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет среднего профессионального образования

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ПД.01 МАТЕМАТИКА (ВКЛЮЧАЯ АЛГЕБРУ И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЮ)

Специальность 21.02.05 Земельно-имущественные отношения

Форма обучения очная

Оренбург 2021 г.

I семестр

Лекция № 1 (2 часа)
Тема: «Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых в пространстве»
1 **Вопросы лекции:**
1.1. Понятие стереометрии.
1.2. Аксиомы стереометрии.
1.3. Существование плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку.
1.4. Пересечение прямой с плоскостью.
1.5. Существование плоскости, проходящей через данные точки.
1.6. Понятие параллельных и скрещивающихся прямых.
1.7. Признак параллельности прямых.
2 Литература.
2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1 . Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2 . Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Понятие стереометрии. Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость.

3.2. Аксиомы стереометрии. Группа аксиом С:

C_1. Какова бы ни была плоскость существуют точки принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

C_2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

3.3. Существовании плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку.

Теорема 1.1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

3.4. Пересечение прямой с плоскостью.

Теорема 1.2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Из теоремы следует, что плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

3.5. Существование плоскости, проходящей через данные точки.

Теорема 1.3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

3.6. Понятие параллельных и скрещивающихся прямых. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются скрещивающимися (рис. 1).

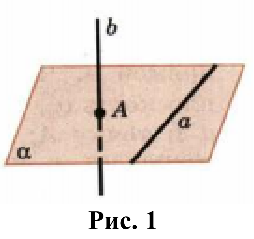


Рис. 1

3.7. Признак параллельности прямых.

Теорема 2.1. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой и при том только одну.

Теорема 2.2. Признак параллельности прямых. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Лекция № 2 (2 часа)

Тема: «Параллельность прямой и плоскости, плоскостей в пространстве»

1 **Вопросы лекции:**

1.1. Признак параллельности прямой и плоскости.

1.2. Признак параллельности плоскостей.

1.3. Свойства параллельных плоскостей.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1 . Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2 . Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Признак параллельности прямой и плоскости. Прямая и плоскость, называются параллельными, если они не пересекаются, то есть не имеют общих точек

Теорема 2.3. Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

3.2. Признак параллельности плоскостей. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, то есть не имеют общих точек.

Теорема 2.4. Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Теорема 2.5. Существование плоскости, параллельной данной плоскости. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

3.3. Свойства параллельных плоскостей.

1) Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

2) Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями равны.

Лекция № 3 (2 часов)

Тема: «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве»

1 **Вопросы лекции:**

1.1. Перпендикулярность прямых в пространстве.

1.2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

1.3. Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1 . Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.1. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Перпендикулярность прямых в пространстве. Две прямые называются перпендикулярными если, они пересекаются под прямым углом.

Теорема 3.1. Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

3.2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения. (рис. 2).

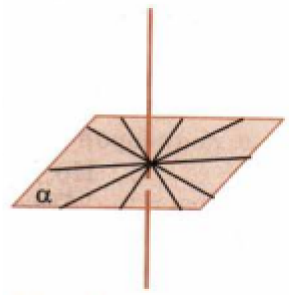


Рис. 2

Теорема 3.2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

3.3. Свойство перпендикулярных прямой и плоскости.

Теорема 3.3. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Теорема 3.4. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Лекция № 4 (2 часов)

Тема: «Перпендикуляр и наклонная»

2 Вопросы лекции:

1.1. Перпендикуляр и наклонная.

1.2. Теорема о трех перпендикулярах.

1.3. Признак перпендикулярности плоскостей.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1 . Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2017. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Перпендикуляр и наклонная. Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра.**

Расстоянием от точки до плоскости, называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной**.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной**.

3.2. Теорема о трех перпендикулярах

Теорема 3.5. Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

3.3. Признак перпендикулярности плоскостей. Две пересекающие плоскости, называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Теорема 3.6. Признак перпендикулярности плоскостей. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Лекция № 5 (2 часа)

Тема: «Декартовы координаты в пространстве. Преобразование в пространстве»

1 Вопросы лекции:

1.1. Введение декартовых координат в пространстве.

1.2. Расстояние между точками.

1.3. Координаты середины отрезка.

1.4. Преобразование симметрии в пространстве.

1.5. Движение в пространстве.

1.6. Параллельный перенос в пространстве.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Введение декартовых координат в пространстве. Возьмем три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, пересекающиеся в одной точке О. Проведем через каждую пару этих прямых плоскость.

Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy. Две другие плоскости называются соответственно xz и yz. Прямые x, y, z называются ***координатными осями*** (или осями координат), точка их пересечения О — началом координат, а плоскости xy, yz и xz — координатными плоскостями. Точка О разбивает каждую из осей координат на две полупрямые — полуоси, которые мы условимся называть положительной и отрицательной. (Рис. 3)

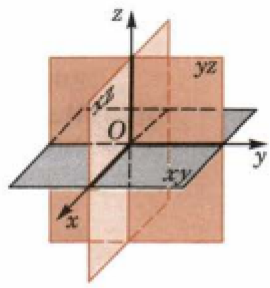


Рис. 3

Возьмем теперь произвольную точку А и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости yz (рис. 4). Она пересекает ось X в некоторой точке A_x.

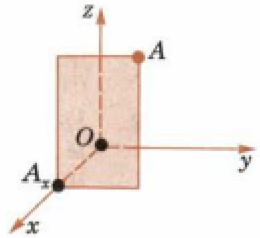


Рис. 4

Координатой x точки A будем называть число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси X, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Если точка Ax совпадает с точкой O, то полагаем x = 0. Аналогично определяются координаты y и z точки A. Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки: A (x; y; z). Иногда будем обозначать точку просто ее координатами (x; y; z).

3.2. Расстояние между точками. Расстояние между точками A_1 (x_1; y_1; z_1) и A_2 (x_2; y_2; z_2) вычисляют по формуле: $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

3.3. Координаты середины отрезка. Пусть A (x_1; y_1; z_1) и B (x_2; y_2; z_2) – две произвольные точки. Координаты (x; y; z) середины C отрезка AB вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

3.4. Преобразование симметрии в пространстве.

Понятие преобразования для фигур в пространстве определяется так же, как и на плоскости. Так же, как и на плоскости, определяются преобразования симметрии относительно точки и прямой.

Кроме симметрии относительно точки и прямой в пространстве, рассматривают преобразование симметрии относительно плоскости. Это преобразование состоит в следующем (рис. 5).

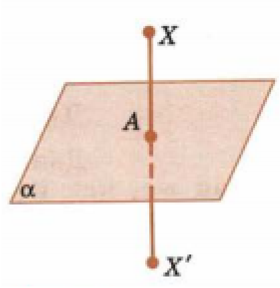


Рис. 5

Пусть α – произвольная фиксированная плоскость. Из точки X фигуры опускаем перпендикуляр XA на плоскость α и на его продолжении за точку A откладываем отрезок AX', равный XA. Точка X' называется симметричной точке X относительно плоскости α, а преобразование, которое переводит точку X в симметричную ей точку X', называется преобразованием симметрии относительно плоскости α.

Если точка X лежит в плоскости α, то считается, что точка X переходит в себя. Если преобразование симметрии относительно плоскости α переводит фигуру в себя, то фигура называется симметричной относительно плоскости α, а плоскость α называется плоскостью симметрии этой фигуры.

3.5. Движение в пространстве. Движение в пространстве определяется так же, как и на плоскости. А именно: движением называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

Дословно так же, как и для движения на плоскости, доказывается, что при движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки и сохраняются углы между полупрямыми.

Новым свойством движения в пространстве является то, что движение переводит плоскости в плоскости.

3.6. Параллельный перенос в пространстве. Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка (x; y; z) фигуры переходит в точку (x + a; y + b; z + c), где числа a, b, c одни и те же для всех точек (x; y; z).

Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x' = x + a, \ y' = y + b, \ z' = z + c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка (x; y; z) при параллельном переносе. Так же как и на плоскости, доказываются следующие свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос есть движение.
2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.
3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).
4. Каковы бы ни были точки A и A', существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

Новым для параллельного переноса в пространстве является следующее свойство:

5. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Лекция № 6 (2 часа)
Тема: «Угол между прямой и плоскостью»

1 Вопросы лекции:

1.1. Угол между скрещивающимися прямыми.
1.2. Угол между прямой и плоскостью.
1.3. Угол между плоскостями.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2017. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Угол между скрещивающимися прямыми. Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется углом между прямыми. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90° по определению. Угол между параллельными прямыми считаем равным нулю.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

3.2. Угол между прямой и плоскостью. Пусть α — плоскость и а — пересекающая ее прямая, не перпендикулярная плоскости α (рис. 6). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой а на плоскость α, лежат на прямой а'. Эта прямая называется проекцией прямой а на плоскость α. Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

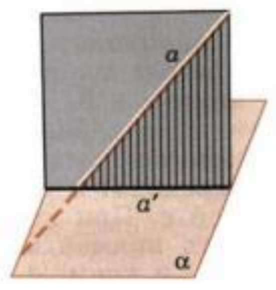


Рис. 6

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол считается равным 90°. Если параллельна, то 0°. Так как прямая а, ее проекция а' на плоскость и перпендикуляр к плоскости α в точке ее пересечения с прямой а лежат в одной плоскости, то угол между прямой и плоскостью дополняет до 90° угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости.

3.3. Угол между плоскостями. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется углом между данными плоскостями. (Рис.7)

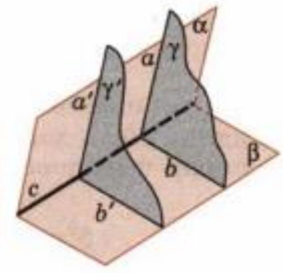


Рис.7

Лекция № 7 (2 часа)

Тема: «Векторы в пространстве»

1 Вопросы лекции:

1.1. Понятие вектора в пространстве.

1.2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.

1.3. Скалярное произведение векторов.

1.4. **Компланарные векторы.**

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Понятие вектора в пространстве.

Вектором называется направленный отрезок.

Координатами вектора с началом в точке A_1 (x_1; y_1; z_1) и концом в точке A_2 (x_2; y_2; z_2) называются числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

3.2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Так же как и на плоскости, определяются действия над векторами: сложение, умножение на число и скалярное произведение.

Суммой векторов $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ называется вектор $\vec{c} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Так же как и на плоскости, доказывается векторное равенство $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Произведением вектора $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

Так же как и на плоскости, доказывается, что абсолютная величина вектора $\lambda\vec{a}$ равна $|\lambda||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

3.3. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов $\overline{(a_1; a_2; a_3)}$ и $\overline{(b_1; b_2; b_3)}$ называется число, которое вычисляется по формуле $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Буквально так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

3.4. Компланарные векторы.

Три вектора в пространстве называются компланарными, если равные им векторы, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости. (Рис.8)

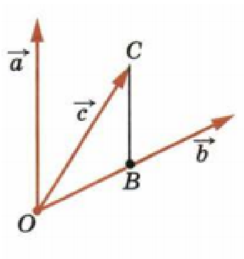


Рис. 8

Лекция № 8 (2 часа)

Тема: «Многогранные углы. Многогранник. Призма»

1 Вопросы лекции:

1.1. Двугранные углы.

1.2. Трехгранные углы. Многогранные углы.

1.3. Понятие многогранника и его основные элементы.

1.4. Понятие призмы и ее основные элементы.

1.5. Прямая и правильная призма.

1.6. Понятие параллелепипеда.

1.7. Теорема о противолежащих гранях параллелепипеда.

1.8. Прямоугольный параллелепипед. Измерения прямоугольного параллелепипеда.

1.9. Симметрия прямоугольного параллелепипеда.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Двугранные углы. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (рис. 9). Полуплоскости называются гранями, а ограничивающая их прямая — ребром двугранного угла.

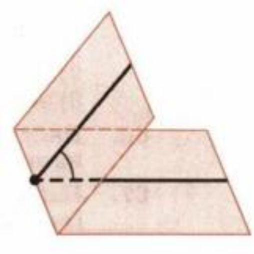


Рис. 9

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется линейным углом двугранного угла. За меру двугранного угла принимается мера соответствующего ему линейного угла. Все линейные углы двугранного угла совмещаются параллельным переносом, а значит, равны. Поэтому мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

3.2. Трехгранные углы. Многогранные углы. Рассмотрим три луча a, b, c, исходящие из одной точки и не лежащие в одной плоскости. Трехгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac) (рис. 10). Эти углы называются гранями трехгранного угла, а их стороны — ребрами. Общая вершина плоских углов называется вершиной трехгранного угла. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются двугранными углами трехгранного угла.

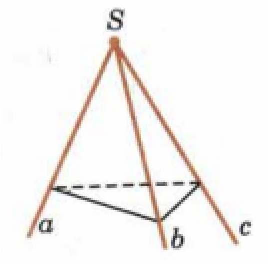


Рис. 10

Аналогично определяется понятие многогранного угла (рис. 11).

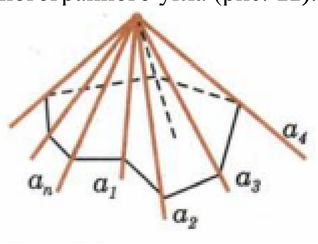


Рис. 11

3.3. Понятие многогранника и его основные элементы. Многогранник – это тело, которое состоит из конечного числа плоских многоугольников. Выпуклым называется многогранник, если он расположен по одну сторону плоскости, проведённой через любой многоугольник, образующий поверхность данного многогранника.

Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его гранями; стороны многоугольников – рёбрами; вершины – вершинами многогранника.

3.4. Понятие призмы и ее основные элементы. Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников (рис. 12). Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины,— боковыми ребрами призмы.

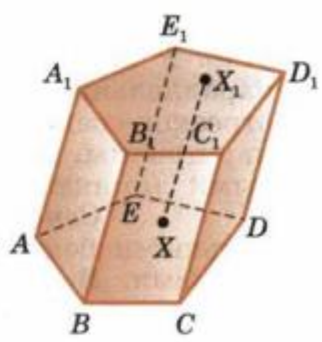


Рис. 12

Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность состоит из параллелограммов. У каждого из этих параллелограммов две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие — соседними боковыми ребрами.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется диагональю призмы.

Призма называется n-угольной, если ее основания — n-угольники. На рисунке 12 изображена пятиугольная призма. У нее основаниями являются пятиугольники ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$. XX_1 — отрезок, соединяющий соответствующие точки оснований. Боковые ребра призмы — отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1. Боковые грани призмы — параллелограммы ABB_1A_1, BCC_1B_1, … .

Сечения призмы плоскостями, параллельными боковым ребрам, являются параллелограммами. В частности, параллелограммами являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани (рис. 13).

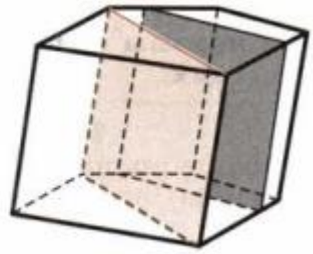


Рис. 13

На практике, в частности, при решении задач часто приходится строить сечение призмы плоскостью, проходящей через заданную прямую g на плоскости одного из оснований призмы. Такая прямая называется следом секущей плоскости на плоскости основания. Для построения сечения призмы достаточно построить отрезки пересечения секущей плоскости с гранями призмы. Покажем, как строится такое сечение, если известна какая-нибудь точка A на поверхности призмы, принадлежащая сечению (рис. 14).

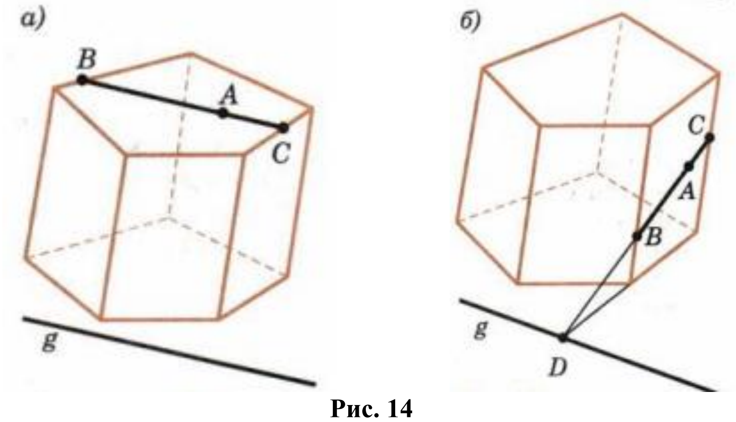


Рис. 14

Если данная точка A принадлежит другому основанию призмы, то его пересечение с секущей плоскостью представляет собой отрезок BC, параллельный следу g и содержащий данную точку A (рис. 14, а).

Если данная точка A принадлежит боковой грани, то пересечение этой грани с секущей плоскостью строится, как показано на рисунке 14, б. Именно: сначала строится точка D, в которой плоскость грани пересекает заданный след g. Затем проводится прямая через точки A и D. Отрезок BC прямой AD на рассматриваемой грани и есть пересечение этой грани с секущей плоскостью. Если грань, содержащая точку A, параллельна следу g, то секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку BC, проходящему через точку A и параллельному прямой g.

Концы отрезка BC принадлежат и соседним граням. Поэтому описанным способом можно построить пересечение этих граней с нашей секущей плоскостью. И т.д.

На рисунке 15 показано построение сечения четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через прямую a в плоскости нижнего основания призмы и точку A на одном из боковых ребер.

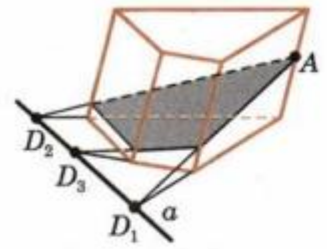


Рис. 15

3.5. Прямая и правильная призма. Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется наклонной.

У прямой призмы боковые грани являются прямоугольниками. При изображении прямой призмы на рисунке боковые ребра обычно проводят вертикально (рис. 16).

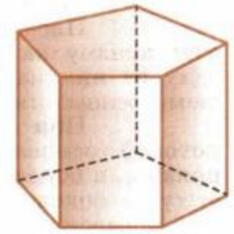


Рис. 16

Прямая призма называется правильной, если ее основания являются правильными многоугольниками.

Боковой поверхностью призмы (точнее, площадью боковой поверхности) называется сумма площадей боковых граней. Полная поверхность призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема 8.1. Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т. е. на длину бокового ребра.

3.6. Понятие параллелепипеда. Призма, основанием которой является параллелограмм, называется параллелепипедом. У параллелепипеда все грани параллелограммы. На рисунке 27, *а* изображен наклонный параллелепипед, на рисунке 17, *б* – наклонный параллелепипед.

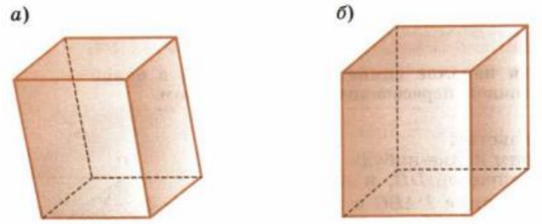


Рис. 17

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими.

Теорема 8.2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

3.7. Теорема о противолежащих гранях параллелепипеда.

Теорема 8.3. У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.

3.8. Прямоугольный параллелепипед. Измерения прямоугольного параллелепипеда.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. У прямоугольного параллелепипеда все грани – прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется кубом.

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называют его линейными размерами (измерениями). У прямоугольного параллелепипеда три измерения.

Теорема 8.4. В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

3.9. Симметрия прямоугольного параллелепипеда.

У прямоугольного параллелепипеда, как и у всякого параллелепипеда, есть центр симметрии – точка пересечения его диагоналей. У него есть также три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно его граням. (Рис 18)

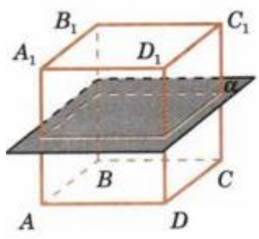


Рис. 18

Если у параллелепипеда все линейные размеры разные, то у него нет других плоскостей симметрии, кроме названных.

Если же у параллелепипеда два линейных размера равны, то у него есть еще две плоскости симметрии. Это плоскости диагональных сечений. (Рис. 19)

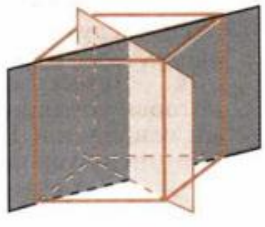


Рис. 19

Лекция № 9 (2 часа)

Тема: «Пирамида»

1 Вопросы лекции:

1.1. Понятие пирамиды и ее основных элементов.

1.2. Построение пирамиды и ее плоских сечений.

1.3. Усеченная пирамида.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Понятие пирамиды и ее основных элементов. Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника — основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания,— вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания (рис. 20).

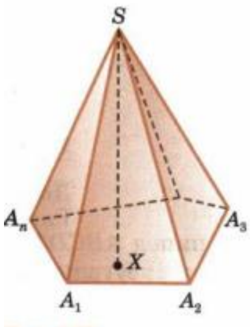


Рис. 20

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань — треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной — сторона основания пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник. Треугольная пирамида называется также тетраэдром.

У пирамиды, изображенной на рисунке 20, основание — многоугольник $A_1A_2...A_n$, вершина пирамиды — S, боковые ребра — SA_1, SA_2,…, SA_n, боковые грани —SA_1A_2, SA_2A_3,... .

В дальнейшем мы будем рассматривать только пирамиды с выпуклым многоугольником в основании. Такие пирамиды являются выпуклыми многогранниками.

3.2. Построение пирамиды и ее плоских сечений. Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники (рис. 21). В частности, треугольниками являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды (рис. 22).

Рис. 21

Рис. 22

Сечение пирамиды плоскостью с заданным следом g на плоскости основания строится так же, как и сечение призмы. Для построения сечения пирамиды плоскостью достаточно построить пересечения ее боковых граней с секущей плоскостью.

Если на грани, не параллельной следу g, известна какая-нибудь точка A, принадлежащая сечению, то сначала строится пересечение следа g секущей плоскости с плоскостью этой грани — точка D на рисунке 23. Точка D соединяется с точкой A прямой. Тогда отрезок этой прямой, принадлежащий грани, есть пересечение этой грани с секущей плоскостью.

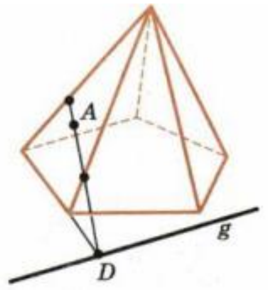


Рис. 23

Если точка A лежит на грани, параллельной следу g то секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку, параллельному прямой g. Переходя к соседней боковой грани, строят ее пересечение с секущей плоскостью и т. д. В итоге получается требуемое сечение пирамиды.

На рисунке 24 построено сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку A на одном из ее боковых ребер.

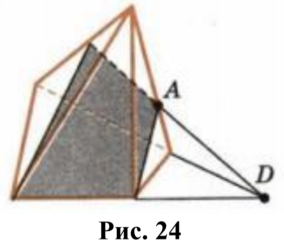


Рис. 24

3.3. Усеченная пирамида.

Теорема 9.1. Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, отсекает подобную пирамиду.

По теореме 9.1 плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая ее боковые ребра, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть представляет собой многогранник, который называется усеченной пирамидой (рис. 25). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями: остальные грани называются боковыми гранями. Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные (более того, гомотетичные) многоугольники, боковые грани — трапеции.

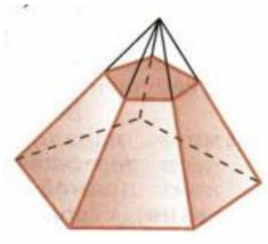


Рис. 25

Пирамида называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (рис. 26). Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту. Очевидно, у правильной пирамиды боковые ребра равны; следовательно, боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

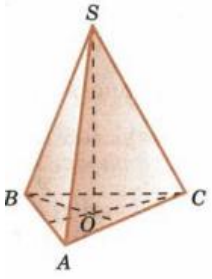


Рис. 26

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой. Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема 9.2. Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

Усеченная пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобокие трапеции; их высоты называются апофемами.

Лекция № 10 (2 часа)

Тема: «Правильные многогранники. Тела вращения»

1 Вопросы лекции:

1.1. Тетраэдр.

1.2. Куб.

1.3. Октаэдр.

1.4. Додекаэдр.

1.5. Икосаэдр.

1.6. Понятие цилиндра.

1.7. Понятие конуса.

1.8. Понятие шара.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Тетраэдр. Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников (рис. 27): правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

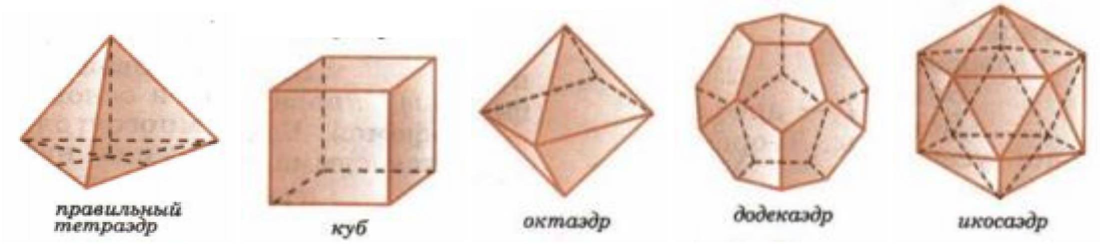


Рис. 27

У правильного тетраэдра грани — правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.

3.2. Куб. У куба все грани — квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

3.3. Октаэдр. У октаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.

3.4. Додекаэдр. У додекаэдра грани — правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра.

3.5. Икосаэдр. У икосаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.

3.6. Понятие цилиндра. Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис. 28). Круги называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов,— образующими цилиндра.

Рис. 28

Так как параллельный перенос есть движение, то основания цилиндра равны.

Так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то у цилиндра-основания лежат в параллельных плоскостях.

Так как при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то у цилиндра образующие параллельны и равны.

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его для краткости просто цилиндром. Прямой цилиндр наглядно можно представить себе как тело, которое описывает прямоугольник при вращении его около стороны как оси (рис. 29).

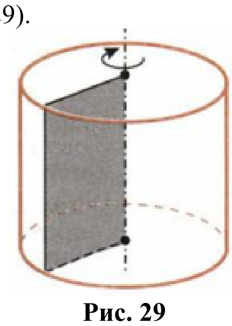


Рис. 29

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, представляет собой прямоугольник (рис. 30, а). Две его стороны — образующие цилиндра, а две другие — параллельные хорды оснований. В частности, прямоугольником является осевое сечение. Это — сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось (рис. 30, б).

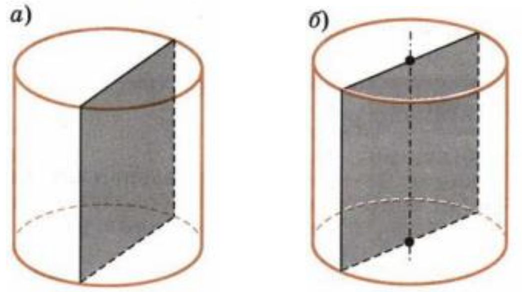


Рис. 30

Теорема 10.1. Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

3.7. Понятие конуса. Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга — основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга,— вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания (рис. 31). Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

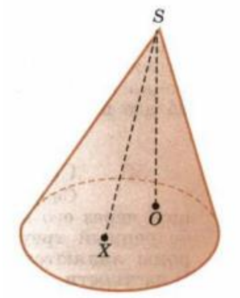


Рис. 31

Конус называется прямым, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом. Наглядно прямой круговой конус можно представлять себе как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси (рис. 32).

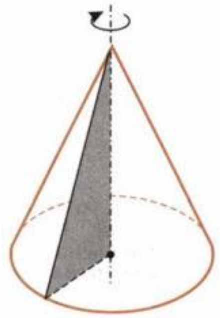


Рис. 32

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (рис. 33, а). В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это сечение, которое проходит через ось конуса (рис. 33, б).

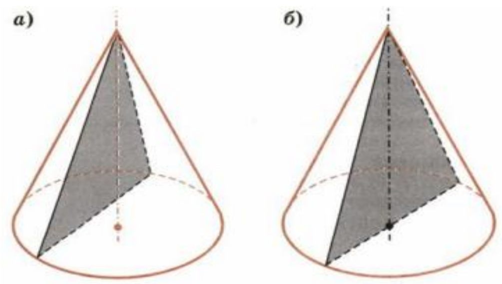


Рис. 33

Теорема 10.2. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется усеченным конусом (рис. 34).

Рис. 34

3.8. Понятие шара. Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется центром шара, а данное расстояние радиусом шара.

Граница шара называется шаровой поверхностью, или сферой. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется диаметром. Концы любого диаметра называются диаметрально противоположными точками шара.

Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси (рис. 35).

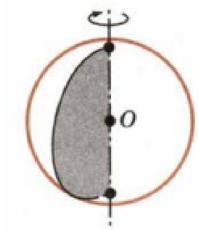


Рис. 35

Теорема 10.3. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется диаметральной плоскостью. Сечение шара диаметральной плоскостью называется большим кругом (рис. 36), а сечение сферы — большой окружностью.

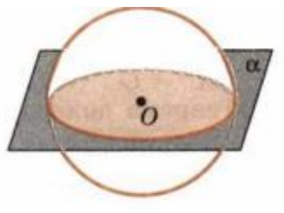


Рис. 36

Лекция № 11 (2 часа)

Тема: «Объемы многогранников»

1 Вопросы лекции:

1.1. Объем параллелепипеда.

1.2. Объем призмы.

1.3. Объем пирамиды.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Объем параллелепипеда. Подобно тому, как для фигур на плоскости вводится понятие площади, для тел в пространстве вводится понятие объема. Сначала рассмотрим только простые тела.

Тело называется простым, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Для простых тел объем — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. Равные тела имеют равные объемы.
2. Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.
3. Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Если куб, о котором идет речь в определении, имеет ребро 1 см, то объем будет в кубических сантиметрах; если ребро куба равно 1 м, то объем будет в кубических метрах; если ребро куба равно 1 км, то объем будет в кубических километрах и т. д.

Примером простого тела является любой выпуклый многогранник. Его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами *a, b, c* вычисляется по формуле $V = abc$.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений. Произведение двух измерений есть площадь основания параллелепипеда, а третье измерение — его высота.

Таким образом, у прямоугольного параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту.

Итак, объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

3.2. Объем призмы.

Объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту $V = SH$.

3.3. Объем пирамиды.

Объем любой треугольной пирамиды, равен одной трети произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3}SH.$

Объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

Объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h вычисляется по формуле V = $\frac{1}{3}h(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2).$

Лекция № 12 (2 часа)

Тема: «Объемы тел вращений»

1 Вопросы лекции:

1.1. Объем цилиндра.

1.2. Объем конуса.

1.3. Объем шара.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Объем цилиндра.

Если тело простое, т. е. допускает разбиение на конечное число треугольных пирамид, то его объем равен сумме объемов этих пирамид. Для произвольного тела объем определяется следующим образом.

Данное тело имеет объем V, если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающимися от V.

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту $V = SH = \pi R^2 H.$

3.2. Объем конуса

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$

Объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$), а высота h, находят по формуле V = $\frac{1}{3}\pi h\,(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$

3.3. Объем шара.

Объем шара радиуса R определяется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3.$

Лекция № 13 (2 часа)

Тема: «Статистическая обработка данных»

1 Вопросы лекции:

1.1. Основные этапы статистической обработки.

1.2. Числовые характеристики статистической обработки.

1.3. Определение кратности и дисперсии. Алгоритм вычисления дисперсии.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Основные этапы статистической обработки.

Рассмотрим на примере.

На праздничном вечере среди учеников 11 «А» и 11 «Б» классов провели лотерею. Каждый из 50 школьников произвольно задумал одну цифру от 0 до 9 и записал ее и на левой и на правой половинках своего лотерейного билета. Правые половинки билетов остались у их владельцев, а левые половинки положили на стол перед организатором лотереи. Итак, на столе 50 листочков, содержащих всю необходимую информацию. Как в ней разобраться?

1) сначала данные измерений упорядочивают и группируют;
2) затем составляют таблицы распределения данных

Ответ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество ответов	2	5	3	9	4	10	3	5	3	5	1

3) таблицы распределения позволяют построить графики распределения данных в виде многоугольника распределения, гистограммы распределения или круговой диаграммы.

Рассмотрим как строить многоугольник распределения (полигон). По оси абсцисс отложены сами ответы (числа из первой строки таблицы), по оси ординат отложены количества ответов (числа из второй строки), а в координатной плоскости отмечены точки (0; 2), (1; 5), (2; 3), (3; 9), ..., (9; 5), (10; 1), соответствующие парам чисел из столбцов таблицы. Отмеченные 11 точек для наглядности соединены ломаной. Получился многоугольник распределения (рис. 37).

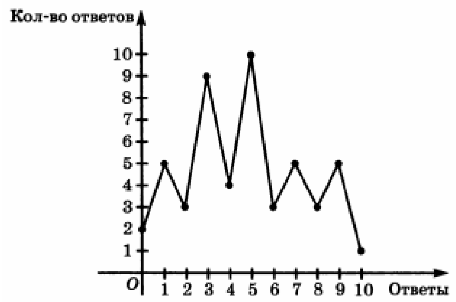


Рис. 37

Гистограмма распределения получается из полигона таким образом. Вертикальный отрезок с концами в точках (0; 0) и (0; 2) симметрично «раздут» вправо и влево до прямоугольного вертикального столбика, ширина которого равна 1, а высота равна 2. Точно так же следующий вертикальный отрезок с концами в точках (1; 0) и (1; 5) симметрично «раздут» вправо и влево до прямоугольного вертикального столбика, ширина которого равна 1, а высота равна 5, и т. д. Получается столбчатая диаграмма — гистограмма распределения (рис. 38).

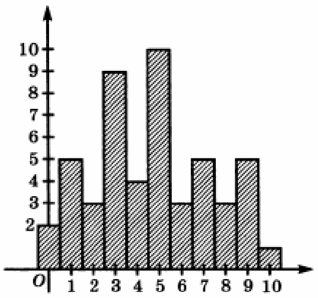


Рис. 38

Круговая диаграмма состоит из круга, разделенного на 11 секторов, внутри каждого сектора указан соответствующий ему ответ. Сектор «0» занимает 1/25 часть круга, так как два полученных ответа «0» составляют 2/50 = 1/25 часть от общего числа всех ответов. Значит, центральный угол сектора «0» равен 360º/25 = 14,4º. Самый большой из всех 11 секторов — это сектор «5», он занимает 10/50 = 1/5 часть всего круга, и его центральный угол равен 360º/5 = 72º. А сектор «10» — самый маленький, его центральный угол равен 7,2°. Так получается круговая диаграмма (рис. 39).

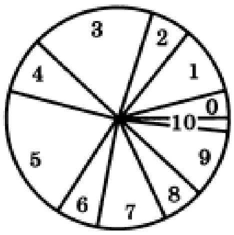


Рис. 39

4) получение паспорта данных измерения, который состоит из небольшого количества основных числовых характеристик полученной информации.

3.2. Числовые характеристики статистической обработки.

Перечислим некоторые числовые характеристики для разобранного выше измерения.

Объем измерения – это число объектов, участвующих в исследовании. В данном случае он равен 50, так как обрабатывались ответы 50 участников.

Размах измерения – это разность между наибольшим и наименьшим значениями измерения. В данном случае он равен 10.

Мода измерения – это значение, наиболее часто встречающееся в исследовании. В данном случае она равна 5, так как ответ «5» — самый «модный», самый популярный, он встретился чаще других — 10 раз из всех 50 результатов.

Среднее (или среднее арифметическое). Это частное от деления суммы всех результатов измерения на объем измерения. Среднее удобно вычислять после того, как составлена таблица распределения. В данном случае вычисления выглядят так:

$$\frac{0\cdot 2+1\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 9+4\cdot 4+5\cdot 10+6\cdot 3+7\cdot 5+8\cdot 3+9\cdot 5+10\cdot 1}{50}=$$

$$=\frac{0+5+6+27+16+50+18+35+24+45+10}{50}=\frac{236}{50}=4{,}72.$$

Чаще всего результатами измерения являются числа. Каждое число, встретившееся в конкретном измерении, называют вариантой измерения. В конкретном измерении его варианты могут быть никак не упорядочены, как, например, билетики на столе перед организатором лотереи. Если записать все варианты измерения по порядку (например, по времени) их получения, то получится ряд данных измерения. Если же начать с наименьшей из всех вариант измерения и затем записать все варианты в порядке возрастания (точнее неубывания) их числовых значений, то получится сгруппированный ряд данных. В разобранном выше примере сгруппированный ряд данных выглядит так:

$$\underbrace{0,0}_{2},\ \underbrace{1,\ldots,1}_{5},\ \underbrace{2,2,2}_{3},\ \underbrace{3,\ldots,3}_{9},\ \underbrace{4,4,4,4}_{4},\ \underbrace{5,\ldots,5}_{10},\ \underbrace{6,6,6}_{3},$$

$$\underbrace{7,\ldots,7}_{5},\ \underbrace{8,8,8}_{3},\ \underbrace{9,\ldots,9}_{5},\ \underbrace{10}_{1}.$$

Среднюю варианту в сгруппированном ряде данных называют медианой измерения. Если средних вариант две, то медиана равна их полусумме. Так, в рассмотренном примере 50 вариант, средних — две, это варианты № 25 и № 26. Обе они равны 5, значит, и медиана равна 5.

3.3. Определение кратности и дисперсии. Алгоритм вычисления дисперсии.

Ответ «0» встретился два раза. В статистике в этом случае говорят, что абсолютная частота варианты «0» равна двум. Ответ «7» встретился пять раз. Значит, абсолютная частота варианты «7» равна пяти. К сожалению, в статистике термин «частота» используется в различных сочетаниях: абсолютная частота, относительная частота, процентная частота, статистическая частота, эмпирическая частота, частота наступления случайного события и т. п. Мы заменим термин абсолютная частота более кратким.

Определение. Если среди всех данных конкретного измерения одна из вариант встретилась k раз, то число k называют кратностью этой варианты.

В разобранном примере кратность варианты «5» равна 10, кратность варианты «3» равна 9 и т. д. (см. таблицу).

	Варианта											Сумма
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Кратность	2	5	3	9	4	10	3	5	3	5	1	50

Так получается таблица распределения данных измерения. Клетку «Сумма» добавляют для контроля: число в графе «Сумма» всегда должно равняться объему измерения.

Вариантой измерения совсем не обязательно является число. Вполне возможны случаи, когда варианты измерения отличаются друг от друга просто по названию.

В таких случаях говорят о номинативной шкале вариант измерения (номинативная шкала — шкала по номинациям, т. е. по названию, по имени). Заметим, что в таком случае теряет смысл понятие размаха измерения: неизвестно, какая из вариант наибольшая, а какая наименьшая. Но так как во всех реальных измерениях количество вариант конечно, то всегда можно их имена или названия заменить на номера № 1, № 2, № 3, ... и после этого перейти к обычному числовому способу перечисления вариант.

Числовую характеристику данных измерения, отвечающую за разброс (рассеивание) данных вокруг их среднего значения, называют дисперсией (от лат. disperses — рассыпанный, разогнанный, рассеянный) и обозначают буквой D; число $\sigma = \sqrt{D}$ называют средним квадратическим отклонением. Чем меньше дисперсия D или среднее квадратическое отклонение, тем плотнее группируются данные измерения вокруг своего среднего значения.

Алгоритм вычисления дисперсии.

Для нахождения дисперсии D данных измерения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следует вычислить:

1) среднее значение $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;
2) отклонения данных от M, т. е. x_1 - M, x_2 - M, ...,x_{n-1}- M, x_n - M;
3) квадраты $(x_i - M)^2$ отклонений $(x_i - M)$ (i = 1, 2, 3, ..., п), найденных на предыдущем шаге;
4) среднее значение всех квадратов отклонений — это и есть дисперсия D:

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_{n-1} - M)^2 + (x_n - M)^2}{n};$$

$\sigma = \sqrt{D}$ — **среднее квадратическое отклонение.**

Лекция № 14 (2 часа)

Тема: «Сочетания и размещения»

1 Вопросы лекции:

1.1. Определение n факториал.

1.2. Определение числа сочетаний и размещений.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Определение n факториал.

Определение. Факториалом натурального числа n называют произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Значения n! Очень быстро возрастают с увеличением n.

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	$1 \cdot 2 = 2$	$2! \cdot 3 = 6$	$3! \cdot 4 = 24$	$4! \cdot 5 = 120$	$5! \cdot 6 = 720$	$6! \cdot 7 = 5040$

3.2. Определение числа сочетаний и размещений.

Теорема 14.1. n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно n! способами.

Как правило, эту теорему записывают в виде краткой формулы: $P_n = n!$, где P_n — это число перестановок из n различных элементов, оно равно n!.

Определение. Число всех выборов k элементов без учета их порядка из n данных элементов называют числом сочетаний из n элементов по k и обозначают C_n^k. Символ C_n^k читается в русской транскрипции так: «цэ из эн по k». Буква C хорошо согласуется здесь «и с французским, и с нижегородским»: с одной стороны, C — это первая буква слова combinations, с другой стороны, C — это первая буква слова сочетание.

Число сочетаний из n элементов по k элементам вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Определение. Число всех выборов k элементов из n данных с учетом их порядка называют числом размещений из n элементов по k и обозначают A_n^k.

Число размещений из n элементов по k элементам вычисляется по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Лекция № 15 (2 часа)

Тема: «Простейшие вероятностные задачи»

1 Вопросы лекции:

1.1. Классическое определение вероятности.

1.2. Алгоритм нахождения вероятности случайного события.

1.3. Правило сложения и умножения вероятности.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Классическое определение вероятности.

Определение. Вероятностью *P* (*A*) события *A* называется отношение числа N(A) элементарных событий, благоприятствующих событию *A*, к числу всех элементарных событий N, т. е.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Из классического определения вероятности следует: 1) вероятность достоверного события равна единице; 2) вероятность невозможного события равна нулю; 3) вероятность любого события А удовлетворяет условию 0 < *P* (*A*) < 1; 4) элементарные события являются равновероятными, т. е. обладают одной и той же вероятностью.

3.2. Алгоритм нахождения вероятности случайного события. Для нахождения вероятности случайного события А при проведении некоторого испытания следует найти:

1) число N всех возможных исходов данного испытания;
2) количество N(A) тех исходов, в которых наступает событие A;
3) частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A.

Принято вероятность события А обозначать так: P(A).

Напомним, что применять это правило можно только в предположении о равно возможности всех исходов испытания.

3.3. Правило сложения и умножения вероятности.

При подсчете вероятности часто используется правило умножения, знакомое вам из курса алгебры основной школы. Напомним это правило.

Правило умножения. Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.

Суммой событий А и В называют событие С, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А или В.

Произведением событий А и В называют событие С, состоящее в совместном наступлении событий и А и В.

Лекция № 16 (2 часа)

Тема: «Случайные события и их вероятности»

1 Вопросы лекции:

1.1. Использование комбинаторики для подсчета вероятности.

1.2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий.

1.3. Независимость событий. Независимые повторения испытаний.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Использование комбинаторики для подсчета вероятности.

Сначала мы используем комбинаторику при нахождении N — количества всех исходов опыта. Во второй раз комбинаторика нужна при нахождении N(A), причем это уже, как правило, более сложная комбинаторика.

Пример. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что среди них: а) нет пиковой дамы; б) есть пиковая дама?

Решение. У нас имеется множество из 36 элементов — игральных карт. Мы производим выбор трех элементов, порядок выбора не важен. Значит, имеется исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. предполагать, что все эти исходы равновероятны между собой.

а) Среди всех N исходов нам следует сосчитать те, в которых нет пиковой дамы (событие А). Поэтому отложим даму пик в сторону и будем выбирать три карты из оставшихся 35 карт. Получатся все интересующие нас варианты: $N(A) = C_{35}^3$. Осталось вычислить нужную вероятность:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{35}^3}{C_{36}^3} = \frac{35!}{3! \cdot 32!} \cdot \frac{3! \cdot 33!}{36!} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

При вычислениях мы учли, что 33! = 1 · 2 · 3 · ... · 32 · 33 = 32! · 33, а 36! = 1· 2· 3· ... ·35· 36 = 35! ·36.

б) Вычислим вероятность противоположного события Ā (есть дама пик) по формуле $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{12}$.

3.2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий.

Два события называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события *A* и *B* называются ***независимыми***, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет.

В противном случае события *A* и *B* называют зависимыми.

Теорема 16.1. Вероятность суммы двух несовместных событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Точно так же формулируется теорема и для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий *A* и Ā равна единице: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Пусть *A* и *B* — зависимые события. ***Условной вероятностью*** события *B* называется вероятность события *B*, найденная в предположении, что событие *A* уже наступило.

Теорема 16.2. Вероятность произведения двух зависимых событий *A* и *B* равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило.

Теорема 16.3. Вероятность произведения двух независимых событий *A* и *B* равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A)P(B).$ (2)

Теорема 16.4. Вероятность суммы двух совместных событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).}$$

Если события *A* и *B* несовместимы, то их произведение *AB* — невозможное событие и, следовательно, $P(AB) = 0$, т. е. $P(A + B) = P(A) + P(B)$

3.3. Независимость событий. Независимые повторения испытаний.

Определение. События А и Б называют независимыми, если вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: P(AB) = P(A)P(B).

Отличительная особенность многих вероятностных задач состоит в том, что испытание, в результате которого может наступить интересующее нас событие, можно многократно повторять. В каждом из таких повторений нас интересует вопрос о том, произойдет или не произойдет это событие. А во всей серии повторений нам важно знать, сколько именно раз может произойти или не произойти это событие. Например, игральный кубик бросили десять раз подряд. Какова вероятность того, что «четверка» выпадет ровно 3 раза? Произведено 10 выстрелов; какова вероятность того, что будет ровно 8 попаданий в мишень? Или же какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты «орел» выпадет ровно 4 раза?

Швейцарский математик начала XVIII века Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы такого типа в единую вероятностную схему.

Пусть вероятность случайного события А при проведении некоторого испытания равна P(A). Будем рассматривать это испытание как испытание только с двумя возможными исходами: один исход состоит в том, что событие А произойдет, а другой исход состоит в том, что событие А не произойдет, т. е. произойдет событие Ā. Для краткости назовем первый исход (наступление события А) «успехом», а второй исход (наступление события Ā) «неудачей». Вероятность P(A) «успеха» обозначим p, а вероятность P(Ā) «неудачи» обозначим q. Значит, $q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p.$

Теорема 16.5. (теорема Бернулли). Пусть $P_n(k)$ — вероятность наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания. Тогда

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а q = 1 — p — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

II семестр

Лекция № 1 (2 часа)

Тема: «Понятие числовой окружности»

1 Вопросы лекции:

1.1. Единичная окружность.

1.2. Числовая окружность на координатной плоскости.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Единичная окружность.

Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью. По беговой дорожке стадиона можно пробежать или пройти путь любой длины. Значит, любому положительному числу соответствует какая-то точка — «финиш дистанции». Более того, и любому отрицательному числу можно поставить в соответствие точку беговой дорожки стадиона, просто спортсмен должен бежать в противоположном направлении (т. е. стартовать из A не в направлении против, а в направлении по часовой стрелке). Тогда беговую дорожку стадиона можно рассматривать как числовую окружность.

В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но удобнее всего использовать для этой цели единичную окружность — окружность, радиус которой принимается за единицу измерения. Это будет наша «беговая дорожка», ее длина l равна $2\pi R$ (здесь R = 1), что составляет примерно 6,28.

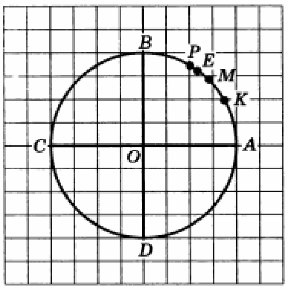


Рис. 40

Мы все время будем пользоваться единичной окружностью, в которой проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB. Условимся называть дугу AB (рис. 40) первой четвертью, дугу BC — второй четвертью, дугу CD — третьей четвертью, дугу DA — четвертой четвертью. При этом, как правило, речь будет идти об открытых дугах, т. е. о дугах без их концов: например, первая четверть — это дуга AB без точек A и B. Длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{1}{4}\cdot 2\pi$, т. е. $\frac{\pi}{2}$.

Условимся в двухбуквенном обозначении дуги на первом месте писать букву, соответствующую началу дуги, а на втором — букву, соответствующую концу дуги, причем движение по окружности от начала дуги к ее концу будем осуществлять в направлении против часовой стрелки. Тогда меньшая из двух дуг, соединяющих точки A и B, о которых мы говорили выше, — это дуга AB, а большая — это дуга BA.

Определение. Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка A — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

1) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной t. Точка M и будет искомой точкой M(t).

2) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной |t|. Точка M и будет искомой точкой M(t).

3) Числу t = 0 поставим в соответствие точку A; A = A(0).

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть числовой окружностью.

Особенно часто приходится искать на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ и кратным им, т. е. $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}$ и т. д. Поэтому нам очень пригодятся два макета числовой окружности.

ПЕРВЫЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на две равные части, и около каждой из имеющихся восьми точек записано ее «имя» (рис. 41).

ВТОРОЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на три равные части, и около каждой из имеющихся двенадцати точек записано ее «имя» (рис. 42).

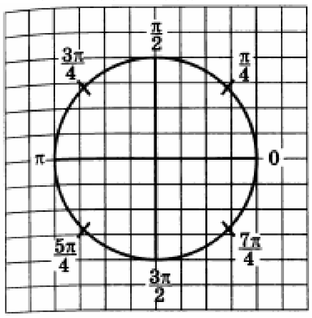


Рис. 41

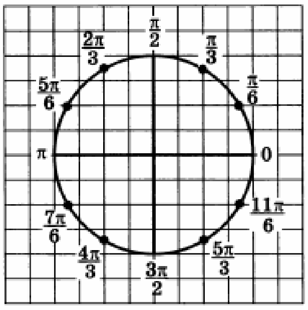


Рис. 42

Учтите, что на обоих макетах мы могли бы заданным точкам присвоить другие «имена». Так, числу $\frac{\pi}{4}$ соответствует середина четвертой четверти. Этой точке на первом макете присвоено имя $\frac{7\pi}{4}$, но, как видите, мы могли присвоить ей и имя $-\frac{\pi}{4}$. Вообще, если двигаться по первому макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже восьми точек соответственно 0, $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$. Аналогично, если двигаться по второму макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже двенадцати точек соответственно 0, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \dots, -\frac{11\pi}{6}$.

Итак, на числовой окружности, как и на числовой прямой каждому действительному числу соответствует одна точка (только, разумеется, на прямой ее найти легче, чем на окружности). Для числовой прямой верно и обратное: каждая точка соответствует единственному числу. Для числовой окружности такое утверждение неверно: выше мы неоднократно убеждались в этом.

Для числовой окружности справедливо следующее утверждение.

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и числу вида $t + 2\pi k$, где k — любое целое число.

3.2. Числовая окружность на координатной плоскости.

Расположим окружности в декартовой прямоугольной системе координат *xOy* так, как показано на рис. 43: центр окружности совмещен с началом координат, радиус окружности принимается за масштабный отрезок. Начальная точка A числовой окружности совмещена с точкой на оси *x*. При этом каждая точка числовой окружности имеет в системе *xOy* свои координаты, причем: у точек первой четверти — $x > 0$, $y > 0$; у точек второй четверти — $x < 0$, $y > 0$; у точек третьей четверти — $x < 0$, $y < 0$; у точек четвертой четверти — $x > 0$, $y < 0$ (рис. 43).

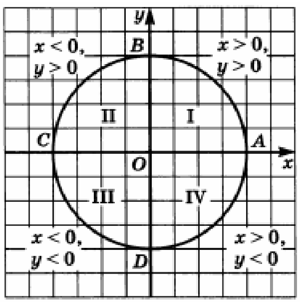


Рис. 43

Для любой точки M(x; y) числовой окружности выполняются неравенства: $-1 \leqslant x \leqslant 1; -1 \leqslant y \leqslant 1.$

Нетрудно составить уравнение числовой окружности. Для этого заметим, во-первых, что центром окружности служит начало координат, а уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Заметим, во-вторых, что R = 1, значит, уравнение числовой окружности имеет вид $x^2+y^2 = 1$.

Нам важно научиться отыскивать координаты точек числовой окружности, прежде всего тех, которые представлены на первом и втором макетах (рис. 41, 42). Начнем с точек первого макета: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

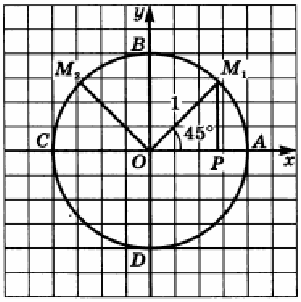


Рис. 44

Точка $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ - середина первой четверти. Опустим из точки перпендикуляр на прямую ОА и рассмотрим треугольник ОР (рис. 44). Так как дуга AM_1 составляет половину дуги АВ, то $\angle AOM_1 = 45°$. Значит, OM_1P — равнобедренный прямоугольный треугольник; его катеты ОР и M_1P равны, т.е. у точки M_1 абсцисса и ордината равны: x = y. Кроме того, координаты точки M_1 (x; y) удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, для отыскания координат точки M_1 нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставив x вместо y во второе уравнение системы, получим: $x^2 + x^2 = 1;\ x^2 = \frac{1}{2};\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(мы учли, что абсцисса точки M_1 положительна). А так как y = x, то и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Но, учтя, что во второй четверти x < 0, а y > О, делаем вывод: $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Таблица 1

	Точка окружности								
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Абсцисса x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Аналогично находят координаты точек, изображенных на втором макете. Получаем таблицу 2:

Таблица 2

	Точка окружности							
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Лекция № 2 (2 часа)

Тема: «Тригонометрические функции»

1 Вопросы лекции:

1.1. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

1.2. Тригонометрические функции числового аргумента.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Определение. Если точка М числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки М называют косинусом числа t и обозначают cos t, а ординату точки М называют синусом числа t и обозначают это sin t.

Итак (рис. 45)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{если } M(t) = M(x;\, y), \text{ то}\\ x = \cos t,\\ y = \sin t.\end{array}}$$

Отсюда следует, что $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1,\ -1 \leqslant \cos t \leqslant 1.$

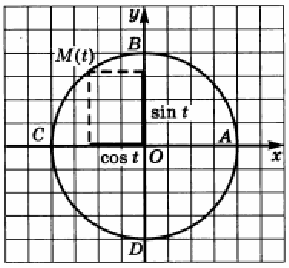


Рис. 45

Определение. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют тангенсом числа t и обозначают tg t. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют котангенсом числа t и обозначают ctg t.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Говоря о tg t, подразумевают, что cos t ≠ 0, а говоря о ctg t, подразумевают, что sin t ≠ 0.

Мы знаем, что каждая точка числовой окружности имеет в системе *xOy* свои координаты, причем: у точек первой четверти $x > 0,\ y > 0$; у точек второй четверти $x < 0,\ y > 0$; у точек третьей четверти $x < 0,\ y < 0$; у точек четвертой четверти $x > 0,\ y < 0$.

Это позволяет нам составить соответствующую таблицу знаков синуса и косинуса по четвертям числовой окружности:

	Четверть окружности			
	1-я	2-я	3-я	4-я
cos *t*	+	−	−	+
sin *t*	+	+	−	−
tg *t*, ctg *t*	+	−	+	−

Мы знаем, что уравнение числовой окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Тем самым фактически получено важное равенство, связывающее sin t и cos t:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1.}$$

На основании таблиц из предыдущего параграфа составим соответствующие таблицы для вычисления значений cos t и sin t.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Зная значения синуса и косинуса, не трудно вычислить значения тангенса и котангенса:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Рассмотрим свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Свойство 1. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(-t) &= -\sin t;\\ \cos(-t) &= \cos t;\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}(-t) &= -\operatorname{tg} t;\\ \operatorname{ctg}(-t) &= -\operatorname{ctg} t.\end{aligned}}$$

Свойство 2. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(t + 2\pi k) &= \sin t;\\ \cos(t + 2\pi k) &= \cos t.\end{aligned}}$$

Это очевидно, поскольку числам t и t + 2πк соответствует одна и та же точка числовой окружности.

Свойство 3. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(t + \pi) &= -\sin t;\\ \cos(t + \pi) &= -\cos t;\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}(t + \pi) &= \operatorname{tg} t;\\ \operatorname{ctg}(t + \pi) &= \operatorname{ctg} t.\end{aligned}}$$

Свойство 4. Для любого значения t справедливо равенство:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos t;\\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin t.\end{aligned}}$$

Итак, если числу t соответствует на числовой окружности точка M, то, проведя прямую OM, получим в пересечении ее с числовой прямой l точку P, которая имеет на числовой прямой l координату tg t. Числовую прямую l называют линией тангенсов (рис. 46). С помощью линии тангенсов можно решать и обратную задачу: зная значение тангенса, найти на числовой окружности соответствующие точки.

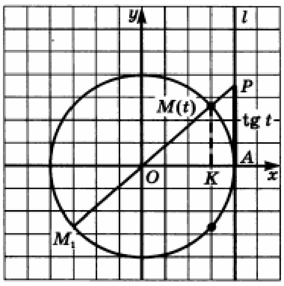


Рис. 46

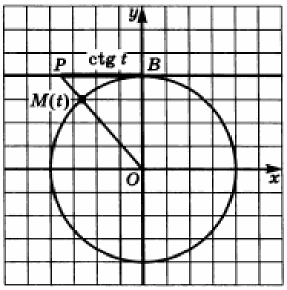


Рис. 47

Аналогично можно ввести в рассмотрение линию котангенсов (рис. 47).

3.2. Тригонометрические функции числового аргумента.

Какое бы действительное число t ни взять, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число sin t. Правда, правило соответствия довольно сложное и заключается в следующем.

Чтобы по числу t найти значение sin t нужно:

1) расположить числовую окружность на координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а начальная точка A окружности попала в точку (1; 0);
2) на окружности найти точку, соответствующую числу t;
3) найти ординату этой точки.

Эта ордината и есть sin t.

Фактически речь идет о функции s = sin t, где t — любое действительное число. Мы умеем вычислять некоторые значения этой функции, знаем некоторые ее свойства.

Точно так же мы можем считать, что уже получили некоторые представления еще о трех функциях: s = cos t, s = tg t, s = ctg t. Все эти функции называют тригонометрическими функциями числового аргумента t.

Есть целый ряд соотношений, связывающих значения различных тригонометрических функций. Некоторые из этих соотношений вы уже знаете:

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1;}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \text{ при } t \neq \pi k.}$$

Из двух последних формул легко получить соотношение, связывающее tg t и ctg t:

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1 \text{ при } t \neq \frac{\pi k}{2}.}$$

Не трудно вывести еще две формулы:

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} \text{ при } t \neq \pi k.}$$

Все указанные формулы используются в тех случаях, когда, зная значение какой-либо тригонометрической функции, требуется вычислить значения остальных тригонометрических функций.

Лекция № 3 (2 часа)

Тема: «Простейшие тригонометрические формулы»

1 Вопросы лекции:

1.1. Тригонометрические функции углового аргумента.

1.2. Формулы приведения.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Тригонометрические функции углового аргумента.

Возьмем угол с градусной мерой α° и расположим его в модели «числовая окружность на координатной плоскости» так, как показано на рисунке 48: вершину угла совместим с центром окружности (с началом системы координат), а одну сторону угла совместим с положительным лучом оси абсцисс. Точку пересечения второй стороны угла с окружностью обозначим буквой М. Ординату точки М естественно считать синусом угла α°, а абсциссу этой точки — косинусом угла α°.

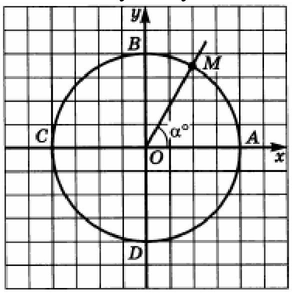


Рис. 48

Для нахождения синуса или косинуса угла α° совсем необязательно каждый раз проводить подобные построения. Достаточно заметить, что дуга АМ составляет такую же часть единичной окружности, которую угол α° составляет от угла 360°. Если длину дуги АМ обозначить буквой t, то получим:

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{t}{2\pi};$$

$$t = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha^\circ = \sin t = \sin\frac{\pi\alpha}{180}; \quad \cos\alpha^\circ = \cos t = \cos\frac{\pi\alpha}{180}.$$

Например,

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi\cdot 30}{180} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 90^\circ = \cos\frac{\pi\cdot 90}{180} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Говорят, что 30° — это градусная мера угла, а $\frac{\pi}{6}$ — радианная мера того же угла. Вообще

$$\alpha^\circ = \frac{\pi\alpha}{180}\ \textit{рад}.$$

В частности,

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \textit{рад}.}$$

Отсюда получаем

$$\boxed{1\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}.}$$

Угол в 1° — это центральный угол, опирающийся на дугу, составляющую часть окружности. Угол в 1 радиан — это центральный угол, опирающийся в единичной окружности на дугу длиной 1, а в окружности произвольного размера — на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

Из формулы $1\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$ **получаем:**

$$\boxed{1\ \textit{рад} \approx 57{,}3^\circ.}$$

3.2. Формулы приведения.

Если под знаком тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2}+t,\ \frac{\pi}{2}-t,\ \pi+t,\ \pi-t,\ \frac{3\pi}{2}+t,\ \frac{3\pi}{2}-t$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2}\pm t$, где n — произвольное целое число, то такое выражение всегда можно привести к более простому виду, при котором под знаком тригонометрической функции будет содержаться только аргумент t. Соответствующие формулы обычно называют формулами приведения.

Был придуман простой и удобный способ их запоминания (мнемоническое правило). Он заключается в следующем.

1) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi+t,\ \pi-t,\ 2\pi+t$ **или** $2\pi-t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить;

2) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2}+t,\ \frac{\pi}{2}-t,\ \frac{3\pi}{2}+t$ **или** $\frac{3\pi}{2}-t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (на родственное);

3) перед полученной функцией от аргумента I надо поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т.е. когда под знаком тригонометрической функции содержится сумма вида 90° + α, 90° - α, 180° + α и т.д.

Лекция № 4 (2 часа)

Тема: «Графики тригонометрических функций»

1 Вопросы лекции:

1.1. Функция y = sint, ее свойства и график.

1.2. Функция y = cost, ее свойства и график.

1.3. Периодичность функций.

1.4. Построение графиков функции y = mf(x) и y = f(kx), если известен график функции y = f(x).

1.5. Функции y = tgt и y = ctgt, их свойства и графики.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Функция y = sint, ее свойства и график.

Свойство 1. Область определения — множество R действительных чисел.

Свойство 2. s = sin t — нечетная функция.

Так как для любого t выполняется равенство sin (-t) = -sin t. Значит, s = sin t — нечетная функция.

График функции s = sin t как график любой нечетной функции, симметричен относительно начала координат в прямоугольной системе координат *tOs*.

Свойство 3. Функция s = sin t возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности ордината постепенно увеличивается (от 0 до 1), а при движении по второй четверти числовой окружности ордината постепенно уменьшается.

Свойство 4. Функция s = sin t ограничена и снизу и сверху. Ограниченность функции s = sin t следует из того, что для любого t справедливо неравенство -1 < sin t < 1.

Свойство 5. $y_{наим}$ = -1 (этого значения функция достигает в любой точке вида); $y_{наиб}$ = 1 (этого значения функция достигает в любой точке вида .

Воспользовавшись полученными свойствами, построим график интересующей нас функции. Обратим внимание, что вместо s = sin t будем писать y = sin x, так как привычнее запись y = f(x), а не s = f(t). Значит, и строить график будем в привычной системе координат *xOy*.

Сначала построим график функции на отрезке [0; π]. При этом договоримся о следующем масштабе на осях координат: в тетради в клеточку роль единичного отрезка на оси y составит отрезок в две клеточки; на оси x единичный отрезок (две клеточки) будем считать равным. Фактически мы полагаем, что π = 3, что не совсем соответствует действительности (на самом деле π ≈ 3,14), но на это при построении графика особого внимания обращать не будем.

Составим таблицу значений функции y = sin x:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной кривой, учтя при этом промежутки возрастания и убывания функции (рис. 49). Обратите внимание на плавность графика в точке $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$ и на то, что из начала координат кривая выходит как бы под углом 45°.

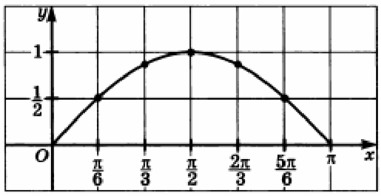


Рис. 49

Добавив к построенному графику линию, симметричную ему относительно начала координат, получим график функции y = sin x на отрезке [-π; π] (рис. 50).

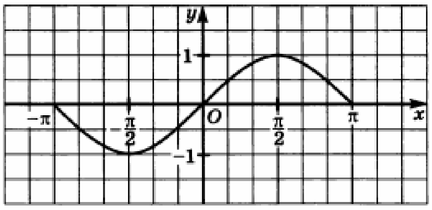


Рис. 50

Так как sin (x + 2π) = sin x, то в точке x + 2π функция y = sin x принимает то же значение, что и в точке x. Иными словами, на отрезке [π; 3π] график функции y = sin x выглядит так же, как и на отрезке [-π; π]. И на отрезках [3π; 5π], [5π; 7π], [-3π; -π] и т. д. график этой функции выглядит так же, как на отрезке [-π; π]. Окончательный вид графика функции y = sin x (в уменьшенном масштабе) представлен на рисунке 51.

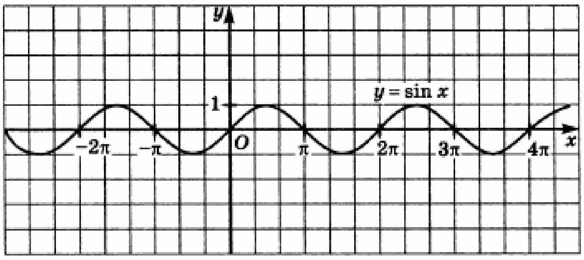


Рис. 51

Линию, служащую графиком функции y = sin x, называют синусоидой. Ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 50, называют волной синусоиды, а ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 49, называют полуволной или аркой синусоиды.

Опираясь на построенный график, отметим еще несколько свойств функции y = sin x.

Свойство 6. Функция y = sin x возрастает на любом отрезке вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и убывает на любом отрезке вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где $k \in Z$.

Свойство 7. y = sin x — непрерывная функция.

Свойство 8. Область значений функции — отрезок [-1; 1].

3.2. Функция y = cost, ее свойства и график.

Свойство 1. Область определения — множество R действительных чисел.

Свойство 2. s = cos t — четная функция.

Так как для любого t выполняется равенство cos (-t) = cos t. Значит, s = cos t — четная функция. График функции s = cos t как график любой четной функции, симметричен относительно координатной оси *Oy*.

Свойство 3. Функция s = cos t убывает на отрезке $[0;\ \pi]$; и возрастает на отрезке $[\pi;\ 2\pi]$.

Свойство 4. Функция s = cos t ограничена и снизу и сверху.

Свойство 5. $y_{наим}$ = -1 (этого значения функция достигает в любой точке вида); $y_{наиб}$ = 1 (этого значения функция достигает в любой точке вида .

Свойство 6. y = cos x — непрерывная функция.

Свойство 7. Область значений функции — отрезок [-1; 1].

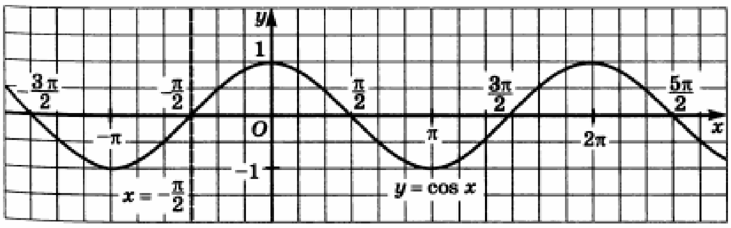


Рис. 52

3.3. Периодичность функций.

Определение. Функцию y = f(x) называют периодической, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство: $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Число T, удовлетворяющее указанному условию, называют периодом функции $y = f(x)$.

Отсюда следует, что, поскольку для любого x справедливы равенства:

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi),$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi),$$

то функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ являются периодическими и число 2π служит периодом и той и другой функции.

Периодичность функции — это восьмое свойство функций.

Если функция y = f(x) имеет период T, то для построения графика функции нужно сначала построить ветвь (волну, часть) графика на любом промежутке длины T (чаще всего берут промежуток с концами в точках , а затем сдвинуть эту ветвь по оси x вправо и влево на T, 2T, 3T и т.д.

У периодической функции бесконечно много периодов: если T — период, то и 2T — период, и 3T — период, и -T — период; вообще периодом является любое число вида kT, где k = ±1, ±2, ± 3... Обычно стараются, если это возможно, выделить наименьший положительный период, его называют основным периодом.

Итак, любое число вида $2\pi k$, где k = ±1, ± 2, ± 3, является периодом функций $y = \sin x$, $y = \cos x$; 2π— основной период и той, и другой функции.

Основной период функции $y = \sin kx$ и $y = \cos kx$ равен $\left|\frac{2\pi}{k}\right|$.

3.4. Построение графиков функции y = mf(x) и y = f(kx), если известен график функции y = f(x).

Как построить график функции y = mf(x), если известен график функции y = f(x).

Первый случай. Зная график функции y = f(x), построить график функции y = mf(x), где m — положительное число.

Ординаты точек графика функции y = mf(x) получаются в результате умножения ординат соответствующих точек графика функции y = f(x) на число m. Такое преобразование графика называют обычно растяжением от оси x с коэффициентом m. Заметим, что при этом преобразовании остаются на месте точки пересечения графика функции y = f(x) с осью x (т.е. точки, удовлетворяющие уравнению f(x) = 0).

Впрочем, если m < 1, то предпочитают использовать другой термин: не растяжение с коэффициентом m, а сжатие к оси x с коэффициентом $\frac{1}{m}$. (рис. 53)

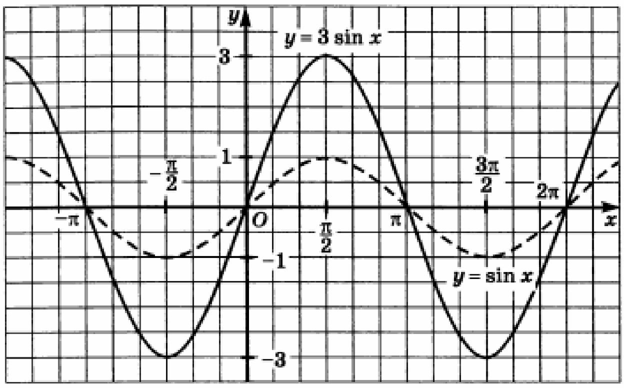


Рис. 53

Второй случай. Зная график функции y = f(x), построить график функции y = mf(x), где m = -1. Иными словами, речь идет о построении графика функции y = -f(x).

Ординаты точек графика функции y = -f(x) отличаются от соответствующих ординат точек графика функции y = f(x) только знаком. Точки (x; f(x)) и (x; -f(x)) симметричны относительно оси x. Значит, график функции y = -f(x) можно получить из графика функции y = f(x) с помощью преобразования симметрии относительно оси x. (рис. 54)

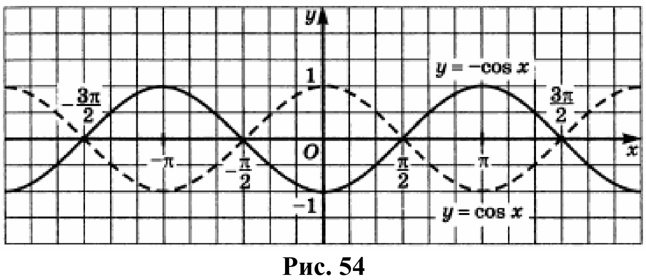


Рис. 54

Третий случай. Зная график функции y = f(x), построить график функции y = mf(x), где m — отрицательное число.

Так как в этом случае справедливо равенство mf(x) = -| m |f(x), то речь идет о построении графика функции y = -| m |f(x). Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции y = f(x);
2) растянуть его от оси x с коэффициентом | m |;
3) растянутый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

Как построить график функции y = f(kx), если известен график функции $y = f(x)$.

Задача 1. Зная график функции y = f(x), построить график функции y = f(kx), где k — положительное число.

Рассмотрим конкретный пример, когда k = 2. Как построить график функции y = f(2x), если известен график функции y = f(x)?

График функции y = f(kx) получается из графика функции y = f(x) с помощью сжатия к оси y с коэффициентом k. Отметим, что при этом преобразовании остается на месте точка пересечения графика функции y = f(x) с осью y (если x =0, то и kx =0).

Впрочем, если 0 < k < 1, то предпочитают говорить не о сжатии с коэффициентом k, а о растяжении от оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. (рис. 55)

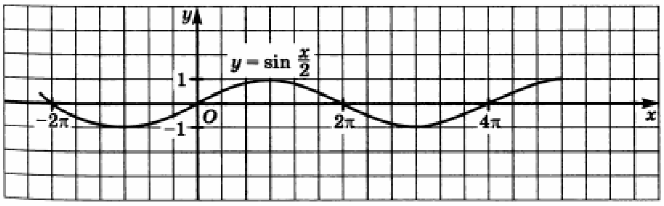


Рис. 55

Задача 2. Зная график функции y = f(x), построить график функции y = f(kx), где k = -1.

График функции y = f(-x) можно получить из графика функции y = f(x) с помощью преобразования симметрии относительно оси y. (рис. 56)

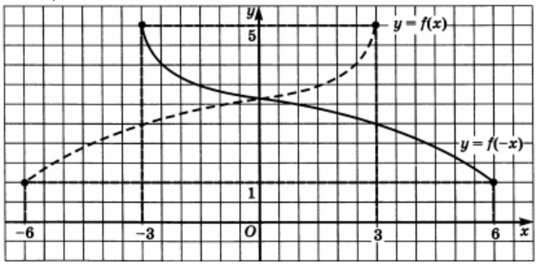


Рис. 56

Задача 3. Зная график функции y = f(x), построить график функции y = f(kx), где k — отрицательное число.

Решение. При k < 0 справедливо равенство f(kx) = f(-|k|x). Значит, речь идет о построении графика функции y = f(-|k|x). Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции y = f(x);
2) осуществить его сжатие к оси y с коэффициентом |k|;
3) сжатый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси y.

3.5. Функции y = tg t и y = ctg t, их свойства и графики.

Свойство 1. Область определения функции y = tg x — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Это свойство означает, что на графике функции $y = \operatorname{tg} x$ нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{3\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{5\pi}{2}$ и т.д. Эти прямые проведены пунктиром на рис. 57.

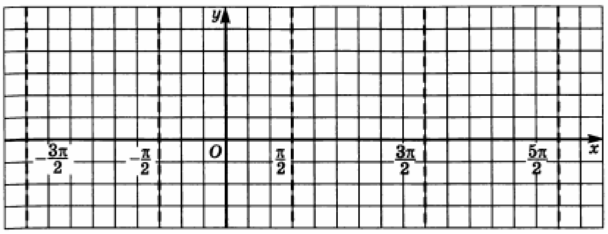


Рис. 57

Первое представление о графике получено: он состоит из бесконечного множества ветвей (в полосе между $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, в полосе между прямыми $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ и т.д.).

Свойство 2. y = tg x – периодическая функция с основным периодом π.

Это следует из двойного равенства $\mathrm{tg}\,(x - \pi) = \mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,(x + \pi)$.

Значит, если мы построим ветвь графика в полосе от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$, то затем нужно будет сдвинуть построенную ветвь по оси x вправо и влево на π, 2π, 3π и т.д. Тем самым получено второе представление о графике.

Свойство 3. y = tg x—нечетная функция.

Это следует из соотношения $\mathrm{tg}\,(-t) = -\mathrm{tg}\,t$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Значит, нам можно действовать так: построить по точкам часть графика на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а затем воспользоваться указанной симметрией.

Приступим к построению графика $y = \mathrm{tg}\,x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем контрольные точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{tg}\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них плавную кривую (рис. 58). Добавим линию, симметричную построенной кривой относительно начала координат (рис. 59). Воспользовавшись периодичностью, достроим график до конца (рис. 60).

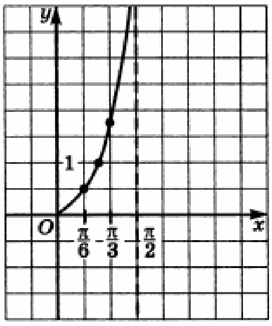


Рис. 58

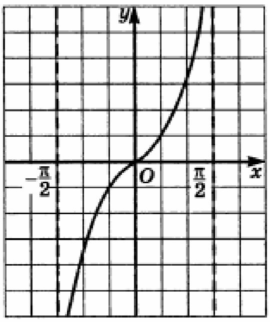


Рис. 59

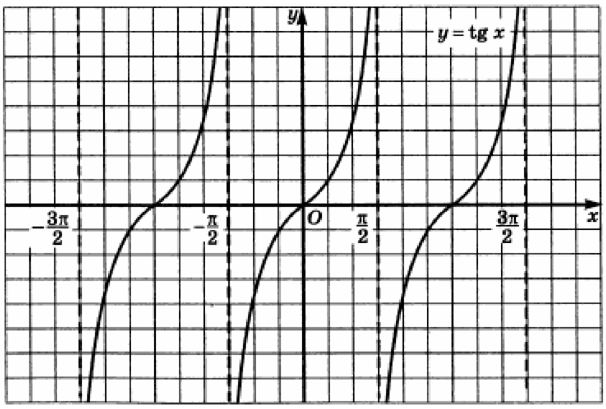


Рис. 60

График функции y = tg x называют тангенсоидой. Ту ее часть, которая изображена на рис. 59, обычно называют главной ветвью тангенсоиды.

Обратите внимание на то, что из начала координат главная ветвь тангенсоиды выходит как бы под углом 45°.

Свойство 4. Функция возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. В более общем виде — функция возрастает на любом интервале вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); k \in \mathbf{Z}.$

Свойство 5. Функция y = tg x не ограничена ни сверху, ни снизу.

Свойство 6. У функции y = tg x нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Свойство 7. Функция y = tg x непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. В более общем виде — функция непрерывна на любом интервале вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

При значениях $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ функция претерпевает разрыв. Каждая прямая вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ служит вертикальной асимптотой графика функции.

Свойство 8. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Рассуждая аналогично, можно построить график функции y = ctg x (рис. 61). График функции y = ctg x, как и график функции y = tg x, называют тангенсоидой. Главной ветвью графика функции y = ctg x обычно называют ветвь, заключенную в полосе от x = 0 до x = π.

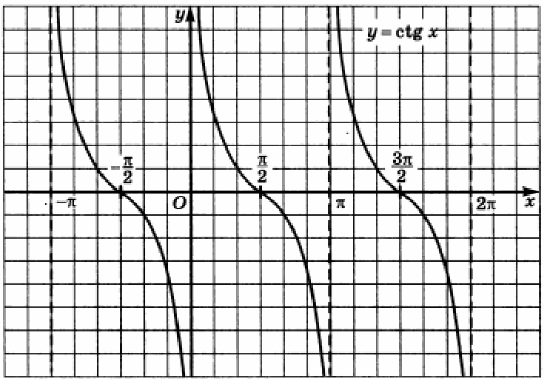


Рис. 61

Лекция № 5 (4 часа)

Тема: «Тригонометрические уравнения»

1 Вопросы лекции:

1.1. Понятие арккосинуса, арксинуса, арктангенса и арккотангенса.

1.2. Определение тригонометрических уравнений.

1.3. Методы решения тригонометрических уравнений.

1.4. Алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Понятие арккосинуса, арксинуса, арктангенса и арккотангенса.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то arccos *a* (арккосинус *a*) — это такое число из отрезка [0, π], косинус которого равен *a* (рис. 62). Итак,

$$\boxed{\text{если } |a| \leqslant 1\text{, то} \quad \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}}$$

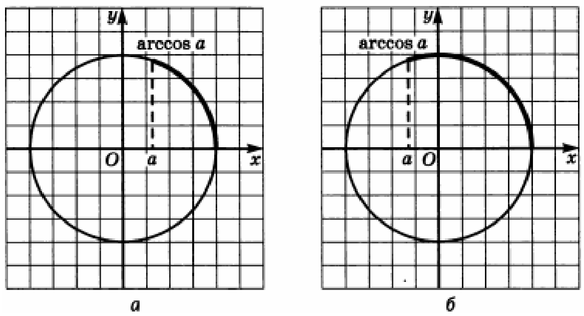


Рис. 62

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения cos t = *a*:

Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение cos t = a имеет решения

$$\boxed{t = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

$$\text{если } \cos t = 0, \text{ то } t = \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

$$\text{если } \cos t = 1, \text{ то } t = 2\pi k;$$

$$\text{если } \cos t = -1, \text{ то } t = \pi + 2\pi k.$$

Теорема. Для любого a∊ [—1; 1] выполняется равенство arccos a + arccos (—a) = π.

Арксинус. Решение уравнения sin t = *a*.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то arcsin *a* (арксинус *a*) — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен *a* (рис. 63).

Итак,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{если } |a| \leqslant 1, \text{ то} \\ \arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}\end{array}}$$

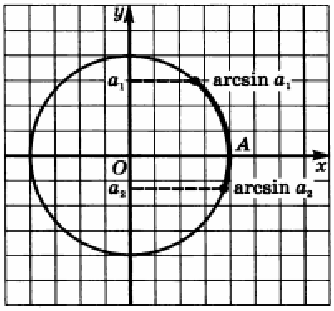


Рис. 63

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения sin t = a:

Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение sin t = a имеет решения

$$\boxed{t = \arcsin a + 2\pi k,\quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k;\ k \in Z.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

$$\text{если } \sin t = 0, \text{ то } t = \pi k;$$

$$\text{если } \sin t = 1, \text{ то } t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\text{если } \sin t = -1, \text{ то } t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Для любого *a* ϵ [-1; 1] справедлива формула

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a.}$$

Общая формула решения уравнения sin t = a имеет вид: $\boxed{t = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.}$

Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений tg *x = a,* ctg *x = a.*

Определение. arctg *a* (арктангенс *a*) — это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен *a*.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения tg *x* = *a*: уравнение tg *x* = *a* имеет решения

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z.}$$

Для любого значения *a* справедлива формула

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.}$$

Определение. arcctg *a* (арккотангенс *a*) — это такое число из интервала (0, π), котангенс которого равен *a*.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ 0 < x < \pi. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения ctg *x* = *a*: уравнение ctg *x* = *a* имеет решения:

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z.}$$

Имеет место свойство:

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.}$$

3.2. Определение тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменная содержится под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся простейшие тригонометрические уравнения, т.е. уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a$, где *a* – действительное число. К настоящему моменту мы знаем, что:

1) Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение cos t = a имеет решения $x = \pm\arccos a + 2\pi n;$
2) Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение sin t = a имеет решения: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$
3) Если $|a| > 1$, то уравнения sin t = *a* и cos t = *a* решений не имеют.
4) Уравнение tg *x* = *a* имеет решения: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$
5) Уравнение ctg *x* = *a* имеет решения: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,$
6) Следует выделить частные случаи

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n.$$

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k) принимает любые целочисленные значения $(n \in Z,\ k \in Z)$.

К простейшим относят обычно и уравнения вида T(kx + m) = a, где T — знак какой-либо тригонометрической функции.

3.3. Методы решения тригонометрических уравнений.

Для решения тригонометрических уравнений чаще всего используются два метода: введения новой переменной и разложения на множители.

Пример 1. Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Решение: Введем новую переменную $z = \sin x$. Тогда уравнение примет вид: $2z^2 - 5z + 2 = 0$. Решив его, получаем: $z_1 = 2,\ z_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, либо $\sin x = 2$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$. Первое уравнение решений не имеет, а из второго находим:

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n;\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Теперь поговорим о втором методе решения тригонометрических уравнений — методе разложения на множители. Смысл этого метода вам знаком: если уравнение f(x) =0 возможно преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, то задача сводится к решению двух уравнений (обычно говорят — к решению совокупности уравнений): $f_1(x) = 0;\quad f_2(x) = 0.$

3.4. Алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений.

Определение. Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени; уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени.

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента *a* и *b* отличны от нуля, так как, если *a* или *b* = 0, уравнение принимает вид, рассмотренный ранее.

Итак, дано уравнение $a\sin x + b\cos x = 0$. Разделив обе части уравнения почленно на cos *x*, получим:

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{b\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x};$$

$$a\operatorname{tg} x + b = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$ Если коэффициент *a* отличен от нуля, т.е. в уравнении содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая как и выше, нетрудно убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной cos *x* не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$:

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x},$$

$$\text{т. е. } a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении коэффициент *a* равен 0, т.е. отсутствует член $\sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид:

$$b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$$

Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x\,(b\sin x + c\cos x) = 0;$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad b\sin x + c\cos x = 0.$$

Получились два уравнения, которые мы с вами решать умеем.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда c = 0, т.е. когда однородное уравнение имеет вид $a\sin^2 x + b\sin x\cos x = 0$ (здесь можно вынести за скобки sin *x*).

Алгоритм решения уравнения $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a\sin^2 x$.
2. Если член $a\sin^2 x$ в уравнении содержится, то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.

3. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т. е. а = 0), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида $a \sin^2 mx + b \sin mx \cos mx + c \cos^2 mx = 0.$

Лекция № 6 (2 часа)

Тема: «Преобразование тригонометрических выражений»

1 Вопросы лекции:

1.1. Синус и косинус суммы (разности) аргументов.

1.2. Тангенс суммы (разности) аргументов.

1.3. Формулы двойного аргумента.

1.4. Преобразование суммы (произведения) тригонометрических функций в произведение (сумму).

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Синус и косинус суммы (разности) аргументов.

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y,\\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}}$$

$$\boxed{\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.}$$

$$\boxed{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.}$$

3.2. Тангенс суммы (разности) аргументов.

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.}$$

3.3. Формулы двойного аргумента.

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x.}$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.}$$

Формулы понижения степени:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

3.4. Преобразование суммы (произведения) тригонометрических функций в произведение (сумму).

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

$$A\sin x + B\cos x = C\sin(x+t), \text{ где } C = \sqrt{A^2+B^2}.$$

$$\sin s\cos t = \frac{\sin(s+t)+\sin(s-t)}{2}.$$

$$\cos s\cos t = \frac{\cos(s+t)+\cos(s-t)}{2}.$$

$$\sin s\sin t = \frac{\cos(s-t)-\cos(s+t)}{2}.$$

Лекция № 7 (2 часа)

Тема: «Предел числовой последовательности и функции»

1 Вопросы лекции:

1.1. Определение числовой последовательности.

1.2. Свойства числовой последовательности.

1.3. Предел числовой последовательности.

1.4. Предел функции на бесконечности и в точке.

1.5. Приращение аргумента. Приращение функции.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Определение числовой последовательности.

Определение. Функцию вида $y = f(x),\ x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ или (y_n).

Последовательности можно задавать различными способами, например словесно, когда правило задания последовательности описано словами, без указания каких-то формул. Так, словесно задается последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Особенно важны аналитический и рекуррентный способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана аналитически, если указана формула ее n-го члена.

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Например, арифметическая прогрессия — это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно.

3.2. Свойства числовых последовательностей.

Числовая последовательность — частный случай числовой функции, а потому некоторые свойства функций (ограниченность, монотонность) рассматривают и для последовательностей.

Определение. Последовательность (y_n) называют ограниченной сверху, если все ее члены не больше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) ограничена сверху, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют верхней границей последовательности.

Например, последовательность -1, -4, -9, -16, ...,$-n^2$, ... ограничена сверху. В качестве верхней границы можно взять число -1 или любое число, которое больше, чем -1, например 0.

Определение. Последовательность (y_n) называют ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) ограничена снизу, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют нижней границей последовательности.

Например, последовательность 1, 4, 9, 16, ..., n^2, ... ограничена снизу. В качестве нижней границы можно взять число 1 или любое число меньше 1.

Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то ее называют ограниченной. Например, $y_n = \frac{1}{n}$. Эта последовательность ограничена и сверху, и снизу. В качестве верхней границы можно взять число 1, в качестве нижней границы — число 0.

Особенно наглядным становится свойство ограниченности последовательности, если члены последовательности отметить точками на числовой прямой. Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности (точнее, соответствующие им точки прямой) принадлежат некоторому отрезку. Так, изобразив члены последовательности точками на числовой прямой, замечаем, что все они принадлежат отрезку [0, 1] (рис. 64).

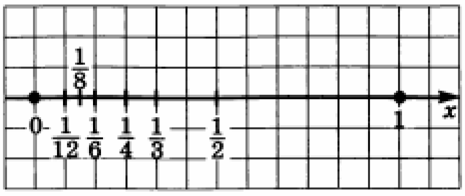


Рис. 64

Определение. Последовательность (y_n) называют возрастающей, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ \ldots .$$

Например, 1, 3, 5, 7,...,2n-1,... — возрастающая последовательность.

Определение. Последовательность (y_n) называют убывающей, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_n > \ \ldots .$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — монотонные последовательности.

3.3. Предел числовой последовательности.

Рассмотрим две числовые последовательности (y_n) и (x_n).

$$(y_n){:}\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots;$$

$$(x_n){:}\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots .$$

На рис. 64 замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы "сгущаются" около точки 0, а у первой последовательности такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: вторая последовательность сходится, а первая последовательность расходится.

Возникает естественный вопрос: как узнать, является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности. Чтобы ответить на этот вопрос, введем новый математический термин.

Определение. Пусть *а* — точка прямой, а г— положительное число. Интервал (а – г; а + г) называют окрестностью точки а (рис. 65), а число г— радиусом окрестности.

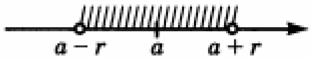


Рис. 65

Например, (5,98, 6,02) — окрестность точки 6, причем радиус этой окрестности равен 0,02. Теперь мы можем ответить на поставленный выше вопрос. Но сразу уточним: математики не любят термин «точка сгущения для членов заданной последовательности», они предпочитают использовать термин «предел последовательности».

Определение. Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут либо так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (читают: y_n стремится к b или y_n сходится к b), либо так: $y_n \to b$ (читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b; но обычно слова «при стремлении n к бесконечности» опускают).

Вообще, равенство означает, что прямая y = b является горизонтальной асимптотой графика функции y = f(n).

Сходящиеся последовательности обладают рядом свойств.

Свойство 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

Свойство 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Заметим, что обратное утверждение неверно: например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... , 1, 2, 3, ... — ограниченная последовательность, но она не сходится.

Оказывается, если последовательность не только ограничена, но и монотонна (убывает или возрастает), то она обязательно сходится; это доказал в XIX в. немецкий математик Карл Вейерштрасс.

Свойство 3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейерштрасса).

***Теорема.* Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то**

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c},\ c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kb.$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^m}\right) = 0.}$$

3.4. Предел функции на бесконечности и в точке.

Предел функции на бесконечности

Пусть теперь дана функция y = f(x), в области определения которой содержится луч $[a;\ +\infty)$ и пусть прямая y = b является горизонтальной асимптотой графика (рис. 66) функции y = f(x). Естественно, что математики в этом случае по аналогии с приведенным выше равенством решили использовать запись: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (читают: предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b).

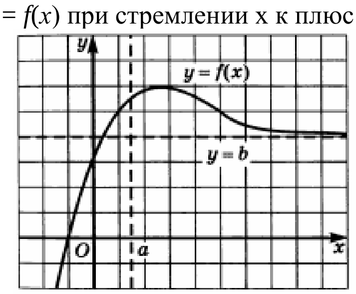


Рис. 66

Если же дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $(-\infty; a]$ и прямая y = b является горизонтальной асимптотой графика функции y = f(x) (рис. 67), то в этом случае используют запись: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ (читают: предел функции y = f(x) при стремлении x к минус бесконечности равен b).

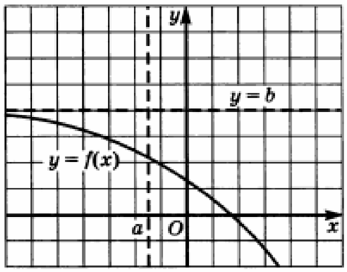


Рис. 67

Если одновременно выполняются два соотношения: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то можно объединить их одним соотношением: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Но условились использовать более экономную запись: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (читают: предел функции y = f(x) при стремлении x к бесконечности равен b).

В этом случае прямая y = b является горизонтальной асимптотой графика функции y = f(x) как бы с двух сторон (рис. 68).

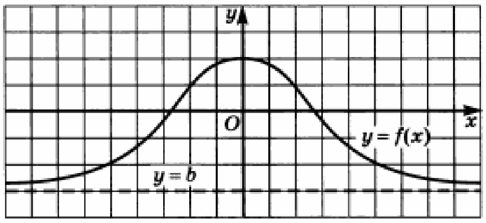


Рис. 68

Вычисление предела функции на бесконечности осуществляется по тем же правилам, что и вычисление предела последовательности. Приведем их (с соответствующими изменениями).

1) Для любого натурального показателя m и любого коэффициента к справедливо соотношение:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x^m}\right) = 0.}$$

.

2) Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b,\ \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = c$, то

а) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x \to \infty}(f(x) + g(x)) = b + c;$$

б) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = bc;$$

в) предел частного равен частному от деления пределов (разумеется, при условии, что)

$$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c};$$

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \to \infty} kf(x) = kb.$$

Предел функции в точке.

Рассмотрим функции, графики которых изображены на рис. 69 – 71. Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, тем не менее это три разные функции, они отличаются друг от друга своим поведением в точке x = *a*. Для функции y = f(x), график которой изображен на рис. 69, значение f(a) не существует, функция в указанной точке не определена. Для функции y = f (x), график которой изображен на рис. 70, значение f(a) существует, но оно «неудачное», оно отлично, от, казалось бы, естественного значения b. Наконец, для функции y = f(x), график которой изображен на рис. 71, значение f(a) существует, и оно «удачное». Если же точку x=a исключить из рассмотрения, то все три функции будут тождественными. Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(читаем: «предел функции y = f(x) при стремлении x к *a* равен b»).

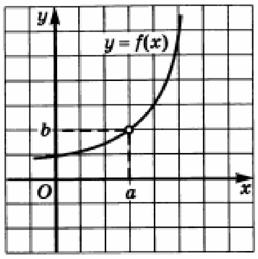


Рис. 69

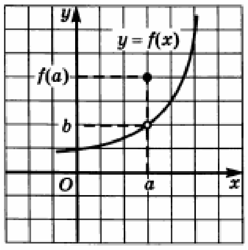


Рис. 70

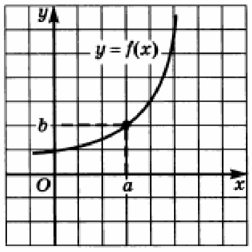


Рис. 71

Содержательный смысл приведенной выше записи заключается в следующем: если значения аргумента выбираются все ближе и ближе к значению x = *a*, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b. При этом, подчеркнем еще раз, сама точка x = *a* исключается из рассмотрения.

А теперь ответьте на вопрос: какую из рассмотренных трех функций естественно считать непрерывной в точке x = *a*? Ответ очевиден: непрерывной естественно считать третью функцию, которая удовлетворяет условию $f(a) = b$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ранее мы говорили, что функция непрерывна, если видели, что ее график представляет собой сплошную линию, т.е. не имеет «проколов» и «скачков». На самом деле график функции изображают в виде сплошной линии (без «проколов» и «скачков») только тогда, когда установлена непрерывность функции.

Определение. Функцию y = f(x) называют непрерывной в точке x = *a*, если выполняется соотношение:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Иными словами, функцию y = f(x) называют непрерывной в точке x=*a*, если предел функции y = f(x) при стремлении x к *a* равен значению функции в точке x = a.

Функцию y = f(x) называют непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

***Теорема.* Если** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, **то:**

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c;$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = bc;$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ **(при условии, что** $c \neq 0$**);**

4) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = kb.$

3.5. Приращение аргумента. Приращение функции.

Определение. Пусть функция y = f(x) определена в точках x_0 и x_1. Разность x_1 - x_0 называют приращением аргумента (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_1)$ - $f(x_0)$ называют приращением функции.

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта»; соответствующая строчная буква пишется так:δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (или Δf), значит, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Лекция № 8 (2 часа)

Тема: «Определение производной»

1 Вопросы лекции:

1.1. Задачи, приводящие к понятию производной.

1.2. Алгоритм отыскания производной.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Задачи, приводящие к понятию производной.

Задача 1 (о скорости движения). По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой s = s(t), где t — время (в секундах), s(t) — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета (в метрах). Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

Решение. Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M (рис. 72), пройдя путь от начала движения OM = s(t). Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим момент времени t + Δt. Координата материальной точки стала другой, тело в этот момент будет находиться в точке P: OP = s(t + Δt).

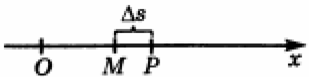


Рис. 72

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P, т.е. прошло путь MP. Имеем: MP = OP – OM = s(t + Δt) – s(t). Полученную разность мы назвали приращением функции: s(t + Δt) – s(t) = Δs. Итак, MP = Δs (м). Причем, перемещение из точки M в точку P тело прошло за Δt секунд. Нетрудно найти среднюю скорость движения тела за промежуток времени [t; t + Δt]:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (м/с).}$$

А что такое скорость (t) в момент времени t (ее называют иногда мгновенной скоростью)? Можно сказать так: это средняя скорость движения за промежуток времени [t; t + Δt] при условии, что Δt выбирается все меньше и меньше; иными словами, Δt→0. Это значит, что $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}$.

Подводя итог решению задачи 1, получаем:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Прежде чем сформулировать вторую задачу и приступить к ее решению, обсудим вопрос, что следует понимать под касательной к плоской кривой. Термином «касательная» мы уже пользовались (на интуитивном уровне) в курсе алгебры 7—9-го классов. Например, мы говорили, что парабола y = x^2 касается оси x в точке x = 0 или, что то же самое, ось x является касательной к параболе y = x^2 в точке x = 0. И дело не в том, что ось x и парабола имеют одну общую точку. Ведь ось y тоже имеет с параболой y = x^2 одну общую точку, однако у вас не возникнет желания назвать ось y касательной к параболе. Обычно касательную определяют следующим образом.

Дана кривая L (рис. 73), на ней выбрана точка M. Возьмем еще одну точку на кривой, причем достаточно близкую к M, — точку P. Проведем секущую MP. Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M. Секущая MP будет изменять свое положение, она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некое предельное положение секущей; эту прямую — предельное положение секущей — называют касательной к кривой L в точке M.

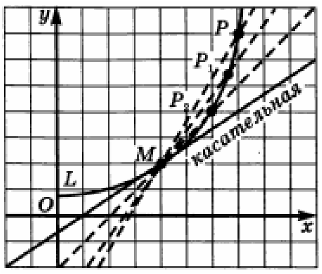


Рис. 73

Задача 2 (о касательной к графику функции). Дан график функции y = f(x). На нем выбрана точка M(*a*; f(*a*)), в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δх и рассмотрим на графике (рис. 74) точку Р с абсциссой *а* + Δх. Ордината точки Р равна f(*а* + Δх). Угловой коэффициент секущей МР, т.е. тангенс угла между секущей и осью х, вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

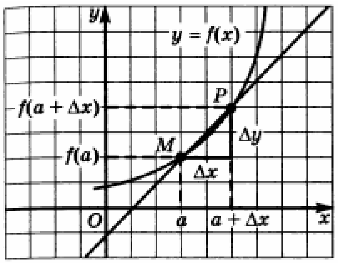


Рис. 74

Если мы теперь устремим Δх к нулю, то точка Р начнет приближаться по кривой к точке М. Касательную мы охарактеризовали как предельное положение секущей при этом приближении. Значит, естественно считать, что угловой коэффициент касательной будет вычисляться по формуле $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$.

Используя приведенную выше формулу для $k_{\text{сек}}$, получаем

$$\boxed{k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Замечание. В приведенном решении задачи 2 упущен случай, когда касательная перпендикулярна оси абсцисс. Уравнение такой прямой имеет вид х = а, об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно, поскольку он не существует.

3.2. Алгоритм отыскания производной.

Определение. Пусть функция у = f(x) определена в конкретной точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу х приращение Δх, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции Δу и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при условии Δх → 0, то указанный предел называют производной функции у = f(x) в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

Итак,

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).}$$

Для обозначения производной часто используют символ у'.

Отметим, что у' = f '(х) — это новая функция, но, естественно, связанная с функцией у = f(x), определенная во всех таких точках х, в которых существует указанный выше предел. Эту функцию называют так: производная функции у = f(x).

Рассмотренные в п. 1 задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если s(t) — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t:

$$\boxed{v(t) = s'(t).}$$

На практике во многих отраслях науки используется обобщение полученного равенства: если некоторый процесс протекает по закону s = s (t), то производная s'(t) выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции у = f(x) в точке с абсциссой х = *а* можно провести касательную, непараллельную оси у, то f '(а) выражает угловой коэффициент касательной:

$$\boxed{k = f'(a).}$$

Поскольку k = tg α, то верно равенство f '(а) = tg α.

А теперь истолкуем определение производной с точки зрения приближенных равенств. Пусть функция у = f(x) имеет производную в конкретной точке х:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Это означает, что в достаточно малой окрестности точки х выполняется приближенное равенство:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x), \text{ т. е. } \Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

Содержательный смысл полученного приближенного равенства заключается в следующем: приращение функции «почти пропорционально» приращению аргумента, причем коэффициентом пропорциональности является значение производной (в заданной точке x).

Если внимательно прочитать определение производной, то мы обнаружим, что в нем заложен алгоритм отыскания производной. Сформулируем его.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Если функция y = f(x) имеет производную в точке x, то ее называют дифференцируемой в точке x. Процедуру отыскания производной функции y = f(x) называют дифференцированием функции y = f(x).

Лекция № 9 (2 часа)

Тема: «Вычисление производной»

1 Вопросы лекции:

1.1. Формулы дифференцирования.

1.2. Правила дифференцирования.

1.3. Дифференцирование сложных функций.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Формулы дифференцирования.

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций:

$$\boxed{\begin{gathered} C' = 0; \\ x' = 1; \\ (kx + m)' = k; \\ (x^2)' = 2x; \\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\ (\sin x)' = \cos x; \\ (\cos x)' = -\sin x. \end{gathered}}$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

3.2. Правила дифференцирования.

Теорема 1. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:**

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).}$$

Теорема 2. **Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{(kf(x))' = kf'(x).}$$

Теорема 3. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).}$$

Теорема 4. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}.$$

3.3. Дифференцирование сложных функций.

Определение. Функцию y = f(g(x)) называют сложной функцией.

Рассмотрим сложную функцию вида y = f(kx + m).

Теорема. Производная функции y = f(kx + m) вычисляется по формуле

$$\boxed{(f(kx + m))' = kf'(kx + m).}$$

Лекция № 10 (4 часа)

Тема: «Приложение производной»

1 Вопросы лекции:

1.1. Уравнение касательной к графику функции.

1.2. Исследование функции на монотонность с помощью производной.

1.3. Отыскание наибольших и наименьших значений функции.

1.4. План исследования и построения графиков функций.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Уравнение касательной к графику функции.

Уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке x = *a* имеет вид:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).} \quad (1)$$

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу (1).

3.2. Исследование функции на монотонность с помощью производной.

Теорема 1. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.**

Теорема 2. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.**

Теорема 3. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на промежутке X.**

Определение 1. Точку $x = x_0$ называют **точкой минимума функции $y = f(x)$**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 2. Точку $x = x_0$ называют **точкой максимума функции $y = f(x)$**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — *точки экстремума* (от латинского слова *extremum* — «крайний»).

Теорема 4. **Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.**

Для удобства условимся внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называть *стационарными*, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, — *критическими*.

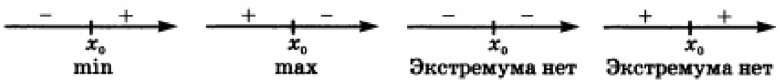
Теорема 5 (достаточные условия экстремума). **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:**

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Этой длинной формулировкой на практике пользоваться неудобно, советуем применять следующую условную схему для знаков производной:



Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. На основании теорем 1, 2 и 5 сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

3.3. Отыскание наибольших и наименьших значений функции.

1. *Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений* (эта теорема доказывается в курсе высшей матеатики).

2. *Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.*

3. *Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.*

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).

Теорема. **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:**

а) если $x = x_0$ — точка максимума, то $y_{наиб} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ — точка минимума, то $y_{наим} = f(x_0)$.

3.4. План исследования и построения графиков функций.

1. Найти область определения функции.
2. Определить поведение функции на границах области определения.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Исследовать функцию на четность и периодичность.
5. Найти промежутки монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Исследовать функцию на существование вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.
8. Построить график функции.

Лекция № 11 (2 часа)

Тема: «Первообразная и неопределенный интеграл»

1 Вопросы лекции:

1.1. Понятие первообразной.

1.2. Неопределенный интеграл.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Понятие первообразной.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $X=(a,b)$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $f(x)$ является производной для $F(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции $f(x)$ требуется найти функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$. Первообразная определена неоднозначно: для функции первообразными будут и функция arctg x, и функция arctg x-10. Для того, чтобы описать все множество первообразных функции $f(x)$, рассмотрим

Свойства первообразной

1. Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на интервале X, то функция $f(x) + C$, где C - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $f(x)$ на этом интервале.
2. Если функция $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$ на интервале $X=(a,b)$, то любая другая первообразная $F_1(x)$ может быть представлена в виде $F_1(x) = F(x) + C$, где C - постоянная на X функция.
3. Для любой первообразной $F(x)$ выполняется равенство $dF(x) = f(x)\,dx$.

Из этих свойств следует, что если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале X, то всё множество первообразных функции $f(x)$ (т.е. функций, имеющих производную $f(x)$ и дифференциал $f(x)\,dx$) на этом интервале описывается выражением $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

3.2. Неопределенный интеграл.

Определение. Множество всех первообразных для функции называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)\,dx$. $f(x)$ называется подинтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подинтегральным выражением, – переменной интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x),$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a \neq 0.$$

4. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) - f_2(x) + f_3(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx.$$

Таблица неопределенных интегралов.

I. $\int dx = x.$

II. $\int (a+bx)^n\,dx = \dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$, $(n \neq -1).$

III. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1).$

IV. $\int \dfrac{dx}{a+bx} = \dfrac{1}{b}\ln|a+bx|.$

V. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|.$

VI. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$

VII. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \dfrac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3.$

VIII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$

IX. $\int e^x\,dx = e^x.$

X. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$

XI. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}.$

XII. $\int \cos x\,dx = \sin x.$

XIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x.$

XIV. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

XV. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$

Лекция № 12 (2 часа)

Тема: «Определенный интеграл»

1 Вопросы лекции:

1.1. Задачи, приводящие к определению определенного интеграла.

1.2. Понятие определенного интеграла.

1.3. Формула Ньютона – Лейбница.

1.4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Задачи, приводящие к определению определенного интеграла.

Задача 1 (о вычислении площади криволинейной трапеции).

В декартовой прямоугольной системе координат xOy дана фигура (рис. 75), ограниченная осью x, прямыми x = a, x = b (a < b) и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке [a; b] функции y = f(x); назовем эту фигуру криволинейной трапецией. Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции.

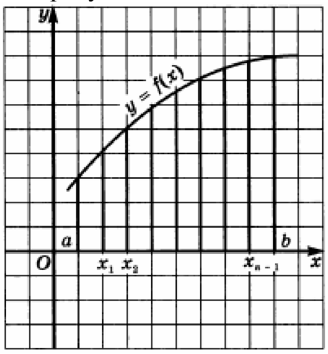


Рис. 75

Решение. Геометрия дает нам рецепты для вычисления площадей многоугольников и некоторых частей круга (сектора, сегмента). Используя геометрические соображения, мы сумеем найти лишь приближенное значение искомой площади, рассуждая следующим образом.

Разобьем отрезок [a; b] (основание криволинейной трапеции) на n равных частей; это разбиение осуществим с помощью точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}$. Проведем через эти точки прямые, параллельные оси y. Тогда заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей, на n узеньких столбиков. Площадь всей трапеции равна сумме площадей столбиков.

Рассмотрим отдельно k-ый столбик, т. е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок $[x_k; x_{k+1}]$. Заменим его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(x_k)$ (рис. 76). Площадь прямоугольника равна $f(x_k) \cdot \Delta x_k$, где Δx_k — длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$; естественно считать составленное произведение приближенным значением площади k-го столбика.

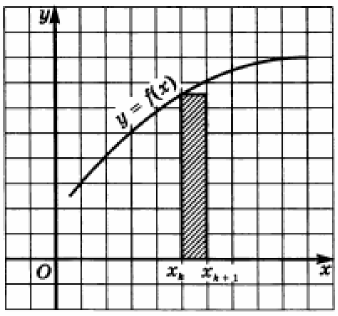


Рис. 76

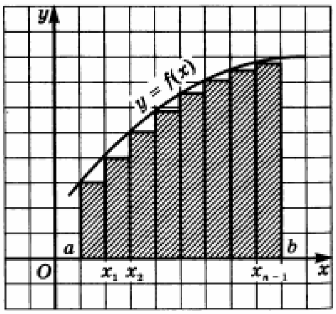


Рис. 77

Если теперь сделать то же самое со всеми остальными столбиками, то придем к следующему результату: площадь S заданной криволинейной трапеции приближенно равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис. 77):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + \\ + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Здесь ради единообразия обозначений мы считаем, что $a = x_0$, $b = x_n$; Δx_0 — длина отрезка $[x_0; x_1]$, Δx_1 — длина отрезка $[x_1; x_2]$ и т. д; при этом, как мы условились выше, $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1}$.

Итак, $S \approx S_n$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

По определению полагают, что искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности (Sn):

$$\boxed{S = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Задача 2 (о вычислении массы стержня).

Дан прямолинейный неоднородный стержень [a; b] (рис. 78), плотность в точке x вычисляется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найти массу стержня.

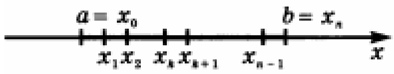


Рис. 78

Решение. Масса m тела, как известно из курса физики, равна произведению плотности на объем V (вместо объема берут площадь, если речь идет о плоской пластине; вместо объема берут длину, если речь идет о прямолинейном стержне без учета его толщины). Но этот закон действует только для однородных тел, т. е. в тех случаях, когда плотность постоянна. Для неоднородного стержня используется тот же метод, что был применен при решении задачи 1.

1) Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей.

2) Рассмотрим k-й участок $[x_k; x_{k+1}]$ и будем считать, что плотность во всех точках этого участка постоянна, а именно такая, как, например, в точке x_k. Итак, мы считаем, что $\rho = \rho(x_k)$.

3) Найдем приближенное значение массы k-го участка, это приближенное значение обозначим m_k:

$$m_k = \rho(x_k)\Delta x_k,$$

где Δx_k, как и в предыдущей задаче, — длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$.

4) Найдем приближенное значение массы стержня

$$m \approx S_n,$$

$$\text{где } S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_{n-1} = \\ = \rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \rho(x_2)\Delta x_2 + \ldots + \rho(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

5) Физическая масса равна пределу последовательности (S_n)

$$\boxed{m = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Задача 3 (о перемещении точки).

По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v = v(t)$. Найти перемещение точки за промежуток времени [a; b].

Решение. Если бы движение было равномерным, то задача решалась бы очень просто: $s = vt$, т. е. $s = v(b - a)$. Для неравномерного движения приходится использовать те же идеи, на которых было основано решение двух предыдущих задач.

1) Разделим промежуток времени [a; b] на n равных частей.

2) Рассмотрим промежуток времени $[t_k; t_{k+1}]$ и будем считать, что в этот промежуток времени скорость была постоянной, такой, как в момент времени t_k. Итак, мы считаем, что $v = v(t_k)$.

3) Найдем приближенное значение перемещения точки за промежуток времени $[t_k; t_{k+1}]$, это приближенное значение обозначим s_k:

$$s_k = v(t_k)\Delta t_k.$$

4) Найдем приближенное значение перемещения s:

$$s = S_n,$$

$$\text{где } S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_{n-1} = \\ = v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}.$$

5) Искомое перемещение равно пределу последовательности (S_n):

$$\boxed{s = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

3.2. Понятие определенного интеграла.

Дадим математическое описание той модели, которая была построена в трех рассмотренных задачах для функции y = f(x), непрерывной (но необязательно неотрицательной, как это предполагалось в рассмотренных задачах) на отрезке [a; b]:

1) разбиваем отрезок [a; b] на n равных частей;
2) составляем сумму

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

3) вычисляем $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

В курсе математического анализа доказано, что этот предел в случае непрерывной (или кусочно-непрерывной) функции существует. Его называют определенным интегралом от функции y = f(x) по отрезку [a; b] и обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(читают: интеграл от a до бэ эф от икс дэ икс). Числа a и b называют пределами интегрирования (соответственно нижним и верхним).

Замечание. Приведем правдоподобную версию происхождения указанных обозначения и термина: $\int$ — стилизованная буква S (summa); f(x)dx — напоминание о слагаемых вида $f(x_k)\Delta x_k$, из которых состоит сумма S_n. Само слово интеграл происходит от латинского слова integer — «целый». Употребление этого термина вполне оправданно: вспомните, какой смысл вкладывается в русском языке в слово интеграция — восстановление, восполнение, воссоединение, т. е. это процесс, ведущий к состоянию связанности отдельных частей в целое. В построенной математической модели речь фактически идет о воссоединении целого по отдельным частям (например, о нахождении всей площади по площадям столбиков, как было в задаче 1).

Вернемся к трем рассмотренным выше задачам. Определение площади, данное в задаче 1, теперь можно переписать следующим образом:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx,}$$

здесь S — площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 75. В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Определение массы m прямолинейного неоднородного стержня с плотностью $\rho(x)$, данное в задаче 2, можно переписать так:

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Наконец, определение перемещения s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от t = a до t = b, данное в задаче 3, можно переписать так:

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

Это еще одно физическое истолкование определенного интеграла.

3.3. Формула Ньютона – Лейбница.

Теорема. Если функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a; b], то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где F(x) — первообразная для f(x).

Приведенную формулу обычно называют формулой Ньютона — Лейбница в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646— 1716), получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно.

На практике вместо записи F(b) - F(a) используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее называют иногда двойной подстановкой) и, соответственно, переписывают формулу Ньютона — Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Вычисляя определенный интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку.

Свойства определенного интеграла.

1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3.4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

С помощью интеграла можно вычислять площади не только криволинейных трапеций типа той, что представлена на рисунке 75, но и плоских фигур более сложного вида, например такого, который представлен на рисунке 79. Фигура P ограничена прямыми x = a, x = b и графиками непрерывных функций y = f(x), y = g(x), причем на отрезке [a; b] выполняется неравенство g(x) < f(x). Чтобы вычислить площадь S такой фигуры, будем действовать следующим образом.

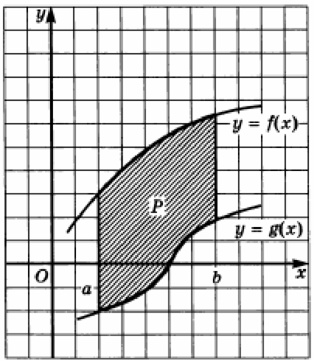


Рис. 79

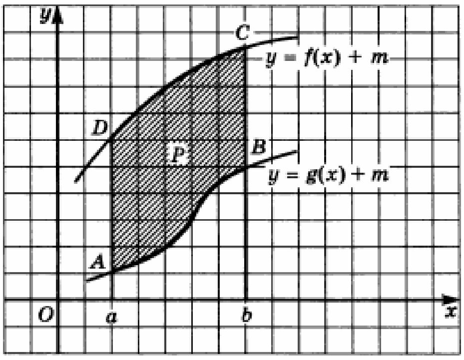


Рис. 80

Выполним параллельный перенос фигуры P на m единиц вверх (m > 0) так, чтобы фигура P оказалась расположенной в координатной плоскости выше оси абсцисс (рис. 80). Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функций y = f(x) + m, y = g(x) + m, причем обе функции непрерывны и неотрицательны на отрезке [a; b]. Имеем:

$$S = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Итак, площадь S фигуры, ограниченной прямыми x = a, x = b и графиками функций y = f(x), y = g(x), непрерывных на отрезке [a; b] и таких, что для любого x из отрезка [a; b] выполняется неравенство g(x) < f(x), вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.}$$

Лекция № 13 (4 часа)

Тема: «Степени и корни»

1 Вопросы лекции:

1.1. Понятие корня n-степени из действительного числа.

1.2. Функции вида $y = \sqrt[n]{x}$ **, их свойства и график.**

1.3. Свойства корня n-степени.

1.4. Обобщение понятия о показателе степени.

1.5. Степенные функции, их свойства и график.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов)

3.1. Понятие корня n-степени из действительного числа.

Определение 1. Корнем n-й степени из неотрицательного числа *a* (n = 2, 3, 4, 5, ...) называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается *a*.

Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$, число *a* при этом называют подкоренным числом, а число n — показателем корня.

Если n = 2, то обычно говорят не «корень второй степени», а «квадратный корень». В этом случае пишут не $\sqrt[2]{a}$, а $\sqrt{a}$. Если n = 3, то вместо «корень третьей степени» часто говорят «кубический корень».

Итак,

$$\boxed{\textbf{если } a \geqslant 0,\ n = 2, 3, 4, 5, \ldots,\ \textbf{то: 1) } \sqrt[n]{a} \geqslant 0;\ \textbf{2) } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.}$$

Вообще $\sqrt[n]{a} = b$ и $b^n = a$ — одна и та же зависимость между неотрицательными числами *a* и *b*, но только вторая описана более простым языком (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения корня из неотрицательного числа называют обычно извлечением корня. Эта операция является обратной по отношению к возведению в соответствующую степень.

Иногда выражение $\sqrt[n]{a}$ называют радикалом (от латинского слова radix — «корень»). В русском языке термин радикальный используется довольно часто, например, «радикальные изменения» — это значит «коренные изменения». Между прочим и само обозначение корня напоминает о слове radix: символ $\sqrt{\ }$ — это стилизованная буква r.

Операцию извлечения корня определяют и для отрицательного подкоренного числа, но только в случае нечетного показателя корня.

Определение 2. Корнем нечетной степени n из отрицательного числа *a* (n = 3, 5, ...) называют такое отрицательное число, при возведении которого в степень n получается *a*.

Это число, как и в определении 1, обозначают $\sqrt[n]{a}$, число *a* — подкоренное число, число n — показатель корня.

Итак,

$$\boxed{\textbf{если } a < 0,\ n = 3, 5, 7, \ldots,\ \textbf{то: 1) } \sqrt[n]{a} < 0;\ \textbf{2) } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.}$$

Таким образом, корень четной степени имеет смысл (т. е. определен) только для неотрицательного подкоренного числа; корень нечетной степени имеет смысл для любого подкоренного числа.

3.2. Функции вида $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и график.

Функция $y = x^n$, $x \in [0; +\infty)$ монотонна, значит, обратима. Выразив x через y из уравнения $y = x^n$, получим: $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Таким образом, функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной для функции $y = x^n$, а потому график функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ симметричен графику функции $y = x^n$, $x \geq 0$ относительно прямой $y = x$ (рис. 81).

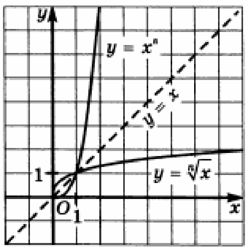


Рис. 81

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) функция не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения, а $y_{наим} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$.
8) функция $y = \sqrt[n]{x}$ выпукла вверх на луче $[0; +\infty)$.
9) функция $y = \sqrt[n]{x}$ дифференцируема в любой точке $x > 0$.

Обратите внимание: о дифференцируемости функции в точке $x = 0$ речь не идет — в этой точке касательная к графику функции совпадает с осью y, т. е. перпендикулярна оси абсцисс. Значит, производная функции $y = \sqrt[n]{x}$ в точке $x = 0$ не существует.

Как же выглядит график функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечетного показателя n? При $x \geq 0$ так, как показано на рисунке 81, — это ветвь искомого графика. Добавив к ней ветвь, симметричную ей относительно начала координат (что, напомним, характерно для любой нечетной функции), получим график функции $y = \sqrt[n]{x}$ (рис. 82). Обратите внимание: ось y является касательной к графику в точке $x = 0$.

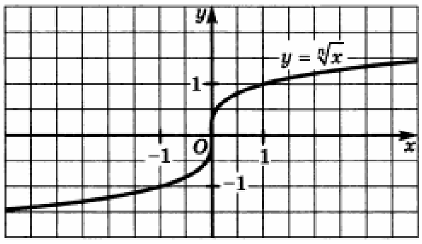


Рис. 82

Справедливо следующее свойство: если n — нечетное число (n = 3, 5, 7, ...), то $y = \sqrt[n]{x}$ — нечетная функция.

3.3. Свойства корня n-степени.

Все свойства формулируются и доказываются только для неотрицательных значений переменных, содержащихся под знаками корней.

Теорема 1. Корень n-й степени (n = 2, 3, 4, ...) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}.$$

Теорема 2. Если $a \geq 0$, $b > 0$ и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Краткая (хотя и неточная) формулировка, которую удобнее использовать на практике: корень частного равен частному корней.

Теорема 3. Если $a \geq 0$, k — натуральное число и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Иными словами, чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.

Теорема 4. Если $a \geq 0$ и n, k — натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Иными словами, чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней.

Теорема 5. Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится:

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Используя эти формулы, можно осуществлять преобразования выражений, содержащих операцию извлечения корня (выражений с радикалами), — такие выражения называют иррациональными.

3.4. Обобщение понятия о показателе степени.

Определение 1. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a \geqslant 0$, то под $a^{\frac{p}{q}}$ понимают $\sqrt[q]{a^p}$:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},\ a > 0.}$$

Определение 2. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a > 0$, то под $a^{-\frac{p}{q}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$:

$$\boxed{a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, \ a > 0.}$$

Итак, теперь мы знаем, что такое степень с любым рациональным показателем. Справедливы следующие свойства (мы считаем, что a > 0, b > 0, s и t — произвольные рациональные числа):

1) $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$;

2) $a^s : a^t = a^{s-t}$;

3) $(a^s)^t = a^{st}$;

4) $(ab)^s = a^s \cdot b^s$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

Назовем основные методы решения иррациональных уравнений:
1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;
2) метод введения новых переменных;
3) функционально-графический метод.

Если используется метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень, то возможно появление посторонних корней, значит, обязательна проверка всех найденных решений

3.5. Степенные функции, их свойства и график.

Обычно степенными функциями называют функции вида $y = x^r$, где r — любое действительное число. В этом параграфе мы ограничимся случаем рационального показателя r.

Если r — натуральное число (r = n), то получаем функцию $y = x^n$; графики и свойства таких функций вам известны из курса алгебры 7—9-го классов. На рисунке 83 изображен график функции $y = x^1$ (прямая), на рисунке 84 изображен график функции $y = x^2$ (парабола), на рисунке 85 изображен график функции $y = x^3$ (кубическая парабола). График степенной функции $y = x^n$ в случае четного n (n = 4, 6, 8, ...) похож на параболу, а график степенной функции $y = x^n$ в случае нечетного n (n = 5, 7, 9, ...) похож на кубическую параболу.

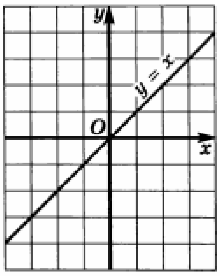


Рис. 83

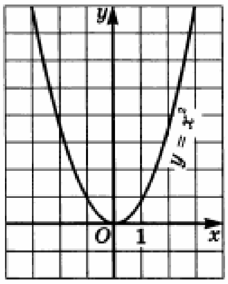


Рис. 84

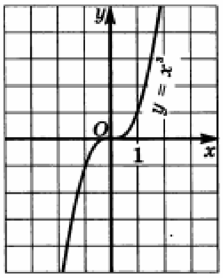


Рис. 85

Если r = -n, то получаем функцию $y = x^{-n}$ т. е. $y = \frac{1}{x^n}$; о таких функциях мы говорили в курсе алгебры 9-го класса. В случае четного n график имеет вид, изображенный на рисунке 86; в случае нечетного n график имеет вид, изображенный на рисунке 87.

Наконец, если r = 0, то речь идет о функции $y = x^0$, или, что то же самое, y = 1, где $x \neq 0$; график этой функции изображен на рисунке 88.

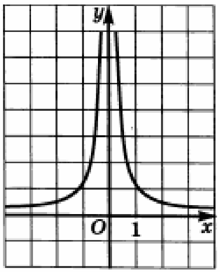


Рис. 86

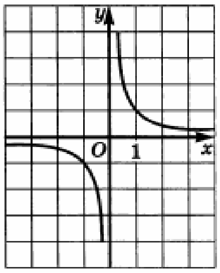


Рис. 87

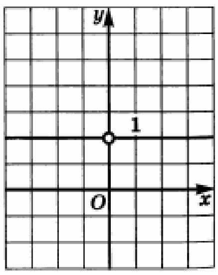


Рис. 88

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{\frac{m}{n}}$ для случая, когда $\frac{m}{n} > 1$. Возьмем в качестве примера функцию $y = x^{2,5}$. Область ее определения — луч $[0; +\infty)$. Построим на этом луче графики функций $y = x^2$

(ветвь параболы) и $y = x^3$ (ветвь кубической параболы) — они изображены на рисунке 89. Отметим, что на интервале (0; 1) кубическая парабола располагается ниже, а на открытом луче $(1; +\infty)$ — выше параболы.

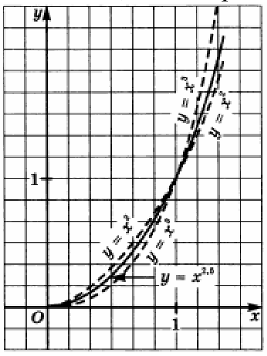


Рис. 89

Нетрудно убедиться в том, что график функции $y = x^{2,5}$ проходит через точки (0; 0) и (1; 1), как и графики функций $y = x^2$, $y = x^3$. При остальных значениях аргумента x график функции $y = x^{2,5}$ находится между графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$ (рис. 89).

График функции $y = x^{2,5}$ напоминает ветвь параболы. Примерно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^r$, где $r = \frac{m}{n}$ — неправильная дробь (числитель больше знаменателя). Ее графиком является кривая, проходящая через точки (0; 0) и (1; 1) и похожая на ветвь параболы (рис. 90). Чем больше показатель r, тем «круче» устремлена эта кривая вверх.

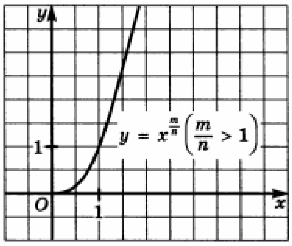


Рис. 90

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения, а $y_{наим} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{\frac{1}{n}}$. Это известная нам функция $y = \sqrt[n]{x}$, где $x \geq 0$. График функции $y = x^r$ изображен на рисунке 91.

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения, а $y_{наим} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вверх.

Нам осталось рассмотреть степенную функцию вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$.

Область ее определения — открытый луч $(0; +\infty)$. Выше мы построили график степенной функции $y = x^{-n}$ где n — натуральное число. При $x > 0$ график функции $y = x^{-n}$ похож на ветвь гиперболы. Точно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$, ее график изображен на рисунке 92. Отметим, что график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

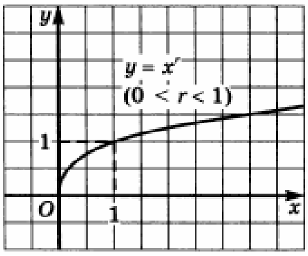


Рис. 91

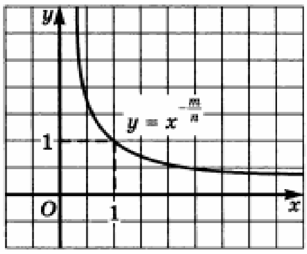


Рис. 92

Свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) убывает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Лекция № 14 (4 часа)

Тема: «Показательная функция»

1 Вопросы лекции:

1.1. Показательная функция, ее свойства и график.

1.2. Показательные уравнения.

1.3. Показательные неравенства.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов).

3.1. Показательная функция, ее свойства и график.

Определение 1. Пусть $a > 1$ и $\alpha = a{,}a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$ — положительное иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). Составим последовательность десятичных приближений числа a по недостатку:

$$\alpha_1 = a{,}a_1,\ \alpha_2 = a{,}a_1a_2,\ \alpha_3 = a{,}a_1a_2a_3,\ \ldots,\ \alpha_n = a{,}a_1a_2a_3 \ldots a_n,\ \ldots .$$

Тогда предел последовательности обозначают a^α и называют степенью с иррациональным показателем. Если $a > 1$ и $\alpha < 0$ — иррациональное число, то под a^α будем понимать число $\frac{1}{a^{-\alpha}}$. Если $0 < a < 1$, то под a^α будем понимать число $\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$.

Теперь мы можем говорить не только о степенях с произвольными рациональными показателями, но и о степенях с произвольными действительными показателями. Доказано, что степени с любыми действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении степени в степень — перемножаются и т. д. Но самое главное, что теперь мы можем говорить о функции $y = a^x$, определенной на множестве всех действительных чисел.

Построим (по точкам) график функции $y = 2^x$. Для этого составим таблицу значений функции $y = 2^x$:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (1; 2), , (2; 4), , (3; 8), на координатной плоскости (рис. 93, а). Они намечают некоторую линию — это график функции $y = 2^x$ (рис. 93, б).

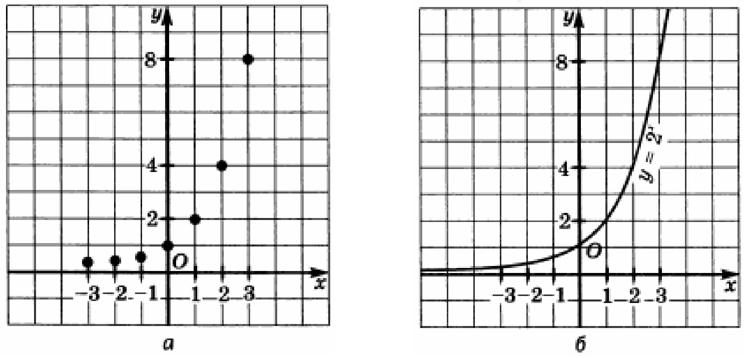


Рис. 93

Свойства функции $y = 2^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $a > 1$.

Рассмотрим теперь функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Для этого составим таблицу значений:

x	0	−1	1	−2	2	−3	3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (-1; 2), , (1; 1/2), , (-2; 4)…на координатной плоскости (рис. 94, а). Они намечают некоторую линию — это график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 94, б).

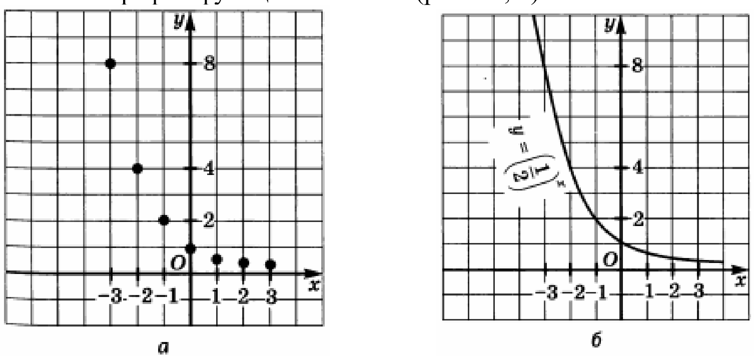


Рис. 94

Свойства функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) убывает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $0 < a < 1$.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Обратите, внимание: графики функций $y = 2^x$ и , т.е. $y = 2^{-x}$ симметричны относительно оси y (рис. 95). Аналогично будут симметричны относительно оси y графики функций $y = 3^x$ и y = и т. д.

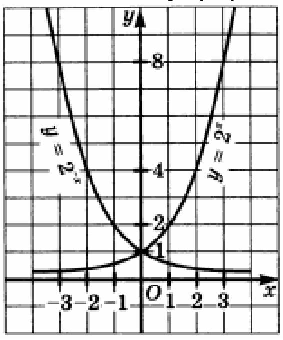


Рис. 95

Подводя итог сказанному, дадим определение показательной функции и выделим наиболее важные ее свойства.

Определение. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показательной функцией.

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Возрастает	**Убывает**
Непрерывна	**Непрерывна**

График функции $y = a^x$ для $a > 1$ изображен на рисунке 96, а для $0 < a < 1$ — на рисунке 97.

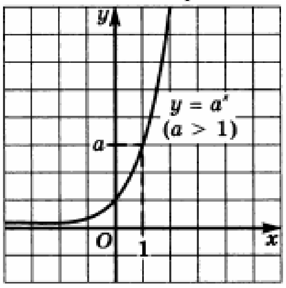


Рис. 96

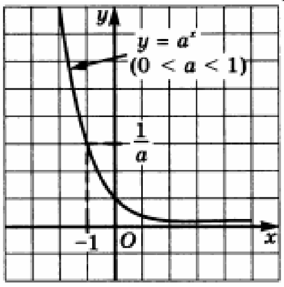


Рис. 97

Кривую, изображенную на рисунке 96 или 97, называют экспонентой. Впрочем, экспонентой называют и саму показательную функцию $y = a^x$. Так что термин «экспонента» используется в двух смыслах: и для наименования показательной функции, и для названия графика показательной функции.

Обратите внимание на геометрическую особенность графика показательной функции $y = a^x$: ось x является горизонтальной асимптотой графика.

Теорема 1. Если $a > 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$; неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.

Теорема 3. Если $0 < a < 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 4. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$; неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$.

3.2. Показательные уравнения.

Показательными уравнениями называют уравнения вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на приведенные теоремы 1 и 3, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Можно выделить три основных метода решения показательных уравнений.

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций.

2) Метод уравнивания показателей. Он основан на теореме 5.

3) Метод введения новой переменной.

3.3. Показательные неравенства.

Показательными неравенствами называют неравенства вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Теорема 6. Если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: f(x) > g(x).

Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: f(x) < g(x).

Лекция № 15 (2 часа)

Тема: «Логарифм»

1 Вопросы лекции:

1.1. Понятие логарифма.

1.2. Логарифмическая функция, ее свойства и график.

1.3. Свойства логарифма.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В*. Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов).

3.1. Понятие логарифма.

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

$$\log_a b$$

Особо выделим три формулы:

$$\boxed{\log_a a = 1,} \quad \boxed{\log_a 1 = 0,} \quad \boxed{\log_a a^c = c.}$$

Определение логарифма можно переписать так:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.}$$

Операцию нахождения логарифма числа обычно называют логарифмированием. Эта операция является обратной по отношению к возведению в степень с соответствующим основанием.

Логарифм по основанию 10 обычно называют десятичным логарифмом. Обозначают его так: $\lg$.

3.2. Логарифмическая функция, ее свойства и график.

Функция $y = \log_a x$ является обратной для функции $y = a^x$, а потому справедливо следующее утверждение.

График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.

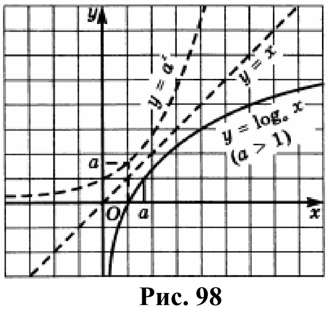


Рис. 98

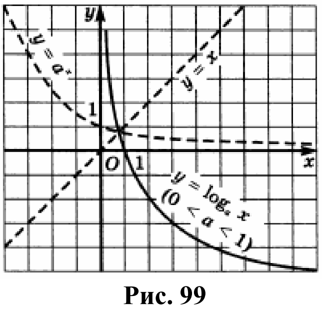


Рис. 99

На рисунке 98 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $a > 1$; на рисунке 99 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $0 < a < 1$.

График функции $y = \log_a x$ называют логарифмической кривой, хотя на самом деле нового названия можно было и не придумывать. Ведь это та же экспонента, что служит графиком показательной функции, только по-другому расположенная на координатной плоскости.

Если значение основания a указано, то график логарифмической функции можно построить по точкам. Пусть, например, нужно построить график функции $y = \log_2 x$. Составляя таблицу контрольных точек, будем руководствоваться соотношением $\log_2 2^r = r$. Поэтому в таблицу в качестве значений аргумента x мы включим числа, являющиеся степенями числа 2.

Имеем:

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2;$$
$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1;$$
$$\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0;$$
$$\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1;$$
$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2;$$
$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

Отметив на координатной плоскости точки, проводим через них логарифмическую кривую (рис. 100).

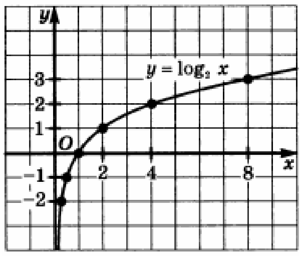


Рис. 100

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рисунке 98:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вверх.

Свойства функции $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рисунке 99:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) убывает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Отметим, что ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции и в случае, когда $a > 1$, и в случае, когда $0 < a < 1$.

3.3. Свойства логарифма.

$$\boxed{\log_a a^r = r;} \qquad \boxed{a^{\log_a b} = b.}$$

Теорема 1. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел

$$\boxed{\log_a bc = \log_a b + \log_a c.}$$

Теорема 2. Если a, b, c — положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливо равенство

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя или логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя.

Теорема 3. Если a и b — положительные числа, причем a ≠ 1, то для любого числа r справедливо равенство

$$\boxed{\log_a b^r = r \log_a b.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.

Ценность операции логарифмирования состоит в том, что она позволяет сводить вычисления к более простым операциям: произведение, частное, степень заменяются соответственно на сумму, разность, произведение.

Иногда приходится решать обратную задачу: находить выражение, логарифм которого представлен через логарифмы некоторых чисел. Такое действие называют потенцированием. При этом используется следующее утверждение.

Теорема 4. Равенство $\log_a t = \log_a s$, где a > 0, a * 1, t > 0, s > 0, справедливо тогда и только тогда, когда t = s.

Это достаточно очевидное следствие монотонности логарифмической функции.

Лекция № 16 (2 часа)

Тема: «Логарифмические уравнения и неравенства»

1 Вопросы лекции:

1.1. Логарифмические уравнения.

1.2. Логарифмические неравенства.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов).

3.1. Логарифмические уравнения.

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида (1)

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

где *a* — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Теорема 1. Если f(x) > 0 и g(x) > 0, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где a > 0, a ≠ 1) равносильно уравнению f(x) = g(x).

На практике эту теорему применяют так: переходят от уравнения (1) к уравнению f(x) = g(x) (такой переход называют потенцированием), решают это уравнение, а затем проверяют его корни по условиям f(x) > 0, g(x) > 0, определяющим область допустимых значений переменной (ОДЗ). Те корни уравнения f(x) = g(x), которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями уравнения (1). Те корни уравнения f(x) = g{x), которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для уравнения (1).

Можно выделить три основных метода решения логарифмических уравнений.

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций.

2) Метод потенцирования. Он основан на теореме 1.

3) Метод введения новой переменной.

3.2. Логарифмические неравенства.

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x),$$

где *a* — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения данного неравенства используют теорему:

Теорема 2. Если f(x) > 0 и g(x) > 0, то:

при a > 1 логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: f(x) > g(x);

при 0 < a < 1 логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: f(x) < g(x).

Лекция № 17 (6 часов)

Тема: «Уравнения и неравенства»

1 Вопросы лекции:

1.1. Общие методы решения уравнений.

1.2. Решение неравенств с одной переменной.

1.3. Системы уравнений.

1.4. Уравнения и неравенства с параметрами.

2 Литература.

2.1. Основная литература

2.1.1. Башмаков М.И. Математика: учебник [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2017. – 394 с. URL: https://www.book.ru/book/922705

2.1.2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299/matematika#page/1

2.2. Дополнительная литература

2.2.1. Шипачев В.С. Математика: учебник и практикум для СПО / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 447 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/3E8EBA19-DC34-4025-B856-A20AC595B921/matematika#page/1

2.2.2. Дорофеева А.*В.* Математика: учебник для СПО / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 400 с. URL: https://biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F/matematika#page/1

3 Краткое содержание вопросов (тезисно изложить основное содержание рассматриваемых вопросов).

3.1. Общие методы решения уравнений.

1. Замена уравнения h(f(x)) = h(g(x)) уравнением f(x) = g(x)

Этот метод мы применяли:

- при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (a > 0, a ≠ 1) к уравнению f(x) = g(x);

- при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (a > 0, a ≠ 1) к уравнению f(x) = g(x);

- при решении иррациональных уравнений, когда переходили от уравнения к уравнению f(x) = g(x).

Этот метод можно применять только в том случае, когда y = h(x) — монотонная функция, которая каждое свое значение принимает по одному разу.

Если y = h(x) — немонотонная функция, то указанный метод применять нельзя, поскольку возможна потеря корней.

2. Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в следующем: уравнение f(x)g(x)h(x) = 0 можно заменить совокупностью уравнений:

$$f(x) = 0;\ g(x) = 0;\ h(x) = 0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

3. Метод введения новой переменной

Этим методом мы с вами часто пользовались при решении уравнений. Суть метода проста: если уравнение f(x) = 0 удалось преобразовать к виду p(g(x)) = 0, то нужно ввести новую переменную u = g(x), решить уравнение p(u) = 0, а затем решить совокупность уравнений:

$$g(x) = u_1;\quad g(x) = u_2;\ \ldots;\quad g(x) = u_n,$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения p(u) = 0.

4. Функционально-графический метод

Идея графического метода решения уравнения f(x) = g(x) проста и понятна: нужно построить графики функций y = f(x) и y = g(x), а затем найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций (потому-то мы говорим не о графическом, а о функционально-графическом методе решения уравнений). Если, например, одна из функций y = f(x), y = g(x) возрастает, а другая — убывает, то уравнение f(x) = g(x) либо не имеет корней, либо имеет один корень (который иногда можно угадать). Этим приемом мы уже пользовались при решении иррациональных, показательных и логарифмических уравнений.

Упомянем еще одну довольно красивую разновидность функционально-графического метода: если на промежутке X наибольшее значение одной из функций y = f(x), y = g(x) равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение f(x) = g(x) на промежутке X равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

3.2. Решение неравенств с одной переменной.

Напомним, что решением неравенства f(x) > g(x) называют всякое значение переменной x, которое обращает заданное неравенство с переменной в верное числовое неравенство. Иногда используют термин частное решение. Множество всех частных решений неравенства называют общим решением, но чаще употребляют термин решение. Таким образом, термин решение используют в трех смыслах: как общее решение, как частное решение и как процесс, но обычно по смыслу бывает ясно, о чем идет речь.

Определение 1. Два неравенства с одной переменной f(x) > g(x) и p(x) > h(x) называют равносильными, если их решения (т. е. множества частных решений) совпадают.

Вы, конечно, понимаете, что использование в определении знака > непринципиально. Можно и в этом определении, и во всех утверждениях, имеющихся в данном параграфе, использовать любой другой знак неравенства как строгого, так и нестрогого.

Определение 2. Если решение неравенства

f(x) > g(x) (1)

содержится в решении неравенства

p(x) > h(x) (2),

то неравенство (2) называют следствием неравенства (1).

Теорема 1. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно:

а) неравенству того же смысла f(x) > g(x), если a > 1;

б) неравенству противоположного смысла f(x) < g(x), если 0 < a < 1.

Теорема 4. а) Если обе части неравенства f(x) > g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), положительное при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства f(x) > g(x), оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство f(x)h(x) > g(x)h(x), равносильное данному.

б) Если обе части неравенства f(x) > g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), отрицательное при всех x из области определения неравенства f(x) > g(x), изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство f(x)h(x) < g(x)h(x), равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части неравенства f(x) > g(x) неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же четную степень n получится неравенство того же смысла $f(x)^n > g(x)^n$, равносильное данному.

Теорема 6. Если f(x) > 0 и g(x) > 0, то логарифмическое неравенств $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно:

а) неравенству того же смысла f(x) > g(x), если a > 1;

б) неравенству противоположного смысла f(x) < g(x), если 0 < a < 1.

3.3. Системы уравнений.

Определение 1. Если поставлена задача — найти такие пары значений (x; y), которые одновременно удовлетворяют уравнению p(x; y) = 0 и уравнению q(x; y) = 0, то говорят, что данные уравнения образуют систему уравнений

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений (x; y), которая одновременно является решением и первого и второго уравнений системы, называют решением системы уравнений. Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Можно говорить и о системе из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} p(x; y; z) = 0, \\ q(x; y; z) = 0, \\ r(x; y; z) = 0. \end{cases}$$

В этом случае речь идет об отыскании троек чисел (x; y; z), удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы. Вообще можно говорить о системе, содержащей любое число уравнений с любым числом переменных.

Вы знаете, что основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному. Если же осуществляется переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка найденных корней, поскольку среди них могут оказаться посторонние для заданного уравнения. Так же обстоит дело и при решении систем уравнений.

Определение 2. Две системы уравнений называют равносильными, если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

Метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, которые вы изучили ранее, абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе. Если же в процессе решения системы мы применяли неравносильные преобразования (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы, или преобразования, которые привели к расширению области определения какого-либо уравнения системы), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет среднего профессионального образования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ

СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ПД.01 МАТЕМАТИКА (ВКЛЮЧАЯ АЛГЕБРУ И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЮ)

Специальность 21.02.05 Земельно-имущественные отношения

Форма обучения очная

Оренбург 2021 г.

Тема 1.1. Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых в пространстве.
Семинарские занятия

1. Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий.
2. Решение задач с применением определений параллельных и скрещивающихся прямых.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применении аксиом стереометрии к решению задач, определениях параллельных и скрещивающихся прямых в пространстве. Также необходимо знать аксиомы планиметрии.

Примеры:

Задача 1. Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Объясните ответ.

Решение. Пусть A, B, C — три точки, лежащие на прямой α. Возьмем точку D, не лежащую на прямой α (аксиома I). Через точки A, B, D можно провести плоскость. Эта плоскость содержит две точки прямой α — точки A и B, а значит, содержит и точку C этой прямой.

Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость.

Задача (7). Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

Решение. Пусть a — данная прямая (рис. 1). По аксиоме I существует точка A, не лежащая на прямой a. По теореме 1.1 через прямую a и точку A можно провести плоскость, обозначим ее α_1. По аксиоме C_1 существует точка B, не лежащая в плоскости. Проведем через прямую a и точку B плоскость. Плоскости α_1 и α_2 различны, так как точка B плоскости α_2 не лежит на плоскости α_1.

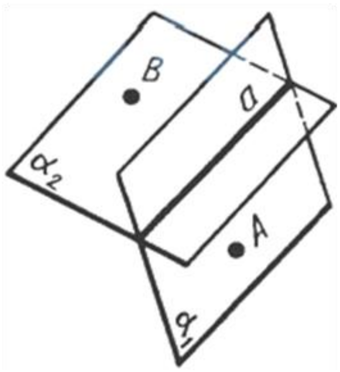


Рис. 1

Задача (9). Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

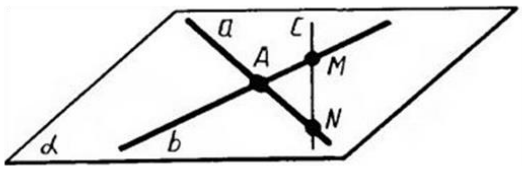


Рис. 2

Решение. Проведем через данные прямые a и b плоскость α (рис. 2). Это можно сделать по аксиоме C_3. Прямая c, пересекающая данные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки M и N (точки пересечения с данными прямыми). По теореме 1.2 эта прямая должна лежать в плоскости α.

Задача (3). Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

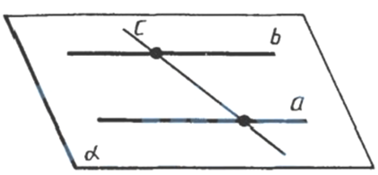


Рис. 3

Решение. Так как данные прямые a и b параллельны, то через них можно провести плоскость (рис. 3). Обозначим ее α. Прямая c, пересекающая данные параллельные прямые, имеет с плоскостью a две общие точки — точки пересечения с данными прямыми. По теореме 1.2 эта прямая лежит в плоскости α. Итак, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости — плоскости α.

Тема 1.2. Параллельность прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.

Семинарские занятия:
1. Решение задач на применение признака параллельности прямой и плоскости.
2. Решение задач на применение признака параллельности плоскостей и свойств параллельных прямых.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применение признаков параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей.

Примеры:

Задача (11). Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

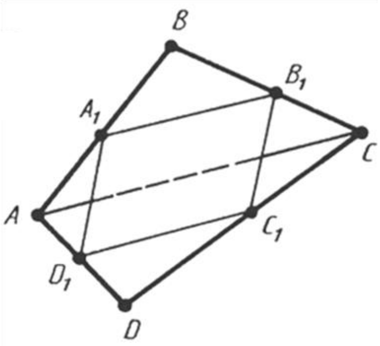


Рис. 4

Решение. Пусть ABCD — данный пространственный четырехугольник (рис. 4). Пусть A_1, B_1, C_1, D_1,— середины его сторон. Тогда A_1B_1 - средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, C_1D_1—средняя линия треугольника ACD, тоже параллельная стороне AC. По теореме 2.2 прямые A_1B_1 и C_1D_1, параллельны, а значит, лежат в одной плоскости. Точно так же доказывается параллельность прямых A_1D_1 и B_1C_1. Итак, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ лежит в одной плоскости и его противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм.

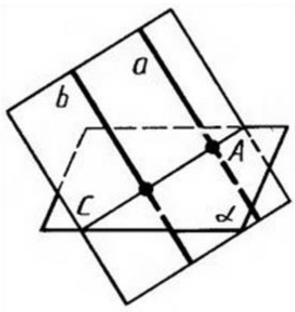


Рис. 5

Задача (15). Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Решение. Пусть a и b — две параллельные прямые и α — плоскость, пересекающая прямую a в точке A (рис. 5). Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Прямая c пересекает прямую a (в точке A), а значит, пересекает параллельную ей прямую b. Так как прямая c лежит в плоскости α, то плоскость α пересекает прямую b.

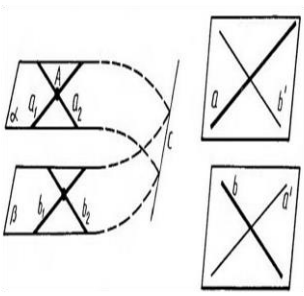


Рис. 6

Задача (19). Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

Решение. Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 6). Через произвольную точку прямой a проведем прямую b', параллельную b, а через произвольную точку прямой b проведем прямую a', параллельную a. Теперь проведем две плоскости: одну через прямые a и b', а другую через прямые b и a'. По теореме 2.4 эти плоскости параллельны. В первой из них лежит прямая a а во второй – прямая b.

Тема 1.3. Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве.
Семинарские занятия:
1. Решение задач на применение определения перпендикулярных прямых.
2. Решение задач на применение признака перпендикулярности прямой и плоскости.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо определениях перпендикулярных прямых, прямой и плоскости, плоскостей.

Примеры:

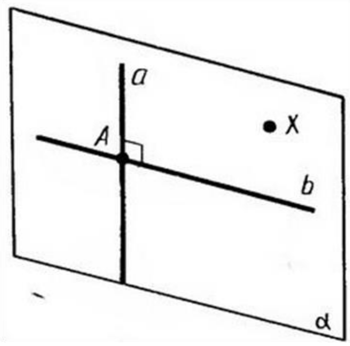


Рис. 7

Задача (1). Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Решение. Пусть a — прямая и A — точка на ней (рис. 7). Возьмем любую точку X вне прямой a и проведем через эту точку и прямую a плоскость a (теорема 1.1). В плоскости a через точку A можно провести прямую b, перпендикулярную прямой a.

Задача (9). Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

Решение. Пусть a — данная прямая и A — точка на ней (рис. 8). Проведем через нее две плоскости и проведем в них через точку A прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Плоскость α, проходящая через эти прямые, перпендикулярна прямой a по теореме 3.2.

Докажем, что эта плоскость единственна. Допустим, что, кроме плоскости α, существует другая плоскость α', проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a (рис. 9). Пусть B — точка плоскости α', не лежащая в плоскости α. Проведем через точку B и прямую a плоскость. Она пересечет плоскости α и α' по различным прямым b и b', перпендикулярным прямой a. А это, как мы знаем, невозможно, так как на плоскости через данную точку прямой проходит только одна перпендикулярная ей прямая. Итак, плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a, единственна.

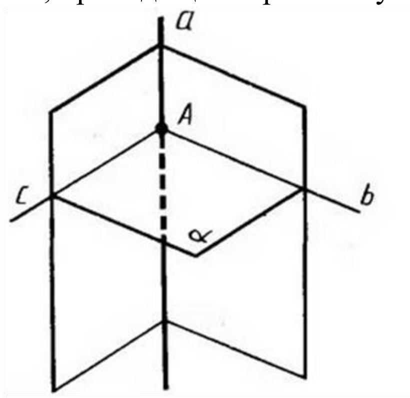


Рис. 8

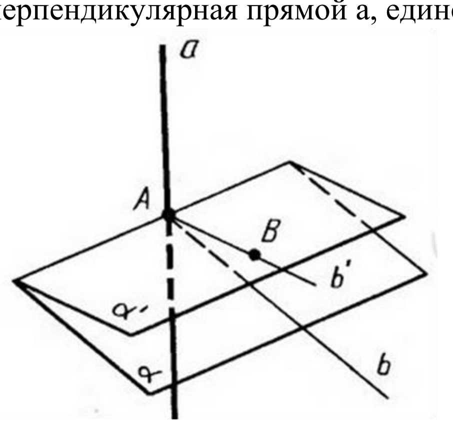


Рис. 9

Задача (11). Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

Решение. Пусть α — данная плоскость и A — точка на ней (рис. 10). Проведем в плоскости α через точку A две прямые b и c. Проведем через точку A перпендикулярные им плоскости. Они пересекутся по некоторой прямой a, перпендикулярной прямым b. и c. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α.

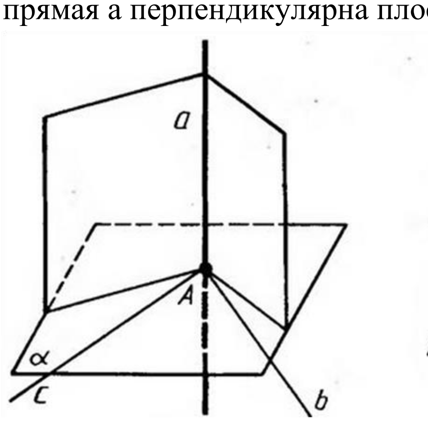


Рис. 10

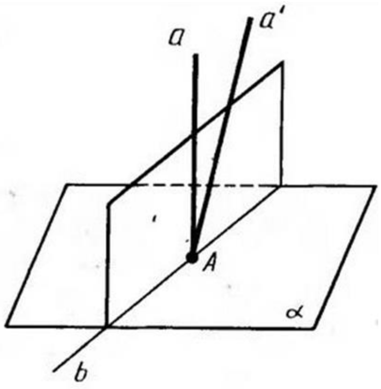


Рис. 11

Докажем, что эта прямая единственна. Допустим, что, кроме прямой a, существует другая прямая a', проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α (рис. 11). Проведем через прямые a и a' плоскость. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой b, перпендикулярной прямым a и a'. А это, как мы знаем, невозможно. Итак, прямая, проходящая через данную точку плоскости и перпендикулярная этой плоскости, единственна.

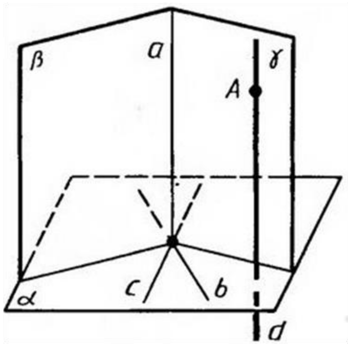


Рис. 12

Задача (12). Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

Решение. Проведем в плоскости a две пересекающиеся прямые b и c (рис. 12). Через точку их пересечения проведем плоскости β и γ, перпендикулярные прямым b и c соответственно. Они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a перпендикулярна прямым b и c, значит, и плоскости α. Проведем теперь через точку A прямую d, параллельную a. По теореме 3.3 она перпендикулярна плоскости α.

Тема 1.4. Перпендикуляр и наклонная.
Семинарские занятия:
1. Решение задач на применение определений перпендикуляра и наклонной и применение теоремы о трех перпендикулярах.
2. Решение задач на применение определения перпендикулярных плоскостей.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определении перпендикуляра и наклонной, применении теоремы о трех перпендикулярах.

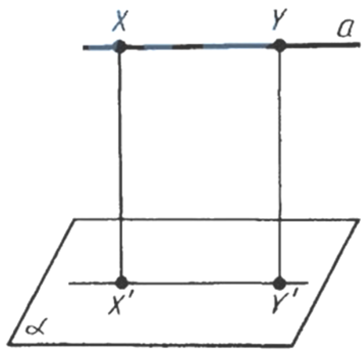


Рис. 13

Задача (26). Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.
Решение. Пусть a — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 13). Возьмем на прямой a две произвольные точки X и У. Их расстояния до плоскости α — это длины перпендикуляров XX' и УУ', опущенных на эту плоскость. По теореме 3.4 прямые XX' и УУ' параллельны, следовательно, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой X'Y'. Прямая a параллельна прямой X'Y', так как не пересекает содержащую ее плоскость α. Итак, у четырехугольника XX'Y'Y противолежащие стороны параллельны. Следовательно, Он параллелограмм, а значит, XX' = YY'.

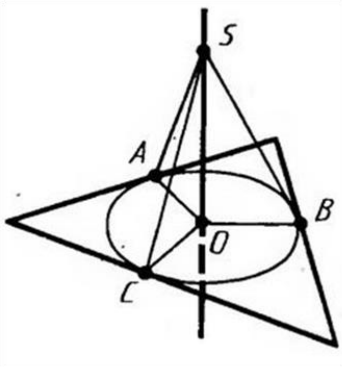


Рис. 14

Задача (45). Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.
Решение. Пусть A, B, C — точки касания сторон треугольника с окружностью, O — центр окружности и S — точка на перпендикуляре (рис. 14). Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах отрезок SA есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина — расстояние от точки S до стороны

треугольника. По теореме Пифагора

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

где г — радиус вписанной окружности. Аналогично находим $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$, $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$, т. е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны.

Задача (54). Даны прямая а и плоскость α. Проведите через прямую а плоскость, перпендикулярную плоскости α.
Решение. Через произвольную точку прямой а проводим прямую b (рис. 15), перпендикулярную плоскости α (задача 12). Через прямые а и b проводим плоскость β. Плоскость β перпендикулярна плоскости α по теореме 3.6.

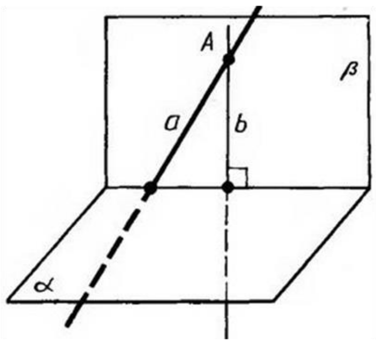


Рис. 15

Тема 2.1. Декартовы координаты в пространстве. Преобразование в пространстве.
Семинарские занятия:
1. Решение задач на применение формул расстояния между точками и формул координат середины отрезка.
2. Решение задач на применение основных преобразований в пространстве.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определении расстояния между точками и применении формул к решению задач, определении движения в пространстве, симметрии относительно плоскости, параллельного переноса, а также на нахождении координат образа точки при параллельном переносе.

Примеры:

Задача (5). В плоскости ху найти точку D (х; у; 0), равноудаленную от трех точек: А (0; 1; - 1), В (- 1; 0; 1), С (0; -1; 0).

Решение. Имеем:

$$AD^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2 + (0+1)^2,$$
$$BD^2 = (x+1)^2 + (y-0)^2 + (0-1)^2,$$
$$CD^2 = (x-0)^2 + (y+1)^2 + (0-0)^2.$$

Приравнивая первые два расстояния третьему, получим два уравнения для определения х и у:

$$-4y + 1 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Отсюда $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Искомая точка $D\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$.

Задача (9). Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках А (1; 3; 2), В(0; 2; 4), С (1; 1; 4), D (2; 2; 2) является параллелограммом.

Решение. Как мы знаем, четырехугольник, у которого диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, есть параллелограмм. Воспользуемся этим для решения задачи. Координатами середины отрезка АС будут

Мы видим, что координаты середин отрезков АС и BD одинаковы. Значит, эти отрезки пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник ABCD — параллелограмм.

Задача (17). Даны точки (1; 2; 3), (0; -1; 2), (1; 0;-3). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

Решение. Точка, симметричная точке (1; 2; 3) относительно плоскости ху, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости ху. Поэтому у нее те же координаты х и у: х = 1, у = 2. Симметричная точка находится на том же расстоянии от плоскости ху, но по другую сторону от нее. Поэтому координата z у нее отличается только знаком, т. е. z = -3. Итак, точкой, симметричной точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, будет (1; 2; -3). Для других точек и других координатных плоскостей решение аналогично.

Задача (23). Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A (1; 0; 2) переходит в точку A'(2; 1; 0).

Решение. Подставляя в формулы параллельного переноса координаты точек A и A', т. е. $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $x' = 2$, $y' = 1$, $z'= 0$, получим уравнения, из которых определяются a, b, c:

$$2 = 1 + a,\ 1 = 0 + b,\ 0 = 2 + c.$$

Отсюда $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.

Тема 2.2. Угол между прямой и плоскостью.
Семинарские занятия:

1. Решение задач на применение понятий угла между скрещивающими прямыми и угла между прямой и плоскостью.
2. Решение задач на применение понятия угла между плоскостями.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определении скрещивающихся прямых, применении формул угла между прямыми и прямой и плоскостью к решению задач.

Примеры:

Задача (33). Докажите, что любая прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Решение. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и c — прямая в плоскости α, перпендикулярная BC (рис. 16). Проведем через основание C наклонной прямую c_1, параллельную c.

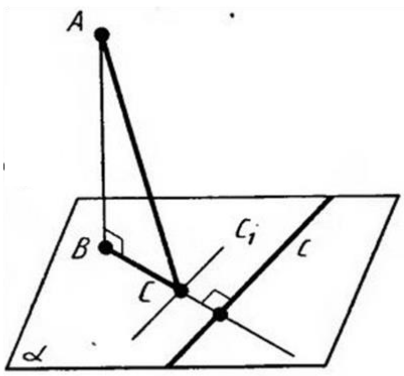


Рис. 16

По теореме о трех перпендикулярах c_1 перпендикулярна наклонной AC. А так как угол между прямой c и наклонной AC равен углу между прямыми AC и c_1, то прямая c тоже перпендикулярна наклонной AC.

Обратно: если прямая c перпендикулярна наклонной AC, то прямая c_1 тоже перпендикулярна ей, а значит, по теореме о трех перпендикулярах и ее проекции BC. Так как $c \parallel c_1$, то $c \perp BC$.

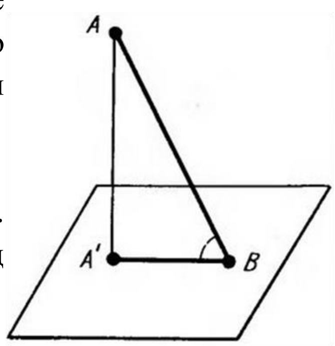


Рис. 17

Задача (35). Точка A отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

Решение. Опустим перпендикуляр AA' на плоскость (рис. 17). Треугольник AA'B прямоугольный с прямым углом при вершине A'. Острый угол этого треугольника, противолежащий катету AA', равен 30° (соответственно 45°, 60°). Поэтому в первом случае наклонная

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = 2h.$$

Во втором случае $AB = h\sqrt{2}$., в третьем $\mathrm{AB} = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

Задача (43). Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

Решение. Пусть α и β — данные плоскости и A — точка, лежащая в плоскости α (рис. 18). Опустим перпендикуляр AA' на плоскость β и перпендикуляр AB на прямую c, по которой пересекаются плоскости. По теореме о трех перпендикулярах A'B⊥c. Плоскость треугольника ABA' перпендикулярна прямой c и потому угол при вершине B прямоугольного треугольника ABA' равен 30°. Имеем:

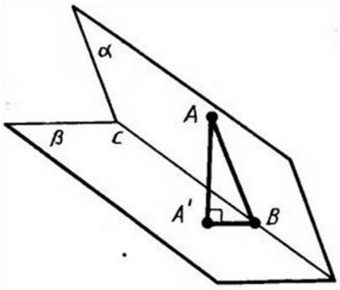


Рис.18

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

Расстояние от точки A до прямой c равно 2a.

Тема 2.3. Векторы в пространстве.
Семинарские занятия:
1. Решение задач с выполнением алгебраических операций над векторами.
2. Решение задач на применение определения компланарных векторов.
3. Делова игра на тему «Векторы».

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на формулах нахождения координат вектора, вычислении скалярного произведения векторов двумя способами, определении компланарности векторов.

Примеры:

Задача (50). Даны четыре точки A (2; 7; -3), B(1; 0; 3), C(-3; -4; 5), D(-2; 3; -1). Укажите среди векторов $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{DC}$, $\vec{AD}$, $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ равные векторы.

Решение. Надо найти координаты указанных векторов $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, ... и сравнить соответствующие координаты. У равных векторов соответствующие координаты равны. Например, у вектора $\vec{AB}$ координаты: 1 - 2 = -1, 0 - 7 = -7, 3 - (- 3) = 6. У вектора $\vec{DC}$ такие же координаты: -3-(-2)= -1, -.4-3 = -7, 5 - (-1) = 6. Таким образом, векторы $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$ равны. Другой парой равных векторов будут $\vec{BC}$ и $\vec{AD}$.

Задача (54). Дан вектор $\vec{a}$ (1; 2; 3). Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке A (1; 1; 1) и концом B на плоскости xy.

Решение. Координата z точки B равна нулю. Координаты вектора $\vec{AB}$: x - 1, y - 1, 0-1 = -1. Из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{AB}$ получаем пропорцию

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=-\frac{1}{3}.$$

Отсюда находим координаты x, y точки B:

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}.$$

Задача (59). Даны четыре точки A (0; 1; -1), B(1; -1; 2), C (3; 1; 0), D (2; -3; 1). Найдите косинус угла φ между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$.

Решение. Координатами вектора $\vec{AB}$ будут

$$1-0=1,\ -1-1=-2,\ 2-(-1)=3;$$
$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

Координатами вектора CD будут

$$2-3=-1,\ -3-1=-4,\ 1-0=1;$$
$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Значит,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\frac{1(-1)+(-2)(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

Деловая игра на тему «Векторы»

Цель занятия: обобщить знания, полученные на предыдущих занятиях, по теме «Векторы в пространстве».

Задачи занятия:

1. ***образовательные:***
   - систематизировать знания по теме «Векторы в пространстве»;
   - закрепить понятие «вектор» и повторить операций над векторами;
   - рассмотреть простейшие случаи применения операций над векторами
2. ***развивающие***
   - развивать логическое мышление, умение обобщать и систематизировать знания на тему «Векторы в пространстве»;
   - развивать навыки самостоятельности, коммуникативные способности студентов;
   - развивать познавательный интерес к математике;
3. ***воспитательные:***
   - воспитывать чувство ответственности коллективизма при работе в группах.

Тип занятия: обобщение ранее изученного материала.

Форма занятия: семинарское занятие с элементами игры.

Методы преподавания: практический – выполнение заданий в ходе игры и решение задач, наглядный – использование компьютерной презентации, раздаточного материала.

Оборудование: мультимедийный проектор, ПК, презентация Microsoft Power Point, плакаты ученых-математиков, раздаточный материал.

В ходе данного занятия студент должен:

Уметь: применять полученные знания при решении различных задач.

Знать: основы логического, алгоритмического и математического мышления.

Технологическая карта занятия

Этапы занятия	Действия участников занятия	
	Преподаватель	**Студенты**
1. Подготовительный этап	1. отбирает материалы к занятию 2. составляет структуру занятия 3. подбирает Семинарские задания	1. готовятся, повторяют изученный материал
2. Организационный этап	1. приветствует студентов 2. отмечает отсутствующих 3. проверяет готовность студентов к занятию 4. настраивает студентов на работу	1. приветствуют преподавателя, слушают
3. Этап актуализации знаний	1. называет тему занятия 2. ставит цели и задачи 3. объясняет план занятия	1. слушают
4. Основной этап	1. дает вступительное слово 2. обращает внимание студентов на эпиграф, портреты 3. организует работу по повторению и обобщению пройденного материала в виде игры «Морской бой» 4. организует работу по решению практических задач индивидуально по карточкам и вместе у доски	1. слушают 2. отвечают 3. слушают, решают, отвечают 4. оформляют задания в тетрадях и на доске
5. Заключительный этап, рефлексия	1. подводит студентов к выводу, спрашивает их мнение о занятии 2. выставляет и комментирует оценки	1. высказывают свое мнение, делают вывод 2. слушают
6. Домашнее задание	1. задает	1. слушают, записывают

Тема 3.1. Многогранные углы. Многогранник. Призма.
Семинарские занятия:
1. Решение задач на применение определений многогранного угла и многогранника.
2. Решение задач на построение сечений призмы.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на понятиях двугранного, трехгранного и многогранного углов и их изображении, определениях призмы, параллелепипеда, прямоугольного параллелепипеда, правилах построения данных многогранников, на правилах построения сечений со следом и без него.

Примеры:

Задача (1). Из точек A и B, лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α (рис. 19).

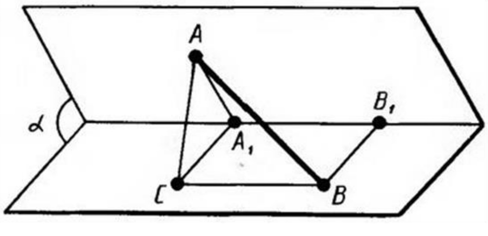


Рис.19

Решение. Проведем прямые $A_1C \| BB_1$ и $BC \| A_1B_1$. Четырехугольник A_1B_1BC — параллелограмм, значит $A_1C = BB_1 = b$. Прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости треугольника AA_1C, так как она перпендикулярна двум прямым в этой плоскости AA_1 и CA_1. Следовательно, параллельная ей прямая BC тоже перпендикулярна этой плоскости. Значит, треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом C. По теореме косинусов

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}\,.$$

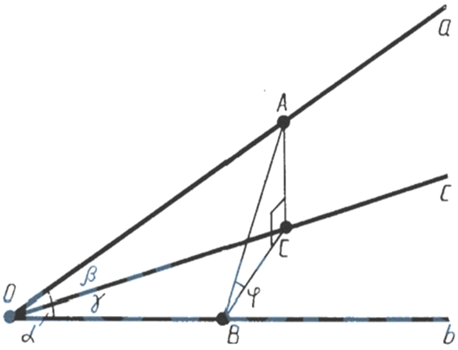


Рис. 20

Задача (2). У трехгранного угла (abc) двугранный угол при ребре с прямой, двугранный угол при ребре b равен φ, а плоский угол (bc) равен $\left(\varphi, \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла: α = ∠ (ab), β = ∠ (ac).

Решение. Опустим из произвольной точки A ребра a перпендикуляр AB на ребро b и перпендикуляр AC на ребро c (рис. 20). По теореме о трех перпендикулярах CB — перпендикуляр к ребру b.

Из прямоугольных треугольников OAB, OCB, AOC и ABC получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = AB : OB = \frac{BC}{\cos\varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi}\,,$$

$$\operatorname{tg}\beta = AC : OC = BC\operatorname{tg}\varphi : \frac{BC}{\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma\,.$$

Задача (22). В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.

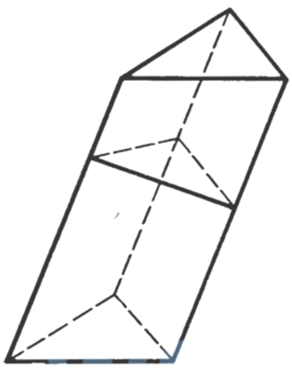


Рис. 21

Решение. Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 21). Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а боковые ребра равны l. Эта призма имеет ту же боковую поверхность, что и исходная. Таким образом, боковая поверхность исходной призмы равна pl.

Задача (6). Сколько диагоналей имеет n – угольная призма?

Решение: Так как диагональ призмы – это отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, то из одной вершины можно провести n – 3различные диагонали. Но вершин в основании n, так что общее количество диагоналей будет n(n-3).

Задача (15). Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, угол между которыми a. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы (рис. 22). В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом a. Сторона основания равна a. Найдите площадь полученного сечения.

Решение:

Пусть AOC — данная плоскость. Проведем $BH \perp AC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OH \perp AC$. Значит, $\angle OHB$ — искомый.

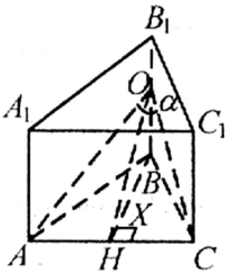


Рис. 21

Далее, в равностороннем ΔABC высота $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Далее, $\angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{\alpha}{2}$.

Так что в ΔAOH: $OH = \frac{AH}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Далее, в ΔOBH: $\cos\angle OHB = \frac{BH}{OH} = \frac{a\sqrt{3}\cdot 2\text{tg}\frac{a}{2}}{2a} = \sqrt{3}\cdot\text{tg}\frac{a}{2}$.

Так что $\angle OHB = \arccos\left(\sqrt{3}\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\sqrt{3}\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Задача (26). У параллелепипеда три грани имеют площади 1 м^2, 2 м^2 и 3 м^2. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?

Решение: У параллелепипеда противоположные грани равны, а значит, имеют равные площади. Так что данный параллелепипед имеет две грани с площадью 1 м^2, две грани с площадью по 2 м^2, и две грани с площадью по 3 м^2. Так что площадь плной поверхности S = 2(1 + 2 + 3) = 12 (м^2).

Тема 3.2. Пирамида.

Семинарские занятия:

1. Решение задач на применение определения пирамиды.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определении пирамиды, правилах построения пирамиды, на правилах построения сечений со следом и без него.

Примеры:

Задача (42). Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.

Решение:

42. Так как $SA = SB = SC = SD$, то прямоугольные треугольники ASO, BSO, CSO и DSO равны по гипотенузе и общему катету SO.

Тогда $AO = BO = CO = DO$, а значит, точка O является точкой пересечения AC и BD.

В ΔABD: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

Тогда $OD = \frac{1}{2}BD = 5$ (см). Далее,

в ΔSOD по теореме Пифагора:

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

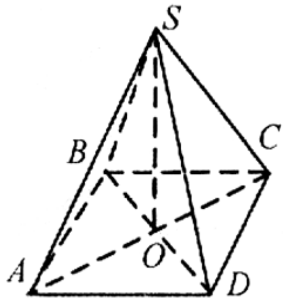


Рис. 22

Задача (54). Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см^2. Найдите площади сечений.

Решение. Сечения подобны основанию пирамиды с коэффициентами подобия $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Площади подобных фигур относятся как квадраты линейных размеров. Поэтому отношения площадей сечений к площади основания пирамиды есть $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{2}{4}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Следовательно, площади сечений равны

$$400 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 25 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$400 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 100 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$400 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 225 \text{ (см}^2\text{)}.$$

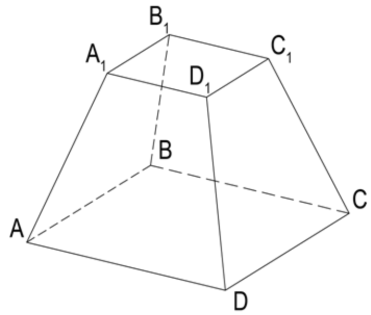


Рис. 23

Задача (69). Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Решение. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции с одним и тем же верхним основанием a, нижним b и высотой (апофемой) l (рис. 23). Поэтому площадь одной грани равна $\frac{1}{2}$(a + b)1. Площадь всех граней, т. е. боковая поверхность, равна $\frac{1}{2}$ (an + bn)l, где n — число вершин основания пирамиды, an и bn — периметры оснований пирамиды.

Тема 3.3. Правильные многогранники. Тела вращения.
Семинарские занятия:
1. Решение задач на тему «Тела вращения».

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определениях цилиндра, конуса, шара, правилах построения данных тел вращения, на правилах построения усеченного конуса, шарового сектора и шарового сегмента.

Примеры:

Задача (2). Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Решение. Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна

$$\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}.$$

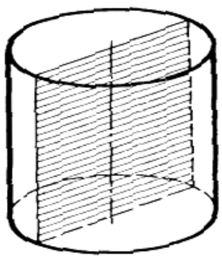


Рис. 24

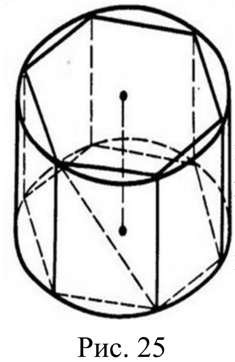


Рис. 25

Задача (7). В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Решение. Боковые грани призмы — квадраты, так как сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу (рис. 25). Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол между диагональю грани и осью цилиндра равен углу между диагональю и боковым ребром. А этот угол равен 45°, так как грани — квадраты.

Задача (15). Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Решение. (рис. 26) Сечение конуса получается из основания конуса преобразованием гомотетии относительно вершины конуса с коэффициентом гомотетии $k = \frac{d}{H}$. Поэтому радиус круга в сечении $r = R\frac{d}{H}$. Следовательно, площадь сечения

$$S = \pi R^2 \frac{d^2}{H^2}.$$

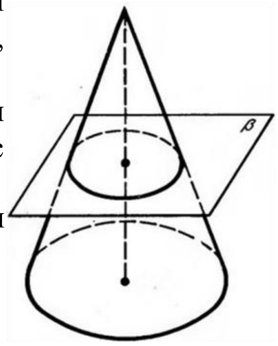


Рис. 26

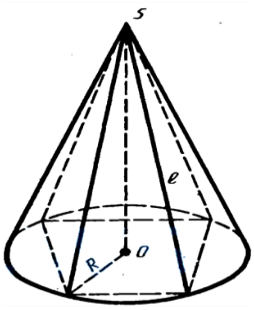


Рис. 27

Задача (25). У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она является вписанной в некоторый конус.

Решение. Опустим перпендикуляр SO из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 27) и обозначим длину боковых ребер пирамиды через l. Вершины основания удалены от точки О на одно и то же расстояние $R = \sqrt{l^2 - OS^2}$. Отсюда следует, что наша пирамида вписана в конус, у которого вершиной является вершина пирамиды, а основанием — круг с центром О и радиусом R.

Задача (30). Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Решение. Если радиус шара R (рис. 28), то радиус круга в сечении будет $\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Отношение площади этого круга к площади большого круга равно $\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 : \pi R^2 = \frac{3}{4}.$

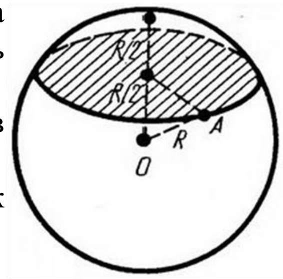


Рис. 28

Тема 4.1. Объемы многогранников
Семинарские занятия:
1. Решение задач на тему «Объемы многогранников».

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применении формул для вычисления объема к решению задач.

<u>Примеры:</u>

Задача (3). Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Чему равно ребро куба?

Решение. Обозначим ребро куба через x, тогда $(x + 2)^3 - x^3 = 98$, т. е. $x^2 + 2x - 15 = 0$. Уравнение имеет два корня: x = 3, x = - 5. Геометрический смысл имеет только положительный корень. Итак, ребро куба равно 3 см.

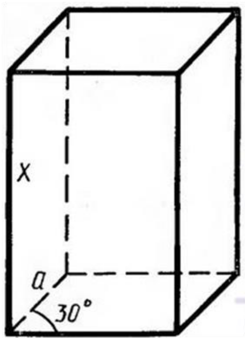


Рис. 29

Задача (11). В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.

Решение. Обозначим высоту через x (рис. 29). Тогда

$$(2a + 2b)x = S.$$

Отсюда $x = \frac{S}{2(a+b)}$.

Площадь основания параллелепипеда равна $ab\sin 30^\circ = \frac{ab}{2}$. Объем равен $\frac{abS}{4(a+b)}$.

Задача (44). Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.

Решение. Дополним данную усеченную пирамиду до полной (рис. 30). Пусть x — ее высота. Объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух полных пирамид: одной с площадью основания Q_1 и высотой x, другой с площадью основания Q_2 и высотой x — h.

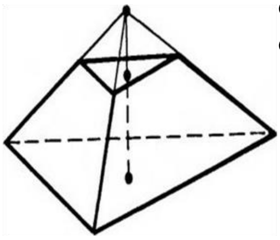


Рис. 30

Из подобия этих пирамид находим x:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}.$$

Объем усеченной пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} - h\right)\right] = \frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3}h\left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right).$$

Задача (48). Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

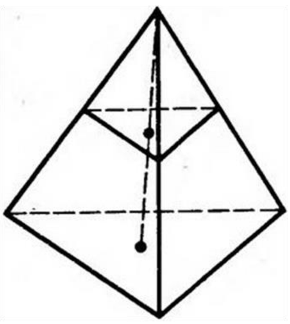


Рис. 31

Решение. Как мы знаем, проведенная плоскость отсекает подобную пирамиду (рис. 31). Коэффициент подобия равен отношению высот, т. е. $\frac{1}{2}$.

Поэтому объемы пирамид относятся как $\left(\frac{1}{2}\right)^3$:1. Следовательно, плоскость делит нашу пирамиду на части, объемы которых относятся как

$$\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7.$$

Тема 4.2. Объемы тел вращений.

Семинарские занятия:

1. Решение задач на тему «Объемы тел вращений».

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применении формул для вычисления объема к решению задач.

Примеры:

Задача (15).

Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.

Решение.

Дополним данный усеченный конус до полного (рис. 32). Пусть x — его высота. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух полных конусов: одного с радиусом основания R_1 и высотой x, другого с радиусом основания R_2 и высотой $x - h$.

Из подобия конусов находим x:

$$\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2},\ x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}.$$

Объем усеченного конуса равен:

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R_1^2 \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h\,(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2).$$

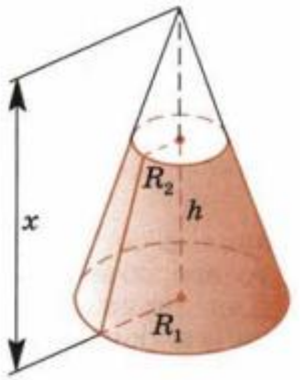


Рис. 32

Тема 5.1. Статистическая обработка данных.
Семинарские занятия:

1. Решение задач на статистическую обработку данных.
2. Решение задач на вычисление дисперсии.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на понимании различия относительной частоты и частоты, построении геометрического изображения (многоугольник распределения частот, гистограмма), вычислении углов для построения круговой диаграммы и правильном ее построении, применении формул для вычисления числовых характеристик конкретного распределения.

Примеры:

Пример 1. На уроке физкультуры 14 школьников прыгали в высоту, а учитель записывал их результаты. Получился такой ряд данных (в сантиметрах):

125, 110, 130, 125, 120, 130, 140, 125,
110, 130, 120, 125, 120, 125.

Требуется сгруппировать данные, составить таблицу их распределения, найти размах, моду и медиану измерения.

Решение. Выпишем все варианты измерения в порядке возрастания (точнее, неубывания), разделяя пробелами группы одинаковых результатов:

110,110, 120,120,120, 125,125,125,125,125, 130,130,130, 140.

Это сгруппированный ряд данных. Размах измерения равен 140 - 110 = 30. Варианта 140 встретилась однажды, кратность равна 1. Варианта 110 встретилась дважды, кратность равна 2. Варианта 125 встретилась наибольшее число раз, ее кратность равна 5; это мода измерения. Составляем таблицу распределения:

	Варианта					Сумма
	110	120	125	130	140	
Кратность	2	3	5	3	1	14

Если двигаясь по сгруппированному ряду слева направо отсчитать половину (7) результатов, то мы остановимся на результате 125 см. Следующая половина результатов начинается также со 125. Значит, 125 — медиана измерения.

Подчеркнем, что в процессе упорядочивания, группировки данных и составления таблиц распределения с самими данными ничего не происходит: они остаются неизменными. Изменяется только способ их представления. По существу меняется только дизайн информации, способ ее оформления.

Пример 2. В таблице распределения данных часть информации была утеряна. Восстановить ее, если известно, что объем измерения равен 20, размах равен 6, а мода равна 2.

	Варианта					Сумма
		–1	0		3	
Кратность	5	1		7	3	

Решение. По определению, в графе «Сумма» должен стоять объем измерения, т. е. 20. Этот объем равен сумме всех кратностей. Значит, кратность варианты «0» равна 20 - (5 + 1 + 7 + 3) = 4. Самая большая кратность равна 7. Значит, над ней и расположена мода измерения, равная 2. Так как размах равен 6, а наибольшая варианта равна 3, то наименьшая варианта равна 3 - 6 = -3. Эту варианту помещаем в последнюю свободную графу над кратностью 5. Итак, все пустые места в таблице заполнены.

Ответ (в виде итоговой таблицы):

	Варианта					Сумма
	–3	–1	0	2	3	
Кратность	**5**	**1**	**4**	**7**	**3**	**20**

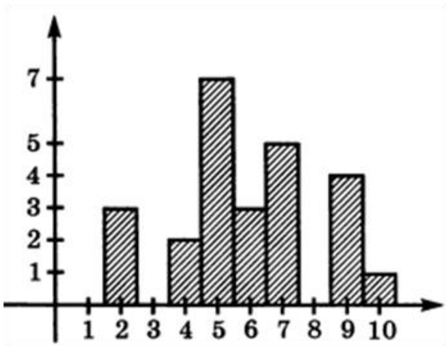


Рис. 33

Пример 3. По приведенной гистограмме распределения данных (рис. 33) найти: количество вариант измерения, объем, размах, моду измерения, наиболее удаленную от моды варианту и ее кратность. Составить таблицу распределения данных.

Решение. Количество вариант — это количество столбиков в гистограмме, т. е. 7. Объем измерения равен сумме кратностей всех вариант, т. е. равен сумме высот всех семи столбиков: 3 + 2 + + 7 + 34-5 + 4 + 1 = 25. Таблица распределения выглядит так:

	Варианта							Сумма
	2	4	5	6	7	9	10	
Кратность	3	2	7	3	5	4	1	25

Наибольшая варианта равна 10, а наименьшая равна 2. Значит, размах равен 8. Чаще других — 7 раз — встретилась варианта 5. Значит, мода равна 5. На наибольшем расстоянии от моды находится варианта 10, ее кратность равна 1.

Пример 5. В десятых классах трех школ микрорайона провели проверочный диктант по русскому языку. На рисунке 34 изображена гистограмма распределения полученных отметок.

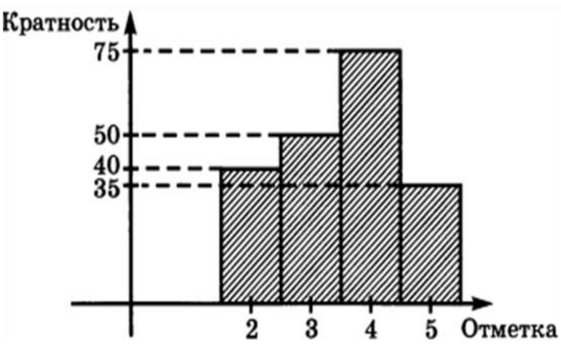


Рис. 34

а) Найти: общее количество работ, частоту пятерок, процентную частоту двоек.

б) Заполнить сводную таблицу распределения данных.

в) Построить гистограмму распределения частот (в процентах).

г) Построить круговую диаграмму распределения частот (в процентах).

Решение, а) На гистограмме указано, что двоек было 40, троек — 50, четверок — 75, пятерок — 35. Значит, всего было 200 работ. Это и есть объем измерения. Частота пятерок равна $\frac{35}{200}$ = 0,175, а частота (в процентах) двоек равна $\frac{40}{200}$ • 100% = 20%.

б) Так как все кратности известны, то можно заполнить всю таблицу распределения:

	Варианта				Сумма
	2	3	4	5	
Кратность	**40**	**50**	**75**	**35**	**200**
Частота	**0,2**	**0,25**	**0,375**	**0,175**	**1**
Частота, %	**20**	**25**	**37,5**	**17,5**	**100**

в) Для построения гистограммы распределения частот (в процентах) используем первую и четвертую строки. Получим четыре вертикальных столбика (рис. 35), основания которых соответствуют полученным отметкам, а высоты равны найденным частотам (в процентах).

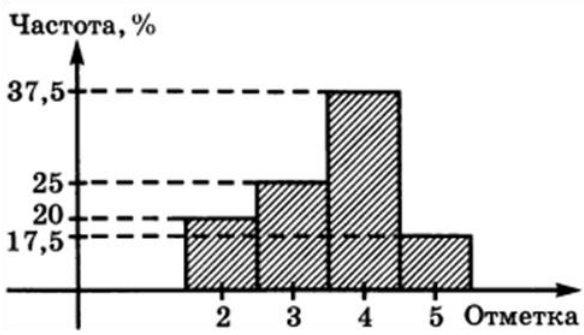


Рис. 35

Рис. 36

Подчеркнем, что гистограммы на рисунках 34 и 35 отличаются друг от друга только размерами по оси ординат, а общий характер распределения — один и тот же в обоих случаях.

г) Разделим круг на четыре сектора. Центральный угол сектора двойки составляет 20% от 360°, т. е. равен 72°. Центральный угол сектора тройки составляет 25% от 360°, это прямой угол. Центральные углы секторов четверки и пятерки равны соответственно 135° и 63° (рис. 36).

Пример 6. Найдем числовые характеристики выборки, заданной статистическим рядом:

x_i	2	5	7	8
n_i	3	8	7	2

$$\bar{x}_B = \frac{2\cdot 3+5\cdot 8+7\cdot 7+8\cdot 2}{20} = 5,55;$$

$$D_B = \frac{4\cdot 3+25\cdot 8+49\cdot 7+64\cdot 2}{20} - 5,55^2 = 3,3475; \quad \sigma_B = \sqrt{3,3475} = 1,83.$$

$$S^2 = \frac{20}{19}\cdot 3,3475$$

- мода $M_0 =$ 5

- медиана $m_0 = \frac{8+7}{2} = 7,5$

Коэффициент вариации

$V = \frac{1,83}{5,55} \cdot 100\% = 32,97\%$

Размах вариационного ряда 8 – 2 = 6.

Тема 5.2. Сочетания и размещения.
Семинарские занятия:
1. Решение задач на применение понятий сочетания и размещения.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определении важности порядка в составленных подмножествах, от этого и зависит выбор формулы.

Примеры:

Пример 1. К хозяину дома пришли гости A, B, C, D. За круглым столом — пять разных стульев.

а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?

б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место хозяина дома уже известно?

в) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя C следует посадить рядом с гостем A?

г) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя A не следует сажать рядом с гостем D?

Решение, а) На 5 стульев должны сесть 5 человек (включая хозяина дома). Значит, всего имеется P_5 способов их рассаживания: $P_5 = 5! = 120$.

б) Так как место хозяина фиксировано, то следует рассадить четырех гостей на четыре места. Это можно сделать $P_4 = 4! = 24$ способами.

в) Сначала выберем место для гостя A. Возможны 5 вариантов. Если место гостя A уже известно, то гостя C следует посадить или справа, или слева от A, всего 2 варианта. После того как места для A и C уже выбраны, нужно трех человек произвольно рассадить на 3 оставшихся места: $P_3 = 3! = 6$ вариантов. Остается применить правило умножения: $5 \bullet 2 \bullet 6 = 60$.

г) Решение такое же, как и в пункте в). Место для гостя D после выбора места для A можно также выбрать двумя способами: на два отдаленных от A стула.

Ответ: а) 120; б) 24; в) 60; г) 60.

Пример 2. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки, которые они «давненько не брали в руки». Сколько встреч было: а) между футболистами; б) между хоккеистами; в) между футболистами и хоккеистами; г) всего?

Решение:

а) $C_{11}^2 = \dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55.$

б) $C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15.$

в) Будем действовать по правилу умножения. Одно испытание — выбор футболиста, а другое испытание — выбор хоккеиста. Испытания предполагаются независимыми, и у них соответственно 11 и 6 исходов. Значит, получится $11 \bullet 6 = 66$ игр.

г) Можно сложить все предыдущие ответы: $55 + 15 + 66 = = 136$; но можно использовать и формулу для числа сочетаний:

$$C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8 = 136.$$

Пример 3. В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй — по геометрии;

б) они должны быстро стереть с доски?

Решение. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, ответы таковы:

а) $A_{27}^2 = 27 \cdot 26 = 702$; б) $C_{27}^2 = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351$.

Тема 5.3. Простейшие вероятностные задачи.
Семинарские занятия:
1. Решение задач на вычисление вероятностей.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на отличии числа исходов испытания, благоприятных для данного события к общему числу исходов.

Примеры:

Пример 1. Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет: а) пять очков; б) четное число очков; в) число очков больше четырех; г) число очков, не кратное трем.

Решение. Всего имеется N = 6 возможных исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6. Мы считаем, что ни один из них не имеет никаких преимуществ перед другими, т. е. принимаем предположение о равновозможности этих исходов.

а) Ровно при одном из исходов произойдет интересующее нас событие А — выпадение пяти очков. Значит, N(A) = 1 и

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{6}.$$

б) Интересующее нас событие В произойдет ровно в трех случаях: когда выпадет 2, 4 или 6. Значит, N(B) = 3 и

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

в) Интересующее нас событие С произойдет ровно в двух случаях, когда выпадет 5 или 6. Значит, N(C) = 2 и

$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

г) Из шести возможных выпавших чисел четыре (1, 2, 4, и 5) не кратны трем, а остальные два (3 и 6) делятся на три. Значит, интересующее нас событие наступает ровно в четырех из шести возможных и равновероятных между собой исходах опыта. Поэтому в ответе получается $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Ответ: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}$.

Тема 5.4. Случайные события и их вероятности.
Семинарские занятия:
1. Решение задач на применение комбинаторики для вычисления вероятности.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применении формул комбинаторики к вычислению вероятности.

Примеры:

Пример 1. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что среди них: а) нет пиковой дамы; б) есть пиковая дама?

Решение. У нас имеется множество из 36 элементов — игральных карт. Мы производим выбор трех элементов, порядок выбора не важен. Значит, имеется $N = C_{36}^3$ исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. предполагать, что все эти исходы равновероятны между собой.

а) Среди всех N исходов нам следует сосчитать те, в которых нет пиковой дамы (событие А). Поэтому отложим даму пик в сторону и будем выбирать три карты из оставшихся 35 карт. Получатся все интересующие нас варианты: N(A) $=C_{35}^{3}$. Осталось вычислить нужную вероятность:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{35}^{3}}{C_{36}^{3}} = \frac{35!}{3!\cdot 32!}\cdot\frac{3!\cdot 33!}{36!} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

При вычислениях мы учли, что 33! = 1 • 2 • 3 • ... • 32 • 33 = 32! • 33, а 36! = 1• 2 • 3• ... • 35• 36 = 35! • 36.

б) Вычислим вероятность противоположного события А (есть дама пик) по формуле:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{12}.$$

Ответ: а) $\frac{11}{12}$; б) $\frac{1}{12}$.

Пример 2. В урне лежит 10 белых и 11 черных шаров. Случайным образом достают пять шаров. Какова вероятность того, что:

а) среди этих пяти шаров ровно три белых;

б) среди них не менее четырех белых шаров;

в) большинство шаров — белые?

Решение. Считаем шары в урне неразличимыми на ощупь. Из 21 шара случайным образом производят выбор пяти шаров. Порядок выбора не важен. Значит, существует N(A) = C_{21}^{5}способов такого выбора.

а) Интересующее нас событие А наступает, когда три из пяти шаров — белые, а два оставшихся — черные, т. е. когда из 10 белых шаров оказались выбранными 3 шара, а из 11 черных шаров — 2 шара. Из 10 белых шаров 3 шара можно выбрать способами C_{10}^{3}, а из 11 черных шаров 2 шара можно выбрать способами C_{11}^{2}.

По правилу умножения получаем, что нужный нам состав шаров можно выбрать N(A) = $C_{10}^{3}\cdot C_{11}^{2}$ способами. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^{3}\cdot C_{11}^{2}}{C_{21}^{5}} = \frac{10!}{3!7!}\cdot\frac{11!}{2!9!}\cdot\frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3}\cdot\frac{10\cdot 11}{2}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21} =$$

$$= \frac{2\cdot 10\cdot 10\cdot 11}{17\cdot 19\cdot 21} = \frac{2200}{6783} \approx 0{,}3243.$$

б) Проведем перебор случаев. Пусть В — событие, состоящее в том, что белых шаров ровно 4, а С — событие, означающее, что все 5 шаров — белые. Вероятности Р(В) и Р(С) вычисляются по той же схеме, что и Р(А) в пункте а):

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{C_{10}^{4}\cdot C_{11}^{1}}{C_{21}^{5}} = \frac{10!}{4!6!}\cdot 11\cdot\frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot 11\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21} =$$

$$= \frac{7\cdot 2\cdot 5\cdot 11}{17\cdot 19\cdot 21} = \frac{770}{6783} \approx 0{,}1135;$$

$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{C_{10}^{5}}{C_{21}^{5}} = \frac{10!}{5!5!}\cdot\frac{5!\,16!}{21!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21} =$$

$$= \frac{4}{17\cdot 19} \approx 0{,}0124.$$

События B и C не могут наступить одновременно, т. е. они несовместны. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий (об этом мы уже говорили в курсе алгебры 9-го класса). Значит,

$$P(B + C) = P(B) + P(C) \approx 0{,}1135 + 0{,}0124 = 0{,}1259.$$

в) Интересующее нас событие произойдет в следующих случаях: из пяти вытащенных шаров — 3 белых и 2 черных, из пяти шаров — 4 белых и 1 черный, все 5 шаров — белые. Эти три случая соответствуют событиям А, Б, С, разобранным в пунктах а) и б). Никакие два из событий А, В, С не могут наступить одновременно, т. е. эти события попарно несовместны. Поэтому

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) \approx 0{,}3243 + 0{,}1135 + 0{,}0124 = 0{,}4502.$$

Пример 3. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что мишень:

а) будет поражена дважды;
б) не будет поражена ни разу;
в) будет поражена хотя бы один раз;
г) будет поражена ровно один раз.

Решение. Пусть А — событие, состоящее в том, что первый стрелок попал в мишень, В — событие, состоящее в том, что второй стрелок попал в мишень. По условию Р(А) = 0,9, Р(В) = 0,3, а А и Б независимы.

а) Мишень будет поражена дважды, если одновременно произошли оба события А и В, т. е. произошло событие АВ. Поэтому Р(АВ) = Р(А)Р(В) = 0,9 $\cdot$ 0,3 = 0,27.

б) Мишень вообще не будет поражена, если одновременно произошли события $\overline{A}$ и $\overline{B}$, т. е. произошло событие А • В. Поэтому

$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07.$

в) Мишень будет поражена, если произошло или А, или В, т. е. произошло событие А + В. Поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}9 + 0{,}3 - 0{,}27 = 0{,}93.$$

Ту же вероятность можно получить и другим способом, действуя «через отрицание». Допустим, что событие А + В не произошло, т. е. произошло событие $\overline{A + B}$. Это значит, что мишень вообще не поражена, а вероятность этого уже найдена в пункте б). Значит,

$$P(A + Б) = 1 - P(\overline{A + B}) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93.$$

г) Мишень будет поражена ровно один раз, если произошло событие А + В, но не произошло событие АВ. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A + B) - P(AB) = 0{,}93 - 0{,}27 = 0{,}66.$$

Ту же вероятность можно получить и другим способом. Событие, состоящее в том, что мишень будет поражена ровно один раз, равно сумме двух событий: А • $\overline{B}$ (попал первый, но не попал второй стрелок) и $\overline{A}$ • В (не попал первый, но попал второй стрелок). Значит, искомая вероятность равна

$$P(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B) = P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}66.$$

Ответ: **а) 0,27; б) 0,07; в) 0,93; г) 0,66.**

Тема 6.1. Понятие числовой окружности.
Семинарские занятия:
1. Решение заданий с применением макета числовой окружности.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на том, что длина единичной окружности равна 2π.

Примеры:

Пример 1. В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB. Дуга АБ разделена точкой M на две равные части, а точками К и P — на три равные части (рис. 37). Чему равна длина дуги: AM, MB, AK, KP, PB, AP, KM?

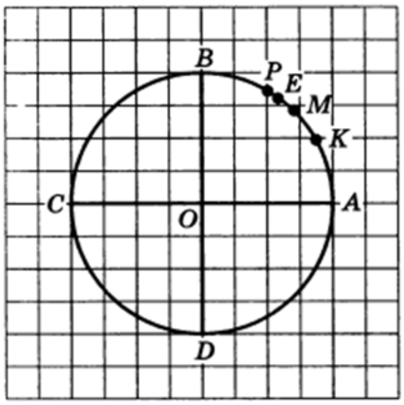


Рис. 37

Решение. Так как длина дуги AB равна $\frac{\pi}{2}$ (будем писать кратко: AD = $\frac{\pi}{2}$), то, разделив ее на две равные части точкой M, получим две дуги, длиной $\frac{\pi}{4}$ каждая. Значит, AM = MB = $\frac{\pi}{4}$.

Если дуга AB разбита на три равные части точками К и P, то длина каждой полученной части равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{6}$. Значит, AK = KP = PB = $\frac{\pi}{6}$.

Дуга AP состоит из двух дуг AK и KP длиной $\frac{\pi}{6}$. Значит,AP = $2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

Осталось вычислить длину дуги KM. Эта дуга получается из дуги AM исключением дуги AK. Значит, длина дуги KM равна разности длин дуг AM и AK. Таким образом,

$$KM = AM - AK = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Замечание 2. Обратите внимание на некоторую вольность, которую мы позволяем себе в использовании математического языка. Ясно, что дуга KM и длина дуги KM — разные вещи (первое понятие — геометрическая фигура, а второе понятие — число). А обозначается и то и другое одинаково: KM. Более того, если точки К и M соединить отрезком, то и полученный отрезок, и его длина обозначаются так же: KM. Обычно из контекста бывает ясно, какой смысл вкладывается в обозначение (дуга, длина дуги, отрезок или длина отрезка).

Пример 2. Вторая четверть единичной окружности разделена пополам точкой M (рис. 38), а четвертая четверть разделена на три равные части точками К и P. Чему равна длина дуги: AM, AK, AP, PB, MK, KM?

Решение. Прежде чем переходить к требуемым вычислениям, заметим, что AB = BC = CD = DA = $\frac{\pi}{2}$, BM = MC = $\frac{\pi}{4}$, DK = KP = PA = $\frac{\pi}{6}$.

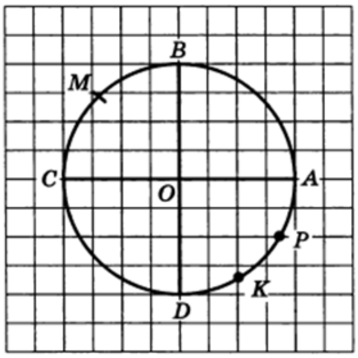


Рис. 38

Значит,

$$AM = AB + BM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$AK = AB + BC + CD + DK = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3};$$

$$AP = AD + DP = \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6};$$

$$PB = PA + AB = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3};$$

$$MK = MC + CD + DK = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12};$$

$$KM = KP + PA + AB + BM = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}.$$

Заметили ли вы, что во всех разобранных примерах длины дуг выражались некоторыми долями числа π? Это неудивительно: ведь длина единичной окружности равна 2π, и если мы окружность или ее четверть делим на равные части, то получаются дуги, длина каждой из которых выражается долями числа π. А как вы думаете, можно ли найти на единичной окружности такую точку E, что длина дуги AE будет равна 1? Давайте прикинем:

$$\pi \approx 3{,}14; \ \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047; \ \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}785.$$

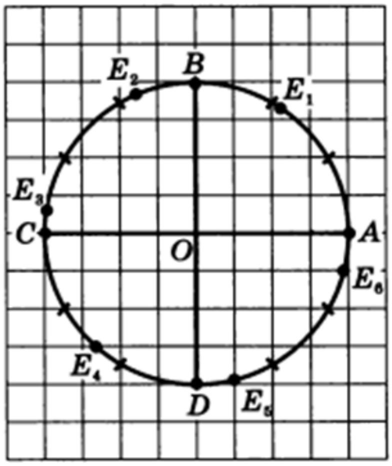


Рис. 39

Таким образом, $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$. Обратимся снова к рисунку 37. Если AE = 1, то точка E находится между точками M и P, ближе к точке P. Разумеется, точно (а не приблизительно) указать положение точки E на окружности мы не сумеем, но это, впрочем, не так уж важно.

На единичной окружности можно найти и точку E_1, для которой $AE_1 = 1$, и точку E_2, для которой $AE_2 = 2$, и точку E_3, для которой $AE_3 = 3$, и точку E_4, для которой $AE_4 = 4$, и точку E_5, для ког торой $AE_5 = 5$, и точку E_6, для которой $AE_6 = 6$. На рисунке 39 отмечены (приблизительно) соответствующие точки, причем для ориентировки каждая из четвертей единичной окружности разделена (черточками) на три равные части. Заметим, что $E_1E_2E_3E_4E_5E_6$ — правильный шестиугольник, вписанный в окружность.

Пример 3. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как первые шесть из заданных семи чисел положительны, то для нахождения соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки A в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{\pi}{2}$.

Имеем (см. рис. 41): AB = $\frac{\pi}{2}$, значит, числу $\frac{\pi}{2}$ соответствует точка B; B = $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Далее, AC = π, значит, числу π соответствует точка C, т. е. C = C(π).

AD = $\frac{3\pi}{2}$, значит, числу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка D, т. е. D = $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Числу 2π соответствует точка A, так как, пройдя по окружности путь длиной 2π, т.е. ровно одну окружность, мы снова попадем в начальную точку A. Итак, A = A(2π).

Что такое $\frac{7\pi}{2}$? Это $2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Значит, двигаясь из точки А (путь длиной 2π) и дополнительно путь длиной $\frac{3\pi}{2}$, который закончится в точке D. Итак, $D = D\left(\frac{7\pi}{2}\right)$.

Что такое 9π? Это $4 \cdot 2\pi + \pi$. Значит, двигаясь из точки А в положительном направлении, нужно четыре раза пройти целую окружность (путь длиной $4 \cdot 2\pi$) и дополнительно еще путь длиной π, который закончится в точке С. Итак, $C = C(9\pi)$.

Осталось найти на числовой окружности точку, соответствующую заданному отрицательному числу $-\frac{3\pi}{2}$. Для этого нужно из точки А пройти по окружности в отрицательном направлении (по часовой стрелке) путь длиной $\frac{3\pi}{2}$. Этот путь завершится в точке В, т. е. $B = B\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Тема 6.2. Тригонометрические функции.
Семинарские занятия:
1. Решение заданий с применением определений тригонометрических функций.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определениях тригонометрических функций.

Примеры:
Пример 1. Вычислить cos t и sin t, если:

а) $t = \frac{45\pi}{4}$; б) $t = -\frac{37\pi}{3}$; в) $t = 45\pi$; г) $t = -18\pi$.

Решение, а) Числу $t = \frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $\frac{5\pi}{4}$ (см. табл. 2) имеем:

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит,

$$\cos\frac{45\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\frac{45\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Числу $t = -\frac{37\pi}{3}$ — соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $\frac{5\pi}{3}$ (см. табл. 3) имеем:

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

в) Числу $t = 45\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π. Для точки π (см. табл. 2) имеем: $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$. Значит,

$$\cos 45\pi = -1; \quad \sin 45\pi = 0.$$

г) Числу $t = -18\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0. Для точки 0 (см. табл. 2) имеем: $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Значит,

$$\cos(-18\pi) = 1; \quad \sin(-18\pi) = 0.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что sin t — это ордината точки M(t) числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Ответ: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \quad k \in Z.$

Пример 3. Решить уравнение $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Решение. Учтем, что cos t — это абсцисса точки M(t) числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Определим их по таблице.

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ (или $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$).

Пример 4. Решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что sin t — это ордината точки M(t) числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$

Пример 5. Решить неравенство $\cos t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что cos t — это абсцисса точки M(t) числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \ k \in Z.$

Пример 6. Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения cos t, tg t, ctg t.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ находим: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$. По условию $\sin t = \frac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t = \frac{16}{25}$ находим: $\cos t = \frac{4}{5}$ или $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию, аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t > 0$. Значит, из двух найденных возможных соотношений выбираем первое: $\cos t = \frac{4}{5}$.

Зная значения sin t и cos t, нетрудно вычислить соответствующие значения tg t и ctg t:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = \frac{4}{5}; \quad \operatorname{tg} t = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}.$

Тема 6.3. Простейшие тригонометрические формулы.
Семинарские занятия:

1. Решение заданий с применением простейших тригонометрических формул.
2. Решение заданий с применением формул приведения.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определениях тригонометрических функций, на формулировке мнемонического правила.

Примеры:

Преобразуем $\sin(\pi + t)$. Наименование функции сохраняется, т. е. записываем $\sin t$. Далее, если предположить, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\pi + t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(\pi + t) = -\sin t$ (так и записано на с. 63).

Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$. Наименование функции изменяется, т. е. записываем $\sin t$. Далее, если предположить, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} + t$ — аргумент из второй четверти, а в ней преобразуемая функция косинус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$ (так и записано на с. 63).

А теперь воспользуемся сформулированным правилом для получения пары новых формул приведения.

Преобразуем $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$. Наименование функции следует изменить: пишем $\operatorname{tg} t$. Далее, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, получим, что $\frac{3\pi}{2} - t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция котангенс имеет знак плюс. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$.

Преобразуем $\sin(360° - \alpha)$. Наименование функции следует сохранить (не забывайте, что $360° = 2\pi$): пишем $\sin\alpha$. Далее, если считать, что $0 < \alpha < 90°$, получим, что $360° - \alpha$ — аргумент из четвертой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

Разумеется, формулы приведения можно применять и в тех случаях, когда место аргумента t занимает более сложное выражение. Например, мы видели выше, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$, значит, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 5t\right) = \operatorname{tg} 5t$, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$ и т. д.

Тема 6.4. Графики тригонометрических функций.
Семинарские занятия:
1. Построение графиков тригонометрических функций.
2. Преобразование графиков тригонометрических функций и их построение.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на плавность графиков, на свойства функций. Также необходимо вспомнить преобразования графиков, изученные в школе y = f(x ± a), y = f(x) ± a.

Примеры:

Пример 1. Решить уравнение sin x = x - π.

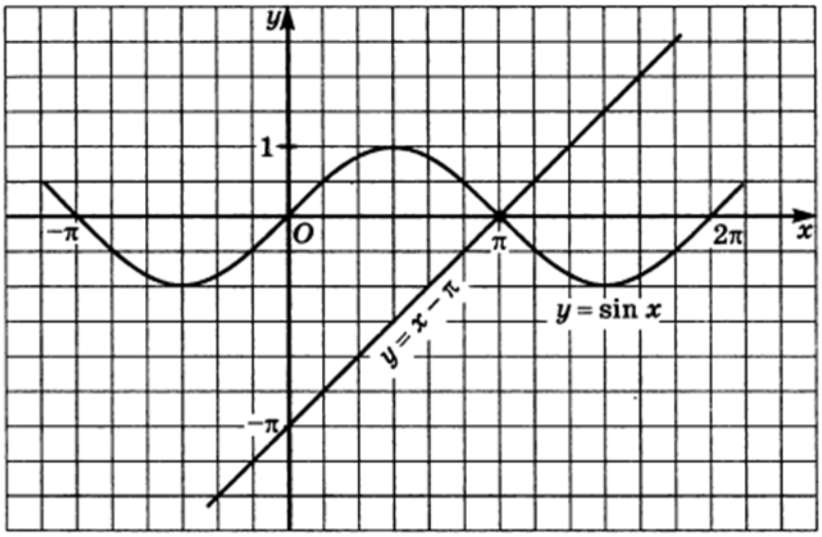


Рис. 40

Решение.

1) Возьмем две функции: y = sin x и y = x - π.
2) Построим график функции y = sin x (рис. 40).

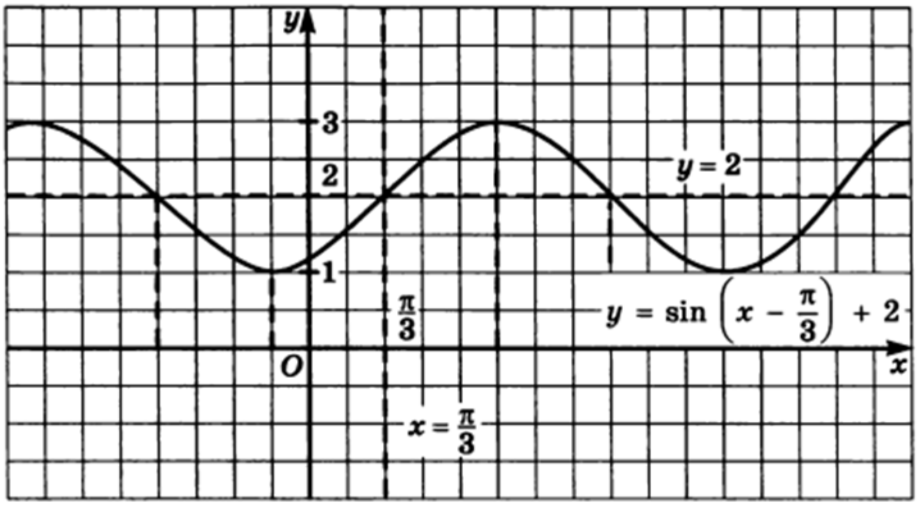


Рис. 41

3) Построим график линейной функции y = x - π. Это прямая линия, проходящая через точки (0; -π) и (π ; 0) (рис. 40).

4) Построенные графики пересекаются в одной точке — в точке A (π; 0). Проверка показывает, что это на самом деле так: sin π = 0 и π - π = 0. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень π — это абсцисса точки A.

Ответ: x = π.

Пример 2. Построить график функции y = sin $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ + 2.

Решение. Искомый график получается из графика функции y = sin x параллельным переносом на $\frac{\pi}{3}$ единиц вправо и 2 единицы вверх (рис. 41).

Пример 3. Построить график функции у = -3 cos (-2х).

Решение. Прежде всего заметим, что cos (-2x) = cos 2x.

1) Построим график функции у = cos х, точнее, одну полуволну графика (рис. 42). Все предварительные построения обозначены пунктирными линиями.

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси х с коэффициентом 3; получим одну полуволну графика функции у = 3 cos х.

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции у = 3 cos х преобразованию симметрии относительно оси х; получим полуволну графика функции у = -3 cos х.

4) Осуществим для полуволны графика функции у = -3 cos х сжатие к оси у с коэффициентом 2; получим полуволну графика функции у = -3 cos 2х (рис. 42, сплошная линия).

5) С помощью полученной полуволны построим весь график (рис. 43).

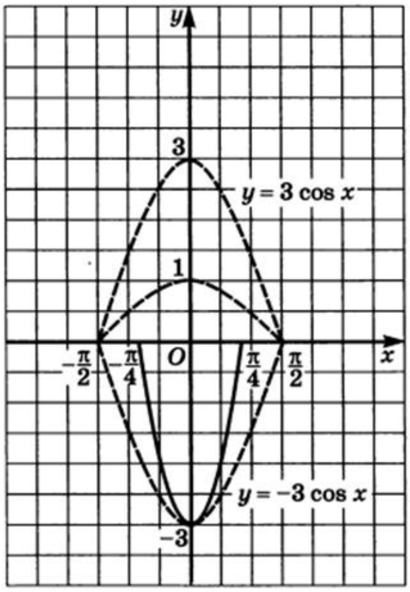


Рис. 42

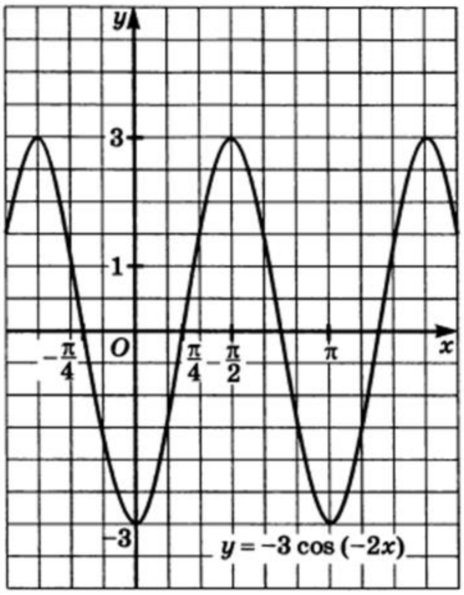


Рис. 43

Тема 7.1. Тригонометрические уравнения.

Семинарские занятия:

1. Решение тригонометрических уравнений с использованием понятий арккосинуса, арксинуса, арктангенса и арккотангенса.
2. Решение тригонометрических уравнений с применением тождественных преобразований.
3. Решение однородных тригонометрических уравнений.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на различные методы решения уравнений.

<u>Примеры:</u>

Пример 1. Вычислить arccos $\frac{1}{2}$.

Решение, а) Пусть arccos $\frac{1}{2}$ = t. Тогда cos t = $\frac{1}{2}$ и t $\in$ [0; π].

Значит, $t = \frac{\pi}{3}$, поскольку cos $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$. Итак, arccos $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение cos t = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Пример 3. Решить уравнение: $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение, а) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k;$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad t = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, \quad \text{т. е.} \quad t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k.$$

$$t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Пример 4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k.$

Находим, что $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

Пример 5. Вычислить arcctg 1.

Решение. Пусть $\operatorname{arcctg} 1 = x$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 1$ и $x \in (0; \pi)$.

Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Пример 6. Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Решение. Введем новую переменную: $z = \sin x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, либо $\sin x = 2$, либо $\sin x$: $= \frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет корней, а из второго находим:

$$x = (-1)^n\arcsin\frac{1}{2} + \pi n; \; x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0.$$

Решение. Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad \cos x = -\frac{2}{5}.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x = (-1)^n\arcsin\frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n.$$

Пример 8. Решить уравнение 2 sin x - 3 cos x = 0.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на cos x, получим:

$$2\ \mathrm{tg}\ x - 3 = 0; \quad \mathrm{tg}\ x = \frac{3}{2}; \quad x = \mathrm{arctg}\ \frac{3}{2} + \pi n.$$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\ \frac{3}{2} + \pi n.$

Пример 9. Решить уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим:

$$\mathrm{tg}^2\ x - 3\ \mathrm{tg}\ x + 2 = 0.$$

Введя новую переменную z = tg x, получим: $z^2 - 3z + 2 = 0$;

$$z_1 = 1,\ z_2 = 2.$$

Значит, либо tg x = 1, либо tg x = 2. Из уравнения tg x = 1 находим:

$$x = \mathrm{arctg}\ 1 + \pi n, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из уравнения tg x = 2 находим: $x = \mathrm{arctg}\ 2 + \pi n.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \mathrm{arctg}\ 2 + \pi n.$

Тема 8.1. Преобразование тригонометрических выражений.

Семинарские занятия:

1. Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул синуса, косинуса и тангенса суммы (разности) аргументов.
2. Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул двойного аргумента.
3. Преобразование суммы (произведения) тригонометрических функций в произведение (сумму).

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на различные представления углов в виде суммы или разности табличных значений.

Примеры:

Пример 1. Вычислить sin 75° и cos 75°.

Решение. Воспользуемся тем, что 75° = 45° + 30°, и тем, что значения синуса и косинуса углов 45° и 30° известны:

Имеем:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Упростить выражение y = 3 cos x - sin x;

Решение, а) Если переписать заданное выражение в виде

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right),$$

и вспомнить, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6},\ \text{а}\ \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6},$$

то можно увидеть, что выражение в скобках представляет собой правую часть формулы косинуса суммы для аргументов $\frac{\pi}{6}$ и x:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Пример 3. Вычислить tg 75°.

Решение. Воспользуемся тем, что 75° = 45° + 30°. Получим:

$$\mathrm{tg}\,75^\circ = \mathrm{tg}\,(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\mathrm{tg}\,45^\circ + \mathrm{tg}\,30^\circ}{1 - \mathrm{tg}\,45^\circ\,\mathrm{tg}\,30^\circ} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

Тема 9.1. Предел числовой последовательности и функции.

Семинарские занятия:

1. Вычисление пределов числовой последовательности.
2. Вычисление пределов функции.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на определение предела последовательности предела функции, свойствах предела последовательности и предела функции, определение ограниченной функции.

Примеры:

Пример 1. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$; в) $t_n = \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3$;

б) $z_n = \frac{k}{n^4}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4}$.

Решение. а) Имеем: $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(k\cdot\frac{1}{n^4}\right) = k\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$

$= k\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 0.$

в) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty}3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на п^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

Теперь можно воспользоваться правилом «предел дроби (частного)». Предел числителя равен 2, предел знаменателя равен 1, предел дроби равен 2.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 3; г) 2.

Пример 2. Вычислить

$$\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3).$$

Решение. Выражение $x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ определено в любой точке x, в частности в точке x = 1. Следовательно, функция $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ непрерывна в точке x = 1, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке x = 1:

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Тема 9.2. Определение производной.
Семинарские занятия:
1. Вычисление производной с помощью определения.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на вычислении приращения функции и нахождении предела этого отношения.

Примеры:

Пример 1. Найти производную постоянной функции y = C.

Решение. Здесь f(x) = C. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: f(x) = C.
2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = C$.
3) $\Delta y = C - C = 0$.
4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.
5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Здесь $f(x) = \frac{1}{x}$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x \neq 0$) имеем: $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$ (при этом предполагаем, что x и $x + \Delta x$ - числа одного знака, чтобы в промежутке между x и $x + \Delta x$ не оказалась точка 0).

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Тема 9.3. Вычисление производной.
Семинарские занятия:
1. Вычисление производной с применением формул и правил дифференцирования.
2. Вычисление производной сложной функции.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применении формул и правил дифференцирования для вычисления производной, понятии сложной функции и ее производной.

Примеры:

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5,\ x = 4;$ г) $y = \sqrt{x},\ x = 4;$

б) $y = x^2,\ x = -1;$ д) $y = \sin x,\ x = 0;$

в) $y = \dfrac{1}{x},\ x = \dfrac{1}{2};$ е) $y = \cos x,\ x = \dfrac{\pi}{6}.$

Решение, а) Пусть f(x) = 3x + 5. Имеем: (3x + 5)' = 3; значит, производная равна 3 в любой точке x, в частности в заданной точке x = 4. Это можно записать так: f '(4) = 3.

б) Пусть $f(x) = x^2$. Имеем: $(x^2)' = 2x$; значит, $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

в) Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Имеем: $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$; значит, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = -4$.

г) Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Имеем: $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; значит, $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

д) Пусть $f(x) = \sin x$. Имеем: $(\sin x)' = \cos x$; значит, $f'(0) = \cos 0 = 1$.

е) Пусть $f(x) = \cos x$. Имеем: $(\cos x)' = -\sin x$; значит, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке x = 1.

Решение. Пусть $f(x) = x^2$. Уравнение касательной, как уравнение всякой прямой, имеет вид y = kx + m. Найдем сначала k — это угловой коэффициент касательной, который равен f(l); здесь $f(x) = x^2$.

Имеем $(x^2)' = 2x$, значит, f '(1) = 2·1 = 2. Итак, k = 2, т. е. уравнение касательной надо искать в виде y = 2x + m.

Осталось найти значение коэффициента m. Для этого воспользуемся тем, что касательная проходит через точку на параболе $y = x^2$ с абсциссой x = 1, т. е. через точку (1; 1). Подставим x = 1, y = 1 в уравнение y = 2x + m:

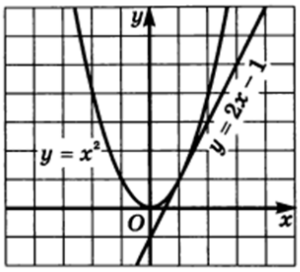


Рис. 44

$$1 = 2 \cdot 1 + m,$$
$$m = -1.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид y = 2x - 1. На рисунке 44 изображена парабола $y = x^2$ и построена прямая y = 2x - 1; чертеж иллюстрирует тот факт, что эта прямая касается параболы в точке (1; 1).

Ответ: y = 2x - 1.

Пример 3. Найти значение производной функции y = f(x), где $f(x) = \sqrt{7 - 2{,}16x}$, , в точке x = 1.

Решение. Сначала найдем производную в произвольной точке x. Известно, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. По этой формуле найдем интересующую нас производную, но при этом учтем два обстоятельства:

1) под знаком корня напишем не x, а 7 - 2,16x;
2) укажем дополнительный множитель, равный (-2,16) — это коэффициент при x.

Таким образом,

$$\left(\sqrt{7 - 2{,}16x}\right)' = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7 - 2{,}16x}}.$$

Чтобы вычислить f '(1), в полученное выражение подставим x = 1:

$$f'(1) = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7 - 2{,}16}} = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4{,}84}} = -\frac{2{,}16}{4{,}4} = -\frac{27}{55}.$$

Ответ: $f'(1) = -\dfrac{27}{55}$.

Тема 9.4. Приложение производной.
Семинарские занятия:
1. Составление уравнений касательной к графику функций с помощью производной.
2. Исследование функций на монотонность и экстремумы.
3. Отыскание наибольших и наименьших значений функции.
4. Исследование и построение графиков функций с помощью производной.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на алгоритмы исследования функции на монотонность и экстремумы, применении исследования для построения графиков функций.

Примеры:

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции у = $\frac{1}{x}$ в точке х = 1.

Решение. Воспользуемся алгоритмом, учитывая, что в данном примере f(x) = $\frac{1}{x}$.

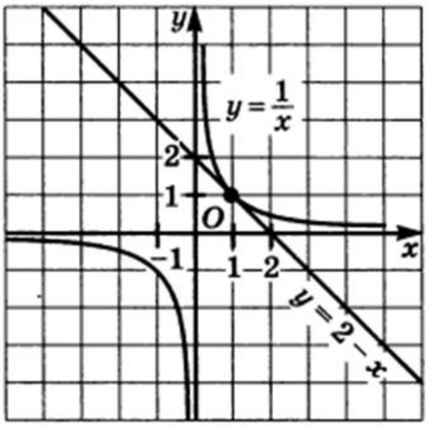


Рис. 45

1) а = 1.
2) f(a) = f(1) = 1.
3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

4) Подставим найденные числа а = 1, f(a) = 1, f′(a) = -1 в формулу касательной. Получим:

$$y = 1 - (x - 1), \text{ т. е. } y = 2 - x.$$

На рисунке 45 изображена гипербола у = $\frac{1}{x}$, построена прямая у = 2-х.

Чертеж иллюстрирует приведенные выкладки: прямая у = 2 - х касается гиперболы в точке (1; 1).

Ответ': у - 2-х.

Пример 2. Найти приближенное значение числового выражения $1{,}02^7$.

Решение. Речь идет о нахождении значения функции у = x^7 в точке х = 1,02. Воспользуемся формулой для приближенных вычислений, учитывая, что в данном примере f(x) = x^7, а = 1, f(a) = f(l) = 1; х = 1,02, f(x) = $7x^6$, и, следовательно, f′(a) = f ′(1) = 7 • l^6 = 7.

В итоге получаем:

$$1{,}02^7 \approx 1 + 7\cdot 0{,}02, \text{ т. е. } 1{,}02^7 \approx 1{,}14.$$

Если мы воспользуемся калькулятором, то получим:

$$1{,}02^7 = 1{,}148685667\ldots .$$

Как видите, точность приближения вполне приемлема.

Ответ: $1{,}02^7 \approx 1{,}14$.

Пример 3. Построить график функции $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Решение.

1. Введем обозначение: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Найдем область определения функции:

D(f) = (-∞; +∞).

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

Значит, заданная функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат, а потому начнем с построения ветви графика при х $\geq$ 0.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптоты нет. Для нахождения горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Значит, y = 0 — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции. Имеем:

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)'\cdot(1+x^2) - x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения y' = 0. Получаем:

$1 - x^2 = 0$, откуда находим, что x = 1 или x = -1. Поскольку мы договорились рассматривать лишь случай, когда x > 0, выберем значение x = 1. При x < 1 y' > 0, а при x > 1 y' < 0. Значит, x = 1 — точка максимума функции, причем

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

На промежутке [0; 1] функция возрастает, на промежутке [1; +∞) функция убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, соединив их плавной кривой и учтя при этом, что $\left(l;\frac{1}{2}\right)$ — точка максимума и что y = 0 — горизонтальная асимптота, построим ветвь искомого графика при x > 0 (рис. 46). Добавив ветвь, симметричную построенной относительно начала координат, получим весь график (рис. 47).

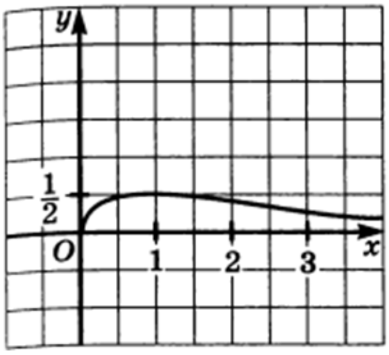


Рис. 46

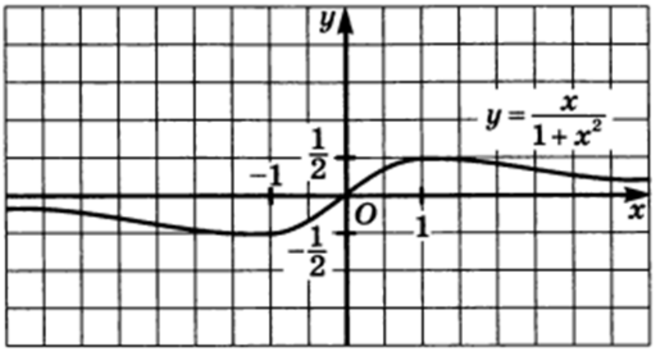


Рис. 47

Тема 10.1. Первообразная и неопределенный интеграл.
Семинарские занятия:
1. Вычисление первообразной.
2. Вычисление неопределенного интеграла.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на том, что нахождение первообразной (интегрирование) – это операция, обратная к дифференцированию.

Примеры:

Пример 1. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = 5\sin x$; б) $y = -\frac{\cos x}{3}$; в) $y = 12x^3 + 8x - 1$.

Решение, а) Первообразной для sin x служит -cos x; значит, для функции y = 5 sin x первообразной будет функция y = -5 cos x.

б) Первообразной для cos x служит sin x; значит, для функции $y = -\frac{1}{3}\cos x$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{3}\sin x$.

в) Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$, первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$, первообразной для функции y = 1 служит функция y = x.

Используя первое и второе правила нахождения первообразных, получим, что первообразной для функции $y = 12x^3 + 8x - 1$ служит функция $y = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x$, т. е. $y = 3x^4 + 4x^2 - x$.

Пример 2. Вычислить: а) $\int (2x - 3\sin x)dx$; б) $\int \left(4x^5 - \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx$.

Решение:

а) $\int (2x - 3\sin x)dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3(-\cos x) = x^2 + 3\cos x$;

б) $\int \left(4x^5 - \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx = 4 \cdot \frac{x^6}{6} - 3 \cdot tg\, x = \frac{2x^6}{3} - 3tgx.$

Тема 10.2. Определенный интеграл.

Семинарские занятия:

1. Вычисление определенного интеграла.
2. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на применении формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла, и на определении функции, принимающей большие значения, чем другая, при отыскании площади фигуры, заключенной между графиками двух функций.

Примеры:

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^{3} x^3 dx.$

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды y = sin x и осью абсцисс.

Решение. Можно взять полуволну синусоиды от точки x = 0 до точки x = π (рис. 48) и воспользоваться формулой Ньютона - Лейбница при следующих условиях: a = 0, b = π, f(x) = sin x. Получим:

$$S = \int_{0}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$$

(в процессе вычислений мы учли, что первообразной для sin x является -cos x).

Ответ: S = 2.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x},\ y = 0,\ x = 8$.

Решение. Фигура, площадь которой требуется вычислить, изображена на рисунке 49. Имеем

$$S = \int_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_0^8 = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 = \frac{3}{4}\cdot\left(8^{\frac{4}{3}} - 0^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{4}\cdot(16-0) = 12.$$

Ответ: S = 12.

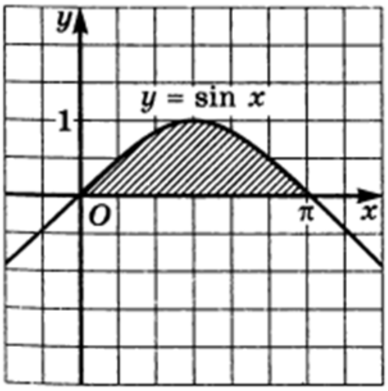


Рис. 48

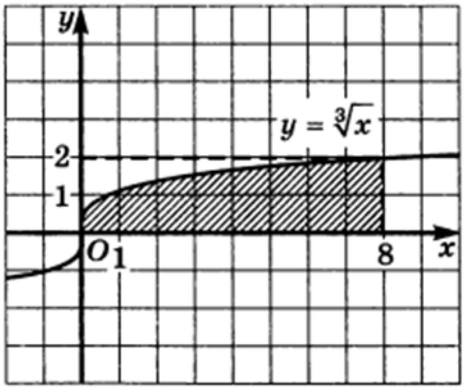


Рис. 49

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 - 4x + 2$.

Решение. Прямую $y = x - 2$ можно построить по точкам (2; 0) и (0; -2) (рис. 50). Абсциссу вершины параболы найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

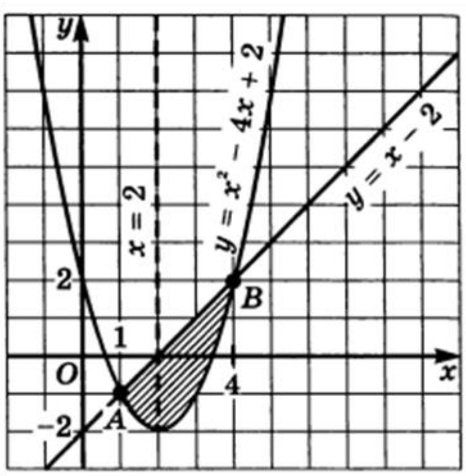


Рис. 50

$$y' = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4;$$

$$2x - 4 = 0;\ x = 2.$$

Если $x = 2$, то $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2$.

Значит, вершиной параболы служит точка (2; -2), а осью параболы — прямая $x = 2$. Возьмем две пары точек, симметричных относительно оси параболы: (1; -1) и (3; -1), (0; 2) и (4; 2), и построим параболу по пяти точкам (рис. 51). Парабола и прямая пересекаются в точках А и В, для отыскания абсцисс этих точек надо решить уравнение $x^2 - 4x + 2 = x - 2$.

Находим последовательно:

$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = 4.$$

Фигура, площадь которой надо найти, ограничена линиями $y = x^2 - 4x + 2$ (снизу) и $y = x - 2$ (сверху). Можно считать, что с боков эта фигура ограничена прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Значит, для вычисления площади фигуры можно применить формулу:

$$S = \int_1^4 ((x-2) - (x^2 - 4x + 2))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx =$$

$$= \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = \left(5\cdot\frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4\cdot 4\right) - \left(5\cdot\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4\cdot 1\right) = 4{,}5.$$

Ответ: S = 4,5.

Тема 11.1. Степени и корни.

Семинарские занятия:

1. Вычисление корня n-степени из действительного числа.
2. Построение графиков функции $y = \sqrt[n]{x}$.
3. Выполнение тождественных преобразований выражений.

4. Построение графиков степенных функций.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на то, что корень четной степени можно извлечь только из неотрицательного числа, а корень нечетной степень можно извлекать из любых чисел.

Примеры:

Пример 1. Вычислить:

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt[3]{0,125}$; в) $\sqrt[7]{0}$; г) $\sqrt[4]{17}$.

Решение. а) $\sqrt{49} = 7$, так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$, так как $0,5 > 0$ и $0,5^3 = 0,125$.

в) $\sqrt[7]{0} = 0$.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{3x+4} = -2$; в) $\sqrt[4]{2-5x} = -4$;

б) $\sqrt[4]{3x-2} = 1$; г) $\sqrt[6]{x^2-5x+68} = 2$.

Решение, а) Если $\sqrt[3]{y} = -2$, то $y = -8$. Фактически обе части заданного уравнения мы должны возвести в куб. Получим:

$$3x + 4 = -8;$$
$$3x = -12;\ x = -4.$$

б) Возведем обе части уравнения в четвертую степень. Получим:

$$3x - 2 = 1;$$
$$3x = 3;$$
$$x = 1.$$

в) Здесь не надо возводить в четвертую степень, это уравнение не имеет корней. Почему? Потому что, согласно определению 1, корень четной степени — неотрицательное число.

г) Возведя обе части уравнения в шестую степень, получим:

$$x^2 - 5x + 68 = 64;$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

Пример 3. Найти область определения функции $y = \sqrt[4]{4x - 8}$;

Решение. Под знаком корня четной степени должно находиться неотрицательное число, значит, задача сводится к решению неравенства $4x – 8 > 0$. Получаем: $x > 2$. Значит, $D(f) = [2; +\infty)$.

Пример 4. Вычислить $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Решение:

$$5\frac{1}{16} = 5 + \frac{1}{16} = \frac{81}{16}.$$
$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Пример 5. Выполнить действия:

$$(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}).$$

Решение: $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = (\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2 = \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{b^2}$.

$$(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Пример 6. Решить уравнение $x^{\frac{2}{3}} = 12 - x.$.

Решение. Нетрудно подобрать один корень этого уравнения: x = 8. В самом деле,

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4 \text{ и } 12 - 8 = 4,$$

значит, при x = 4 уравнение обращается в верное числовое равенство 4 = 4.

Так как степенная функция $y = x^{\frac{2}{3}}$ возрастает, а линейная функция y = 12 - x убывает, то других корней у уравнения нет.

Ответ: 8.

Тема 12.1. Показательная функция.

Семинарские занятия:

1. Построение графиков показательных функций.
2. Решение показательных уравнений.
3. Решение показательных неравенств.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на терминологии, различных методах решения уравнений.

Примеры:

Пример 1. Решить уравнение и неравенства $5^x = 6 - x;$

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = 5^x$ и y = 6 - x (рис.51). Они пересекаются в одной точке; судя по чертежу, это точка (1; 5). Проверка показывает, что на самом деле точка (1; 5) удовлетворяет и уравнению $y = 5^x$, и уравнению y = 6 - x. Абсцисса этой точки служит единственным корнем уравнения $5^x = 6 - x$, поскольку функция $y = 5^x$ возрастает, а функция y = 6 - x убывает.

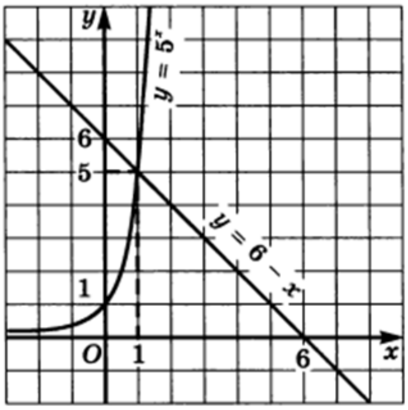


Рис. 51

Итак, уравнение $5^x = 6 - x$ имеет единственный корень x = 1.

Пример 2. Решить уравнение $2^{2x-4} = 64$.

Решение. Представив 64 как 2^6, перепишем заданное уравнение в виде $2^{2x-4} = 2^6$. Это уравнение равносильно уравнению 2x - 4 = 6, откуда находим: x = 5.

Пример 3. Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0.$

Решение. Заметив, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, а $2^{x+1} = 2 \bullet 2^x$, перепишем заданное уравнение в виде

$$(2^x)^2 + 2 \bullet 2^x - 24 = 0.$$

Есть смысл ввести новую переменную: $y = 2^x$; тогда уравнение примет вид $y^2 + 2y - 24 = 0$. Решив квадратное уравнение относительно y, находим: $y_1 = 4$, $y_2 = -6$. Но $y = 2^x$, значит, нам остается решить два уравнения:

$$2^x = 4; \; 2^x = -6.$$

Из первого уравнения находим: x = 2; второе уравнение не имеет корней, поскольку при любых значениях x выполняется неравенство $2^x > 0$.

Ответ: 2.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot (\sqrt{2})^{x+y} = 16^{3x-y}; \\ 9^{x+y} - 3^{x+y} = 72. \end{cases}$$

Решение.

$$2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{x+y} = 16^{3x-y};$$

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{2}(x+y)} = 2^{4(3x-y)};$$

$$2^{1+\frac{x+y}{2}} = 2^{12x-4y};$$

$$1 + \frac{x+y}{2} = 12x - 4y;$$

$$2 + x + y = 24x - 8y;$$

$$23x - 9y = 2.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду. Введем новую переменную: $z = 3^{x+y}$. Тогда второе уравнение системы примет вид $z^2 - z = 72$, откуда находим: $z_1 = 9$, $z_2 = -8$.

Из уравнения $3^{x+y} = 9$ находим: $x + y = 2$; уравнение $3^{x+y} = -8$ не имеет решений.

Итак, второе уравнение системы нам удалось преобразовать к виду

$$x + y = 2.$$

3) Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 23x - 9y = 2; \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 9 и сложим полученное уравнение с первым уравнением системы:

$$(23x - 9y) + (9x + 9y) = 2 + 18;$$

$$32x = 20;$$

$$x = \frac{5}{8}.$$

Из уравнения $x + y = 2$ находим: $\frac{5}{8} + y = 2$; $y = \frac{11}{8}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{8}; \frac{11}{8}\right)$.

Пример 5. Решить неравенства:

а) $2^{2x-4} > 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение, а) Имеем: $2^{2x-4} > 2^6$. Это неравенство равносильно неравенству того же смысла $2x - 4 > 6$, откуда находим: $x > 5$.

б) Воспользовавшись тем, что $\frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное неравенство в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Здесь основанием служит число $\frac{1}{3} < 1$. Значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $2x - 3,5 > 0,5$, откуда находим: $x > 2$.

Тема 12.2. Логарифм.

Семинарские занятия:

1. Построение графиков логарифмических функции
2. Преобразование логарифмических выражений.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на то, что логарифм определен только для положительных чисел.

Примеры:

Пример 1. Вычислить:

а) $\log_4 128$; б) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2}$.

Решение. а) Пусть $\log_4 128 = x$. Тогда, по определению логарифма, $4^x = 128$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{2x} = 2^7;\ 2x = 7;\ x = 3{,}5.$$

б) Пусть $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$ = x. Тогда, по определению логарифма, $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{9}$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{2}{3}};\ \frac{x}{2} = \frac{2}{3};\ x = \frac{4}{3}.$$

в) Пусть $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2} = x.$ Тогда, по определению логарифма, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}.$ Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{-x} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}};\ -x = 2 + \frac{1}{2};\ x = -2{,}5.$$

Пример 2. Решить уравнение lg x = 11- x.

Решение. Достаточно очевидно, что x = 10 — корень уравнения. В самом деле, lg 10 = 1 и 11 - 10 = 1, т. е. при x = 10 заданное уравнение обращается в верное числовое равенство 1 = 1.

Так как функция y = lg x возрастает, а функция y = 11 - x убывает, то заданное уравнение имеет только один корень, который уже найден путем подбора: x = 10.

Пример 3. Известно, что $\log_3 2 = a$. Вычислить $\log_3 6{,}75$.

Решение. Выразим число 6,75 через числа 3 и 2 (3 — основание логарифма, 2 — заданное в условии логарифмируемое число) с помощью операций умножения, деления и возведения в степень:

$$6{,}75 = 6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} = \frac{3^3}{2^2}.$$

Далее находим:

$$\log_3 6{,}75 = \log_3 \left(\frac{3^3}{2^2}\right) = \log_3 3^3 - \log_3 2^2 = 3 - 2\log_3 2 = 3 - 2a.$$

Тема 12.3. Логарифмические уравнения и неравенства.

Семинарские занятия:

1. Деловая игра на тему «Логарифм».
2. Решение логарифмических уравнений.
3. Решение логарифмических неравенств.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

<u>Деловая игра на тему «Логарифм»</u>

Цель занятия: обобщить знания, полученные на предыдущих занятиях, по теме «Логарифмы»; показать особенности решения логарифмических неравенств.

Задачи занятия:

1. ***образовательные:***
   - систематизировать знания по теме «Логарифмы»;
   - закрепить понятие «логарифм» и повторить его свойства;
   - рассмотреть простейшие случаи применения логарифмов при вычислении их значений и преобразовании логарифмических выражений;
   - рассмотреть особенности решения логарифмических неравенств

2. ***развивающие:***
   - развивать логическое мышление, умение обобщать и систематизировать знания на тему «Логарифмы»;
   - развивать навыки самостоятельности, коммуникативные способности студентов;
   - развивать познавательный интерес к математике;
3. ***воспитательные:***
   - воспитывать чувство ответственности коллективизма при работе в группах.

Тип занятия: обобщение ранее изученного материала и закрепление нового материала.

Форма занятия: семинарское занятие с элементами игры.

Методы преподавания: практический – выполнение заданий в ходе игры и решение задач, наглядный – использование компьютерной презентации, раздаточного материала.

Оборудование: мультимедийный проектор, ПК, презентация Microsoft Power Point, плакаты ученых-математиков, раздаточный материал.

В ходе данного занятия студент должен:

Уметь: применять различные методы решения; проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы, находить логарифмы; проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих логарифмы.

Знать: основы логического, алгоритмического и математического мышления; представление о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира.

Технологическая карта занятия

Этапы занятия	**Действия участников занятия**	
	Преподаватель	**Студенты**
1. Подготовительный этап	1. отбирает материалы к занятию 2. составляет структуру занятия 3. подбирает Семинарские задания	1. готовятся, повторяют изученный материал
2. Организационный этап	1. приветствует студентов 2. отмечает отсутствующих 3. проверяет готовность студентов к занятию 4. настраивает студентов на работу	1. приветствуют преподавателя, слушают
3. Этап актуализации знаний	1. называет тему занятия 2. ставит цели и задачи 3. объясняет план занятия	1. слушают
4. Основной этап	1. дает вступительное слово 2. обращает внимание студентов на эпиграф, портреты 3. организует работу по повторению и обобщению пройденного материала в виде игры «Морской бой» 4. организует работу по решению практических задач индивидуально по карточкам и вместе у доски	1. слушают 2. отвечают 3. слушают, решают, отвечают 4. оформляют задания в тетрадях и на доске
5. Заключительный	1. подводит студентов к выводу,	1. высказывают свое

этап, рефлексия	спрашивает их мнение о занятии 2. выставляет и комментирует оценки	мнение, делают вывод 2. слушают
6. Домашнее задание	1. задает	1. слушают, записывают

Примеры:

Пример 1. Решить уравнение:

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Решение. 1) Потенцируя получаем:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$
$$x^2 - x - 12 = 0;$$
$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$$

2) Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$

Значение x = 4 не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что x = 4 не удовлетворяет второму неравенству системы), т. е. x = 4 — посторонний корень для заданного уравнения. Значение x = -3 удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому x = -3 — корень заданного уравнения.

Ответ: -3.

Пример 2. Решить неравенства:

а) $\log_3 (2x - 4) > \log_3 (14 - x)$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 4) > \log_{\frac{1}{3}} (14 - x)$.

Решение. Решение, а) Область допустимых значений переменной для заданного неравенства определяется условиями 2x - 4 > 0 и 14 - x > 0. Поскольку основанием логарифмов служит число 3, а оно больше 1, то, «освобождаясь» от знаков логарифмов, мы получим неравенство того же смысла: 2x - 4 > 14 - x.

В итоге получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 > 14 - x. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим, что x > 2, из второго - x < 14, из третьего - x > 6. Геометрическая иллюстрация (рис. 53) помогает найти решение системы неравенств: 6 < x < 14.

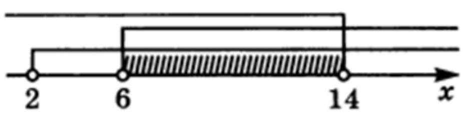


Рис. 53

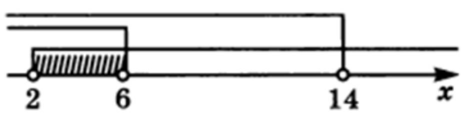


Рис. 54

б) Здесь основание логарифма $\frac{1}{3}$, т. е. число меньше 1. Значит, соответствующая система неравенств имеет вид

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 < 14 - x \end{cases}$$

(обратите внимание: знак последнего неравенства системы противоположен знаку исходного логарифмического неравенства).

Из первого неравенства системы находим, что x > 2, из второго - x < 14, из третьего - x < 6. Геометрическая иллюстрация (рис. 54) помогает найти решение системы неравенств: 2 < x < 6.

Ответ: а) 6 < x < 14; б) 2 < x < 6.

Тема 13.1. Уравнения и неравенства.

Семинарские занятия:
1. Решение уравнений различными способами.
2. Решение неравенств с одной переменной.
3. Решение систем уравнений.

При подготовке к вопросам акцентировать внимание необходимо на то, что логарифм определен только для положительных чисел.

<u>Примеры:</u>
Пример 1. Решить уравнение x^3 - 7x + 6 = 0.

Решение. Представив слагаемое 7x в виде x + 6x, получим последовательно:

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0;$$
$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0;$$
$$x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = 0;$$
$$(x - 1)(x(x + 1) - 6) = 0;$$
$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0.$$

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений $x - 1 = 0; \quad x^2 + x - 6 = 0.$

Из первого уравнения находим: $x_1 = 1$; из второго: $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Поскольку все преобразования были равносильными, найденные три значения являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 1, 2, -3.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}.$$

Решение. Введя новую переменную u = x^2 - x, получим существенно более простое иррациональное уравнение:

$$\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7}\right)^2 = \left(\sqrt{2u + 21}\right)^2;$$

$$u + 2 + 2\sqrt{u + 2}\sqrt{u + 7} + u + 7 = 2u + 21;$$

$$\sqrt{(u + 2)(u + 7)} = 6;$$

$$u^2 + 9u + 14 = 36;$$

$$u^2 + 9u - 22 = 0;$$

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -11.$$

Проверка найденных значений (здесь она обязательна) их подстановкой в уравнение $\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}$ показывает, что $u_1 = 2$ — корень уравнения, а $u_2 = -11$ — посторонний корень.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем уравнение x^2 - x = 2, т. е. квадратное уравнение x^2 - x - 2 = 0, решив которое находим два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Ответ: 2, -1.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x} = |x - 2|.$$

Решение. Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$ изображены на рисунке 54. Они пересекаются в точках

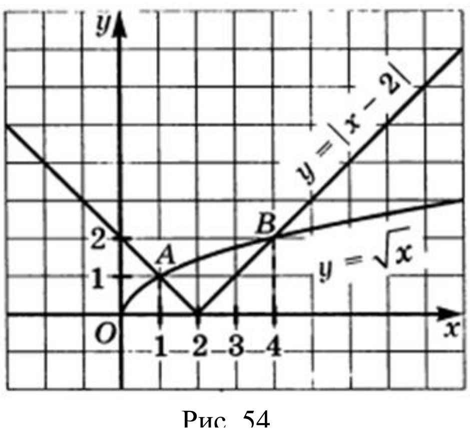


Рис. 54

A(1; 1) и B(4; 2). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4.

Пример 4. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11; \end{cases}$$

Решение. Решая первое неравенство системы, находим: $2x > 4$; $x > 2$. Решая второе неравенство системы, находим: $3x \geq 13$; $x \geq \frac{13}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю (рис. 55). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы, т. е. промежуток, на котором обе штриховки совпали. В рассматриваемом примере получаем луч $\left[\frac{13}{3}; +\infty\right)$.

Рис. 55

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет среднего профессионального образования

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ

САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ПД.01 МАТЕМАТИКА (ВКЛЮЧАЯ АЛГЕБРУ И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЮ)

Специальность 21.02.05 Земельно-имущественные отношения

Форма обучения очная

Оренбург 2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Организация самостоятельной работы

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование тем	Количество часов по видам самостоятельной работы		
		составление таблиц	решение задач и упражнений по образцу	индивид. домашние задания
1	2	3	4	5
1	Пирамида	5		8
2	Правильные многогранники. Тела вращения			8
3	Объемы тел вращений	5		
4	Статистическая обработка данных			14
5	Понятие числовой окружности			2
6	Простейшие тригонометрические формулы	2		
7	Графики тригонометрических функций			10
8	Тригонометрические уравнения	2		
9	Преобразование тригонометрических выражений	2		
10	Предел числовой последовательности и функции		4	
11	Определение производной		3	
12	Вычисление производной	2		
13	Приложение производной		6	
14	Первообразная и неопределенный интеграл	2		
15	Определенный интеграл		4	
16	Степени и корни	2	4	
17	Показательная функция		6	
18	Логарифм		4	
19	Логарифмические уравнения и неравенства		4	
20	Уравнения и неравенства		10	

Самостоятельная работа обучающихся состоит из составление таблиц с формулами по данной; решения задач и упражнений по образцу по заданной теме; выполнения индивидуальных домашних заданий на заданную тему, которые состоят из: построения сечения пирамиды или призмы, составления альбома по теме «Фигуры в пространстве», подготовки макета на тему «Фигуры в пространстве», выполнения презентации, анкетирования и проведение обработки данных, выполнения макета числовой окружности на координатной плоскости, составления альбома тригонометрических функций. Часы, данные на самостоятельную работу, рассчитывались, исходя из объема темы, уровня сложности работы и времени, затраченном на подготовку конкретного вида задания.

2. Методические указания по подготовке к занятиям

1 семестр. Геометрия. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей.

2.1. *Тема 1.1. Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых в пространстве.*
2.1.1. Вопросы к занятию

1. Что такое стереометрия?
2. Сформулируйте аксиомы группы С.
3. Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
4. Докажите, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости.
5. Докажите, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
6. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
7. Какие прямые называются скрещивающимися?
8. Докажите, что через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
9. Докажите признак параллельности прямых.

2.1.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:

Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех аксиом стереометрии, формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.2. *Тема 1.2. Параллельность прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.*
2.2.1. Вопросы к занятию
1. Что значит: прямая и плоскость параллельны?
2. Докажите признак параллельности прямой и плоскости.
3. Какие плоскости называются параллельными?
4. Докажите признак параллельности плоскостей.
5. Докажите, что через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.
6. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
7. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

2.2.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.3. *Тема 1.3. Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве.*
2.3.1. Вопросы к занятию
1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Докажите, что пересекающиеся прямые, соответственно параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны
3. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Докажите, что если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
6. Докажите, что две прямые, перпендикулярные одной и тон же плоскости, параллельны.

2.3.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.4. *Тема 1.4. Перпендикуляр и наклонная.*
2.4.1. Вопросы к занятию
1. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость?
2. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
3. Что такое наклонная, проведенная из данной точки к плоскости? Что такое проекция наклонной?
4. Докажите теорему о трех перпендикулярах.
5. Какие плоскости называются перпендикулярными?
6. Докажите признак перпендикулярности плоскостей.
7. Что такое общий перпендикуляр скрещивающихся прямых?
8. Докажите, что скрещивающиеся прямые имеют общин перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.
9. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?
10. Составьте таблицу на тему «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве».

2.4.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.5. *Тема 2.1. Декартовы координаты в пространстве. Преобразование в пространстве.*
2.5.1. Вопросы к занятию
1. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве.
2. Выразите расстояние между двумя точками через координаты этих точек.
3. Выведите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.
4. Что такое преобразование симметрии относительно точки? Какая фигура называется центрально-симметричной?
5. Объясните, что такое преобразование симметрии относительно плоскости. Что такое плоскость симметрии фигуры?
6. Какое преобразование фигуры называется движением?
7. Докажите, что движение в пространстве переводит плоскость в плоскость.
8. Какие фигуры в пространстве называются равными?
9. Дайте определение параллельного переноса.
10. Перечислите свойства параллельного переноса.

11. Докажите, что при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную плоскость.
12. Решите индивидуальное задание по вычислению координат точки при различных видах симметрии и их построению.

2.5.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.6. *Тема 2.2. Угол между прямой и плоскостью.*
2.6.1. Вопросы к занятию
1. Дайте определение угла между скрещивающимися прямыми.
2. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
3. Дайте определение угла между плоскостями.

2.6.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.7. *Тема 2.3. Векторы в пространстве.*
2.7.1. Вопросы к занятию
1. Что такое абсолютная величина вектора?
2. Какие векторы называются одинаково направленными?
3. Дайте определение координат вектора с началом в точке А (x_1, y_1, z_1) и концом в точке А (x_2, y_2, z_2).
4. Дайте определения действий над векторами: сложения, умножения на число, скалярного произведения.

2.7.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.8. *Тема 3.1. Многогранные углы. Многогранник. Призма.*
2.8.1. Вопросы к занятию
1. Что такое двугранный угол (грань угла, ребро угла)?
2. Что такое линейный угол двугранного угла?
3. Почему мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла?
4. Объясните, что такое трехгранный угол (грани и ребра трехгранного угла).
5. Объясните, что такое плоские и двугранные углы трехгранного угла.
6. Что такое многогранник?
7. Какой многогранник называется выпуклым?
8. Что такое грань выпуклого многогранника, ребро, вершина?
9. Что такое призма (основания призмы, боковые грани, ребра)?
10. Докажите, что у призмы основания лежат в параллельных плоскостях и равны, боковые ребра параллельны и равны, боковые грани — параллелограммы.
11. Что такое высота призмы?
12. Что такое диагональ призмы?
13. Что представляет собой сечение призмы плоскостью, параллельной боковым ребрам, в частности диагональное сечение?
14. Как строится сечение призмы плоскостью, проходящей через данную прямую в плоскости основания призмы и данную точку на одной из боковых граней?
15. Какая призма называется прямой (наклонной)?
16. Какая призма называется правильной?
17. Что такое боковая поверхность призмы (полная поверхность призмы)?
18. Докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.
19. Что такое параллелепипед?
20. Докажите, что у параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.
21. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
22. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
23. Какой параллелепипед называется прямоугольным? Что такое линейные размеры прямоугольного параллелепипеда?
24. Что такое куб?
25. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

26. Сколько плоскостей симметрии у прямоугольного параллелепипеда?

2.8.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.9. *Тема 3.2. Пирамида.*
2.9.1. Вопросы к занятию
1. Что такое пирамида (основание пирамиды, боковые грани, ребра, высота)?
2. Что представляют собой сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину?
3. Что такое диагональное сечение пирамиды?
4. Как построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через данную прямую в. плоскости основания пирамиды и заданную точку на одной из боковых граней?
5. Докажите, что плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, отсекает подобную пирамиду.
6. Объясните, что такое усеченная пирамида.
7. Какая пирамида называется правильной? Что такое ось правильной пирамиды?
8. Что такое апофема правильной пирамиды?
9. Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.
10. Составьте таблицы с формулами.
11. Постройте сечения пирамиды или призмы.

2.9.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.10. *Тема 3.3. Правильные многогранники. Тела вращения.*
2.10.1. Вопросы к занятию
1. Какой многогранник называется правильным?
2. Перечислите пять типов правильных многогранников и опишите их.
3. Объясните, что такое круговой цилиндр (образующая цилиндра, основания цилиндра, боковая поверхность цилиндра).
4. Какой цилиндр называется прямым?
5. Что такое радиус цилиндра, высота цилиндра, ось цилиндра, осевое сечение цилиндра?
6. Докажите, что плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.
7. Что такое призма, вписанная в цилиндр (описанная около цилиндра)? Что такое касательная плоскость к цилиндру?
8. Что такое круговой конус, вершина конуса, образующая конуса, основание конуса, боковая поверхность конуса?
9. Какой конус называется прямым?
10. Что такое высота конуса, ось конуса, осевое сечение конуса?
11. Докажите, что плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.
12. Что такое усеченный конус?
13. Какая пирамида называется вписанной в конус (описанной около конуса)? Что такое касательная плоскость к конусу?
14. Что такое шар (шаровая поверхность или сфера)?
15. Что такое радиус шара, диаметр шара? Какие точки шара называются диаметрально противоположными?
16. Докажите, что пересечение шара с плоскостью есть круг.
17. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара? Что такое большой круг?
18. Докажите, что любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии; центр шара является его центром симметрии.
19. Какая плоскость называется касательной к шару?
20. Докажите, что касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.
21. Какая прямая называется касательной к шару?
22. Докажите, что линия пересечения двух сфер есть окружность.
23. Какой многогранник называется вписанным в шар (описанным около шара)?
24. Составьте альбом по теме «Фигуры в пространстве».
25. Подготовьте макет на тему «Фигуры в пространстве».

2.10.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.11. *Тема 4.1. Объемы многогранников.*

2.11.1. Вопросы к занятию

1. Сформулируйте основные свойства объема.
2. Докажите, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров.
3. Докажите, что объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.
4. Докажите, что объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.
5. Докажите, что объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.
6. Докажите, что треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.
7. Выведите формулу для объема треугольной пирамиды.
8. Докажите, что объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.
9. Докажите, что объемы подобных тел относятся как кубы соответствующих линейных размеров.
10. Составьте таблицу с формулами.

2.11.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.12. *Тема 4.2. Объемы тел вращений.*
2.12.1. Вопросы к занятию

1. Выведите формулу для объема цилиндра.
2. Выведите формулу для объема конуса.
3. Выведите формулу для объема тел вращения.
4. Что такое шаровой сегмент? Выведите формулу для объема шарового сегмента.
5. Что такое шаровой сектор? По какой формуле вычисляется объем шарового сектора?
6. Составьте таблицу с формулами.

2.12.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех теорем и определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.13. *Тема 5.1. Статистическая обработка данных.*
2.13.1. Вопросы к занятию

1. Перечислите основные этапы статистической обработки данных.
2. Дать определение понятий: размах измерения, объем измерения, кратность вариантов, частота вариантов
3. Опишите алгоритм вычисления дисперсии.
4. Выполните презентацию, анкетирование и проведите обработку данных.

2.13.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.14. *Тема 5.2. Сочетания и размещения.*
2.14.1. Вопросы к занятию

1. Дайте определение сочетанию
2. Дайте определение размещению.
3. Выявите основные различия между сочетаниями и размещениями.

2.14.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.15. *Тема 5.3. Простейшие вероятностные задачи.*
2.15.1. Вопросы к занятию

1. Определение вероятности.
2. Перечислите основные этапы алгоритма нахождения вероятности событий.
3. Определения правила умножения вероятностей.

2.15.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.16. *Тема 5.4. Случайные события и их вероятности.*
2.16.1. Вопросы к занятию

1. Примеры использования комбинаторики для подсчета вероятностей.

2. Определение произведения событий.
3. Теорема нахождения сумма вероятностей.
4. Теорема Бернулли.

2.16.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений по данной теме, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2 семестр. Алгебра и начала математического анализа.

2.17. *Тема 6.1. Понятие числовой окружности.*
2.17.1. Вопросы к занятию
1. Какой радиус имеет единичная окружность?
2. Сколько четвертей содержит в себе единичная окружность?
3. Какое направление на числовой окружности положительное (отрицательное)?
4. Назовите уравнение числовой окружности?
5. Сколько существует координат у точки на числовой окружности?
6. Как на числовой окружности найти координаты точек?
7. Выполните макет числовой окружности на координатной плоскости.

2.17.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений по данной теме, уметь пользоваться макетом числовой окружности, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.18. *Тема 6.2. Тригонометрические функции.*
2.18.1. Вопросы к занятию
1. Дайте определение синуса и косинуса
2. Выведите основное тригонометрическое равенство
3. Дайте определение тангенса и котангенса
4. Отметьте отличия и сходства между тригонометрическими функциями.

2.18.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.19. *Тема 6.3. Простейшие тригонометрические формулы.*
2.19.1. Вопросы к занятию
1. В каких дисциплинах используются тригонометрические функции?
2. Чем отличаются градусная мера угла от радианной?
3. Для чего используют формулы приведения?
4. Можно ли составить таблицу позволяющие пользоваться формулами приведения?
5. Составьте таблицы значений тригонометрических функций.

2.19.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.20. *Тема 6.4. Графики тригонометрических функций.*
2.20.1. Вопросы к занятию
1. Перечислите основные свойства функции $y = \sin x$?
2. Перечислите основные свойства функции $y= \cos x$?
3. Отметете отличия функции $y = \sin x$ и $y= \cos x$?
4. Что такое периодическая функция?
5. Назовите периоду у функции $y = \sin x$ и $y= \cos x$?
6. как называют графики функции $y = \sin x$ и $y= \cos x$?
7. Перечислите основные свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$**?**
8. Перечислите основные свойства функции $y = \mathrm{ctg}\, x$**?**
9. Выделите отличия (если они есть) свойств и графиков функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y=\mathrm{ctg}\, x$.
10. Как называют графики функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y=\mathrm{ctg}\, x$?
11. Составьте альбом тригонометрических функций.

2.20.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, строить графики тригонометрических функций, воспользоваться решенными на

занятиях задачами.

2.21. *Тема 7.1. Тригонометрические уравнения.*
2.21.1. Вопросы к занятию

1. Назовите методы решения тригонометрических уравнений?
2. Опишите метод решения введения новой переменной?
3. Опишите метод решения выполнение тождественных преобразований?
4. Опишите метод решения использования формул приведений?
5. От чего зависит количество корней в тригонометрических уравнениях?
6. Когда тригонометрическое уравнение не имеет решение?
7. Дайте определение арксинусу?
8. Дайте определение арккосинусу?
9. Сколько решений имеет уравнение вида $\cos t = a$?
10. Сколько решений имеет уравнение вида $\sin t = a$?
11. Назовите частные случай для уравнений $\sin t = a$, $\cos t = a$?
12. Дайте определение арктангенса и арккотангенса?
13. Выделите отличия и сходства этих понятий?
14. Когда уравнения вида $\mathrm{tg}\, t = a$ и $\mathrm{ctg}\, t = a$ не имеют решения и почему?
15. Методы решения тригонометрических уравнений, содержащие тангенс и котангенс?
16. Дайте определение тригонометрическим уравнениям?
17. Приведите примеры тригонометрических уравнений?
18. Дайте определение однородным тригонометрическим уравнениям первой и второй степени?
19. Как решаются однородные тригонометрические уравнения первой и второй степени?
20. Составьте таблицу решений простейших тригонометрических уравнений.

2.21.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.22. *Тема 8.1. Преобразование тригонометрических выражений.*
2.22.1. Вопросы к занятию

1. Запишите формулу синус суммы аргументов.
2. Запишите формулу косинус суммы аргументов.
3. Запишите формулу синус разности аргументов.
4. Запишите формулу косинус разности аргументов.
5. Запишите формулу тангенс суммы аргументов?
6. Запишите формулу тангенс разности аргументов?
7. Приведите пример для применения полученных формул?
8. В каких случаях рационально использовать данные формулы?
9. Запишите формулу синуса двойного аргумента.
10. Запишите формулу синуса двойного аргумента.
11. Запишите формула тангенса двойного аргумента.
12. Запишите формулы понижения степени.
13. Обозначите практическое применение этих формул.
14. Запишите формулы, позволяющие преобразовать сумму тригонометрических функций в произведение.
15. Запишите формулы, позволяющие преобразовать произведение тригонометрических функций в суммы.
16. Обозначите практическое применение данных формул.
17. Выведите формулу преобразования выражения $A\sin x + B\cos x$ к виду $C(\sin x + t)$.
18. С каким предметом связана данная формула?
19. Как называется аргумент t?
20. Как измениться формула при $A\sin x - B\cos x$?
21. Составьте таблицы с формулами тригонометрических выражений.

2.22.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.23. *Тема 9.1. Предел числовой последовательности и функции.*
2.23.1. Вопросы к занятию

1. Определение числовой последовательности.
2. Приведите пример возрастающей последовательности.
3. Приведите пример убывающий последовательности.
4. Приведите пример последовательности ограниченной сверху.
5. Приведите пример последовательности ограниченной снизу.
6. Определение предела числовой последовательности.

7. Определение сходящейся последовательности.
8. Свойства сходящейся последовательности.
9. Решите индивидуальное задание по вычислению предела числовой последовательности.

2.23.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.24. *Тема 9.2. Определение производной.*
2.24.1. Вопросы к занятию
1. Определение приращения функции.
2. Определение предела функции.
3. Определение приращения аргумента.
4. Определение производной.
5. Как называется операция нахождения производной.
6. Решите индивидуальное задание по нахождению производной с помощью определения.

2.24.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.25. *Тема 9.3. Вычисление производной.*
2.25.1. Вопросы к занятию
1. Определение производной.
2. Как называется операция нахождения производной?
3. Геометрический смысл производной.
4. Физический смысл производной.
5. Сколько правил дифференцирования существует?
6. Чему равна производная произведения?
7. Составьте таблицы с формулами и правилами дифференцирования.

2.25.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.26. *Тема 9.4. Приложение производной.*
2.26.1. Вопросы к занятию
1. Геометрический смысл производной.
2. Алгоритм составления уравнения касательной.
3. Чему равна производная суммы?
4. Что означает термин монотонность?
5. Как определить где функция возрастает, а где убывает?
6. Какие точки называются критическими?
7. Какие точки называются стационарными?
8. Какие точки являются точками экстремума?
9. Как различить точки экстремума?
10. Что необходимо найти, что бы построить график функции?
11. Как может вести себя непрерывная функция на отрезке?
12. Чем отличаются точки экстремума от наибольшего и наименьшего значения?
13. Как решать задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин?
14. Решите индивидуальное задание по исследованию и построению графиков функций.

2.26.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.27. *Тема 10.1. Первообразная и неопределенный интеграл.*
2.27.1. Вопросы к занятию
1. Определение первообразной.
2. Операция нахождения первообразной.
3. Чему равна первообразная суммы?
4. Как обозначается первообразная?
5. Составьте таблицы с формулами и правилами интегрирования.

2.27.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:

Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.28. *Тема 10.2. Определенный интеграл.*
2.28.1. Вопросы к занятию
1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Понятие определенного интеграла.
3. Формула Ньютона – Лейбница.
4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
5. Решите индивидуальное задание на вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

2.28.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.29. *Тема 11.1. Степени и корни.*
2.29.1. Вопросы к занятию
1. Дайте определение корня *n*-ой степени из неотрицательного числа а.
2. Дайте определение корня *n*-ой степени из отрицательного числа а.
3. Как отличаются показатель корня и подкоренное число (приведите пример)?
4. Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, построение графиков.
5. Дайте определение корня *n*-ой степени из неотрицательного числа а.
6. Дайте определение корня *n*-ой степени из отрицательного числа а.
7. Как отличаются показатель корня и подкоренное число (приведите пример)?
8. Перечислите основные свойства корня *n*-ой степени.
9. Дайте определение корня *n*-ой степени из числа а.
10. Что такое радикал?
11. Перечислите общие закономерности работы с радикалами.
12. Перечислите основные свойства корня *n*-ой степени.
13. Перечислите основные свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n}$ >1.
14. Перечислите основные свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$.
15. Особенности построения степенных функции.
16. Производная и интеграл от степенной функции.
17. Решите индивидуальные задания по построению графиков функций вида $y = \sqrt[n]{x}$ и степенных функций.
18. Составьте таблицы с формулами.

2.29.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.30. *Тема 12.1. Показательная функция.*
2.30.1. Вопросы к занятию
1. Перечислите основные свойства функции $y = 2^x$.
2. Перечислите основные свойства функции $y = (\frac{1}{2})^x$.
3. Особенности построения показательных функций.
4. Производная и интеграл от показательной функции.
5. Дайте определение показательных уравнений.
6. Приведите пример показательного уравнения.
7. Перечислите методы решения показательного уравнения.
8. Особенности метода уравнивания показателей.
9. Дайте определение показательных неравенств.
10. Приведите пример показательного неравенства (строгого, нестрогого).
11. Перечислите методы решения показательного неравенств.
12. Решите индивидуальное задание по построению графика показательной функции.
13. Решите индивидуальные показательные уравнения и неравенства.

2.30.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по

данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.31. *Тема 12.2. Логарифм.*
2.31.1. Вопросы к занятию
1. Дайте определение логарифма.
2. Что такое логарифмирование?
3. Формулы логарифмирования.
4. Логарифмическая функция: свойства и построение.
5. Дайте определение логарифма.
6. Что такое логарифмирование?
7. Формулы логарифмирования.
8. Решите индивидуальное задание по построению графика логарифмической функции.

2.31.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.32. *Тема 12.3. Логарифмические уравнения и неравенства.*
2.32.1. Вопросы к занятию
1. Дайте определение логарифма.
2. Что такое логарифмирование?
3. Способы решения логарифмических уравнений и неравенств.
4. Решите индивидуальные логарифмические уравнения и неравенства.

2.32.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

2.33. *Тема 13.1. Уравнения и неравенства.*
2.33.1. Вопросы к занятию
1. Когда уравнения называются равносильными?
2. Когда уравнение можно назвать следствием?
3. Перечислите теоремы о равносильности уравнений.
4. Что такое корень уравнения?
5. Определение равносильных неравенств.
6. Перечислите тождественные преобразования для неравенств.
7. Решение систем неравенств.
8. Опишите методику решения иррациональных неравенств.
9. Опишите методику решения неравенств с модулем.
10. Дайте определение системам уравнений.
11. Теорема о равносильность 2 систем.
12. Опишите методики решений различных систем уравнений.
13. Решите индивидуальное задание на решение уравнений.
14. Решите индивидуальное задание на решение неравенств.
15. Решите индивидуальное задание на решение систем уравнений.

2.33.2. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:
Для ответов на вопросы и выполнения заданий студенту необходимо знать формулировки всех определений и формул по данной теме и уметь их применять, воспользоваться решенными на занятиях задачами.

3. Методические указания по изучению отдельных вопросов
3.1. Рассматриваемые вопросы

Тема 1.4. Перпендикуляр и наклонная. (2 часа)
1. Составление таблицы на тему «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве».

Тема 2.1. Декартовы координаты в пространстве. Преобразование в пространстве. (2 часа)
1. Решение индивидуальных заданий по вычислению координат точки при различных видах симметрии и их построению.

Тема 3.2. Пирамида. (8 часов)
1. Составление таблиц с формулами. (2 часа)
2. Построение сечения пирамиды или призмы. (6 часов)

Тема 3.3. Правильные многогранники. Тела вращения. (18 часов)
1. Составление альбома по теме «Фигуры в пространстве». (8 часов)

2. Подготовка макета на тему «Фигуры в пространстве». (10 часов)

Тема 4.1. Объемы многогранников. (2 часа)
1. Составление таблицы с формулами.

Тема 4.2. Объемы тел вращений. (2 часа)
1. Составление таблицы с формулами.

Тема 5.1. Статистическая обработка данных. (14 часов)
1. Выполнение презентации, анкетирования и проведение обработки данных.

Тема 6.1. Понятие числовой окружности. (3 часа)
1. Выполнение макета числовой окружности на координатной плоскости.

Тема 6.3. Простейшие тригонометрические формулы. (2 часа)
1. Составление таблиц значений тригонометрических функций.

Тема 6.4. Графики тригонометрических функций. (10 часов)
1. Составление альбома тригонометрических функций.

Тема 7.1. Тригонометрические уравнения. (2 часа)
1. Составление таблицы решений простейших тригонометрических уравнений.

Тема 8.1. Преобразование тригонометрических выражений. (2 часа)
1. Составление таблиц с формулами тригонометрических выражений.

Тема 9.1. Предел числовой последовательности и функции. (6 часов)
1. Решение индивидуальных заданий по вычислению предела числовой последовательности.

Тема 9.2. Определение производной. (6 часов)
1. Решение индивидуальных заданий по нахождению производной с помощью определения.

Тема 9.3. Вычисление производной. (2 часа)
1. Составление таблиц с формулами и правилами дифференцирования.

Тема 9.4. Приложение производной. (12 часов)
1. Решение индивидуальных заданий по исследованию и построению графиков функций.

Тема 10.1. Первообразная и неопределенный интеграл. (2 часа)
1. Составление таблиц с формулами и правилами интегрирования.

Тема 10.2. Определенный интеграл. (6 часов)
1. Решение индивидуальных заданий на вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Тема 11.1. Степени и корни. (4 часа)
1. Решение индивидуальных заданий по построению графиков функций вида $y = \sqrt[n]{x}$ и степенных функций. (2 часа)
2. Составление таблиц с формулами. (2 часа)

Тема 12.1. Показательная функция. (3 часа)
1. Решение индивидуальных заданий по построению графика показательной функции. (1 час)
2. Решение индивидуальных показательных уравнений и неравенств. (2 часа)

Тема 12.2. Логарифм. (1 час)
1. Решение индивидуальных заданий по построению графика логарифмической функции.

Тема 12.3. Логарифмические уравнения и неравенства. (2 часа)
1. Решение индивидуальных логарифмических уравнений и неравенств.

Тема 13.1. Уравнения и неравенства. (6 часов)
1. Решение индивидуальных заданий на решение уравнений. (2 часа)
2. Решение индивидуальных заданий на решение неравенств. (2 часа)
3. Решение индивидуальных заданий на решение систем уравнений. (2 часа)

3.1.1. При подготовке к вопросам необходимо акцентировать внимание на следующем:

Тема 1.4. Перпендикуляр и наклонная.

1. Составление таблицы на тему «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве».

	Наименование	Определение	Изображение
1	Расположение двух прямых в пространстве		
1.1			
1.2			
…			
2	Расположение прямой и плоскости в пространстве		
2.1			
2.2			
…			
3	Расположение двух плоскостей в пространстве		
3.1			
3.2			
…			

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо просмотреть весь теоретический материал по темам «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве» и «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве», выбрать соответствующую информацию и заполнить представленную таблицу в тетрадях для самостоятельных работ.

В столбце «Изображение» все чертежи должны быть выполнены простым карандашом с использованием линейки. При обозначении точек, прямых, плоскостей и их свойств необходимо использовать математические символы.

Тема 2.1. Декартовы координаты в пространстве. Преобразование в пространстве.

1. Решение индивидуальных заданий по вычислению координат точки при различных видах симметрии и их построению.

№ варианта	Координаты точки A(x; y; z)	№ варианта	Координаты точки A(x; y; z)
1	(4; -2; 3)	14	(4; -7; 3)
2	(-6; 1; 0)	15	(5; -2; -4)
3	(7; 2; -3)	16	(9; 2; -4)
4	(3; 5; 6)	17	(8; 3; -5)
5	(-2; 3; -4)	18	(2; 0; -5)
6	(1; -5; -6)	19	(1; 9; -3)
7	(-6; -3; 8)	20	(0; -9; 5)
8	(9; -4; 1)	21	(2; -7; 2)
9	(6; 0; -8)	22	(5; -3; 4)
10	(3; -7; 1)	23	(6; 2; -3)
11	(4; -1; 5)	24	(5; -5; 5)
12	(3; -2; -1)	25	(-4; 2; 6)
13	(-3; -2; 7)		

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо найти координаты точек, в которые переходит точка А:

а) при центральной симметрии относительно начала координат;

б) при осевой симметрии относительно координатных осей;

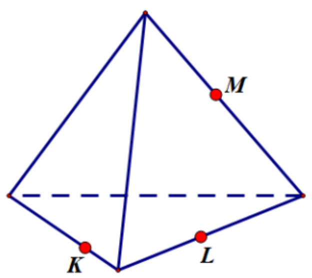
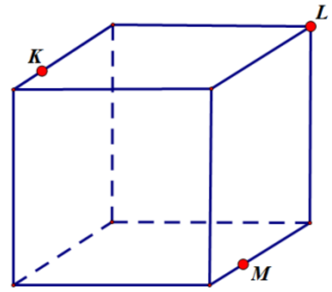
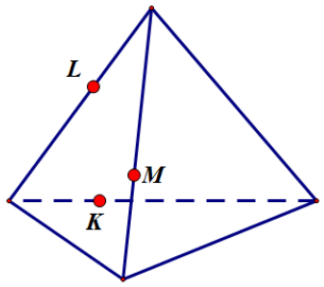
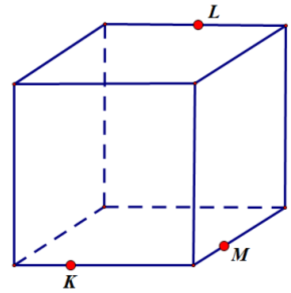
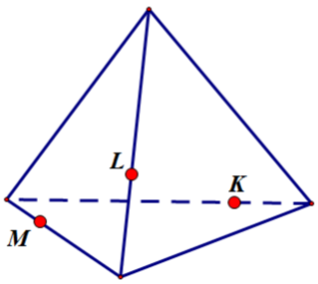
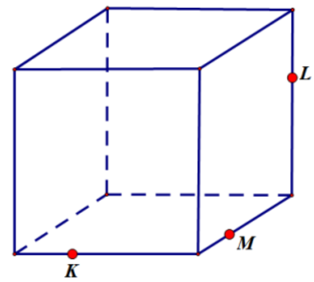
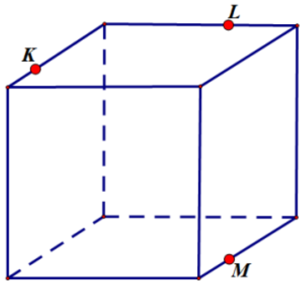
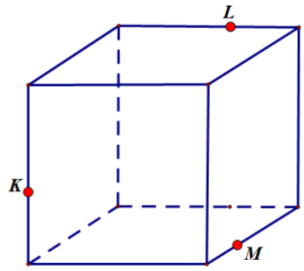
в) при зеркальной симметрии относительно координатных плоскостей.

Для каждого вида симметрии сделать чертеж в декартовой системе координат (ДСК) и построить саму точку А и ей симметричную. Все найденные координаты и построения точек выполняются в тетрадях для самостоятельных работ. Координаты точки А выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

Тема 3.2. Пирамида.

1. Построение сечения пирамиды или призмы.

№ варианта	Фигура	№ варианта	Фигура

1 9 17 25		5 13 21	
2 10 18		6 14 22	
3 11 19		7 15 23	
4 12 20		8 16 24	

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо построить сечение многогранника, проходящего через заданные точки.

Построение выполняется в тетрадях для самостоятельных работ простым карандашом с использованием линейки. При этом необходимо соблюдать правила изображения объемных фигур, а именно учитывать «видимые» и «невидимые» линии. Индивидуальные чертежи выбираются каждым студентом согласно его номеру в учебном журнале.

Правила построения сечений многогранников:

1) проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости;

2) ищем прямые пересечения плоскости сечения с гранями многогранника, для этого

а) ищем точки пересечения прямой, принадлежащей плоскости сечения, с прямой, принадлежащей одной из граней (лежащие в одной плоскости);

б) параллельные грани плоскость сечения пересекает по параллельным прямым.

Тема 3.3. Правильные многогранники. Тела вращения.

1. Составление альбома по теме «Фигуры в пространстве».

№ варианта	Название фигуры	№ варианта	Название фигуры
1	Правильная треугольная призма	14	Наклонный усеченный конус
2	Правильная четырехугольная призма	15	Наклонная треугольная призма
3	Правильная пятиугольная призма	16	Наклонная четырехугольная призма
4	Правильная шестиугольная призма	17	Наклонная пятиугольная призма
5	Правильная треугольная пирамида	18	Наклонная шестиугольная призма
6	Правильная четырехугольная пирамида	19	Наклонная треугольная пирамида
7	Правильная пятиугольная пирамида	20	Наклонная четырехугольная пирамида
8	Правильная шестиугольная пирамида	21	Наклонная пятиугольная пирамида

9	Правильная усеченная треугольная пирамида	22	Наклонная шестиугольная пирамида
10	Правильная усеченная четырехугольная пирамида	23	Наклонная усеченная треугольная пирамида
11	Правильная усеченная пятиугольная пирамида	24	Наклонная усеченная четырехугольная пирамида
12	Правильная усеченная шестиугольная пирамида	25	Наклонная усеченная пятиугольная пирамида
13	Наклонный конус		

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо составить альбом, содержащий следующие геометрические фигуры (правильные многогранники и тела вращения):

1. гексаэдр (куб); 2. тетраэдр; 3. октаэдр; 4. додекаэдр; 5. икосаэдр; 6. цилиндр; 7. конус; 8. шар; 9. индивидуальный чертеж.

Альбом выполняется на альбомных листах или на листах А4. Чертежи выполняются от руки простым карандашом с использованием линейки и циркуля. Каждая фигура рисуется на отдельном листе и ее размеры должны соответствовать размеру листа, т.е. высота фигуры – не менее 10 см. При построении необходимо соблюдать правила изображения объемных фигур, а именно учитывать «видимые» и «невидимые» линии. Индивидуальные чертежи выбираются каждым студентом согласно его номеру в учебном журнале.

2. Подготовка макета на тему «Фигуры в пространстве».

1	Куб	11	Цилиндр
2	Октаэдр	12	Конус
3	Тетраэдр	13	Шар
4	Икосаэдр	14	Треугольная пирамида
5	Додекаэдр	15	Четырехугольная пирамида
6	Треугольная призма	16	Пятиугольная пирамида
7	Четырехугольная призма	17	Шестиугольная пирамида
8	Пятиугольная призма	18	Усеченная треугольная пирамида
9	Шестиугольная призма	19	Усеченная четырехугольная пирамида
10	Параллелепипед	20	Усеченный конус

Методические указания по выполнению задания:

Макет необходимо изготовить из плотной бумаги или ватмана с использованием клея или ПВА. Высота фигуры не должна быть меньше 20 см. Подготовка макета может осуществлять как отдельно студентом, так и в группе из двух человек. Название фигуры выбирается из представленного списка по выбору студента без повторений.

Тема 5.1. Статистическая обработка данных.

1. Выполнение презентации, анкетирования и проведение обработки данных.

Методические указания по выполнению задания:

Для выполнения задания студентам необходимо разбиться на микрогруппы по 4-5 человек. Затем каждая микрогруппа продумывает интересную для них тему, согласовывает ее с преподавателем и начинает работать по сбору и анализу информации по данной теме. Названия вариант исследуемого вопроса микрогруппа продумывает самостоятельно с количеством не менее 5. Опрос или анкетирование можно проводить как внутри группы или факультета, так в социальных сетях. Количество опрошенных должно быть не менее 25 человек. После проведения опроса или анкетирования микрогруппа проводит статистическую обработку полученных данных. По итогам необходимо представить в печатном виде результаты проделанной работы с защитой в виде презентации.

Для выбора темы или проблемного вопроса можно воспользоваться представленными ниже:

- Лучший кинотеатр города Оренбург.
- Популярная радиостанция.
- Лучшие рестораны быстрого питания.
- Популярные печатные издания.
- Лучший преподаватель факультета СПО.
- Популярный вид активного отдыха.

Тема 6.4. Графики тригонометрических функций.

1. Составление альбома тригонометрических функций.

№ варианта	Функции	№ варианта	Функции
1	1. $y = cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) - 2$ 2. $y = ctg(x + \pi) - \frac{1}{2}$	13	1. $y = -sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 2. $y = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$

2	1. $y = sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 2. $y = tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$	14	1. $y = cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 2. $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$
3	1. $y = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 2. $y = ctg\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$	15	1. $y = sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - 1$ 2. $y = tg(x + \pi) + 2$
4	1. $y = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ 2. $y = tg\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 1$	16	1. $y = cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 2. $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2{,}5$
5	1. $y = 3\,cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 2. $y = ctg\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - 2$	17	1. $y = 2sin2x - 1$ 2. $y = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$
6	1. $y = sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$ 2. $y = tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$	18	1. $y = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3{,}5$ 2. $y = cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) - 2$
7	1. $y = 2cosx - 2$ 2. $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$	19	1. $y = -3sin2x + 1$ 2. $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$
8	1. $y = 2\,sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 2. $y = tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$	20	1. $y = 2\,cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 2. $y = tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$
9	1. $y = sin\frac{x}{3} + 1$ 2. $y = ctg\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$	21	1. $y = 1{,}5sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 2. $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$
10	1. $y = cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 4$ 2. $y = tg\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - 2$	22	1. $y = \frac{1}{2}cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 2. $y = ctg(x - \pi) + 2$
11	1. $y = 3\,sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ 2. $y = ctg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$	23	1. $y = \frac{1}{2}sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ 2. $y = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$
12	1. $y = cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) - 1$ 2. $y = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$	24	1. $y = cos\frac{x}{3} + 2$ 2. $y = tg\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 1$
		25	1. $y = sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) - 3$ 2. $y = tg\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 1$

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо составить альбом, содержащий следующие тригонометрические функции:

8. график функции $y = sin\,x$;
9. график функции $y = cos\,x$;
10. график функции $y = tg\,x$;
11. график функции $y = ctg\,x$;
12. индивидуальный график;
13. индивидуальный график.

Альбом выполняется на альбомных листах или на листах А4. Каждый график выполняется на отдельном листе, а титульный лист альбома оформляется в соответствии с требованиями. Графики выполняются от руки простым карандашом с использованием линейки. При построении декартовой системы координат необходимо учитывать, что единичный отрезок по осям *Ox* и *Oy* должен быть равен 2 клеткам (1 см). Индивидуальные графики (графики тригонометрических функций со смещениями и преобразованиями) выбираются каждым студентом согласно его номеру в учебном журнале.

Тема 9.1. Предел числовой последовательности и функции.

1. Решение индивидуальных заданий по вычислению предела числовой последовательности.

№ варианта	**Пределы**	**№ варианта**	**Пределы**
1	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^3}-\frac{2}{\sqrt{n}}+4-\frac{5}{3^n}\right)$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{2x^2+5x}{x-3}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x+1}{3-2x^2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{7-3x^2}{x^2+2x+1}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$	14	1) $\lim_{n\to\infty}\left(3\cdot2^{-n}+\frac{7}{\sqrt{n}}-9+\frac{4}{n^5}\right)$ 2) $\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+5x}{2x^2-4}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{2x+4}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-5x-3}{15-4x+3x^2}$ 5) $\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-3x-5}$
2	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}+5-6\cdot2^{-n}+\frac{1}{n^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{2x^2-5x}{3x^2+4}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{6-3x-x^3}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{7+8x-x^2}$ 5) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$	15	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}-6\cdot5^{-n}+2-\frac{4}{\sqrt[5]{n}}\right)$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x}{3x-4}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+7}{x^3-1}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{25+15x+2x^2}{x^2+15x+1}$ 5) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}$
3	1) $\lim_{n\to\infty}\left(4\cdot3^{-n}-7+\frac{2}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{3x-7}{2x+1}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{6-4x-2x^2}{x+5}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3-5x-x^4}{2x^4+x^3+1}$ 5) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-16}$	16	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+5-\frac{3}{n}-4\cdot2^{-n}\right)$ 2) $\lim_{x\to5}\frac{2x^2+15x+25}{x^2+15x}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+26x-8}{x+2x^2-28}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$
4	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+5\cdot4^{-n}-\frac{7}{n}-4\right)$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{5x-2x^2}{x^2+2}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^3+5}{6-x}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+3}{7-2x-x^3}$ 5) $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-6x+5}$	17	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+8+2\cdot5^{-n}-\frac{6}{\sqrt{n}}\right)$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{7x^2+8}{2x^2+x}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2-4x}{2x^3-5x-7}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^7}{2x^5-8x^7}$ 5) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$
5	1) $\lim_{n\to\infty}\left(4\cdot3^{-n}+\frac{2}{\sqrt[3]{n}}-3-\frac{2}{n^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{4x^2-6x+1}{x^2+3x}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^2+7}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+6}{7-x^2-x^3}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$	18	1) $\lim_{n\to\infty}\left(6^{-n}-\frac{4}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^5}-15\right)$ 2) $\lim_{x\to5}\frac{2x+25}{x^2-4x}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x}{7-x^2+4x^3}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{25-25x+4x^2}{2x^2-15x+25}$ 5) $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^2-9}$

6	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n^3}+6-5^{-n}\right)$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{2x^2-x+1}{x^2+3}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8x^2+5x-1}{x^2+4x+3}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{4-2x-3x^2}{x^2-2x+1}$ 5) $\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^3-27}$	19	1) $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{2}{\sqrt[3]{n}}-\frac{3}{n^2}-5\cdot6^{-n}\right)$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+1}{x-3}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-9}{3-2x-x^2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3-1}{3x^2-2x^4+x}$ 5) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$
7	1) $\lim_{n\to\infty}\left(5-2\cdot6^{-n}+\frac{4}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{7x-3}{x^2-1{,}5x+2}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+x-1}{3x-2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{7x-6x^2}$ 5) $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^2+2x-3}$	20	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{n}}-3+2\cdot9^{-n}-\frac{4}{n}\right)$ 2) $\lim_{x\to3}\frac{2x^2-3}{x^2+5x+6}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{2x-4}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$ 5) $\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$
8	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^3}-8-\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+4\cdot7^{-n}\right)$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{x^2+9x+1}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x-6}{x^3-2x+7}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+4}{9-x^3}$ 5) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^3+8}$	21	1) $\lim_{n\to\infty}\left(9\cdot5^{-n}+\frac{2}{n^4}-\frac{3}{\sqrt{n}}-7\right)$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{3x^2+5}{4x^3+x+10}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+3}{x^3+6}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+1}{5-4x^2-6x^3}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$
9	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^3}-2\cdot8^{-n}-\frac{3}{\sqrt{n}}+9\right)$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-9}{x+3}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{4x+1}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-5}{7+3x+2x^3}$ 5) $\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2}{3x^2+x-2}$	22	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^3}+\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+5-7\cdot6^{-n}\right)$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x-3}{13x-7}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x-1}{25-x^2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-7x-2}{6-x+2x^2}$ 5) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$
10	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+1-3\cdot5^{-n}-\frac{2}{n^3}\right)$ 2) $\lim_{x\to3}\frac{16-x^2}{x-4}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-2}{2x^2-x-1}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^2+6}{2x-3x^3+4x^4}$ 5) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{3x^2-4x+1}$	23	1) $\lim_{n\to\infty}\left(8-3\cdot7^{-n}+\frac{5}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n^3}\right)$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-3}{x^2-1}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+27}{2+4x^2+8x^4}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2-x-x^2}{2x^2+x-1}$ 5) $\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$
11	1) $\lim_{n\to\infty}\left(4\cdot7^{-n}+\frac{2}{\sqrt{n}}+5-\frac{3}{n^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2+5x}{2x-3}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x-1}{4+2x-x^2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{7-x^4}{2x^4+4x^2+16}$ 5) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-4x+1}{2x^2+7x-4}$	24	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{4}{n}-2+4\cdot5^{-n}\right)$ 2) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x-6}{x+3}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+6}{3x-2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x+2}{3+2x^3+5x^5}$ 5) $\lim_{x\to3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$

12	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3}-11+3^{-n}-\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$ 2) $\lim_{x\to 3}\frac{x-5}{25-x^2}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+9}{x^3-16x^2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{5x-2x^2}$ 5) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2+3x+1}$	25	1) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{n^2}-\frac{7}{2^n}\right)$ 2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-8}{5x+6}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x^3-1}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-4}{3+x-2x^2}$ 5) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$
13	1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n^4}-\frac{4}{5^n}-6\right)$ 2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-3}{x+1}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^3+1}$ 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x+1}$ 5) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$		

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо вычислить предел числовой последовательности и пределы функций на бесконечности и в точке в тетрадях для самостоятельных работ. Пределы числовой последовательности и функций выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

Для вычисления предела функции в точке, как и для вычисления предела числовой последовательности и предела функции на бесконечности, используется теорема об арифметических операциях над пределами.

Теорема. Если $\lim_{x\to a} f(x)=b$, $\lim_{x\to a} g(x)=c$, то

1) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=b+c$;

2) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=b\cdot c$;

3) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}$ (при условии, что с ≠ 0);

4) $\lim_{x\to a} k\cdot f(x)=k\cdot b$.

Тема 9.2. Определение производной.

1. Решение индивидуальных заданий по нахождению производной с помощью определения.

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	$y=3x+22$	13	$y=\frac{1}{4-3x}$
2	$y=x^2+3$	14	$y=2-3x^2$
3	$y=11x+2$	15	$y=6x+13$
4	$y=\frac{1}{1-2x}$	16	$y=x^2-2x$
5	$y=x^2-11$	17	$y=\frac{2}{x}$
6	$y=4x^2-9x$	18	$y=x^2-4x+5$
7	$y=2x-18$	19	$y=\frac{1}{3x-2}$
8	$y=11x-x^2$	20	$y=4x-5x^2$
9	$y=\frac{1}{x+5}$	21	$y=12-3x^2$

10	$y = 14x + x^2$	22	$y = 81 - 12x$
11	$y = 7 - 5x + 6x^2$	23	$y = 3x - 5 + 2x^2$
12	$y = 8x + 15x^2$	24	$y = \dfrac{1}{2x+3}$
		25	$y = 12 - 7x$

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо найти производную данной функции с помощью определения в тетрадях для самостоятельных работ. Функция выбирается для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

Для выполнения задания необходимо воспользоваться алгоритмом нахождения производной функции $y = f(x)$:

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить соотношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Этот предел и есть $f'(x)$.

Тема 9.4. Приложение производной.

1. Решение индивидуальных заданий по исследованию и построению графиков функций.

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	1. $y = 3x^2 - 4x + 5$ 2. $y = \frac{x^2+4}{x}$	13	1. $y = 5x^3 - 3x^5$ 2. $y = \frac{x+2}{x-3}$
2	1. $y = 3 + 2x - x^2$ 2. $y = \frac{x+2}{x-3}$	14	1. $y = x^3 + 3x^2$ 2. $y = \frac{3x-2}{x+1}$
3	1. $y = 7 - x - 2x^2$ 2. $y = \frac{x-3}{x+1}$	15	1. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 2. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$
4	1. $y = 3x^2 - x^3$ 2. $y = \frac{2x+1}{3x-1}$	16	1. $y = -x^3 + 3x - 2$ 2. $y = \frac{x^2-3}{x^2+1}$
5	1. $y = -9x + x^3$ 2. $y = \frac{1}{x^2+1}$	17	1. $y = -x^3 + 6x^2 - 5$ 2. $y = \frac{x}{x^2-4}$
6	1. $y = x^3 + 3x^2$ 2. $y = \frac{x-2}{x^2+5}$	18	1. $y = x^3 - 3x + 2$ 2. $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$
7	1. $y = x^3 + 9x^2 + 24x$ 2. $y = \frac{x^2-7}{x-4}$	19	1. $y = (x+2)(x-1)^2$ 2. $y = \frac{-2}{x^2+4}$
8	1. $y = x^3 + 6x^2 - 5$ 2. $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$	20	1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ 2. $y = \frac{x^2-3}{x+1}$

9	1. $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$ 2. $y = \frac{3}{x^2 - x - 6}$	21	1. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$ 2. $y = \frac{x^2+5}{x+2}$
10	1. $y = x^5 - 5x$ 2. $y = \frac{2x-3}{3x+2}$	22	1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ 2. $y = \frac{x^2}{x-1}$
11	1. $y = 2x^4 - 9x^2 + 7$ 2. $y = \frac{x-1}{x+1}$	23	1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ 2. $y = \frac{x^2+15}{x+4}$
12	1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ 2. $y = \frac{x^2-3}{x+2}$	24	1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ 2. $y = \frac{x^2-7}{x-4}$
		25	1. $y = 2x^4 - 9x^2 + 1$ 2. $y = \frac{x-2}{x+2}$

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо выполнить исследование данной функции и на его основе построить график в тетрадях для самостоятельных работ. Функция выбирается для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность;
3) найти вертикальные асимптоты;
4) исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты;
5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
6) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Тема 10.2. Определенный интеграл.

1. Решение индивидуальных заданий на вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

№ варианта	Ограничивающие линии	№ варианта	Ограничивающие линии
1	$y = x, y = -0{,}5x + 5,$ $x = -1, x = 3$	13	$y = x^2 - 1,$ $y = 2 + 2x$
2	$y = -x^2 + 4x - 1,$ $y = -x - 1$	14	$y = 1 - sin2x,\ y = 0,$ $x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi$
3	$y = x^2 - 6x + 7,$ $y = -x + 7$	15	$y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,$ $x = 1,\ x = 4$
4	$y = 1 - x,\ y = 3 - 2x,$ $x = 0$	16	$y = 2 + cos\frac{x}{2},\ y = 0,$ $x = 0,\ x = \frac{2\pi}{3}$
5	$y = 3 - 2x - x^2,$ $y = -2x - 1$	17	$y = -x^3 + 1,\ y = 0,$ $x = -2,\ x = 0$
6	$y = -x^2 + 6x - 5,$ $y = -x + 1$	18	$y = -x^2 + 4x,$ $y = 0$
7	$y = 2cos2x,\ y = 0,$ $x = -\frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{6}$	19	$y = 4 - x^2,$ $y = 0$

8	$y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$, $x+2y-8=0$	20	$y=x^2-4x+1$, $y=x+1$
9	$y=2sin2x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{4}$	21	$y=x^3+2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$
10	$y=x+1$, $y=x^2-6x+7$	22	$y=2-2sinx$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$
11	$y=x^2+6x+7$, $y=x+7$	23	$y=-x$, $y=3-\frac{x}{4}$, $x=-2$, $x=1$
12	$y=x^2-6x+9$, $y=(x+1)(3-x)$	24	$y=x^2-4x+3$, $y=-x^2+6x-5$
		25	$y=x^2+2x-3$, $y=-x^2+2x+5$

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями, с помощью определенного интеграла в тетрадях для самостоятельных работ. Ограничивающие фигуру линии выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

Для вычисления площади S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y=f(x)$, $y=g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что для любого x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x)\leq f(x)$, необходимо воспользоваться формулой:

$S=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$.

Тема 11.1. Степени и корни.

1. Решение индивидуальных заданий по построению графиков функций вида $y=\sqrt[n]{x}$ и степенных функций.

№ варианта	Функции	№ варианта	Функции
1	1. $y=(x-2)^{\frac{1}{2}}+1$ 2. $y=\sqrt[7]{x+3}-2$	13	1. $y=(x+9)^{\frac{2}{5}}-1$ 2. $y=\sqrt[5]{x}-14$
2	1. $y=\sqrt[4]{x-2}+3$ 2. $y=(x-1)^{\frac{7}{2}}+5$	14	1. $y=\sqrt{x-9}+3$ 2. $y=(x+2)^{-\frac{7}{9}}+3$
3	1. $y=(x+4)^{-\frac{2}{3}}+7$ 2. $y=\sqrt[5]{x+5}-4$	15	1. $y=\sqrt[5]{x-4}+7$ 2. $y=(x+3)^{\frac{14}{9}}-4$
4	1. $y=\sqrt{4+x}-5$ 2. $y=(3+x)^{\frac{1}{6}}-4$	16	1. $y=\sqrt[6]{x}-15$ 2. $y=(x-6)^{\frac{7}{4}}+1$
5	1. $y=\sqrt[3]{x-6}+5$ 2. $y=(x-2)^{-\frac{1}{9}}+11$	17	1. $y=\sqrt[7]{x+3}-8$ 2. $y=(x-7)^{-\frac{11}{9}}+2$
6	1. $y=\sqrt[6]{x+2}-3$ 2. $y=(x-4)^{\frac{5}{4}}+3$	18	1. $y=\sqrt{x-5}+3$ 2. $y=(x+2)^{\frac{1}{6}}+11$
7	1. $y=\sqrt[5]{x+2}-5$ 2. $y=(x-3)^{\frac{11}{9}}+7$	19	1. $y=\sqrt[7]{x}+15$ 2. $y=(x+3)^{-\frac{4}{9}}-6$

8	1. $y = \sqrt{x-8} + 3$ 2. $y = (x+4)^{-\frac{1}{6}} + 1$	20	1. $y = \sqrt[4]{x-3} + 7$ 2. $y = (x+2)^{\frac{7}{3}} - 4$
9	1. $y = \sqrt[4]{x+3} - 2{,}5$ 2. $y = (x-4)^{\frac{9}{2}} + 5$	21	1. $y = \sqrt[5]{x+8} - 12$ 2. $y = (x+3)^{\frac{3}{9}} - 5$
10	1. $y = \sqrt[7]{x+4} + 5$ 2. $y = (x+3)^{\frac{4}{9}} - 6$	22	1. $y = (x-2)^{\frac{1}{2}} + 1$ 2. $y = \sqrt[7]{x+3} - 2$
11	1. $y = \sqrt[6]{x-6} + 5$ 2. $y = (x+2)^{\frac{7}{4}} - 7$	23	1. $y = \sqrt[5]{x-2} + 3$ 2. $y = (x-2)^{-\frac{5}{2}} + 6$
12	1. $y = \sqrt[3]{x+7} - 2$ 2. $y = (x+3)^{-\frac{1}{9}} - 5$	24	1. $y = (x+6)^{-\frac{1}{3}} + 7$ 2. $y = \sqrt[3]{x+3} - 4$
		25	1. $y = (x-2)^{\frac{1}{3}} + 5$ 2. $y = \sqrt[6]{x+1} - 2$

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо в тетрадях для самостоятельных работ построить график функции вида $y = \sqrt[n]{x}$ и степенную функцию, а также перечислить их свойства. Функции выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

Тема 12.1. Показательная функция.

1. Решение индивидуальных заданий по построению графика показательной функции.
2. Решение индивидуальных показательных уравнений и неравенств.

№ варианта	Задания	№ варианта	Задания
1	1. Решите уравнение: $\sqrt{10^{2x+6}} = \frac{10}{\sqrt[4]{10}}$. 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$. 3. Постройте график функции: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2$.	13	1. Решите уравнение: $\sqrt[3]{25^{2x-1}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$. 2. Решите неравенство: $\left(\frac{2}{7}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{4}{49}\right)^{x^2}$. 3. Постройте график функции: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} + 2$.
2	1. Решите уравнение: $4^{x+1} + 15 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0$. 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-1}$. 3. Постройте график функции: $y = 4^{x-1} - 2$.	14	1. Решите уравнение: $4^{x} - 30 \cdot 2^{x-1} - 16 = 0$. 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{64}\right)^{3{,}5x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{-x^2}$. 3. Постройте график функции: $y = 5^{x-1} + 2$.
3	1. Решите уравнение: $\sqrt[3]{8^{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$. 2. Решите неравенство: $\left(\frac{3}{10}\right)^{2x^2-3x+6} > \frac{243}{100000}$. 3. Постройте график функции: $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} + 3$.	15	1. Решите уравнение: $9^{x} - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0$. 2. Решите неравенство: $2^{2x} + 15 \cdot 2^{2x+3} \geq 11^{x} + 15 \cdot 11^{x}$. 3. Постройте график функции: $y = 3^{x-5} - 4$.

4	1. Решите уравнение: $49^{x+1}+55\cdot 27^{x+1}-56=0.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-25x^2+20x+10} < \left(\frac{25}{4}\right)^{-x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y=5^{x\mp 3}-2.$	16	1. Решите уравнение: $25^{x+1}+49\cdot 25^{x}-2=0.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y=2^{x-3}+1.$
5	1. Решите уравнение: $\sqrt[4]{2^{5x-2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}+3.$	17	1. Решите уравнение: $\sqrt{10^{2x+6}}=\frac{10}{\sqrt[4]{10}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{16-x}.$ 3. Постройте график функции: $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}-3.$
6	1. Решите уравнение: $9^{x}-75\cdot 3^{x-1}-54=0.$ 2. Решите неравенство: $2^{2x}+15\cdot 2^{2x+3} < 11^{x}+15\cdot 11^{x}.$ 3. Постройте график функции: $y=2^{x-1}-3.$	18	1. Решите уравнение: $\sqrt[3]{8^{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{3}{10}\right)^{2x^2-3x+6} \leq \frac{243}{100000}.$ 3. Постройте график функции: $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+4.$
7	1. Решите уравнение: $\sqrt[7]{36^{x-5}}=\frac{6}{\sqrt[5]{6}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{64}\right)^{3{,}5x+3} > \left(\frac{1}{8}\right)^{-x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}+3.$	19	1. Решите уравнение: $\sqrt{3^{2x+1}}=\frac{9}{\sqrt[5]{3}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x+16}.$ 3. Постройте график функции: $y=\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}-2.$
8	1. Решите уравнение: $100^{x}-70\cdot 10^{x-1}-30=0.$ 2. Решите неравенство: $0{,}8^{\frac{x(x-3)}{2}} < 0{,}64.$ 3. Постройте график функции: $y=5^{x-1}-4.$	20	1. Решите уравнение: $49^{x+1}+55\cdot 27^{x+1}-56=0.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{3}{5}\right)^{-25x^2+20x+10} \geq \left(\frac{25}{9}\right)^{-x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y=3^{x-4}-2.$
9	1. Решите уравнение: $\sqrt[3]{25^{2x-1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{2}{7}\right)^{3x-1} < \left(\frac{4}{49}\right)^{x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}+4.$	21	1. Решите уравнение: $\sqrt[4]{2^{5x-2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} \leq \left(\frac{1}{64}\right)^{x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+4.$

10	1. Решите уравнение: $4^x - 30 \cdot 2^{x-1} - 16 = 0.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{64}\right)^{3,5x+3} > \left(\frac{1}{8}\right)^{-x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y = 3^{x-4} + 5.$	22	1. Решите уравнение: $\sqrt[7]{36^{x-5}} = \frac{6}{\sqrt[5]{6}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{4}\right)^{3,5x+3} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} + 7.$
11	1. Решите уравнение: $\sqrt{3^{2x+1}} = \frac{9}{\sqrt[5]{3}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} \le \left(\frac{1}{9}\right)^{x+16}.$ 3. Постройте график функции: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} - 3.$	23	1. Решите уравнение: $4^{x+1} + 15 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} > \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-1}.$ 3. Постройте график функции: $y = 3^{x-5} - 3.$
12	1. Решите уравнение: $25^{x+1} + 49 \cdot 25^x - 2 = 0.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y = 6^{x-1} + 5.$	24	1. Решите уравнение: $100^x - 70 \cdot 10^{x-1} - 30 = 0.$ 2. Решите неравенство: $0,6^{\frac{x(x-3)}{2}} \ge 0,36.$ 3. Постройте график функции: $y = 4^{x-2} - 1.$
		25	1. Решите уравнение: $\sqrt[4]{8^{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$ 2. Решите неравенство: $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-1} \ge \left(\frac{9}{49}\right)^{x^2}.$ 3. Постройте график функции: $y = 8^{x+1} + 3.$

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо в тетрадях для самостоятельных работ выполнить следующие задания: решить показательное уравнение, неравенство и построить график показательной функции с указанием его свойств. Задания выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

Тема 12.2. Логарифм.

1. Решение индивидуальных заданий по построению графика логарифмической функции.

Тема 12.3. Логарифмические уравнения и неравенства.

1. Решение индивидуальных логарифмических уравнений и неравенств.

№ варианта	Задания
1	1. Постройте график функции: $y = 2 + \log_3(x+2).$ 1. Решите уравнение: $\log_6(x-1) - \log_6\frac{1}{16} + 3\log_6\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2}\log_6(2x-4)^2.$ 2. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2.$

2	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)+5$. 2. Решите уравнение: $\lg 5 + \lg(x+10) - 1 = \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{9}}(x+3) \geq -\frac{1}{2}$.
3	1. Постройте график функции: $y = \log_4(x-2)+5$. 2. Решите уравнение: $\log_5(x-2) - 2\log_5\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \log_5(x+13)$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{4}}(x-3) \leq \frac{3}{2}$.
4	1. Постройте график функции: $y = \log_{0,1}(x+3)-2$. 2. Решите уравнение: $\log_2(x-1) - 2 = \log_2(3x-7) - \log_2(x+1)$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(x-5) > -3$.
5	1. Постройте график функции: $y = \log_4(x+3)+1$. 2. Решите уравнение: $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2 - \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{4}}\left(2-\frac{x}{4}\right) - 1$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) > -2$.
6	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+3)-1$. 2. Решите уравнение: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 1 = \log_{\frac{1}{2}}(3x-7) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$. 2. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > -1$.
7	1. Постройте график функции: $y = \log_8(x+2)-3$. 2. Решите уравнение: $\frac{1}{2}\log_3 x^2 + 3\log_3\sqrt[3]{x-2} = \frac{1}{3}\log_3 8 - \log_3\frac{1}{x+6}$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > -2$.
8	1. Постройте график функции: $y = \log_{0,5}(x-2)+3$. 2. Решите уравнение: $\log_4 x - \log_4\frac{1}{2x-1} = \log_4(3x-2)$. 3. Решить неравенство: $\log_3(x+20) < 3$.
9	1. Постройте график функции: $y = \log_7(x+4)-3$. 2. Решить уравнение: $\lg x - \lg\frac{1}{x-1} = \lg 2 + 3\lg\sqrt[3]{x+2}$. 3. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{8}}(x-7) > -\frac{2}{3}$.
10	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{7}}(x-3)+1$. 2. Решите уравнение: $\log_5 2 + \log_5 x + 2\log_5\sqrt{x-1} = \log_5(5x-3)$. 3. Решите неравенство: $\log_5(x+13) < 2$.
11	1. Постройте график функции: $y = 2 + \log_{\frac{1}{5}}(x+3)$. 2. Решите уравнение: $\log_2{}^2 x - 3\log_2 x + 5 = 3^{\log_3 9}$. 3. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) \leq -2$.

12	1. Постройте график функции: $y = \log_3(x-4) - 2$. 2. Решите уравнение: $\log_2{}^2 x^3 - 144\log_2\sqrt{x} - 81 = 0$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{9}}(x+3) < -\frac{1}{2}$.
13	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + 4$. 2. Решите уравнение: $\lg x - 2\lg 100 + 4 \cdot (\lg x)^{-1} = 0$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{4}}(x-3) > \frac{3}{2}$.
14	1. Постройте график функции: $y = \log_2(x+3) - 2$. 2. Решите уравнение: $\frac{\lg x}{2\lg x+1} + \frac{2\lg x+1}{\lg x} = 2$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(x-5) \le -3$.
15	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{4}}(x-2) - 3$. 2. Решите уравнение: $\frac{2\log_2{}^2 x - 1}{\log_2{}^2 x + 2\log_2 x + 2} = 1$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) < -2$.
16	1. Постройте график функции: $y = \log_5(x-3) + 2$. 2. Решите уравнение: $\log_2{}^2 x + 3 = 2\log_2 x^2$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \le -1$.
17	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + 1$. 2. Решите уравнение: $\lg^2 \frac{x}{10} = 3^{\log_3 4}$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) < -2$.
18	1. Постройте график функции: $y = \log_4(x-1) + 4$. 2. Решите уравнение: $3\lg x^2 - \lg^2 x = 9$. 3. Решите неравенство: $\log_3(x+20) \ge 3$.
19	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{5}}(x+5) - 1$. 2. Решите уравнение: $\log_2{}^2 x - \log_2 x^3 = 4$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{8}}(x-7) < -\frac{2}{3}$.
20	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{6}}(x-4) + 2$. 2. Решите уравнение: $\log_3 x + \log_x 9 = 3$. 3. Решите неравенство: $\log_5(x+13) \ge 2$.
21	1. Постройте график функции: $y = -\log_2(x-3) + 4$. 2. Решите уравнение: $\lg^2 x^3 + \lg x^2 = 40$. 3. Решите неравенство: $\log_{0,5}\frac{x}{3} \ge -2$.
22	1. Постройте график функции: $y = 3 - \log_{\frac{1}{6}}(x+1)$. 2. Решите уравнение: $\log_3 x + 1 = 2\log_x 3$. 3. Решите неравенство: $\log_{\sqrt{3}}(2x-3) < 4$.

23	1. Постройте график функции: $y = 5 + \log_3(x-2)$. 2. Решите уравнение: $\log_3(x+3)(x+5) + \log_3\frac{x+3}{x+5} = 4$. 3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{4}}\frac{x}{5} > 1$.
24	1. Постройте график функции: $y = \log_{\frac{1}{5}}(x-1) - 4$. 2. Решите уравнение: $\log_2 x + 9\log_x 2 = 10$. 3. Решите неравенство: $\log_5(3x+1) < 2$.
25	1. Постройте график функции: $y = \log_6(x+1) + 6$. 2. Решите уравнение: $\log_2(x-3)(x+5) + \log_2\frac{x-3}{x+5} = 2$. 3. Решите неравенство: $\log_{0,2}(1-4x) \geq -1$.

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо в тетрадях для самостоятельных работ выполнить следующие задания: решить логарифмическое уравнение, неравенство и построить график логарифмической функции с указанием его свойств. Задания выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

Тема 13.1. Уравнения и неравенства.

1. Решение индивидуальных заданий на решение уравнений.

№ варианта	**Задание**
1	Решите уравнение методом перехода к новому уравнению: $\log_{0,8}(9x - 4x^2) = \log_{0,8}(x^3 + 4x^2)$.
2	Решите уравнение методом разложения на множители: $x^5 + 8x^4 + 12x^3 = 0$.
3	Решите уравнение методом введения новой переменной: $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$.
4	Решите уравнение функционально-графическим методом: $\lvert x\rvert = \sqrt[5]{x}$.
5	Решите уравнение методом перехода к новому уравнению: $\left(\sqrt{6x-1}+1\right)^9 = \left(\sqrt{6x+8}\right)^9$.
6	Решите уравнение методом разложения на множители: $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$.
7	Решите уравнение методом введения новой переменной: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 6 = 5\sqrt{2-x}$.
8	Решите уравнение функционально-графическим методом: $2^x = 6 - x$.
9	Решите уравнение методом перехода к новому уравнению: $tg\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = tg\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)$.
10	Решите уравнение методом разложения на множители: $3^x \cdot x - 3^{x+1} + 27 = 9x$.
11	Решите уравнение методом введения новой переменной: $\sqrt{\frac{5x-1}{x+3}} + 5\sqrt{\frac{x+3}{5x-1}} = 6$.
12	Решите уравнение функционально-графическим методом: $(x-1)^2 = \log_2 x$.
13	Решите уравнение методом перехода к новому уравнению: $27^{5-x^2} - 3^{x^2-1} = 0$.
14	Решите уравнение методом разложения на множители: $2x^2\cos x + 9 = 18\cos x + x^2$.

15	Решите уравнение методом введения новой переменной: $$5^x + 4 = 5^{2x+1}.$$
16	Решите уравнение функционально-графическим методом: $$1 - \sqrt{x} = \ln x.$$
17	Решите уравнение методом перехода к новому уравнению: $$\log_{\sqrt{3}} \frac{x-2}{2x-4} = \log_{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x+2}.$$
18	Решите уравнение методом разложения на множители: $$\sqrt{3} \cos 3x = \sin 6x.$$
19	Решите уравнение методом введения новой переменной: $$3^{x+1} - 29 = -18 \cdot 3^{-x}.$$
20	Решите уравнение функционально-графическим методом: $$\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4.$$
21	Решите уравнение методом перехода к новому уравнению: $$(2^{2x} + 16)^{20} = (10 \cdot 2^x)^{20}.$$
22	Решите уравнение методом разложения на множители: $$\sqrt[4]{x^9} - 2\sqrt[4]{x^5} - 15\sqrt[4]{x} = 0.$$
23	Решите уравнение методом введения новой переменной: $$4 \sin^2 x + 4 = 17 \sin x.$$
24	Решите уравнение функционально-графическим методом: $$\sqrt{x} - 2 = \frac{9}{x}.$$
25	Решите уравнение методом введения новой переменной: $$\log_2{}^2 x + 12 = 7 \log_2 x.$$

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо в тетрадях для самостоятельных работ выполнить задание на решение уравнения одним из следующих методов: методом перехода к новому уравнению, методом разложения на множители, методом введения новой переменной и функционально-графическим методом. Задания выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

2. Решение индивидуальных заданий на решение неравенств.

№ варианта	Задание
1	Решите систему неравенств: $\begin{cases} 6x + 2 \le 4x + 24 \\ 2x - 1 \ge x + 7 \end{cases}.$
2	Решите иррациональное неравенство: $\sqrt{5x^2 + 4} \le 7x + 10.$
3	Решите неравенство с модулем: $\lvert 4 - 2x \rvert < 16$
4	Решите систему неравенств: $\begin{cases} (x-2)(x^2 + 2x + 4) - x^3 < 8x \\ 3x - 16 \le x \end{cases}.$
5	Решите иррациональное неравенство: $\sqrt{x^2 + x} < x + 1.$
6	Решите неравенство с модулем: $\lvert 5x + 10 \rvert \le 15.$
7	Решите систему неравенств: $\begin{cases} 29 + 25x > 2(13x + 9) \\ 2x > 5 \\ 3(5x + 3) < 4(4x + 3) \end{cases}.$
8	Решите иррациональное неравенство: $\sqrt{2x^2 + 7x} > 5 - 2x.$
9	Решите неравенство с модулем: $\lvert 9 + 3x \rvert > 12.$
10	Решите систему неравенств: $\begin{cases} \frac{2x-11}{4} + \frac{19-2x}{2} < 2x \\ \frac{2x+15}{9} > \frac{1}{5}(x-1) + \frac{x}{3} \end{cases}.$
11	Решите иррациональное неравенство: $$\sqrt{5x^2 - 10x - 3} > \sqrt{x - 2x^2 + 3}.$$

12	Решите неравенство с модулем: $\lvert 3x-4\rvert > x+1$.
13	Решите систему неравенств: $\begin{cases} \frac{x+5}{x-7} < 1 \\ \frac{3x+4}{4x-2} > -1 \end{cases}$.
14	Решите иррациональное неравенство: $\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x-2} \le \sqrt{x^2-4x+4}$.
15	Решите неравенство с модулем: $\lvert 16-8x\rvert < 4x+2$.
16	Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^3 < x \\ 3x^2 - x > 5-15x \end{cases}$.
17	Решите иррациональное неравенство: $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x+3} \ge \sqrt{x^2+6x+9}$.
18	Решите неравенство с модулем: $\lvert 2x-1\rvert \ge x$.
19	Решите систему неравенств: $\begin{cases} 7+3x < 5x+3 \\ 7x-15 < 4x-3 \\ 11x-32 > 13x-42 \end{cases}$.
20	Решите иррациональное неравенство: $\sqrt{x^2-11x-12} < \sqrt{x^2+11x+6}$.
21	Решите неравенство с модулем: $\lvert 5-6x\rvert \ge 3$.
22	Решите систему неравенств: $\begin{cases} \frac{x}{x+2} - \frac{24}{(x+2)^2} < 0 \\ -3x < 9 \end{cases}$.
23	Решите иррациональное неравенство: $\sqrt{x^2+2x-8} < 2x-4$.
24	Решите неравенство с модулем: $\lvert 6x-1\rvert > 2$.
25	Решите систему неравенств: $\begin{cases} \frac{x^2-1{,}5x-7}{(x-4)^2} > 0 \\ x^2 < 25 \end{cases}$.

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо в тетрадях для самостоятельных работ выполнить задание на решение одного из предложенного неравенства: иррациональное неравенство, неравенство с модулем или систему неравенств. Задания выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.

3. Решение индивидуальных заданий на решение систем уравнений.

№ варианта	Задание
1	Решите систему уравнений методом подстановки: $\begin{cases} y = 2+x \\ x^3 - y^3 = -8 \end{cases}$.
2	Решите систему уравнений методом алгебраического сложения: $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1 \\ 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4 \end{cases}$.
3	Решите систему уравнений методом введения новых переменных: $\begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{6}{x-y} = -1 \\ \frac{5}{x+y} + \frac{9}{x-y} = -2 \end{cases}$.
4	Решите систему уравнений графическим методом: $\begin{cases} y+2 = \sqrt{x+4} \\ y + x^3 = 0 \end{cases}$.

5	Решите систему уравнений методом подстановки: $$\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}.$$
6	Решите систему уравнений методом алгебраического сложения: $$\begin{cases} x+y^2=2 \\ 2y^2+x^2=3 \end{cases}.$$
7	Решите систему уравнений методом введения новых переменных: $$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ \log_6{}^2 xy+1=2\log_6 xy \end{cases}.$$
8	Решите систему уравнений графическим методом: $$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=2-x^2 \end{cases}.$$
9	Решите систему уравнений методом подстановки: $$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x^2+3xy-3y^2=6 \end{cases}.$$
10	Решите систему уравнений методом алгебраического сложения: $$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}=3 \\ 3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[4]{y}=1 \end{cases}.$$
11	Решите систему уравнений методом введения новых переменных: $$\begin{cases} tg^2x+sin\,y=2 \\ 3sin\,y+tg^2x=0 \end{cases}.$$
12	Решите систему уравнений графическим методом: $$\begin{cases} y=x(x-4) \\ y+8=2x \end{cases}.$$
13	Решите систему уравнений методом подстановки: $$\begin{cases} 3x=y+1 \\ 7^{y-2x+2}=7^{y-4x+1}+6 \end{cases}.$$
14	Решите систему уравнений методом алгебраического сложения: $$\begin{cases} \log_2 x-\log_3 y=-5 \\ 2\log_2 x+3\log_3 y=0 \end{cases}.$$
15	Решите систему уравнений методом введения новых переменных: $$\begin{cases} \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=10-3\sqrt[4]{xy} \\ 2x-5y=6 \end{cases}.$$
16	Решите систему уравнений графическим методом: $$\begin{cases} y=2^{x-1} \\ \lvert x-3\rvert=y+1 \end{cases}.$$
17	Решите систему уравнений методом подстановки: $$\begin{cases} x=2y \\ \log_{\frac{1}{3}}(2y+x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-y+1)=\log_3\frac{1}{y+1} \end{cases}.$$
18	Решите систему уравнений методом алгебраического сложения: $$\begin{cases} 2^{x+2y}-\sqrt{2x+y}=6 \\ 3\sqrt{2x+y}-2^{x+2y}=-2 \end{cases}.$$
19	Решите систему уравнений методом введения новых переменных: $$\begin{cases} 3\sqrt[3]{x+y}=\log_2 16x^2 \\ \log_2 x^2+2\sqrt[3]{x+y}=6 \end{cases}.$$

20	Решите систему уравнений графическим методом: $$\begin{cases} y\cdot 2^{x+1}=1 \\ \sqrt[3]{x+2}=y \end{cases}.$$
21	Решите систему уравнений методом подстановки: $$\begin{cases} \sqrt{7-6x-y^2}=y+5 \\ y=x-1 \end{cases}.$$
22	Решите систему уравнений методом алгебраического сложения: $$\begin{cases} 2\sin 2x+tg3y=2 \\ 6\sin 2x-2tg3y=1 \end{cases}.$$
23	Решите систему уравнений графическим методом: $$\begin{cases} y+2x=3 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}.$$
24	Решите систему уравнений методом подстановки: $$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \sin x\cdot\sin y=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$
25	Решите систему уравнений графическим методом: $$\begin{cases} \frac{y}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^x \\ y=\log_2 x \end{cases}.$$

Методические указания по выполнению задания:

Необходимо в тетрадях для самостоятельных работ выполнить задание на решение системы уравнений одним из следующих методов: методом подстановки, методом алгебраического сложения, методом введения новых переменных или графическим методом. Задания выбираются для каждого студента индивидуально согласно его номеру в учебном журнале.