ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Часть 2.Практические занятия

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.05 Математика

Направление подготовки (специальность) 27.03.04 Управление в технических системах

Профиль подготовки (специализация) Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Квалификация выпускника бакалавр

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие № 1 (2 часа).

Тема: «Матрицы и действия над ними»

3.1.1 Задание для работы:

1. Числовые матрицы. Виды матриц.
2. Операции над матрицами.

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые матрицы. Виды матриц.

2. Операции над матрицами.

Задача 1.1. Пусть $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 7\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$. Найти матрицу $2A+3B$.

Решение. $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 7\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2(-1) & 2\cdot 2 & 2\cdot 7\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 0 & 2\cdot 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot(-1) & 3\cdot(-3)\\ 3\cdot 0 & 3\cdot 2 & 3\cdot 5\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}-2+3 & 4-3 & 14-9\\ 6+0 & 0+6 & 8+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 6 & 6 & 23\end{pmatrix}.$$

Задача 1.2. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 8 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A^{T}-2B$.

Решение.

$$A^{T}-2B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 8 & -4\end{pmatrix}^{T}-2\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -1 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-14 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}.$$

Задача 1.3. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 8\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot(-B)$.

Решение. В соответствии с правилом размерностей произведение $A\cdot(-B)$ существует, так как $[3\times 2][2\times 2]=[3\times 2]$, и матрица $A\cdot(-B)$ будет иметь размер $[3\times 2]$:

$$A\cdot(-B)=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -8\\ 1 & 0\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}2\cdot 3+(-3)\cdot 1 & 2\cdot(-8)+(-3)\cdot 0\\ 0\cdot 3+1\cdot 1 & 0\cdot(-8)+1\cdot 0\\ 5\cdot 3+4\cdot 1 & 5\cdot(-8)+4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -16\\ 1 & 0\\ 19 & -40\end{pmatrix}.$$

Задача 1.4. Найти $A\cdot B\cdot C$, если $A=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Решение. Произведение $A\cdot B\cdot C$ существует, так как $[3\times 1][1\times 3][3\times 2]=[3\times 2]$ и будет матрицей размером 3×2. Для вычисления произведения $A\cdot B\cdot C$ здесь удобно воспользоваться свойством $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ и сначала найти матрицу $B\cdot C$, а затем $A\cdot(B\cdot C)$:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot(-1)+3\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\-1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Задача 1.5. Найти матрицу $(A\cdot B)^{T}$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. С учетом свойства $(A\cdot B)^{T}=B^{T}\cdot A^{T}$ данную задачу можно решить двумя способами:

а) $(A\cdot B)^{T}=\left(\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{T}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot(-3)+(-3)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-3)\cdot 0 & 2\cdot(-2)+(-3)\cdot 1\\1\cdot(-3)+4\cdot 2 & 1\cdot 1+4\cdot 0 & 1\cdot(-2)+4\cdot 1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}-12 & 2 & -7\\5 & 1 & 2\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}-12 & 5\\2 & 1\\-7 & 2\end{pmatrix};$$

б) так как $B^{T}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}$; $A^{T}=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 4\end{pmatrix}$, то $B^{T}\cdot A^{T}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}(-3)\cdot 2+2\cdot(-3) & (-3)\cdot 1+2\cdot 4\\1\cdot 2+0\cdot(-3) & 1\cdot 1+0\cdot 4\\(-2)\cdot 2+1\cdot(-3) & (-2)\cdot 1+1\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 5\\2 & 1\\-7 & 2\end{pmatrix}.$$

1.1.4. Задачи для самостоятельной работы. Вычислить.

1. $\begin{pmatrix}-1 & 2\\7 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 3\\-5 & 4\end{pmatrix}$.   **2.** $2\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\1 & 0 & 4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}^{T}$.

3. $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.   **4.** $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A^{T}$, если $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 1\\3 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\-1 & 3 & 0\\2 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

6. Найти $A\cdot B^{T}$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 3\\5 & 8\\1 & 4\\0 & -2\end{pmatrix}$.

Ответы.1. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. **3.** -2. **4.** $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 51 \\ -3 & -4 & 17 \end{pmatrix}$; $B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -7 & 3 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 13 & 11 & 7 & -4 \\ 9 & 24 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

3.1.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия о матрице, видах матриц, об основных операциях над матрицами;
- приобрели умения и навыки выполнения операций над матрицами.

3.2 Практическое занятие № 2 (2 часа).

Тема: «Определители *n*-го порядка и их свойства. Разложение определителя по строке (столбцу)»

3.2.1 Задание для работы:

1. Определители *n*-го порядка и их свойства.
2. Разложение определителя по строке (столбцу).

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определители *n*-го порядка и их свойства.

1. $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-7) \cdot 3 = 31$.

Определение 2. Определителем третьего порядка матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{pmatrix}$**,**

называется число, равное $\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{vmatrix} = \mathbf{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3} - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3$

Запомнить формулу легко в виде так называемого правила треугольников. В соответствии с ним со знаком «плюс» берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали (рис. 1.1). Члены со знаком «минус» определяются аналогично, но относительно побочной диагонали (рис.1.1).

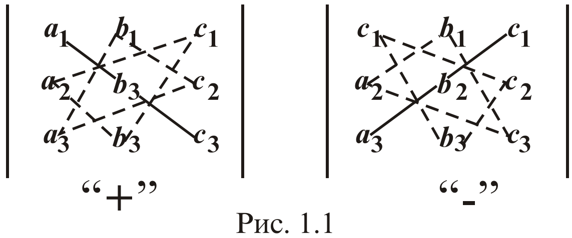


Рис. 1.1

Определители 3-го порядка можно вычислить и другим способом – по правилу Саррюса.

Правило Саррюса. В соответствии с правилом Саррюса из матрицы А нужно составить новую таблицу, приписав к матрице А справа сначала первый, а потом второй ее столбцы. Затем нужно перемножить элементы новой таблицы в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1.2 (перемножаются элементы в направлении стрелок), и составить из получившихся шести произведений алгебраическую сумму. При этом знаки произведений элементов, указанных стрелками со знаком «-», изменяются на противоположные.

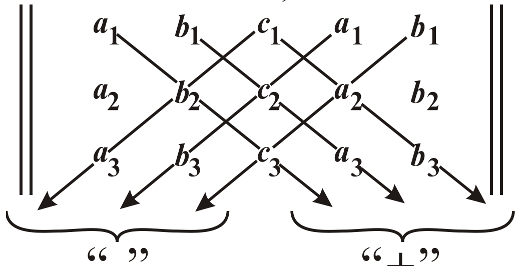


Рис. 1.2

Нетрудно проверить, что при вычислении определителя **третьего порядка** и по правилу треугольников, и по правилу Саррюса получается правая часть формулы (1.10).

Пример 1.1. Вычислить определитель
а) по правилу треугольников,б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 7 + (-2)\cdot 4\cdot(-5) + 0\cdot 3\cdot 0 - 0\cdot(-1)\cdot(-5) - (-2)\cdot 3\cdot 7 - 1\cdot 4\cdot 0 =$

$= -7 + 40 + 42 = 75;$

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} =1\cdot(-1)\cdot7+(-2)\cdot4\cdot(-5)+0\cdot3\cdot0- \\ -0\cdot(-1)\cdot(-5)-1\cdot4\cdot0-(-2)\cdot3\cdot7=75. \end{array}$$

б) “-” “+”

Пример 1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Найти $M_{21}; A_{21}; M_{22}; A_{22}; A_{32}$.

Решение.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3;\ A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot M_{21} = (-1)\cdot 3 = -3;$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=-12;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=1\cdot(-12)=-12;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=4.$$

Соответствие знаков миноров и алгебраических дополнений с одинаковыми индексами определяется схемой (рис. 1.3).

$$\begin{vmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{vmatrix}$$

Рис. 1.3

(Нетрудно составить такую схему для определителя любого порядка, так как знаки чередуются как в строках, так и в столбцах.)

Решение типовых задач

Задача 1.6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-5 & 4 & 9\\ 3 & 6 & -6\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}$.

Решение. Определитель равен нулю в соответствии со свойством 6: вторая строка пропорциональна третьей.

2. Разложение определителя по строке (столбцу).

Задача 1.7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}$.

Решение. Данный определитель 3-го порядка можно было бы вычислить по правилу треугольника или по правилу Саррюса. Покажем, что вычисления можно выполнить проще, если использовать свойства определителей. Преобразуем определитель так, чтобы в некоторой строке (столбце) часть элементов обратилась в нуль. Нули в строке (столбце) удобно получать с помощью единиц, поэтому получим их в первом столбце, содержащем единицы. Для этого выберем вторую строку (можно третью) в качестве рабочей. Умножив все ее элементы на (-2) и прибавив их к соответствующим элементам первой строки, получим 0 на месте элемента a_{11}. Аналогично, умножив вторую строку на (-1) и сложив ее с третьей, получим 0 на месте элемента a_{31}:

$$\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{разложим}\\ \text{по первому}\\ \text{столбцу}\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=7.$$

Ответ: 7.

Замечания. Если нули хотят получить в **столбце**, то в качестве **рабочей** должна выступать **некоторая строка;** если же нули получают в какой-либо **строке**, то в качестве **рабочего** должен выступать некоторый **столбец**.

Выполняемые преобразования над строками (столбцами) удобно и целесообразно записывать в «поле комментария».

Продемонстрируем предложение второго замечания на следующей задаче.

Задача 1.8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{Поле комментария} \\ \begin{vmatrix} \text{1 стр.- рабочая} \\ \text{2 стр.} = \text{2 стр.} + (-2)\cdot \text{1 стр.} \\ \text{4 стр.} = \text{4 стр.} + 3\cdot\text{1 стр.} \end{vmatrix} \end{matrix} == \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -5 & 9 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{3стб.} - \text{рабочий} \\ \text{2стб.} = \text{2стб.} + (-3)\cdot \text{3стб.} \\ \text{1стб.} = \text{1стб.} + 2\cdot\text{3стб.} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 10 & -10 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = = -1\cdot \begin{vmatrix} 10 & -10 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь использованы сокращения: стр. – строка, стб. – столбец. Последний определитель второго порядка равен нулю как определитель с пропорциональными столбцами. **Ответ:** 0.

1.2.5. Задачи для самостоятельной работы

Вычислить определители.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 7 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответы.1. -6.**2.** -9. **3.** a^2+b^2.**4.** 1.**5.** 0. **6.** 6.**7.** -6. **8.** -52. **9.** 44. **10.** 140.

3.2.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия об определителе матрицы и его свойствах;
- приобрели умения и навыки вычисления определителей.

3.3 Практическое занятие № 3 (2 часа).

Тема: «Обратные матрицы. Алгоритмы нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы. Ранг матрицы. Теорема о ранге. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы»

3.3.1 Задание для работы:

1. Обратные матрицы. Алгоритмы нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.
2. Ранг матрицы. Теорема о ранге.

3. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.

3.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Обратные матрицы. Алгоритмы нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

Алгоритм нахождения обратной матрицы приведем на примере матрицы 3-го порядка.

1. Находим определитель $|A|$. Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует. Вычисления завершаются. Если же $|A| \neq 0$, то продолжаем нахождение обратной матрицы.

2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} матрицы A.

3. Составляем из алгебраических дополнений присоединенную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Транспонируем матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{31} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{32} \\ \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

5. Формируем обратную матрицу A^{-1}:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|}\tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{A}_{11}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{21}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{31}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{\mathbf{A}_{12}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{22}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{32}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{\mathbf{A}_{13}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{23}}{|\mathbf{A}|} & \frac{\mathbf{A}_{33}}{|\mathbf{A}|} \end{pmatrix}. \qquad (1.23)$$

Пример 1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1). $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.2). $A_{11} = -3; A_{12} = -5;\ A_{21} = 2; A_{22} = 1$.

3). $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4). $\tilde{A}^{T} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.5). $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 \\ -5/7 & 1/7 \end{pmatrix}$.

Проверка.

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 \\ -5/7 & 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.**Ответ:** $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение.

1). $|A|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6\neq 0$ .2). $A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6$; $A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0$;

$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=0$; $A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=8$; $A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$;

$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$; $A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3$; $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$.

3). $\tilde{A}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 8 & 3 & 1\\ -10 & -3 & 1\end{pmatrix}$. 4). $\tilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}6 & 8 & -10\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.5). $A^{-1}=\frac{1}{6}\tilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}1 & 4/3 & -5/3\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$.

Проверка.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4/3 & -5/3\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 4/3-3/2+1/6 & -5/3+3/2+1/6\\ 0 & 0+1/2+3/6 & 0-1/2+3/6\\ 0 & 0-1/2+3/6 & 0+1/2+3/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$.**Ответ:** $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/3 & -5/3\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$.

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы

Систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и определителем основной матрицы A системы, отличным от нуля, можно решать с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим СЛАУ 3-го порядка

$$\begin{cases}\mathbf{a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1},\\ \mathbf{a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2},\\ \mathbf{a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3}.\end{cases}\tag{1.24}$$

Используя правила умножения матриц, эту систему можно записать в матричной форме

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}+a_{12}+a_{13}}\\ \mathbf{a_{21}+a_{22}+a_{23}}\\ \mathbf{a_{31}+a_{32}+a_{33}}\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{x_1}\\ \mathbf{x_2}\\ \mathbf{x_3}\end{pmatrix}}_{\mathbf{X}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\ \mathbf{b_2}\\ \mathbf{b_3}\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}\tag{1.25}$$

или $A\cdot X=B$, где A – матрица системы, X - вектор-столбец переменных x_1, x_2, x_3; B - вектор-столбец свободных членов уравнения (1.24).

Умножая матричное равенство $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, будем иметь $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, но $A^{-1} \cdot A = E$, $EX = X$ и окончательно $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$. (1.26)

Формула (1.26) справедлива для СЛАУ любого порядка n.

Пример 3. Решить с помощью обратной матрицы систему из примера 1.4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Находим обратную матрицу A^{-1}.

1). $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ .2). $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$.3). $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.4). $\tilde{A}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычисляем по формуле (1.23) вектор X^0 решения СЛАУ:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 \\ 1+0+0 \\ -1+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

2. Ранг матрицы. Теорема о ранге.

3. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.

В теории систем линейных алгебраических уравнений широкое применение находит понятие ранга матрицы. Приведем определение ранга матрицы и способы его вычисления.

Пусть дана произвольная матрица А. Если в ней есть строка, состоящая из одних нулей, то такую строку называют **нулевой.** Выполним элементарные преобразования над строками матрицы А, аналогичные описанному прямому ходу метода Гаусса при приведении СЛАУ к ступенчатому виду.

Определение 5.Рангом матрицы А называется количество ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной из А с помощью элементарных преобразований над строками.

Привести матрицу к ступенчатому виду можно различными способами. Однако независимо от последовательности и конкретного набора элементарных преобразований над матрицей А получающиеся ступенчатые матрицы будут содержать одинаковое количество ненулевых строк. Иначе говоря, **элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.** Обозначается ранг матрицы через $\mathrm{rang}A$ или $\mathrm{rg}A$.

Пример 1.10. Найти ранг матрицы А

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Получаем последовательно нули в 1, 2, 3-м столбцах:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В последней матрице одна строка нулевая и три – ненулевые. Следовательно, ранг матрицы A равен 3 $(\mathrm{rg}A=3)$.

Ответ: $\mathrm{rg}A=3$.

Свойство. Ранг любой матрицы равен наибольшему порядку миноров этой матрицы, отличных от нуля. Такой ненулевой минор называют **базисным**. Это свойство иногда берут в качестве эквивалентного определения ранга матрицы и используют для вычисления ранга.

Задачи для самостоятельной работы

Найти A^{-1}, если матрица A имеет следующий вид:

1\. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решить с помощью обратной матрицы системы:

5\. $\begin{cases} x+2y=4, \\ 3x+y=12. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=8, \\ 5x_1+x_2-2x_3=-1, \\ 2x_2+4x_3=1. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2=-1, \\ -x_1+2x_2-x_3=1. \end{cases}$

8\. $\begin{cases} 2x+3y+2z=5, \\ -x+z=0, \\ 2x+y-z=2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 4x+y+z=-1, \\ -2x+y+3z=3, \\ x+2y+4z=1. \end{cases}$

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **5.** $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. $X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.** $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}$. **8.** $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. **9.** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.3.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия об обратной матрице, алгоритме нахождения обратной матрицы, о методе решения матричных уравнений с помощью обратной матрицы. Освоили понятие о ранге матрицы, теорему о ранге, элементарные преобразования матриц и вычисление ранга матрицы.
- приобрели умения и навыки вычисления обратной матрицы, ранга и решения матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

3.4 Практическое занятие № 4 (2 часа).

Тема: «Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения»

3.4.1 Задание для работы:

1. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.

2. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.

Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит из двух этапов. На первом, называемом **прямым ходом,** СЛАУ приводят к **ступенчатому виду**. На втором этапе, называемом **обратным ходом**, последовательно находят неизвестные. Поясним идею метода Гаусса на примерах.

Пример 1.6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Прямой ход. Каждый шаг прямого хода заключается в исключении очередной неизвестной x_i из всех уравнений начиная с $(i+1)$-го.

В данном примере исключим сначала x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого умножим первое уравнение на (–3) и сложим со вторым, затем умножим первое уравнение на (–4) и сложим с третьим. Получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \quad x_3 = 0; \\ \quad -x_2 + 4x_3 = 5; \\ \quad -5x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases}$$

Теперь исключим переменную x_2 из последнего уравнения. Умножим второе уравнение на (-5) и сложим с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \quad x_3 = 0; \\ \quad -x_2 - 4x_3 = 5; \\ \qquad -11x_3 = -22. \end{cases}$$

Получена система, эквивалентная исходной. Но она приведена к треугольному виду и из нее легко находится решение.

2. Обратный ход. Из последнего уравнения имеем $x_3 = \dfrac{-22}{-11} = 2$, из второго $x_2 = (5 - 4\cdot 2)/(-1) = 3$ и из первого $x_1 = x_3 - x_2 = 2 - 3 = -1$.**Ответ:** $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 2$

Мы уже обращали внимание на то, что элементарные преобразования СЛАУ затрагивают лишь коэффициенты системы. Поэтому удобнее записывать коэффициенты системы в расширенную матрицу и работать далее с ней.

Пример 1.7. Решить систему из примера 1.4 методом Гаусса.

Решение.

1.Прямой ход. Формируем расширенную матрицу и, последовательно получая нули в первом и втором столбцах с помощью элементарных преобразований, приводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь при переходе от первой матрицы ко второй в качестве рабочей выступила первая строка. С ее помощью получены нули в первом столбце во второй и третьей строках. При переходе от второй матрицы к третьей рабочей является вторая строка; умножив ее на (-2) и сложив с третьей, получили нуль в позиции a_{32}.

2.Обратный ход. Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ \quad -x_2 \qquad = \ 1; \\ \qquad\quad x_3 = \ 1. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений имеем $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

Из первого $x_1 = -1 - x_2 - x_3 = -1 - 1 - 1 = -3$.**Ответ:** $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

2. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения.

Метод Гаусса позволяет устанавливать совместность и несовместность СЛАУ, а для совместной и неопределенной СЛАУ находить множества решений. Проиллюстрируем эти качества метода Гаусса вновь на примерах.

Пример 1.8. Решить систему из примера 1.5 методом Гаусса.

Решение. 1. Прямой ход. Переставим сразу в расширенной матрице первую и третью строки

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 3 & 1 & -2 & | & 7 \\ 2 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 4 & -14 & | & 4 \\ 0 & 2 & -7 & | & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 2 & -7 & | & 2 \\ 0 & 4 & -14 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 2 & -7 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

При переходе от первой матрицы ко второй нули в первом столбце получены: во второй строке прибавлением к ней первой строки, предварительно умноженной на (-3); в третьей строке – прибавлением к ней первой строки, умноженной на (-2). При переходе от второй матрицы к третьей переставлены вторая и третья строки.

2.Обратный ход. Последней матрице соответствует система из двух уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1; \\ \quad 2x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, т.е. является совместной, но неопределенной. Находится множество решений следующим образом. Переменные x_1, x_2, находящиеся в углах ступеньки, остаются в левой части уравнений, а переменная x_3 объявляется свободной и переносится в правые части уравнений вместе со своими коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 4c; \\ \quad 2x_2 = 2 + 7c. \end{cases}$$

Здесь $x_3 = c$, c – произвольное число (параметр).

Последняя система является определенной, но относительно параметра c. Из второго уравнения имеем $x_2 = 1 + 7/2 \cdot c$, из первого $x_1 = x_2 + 1 - 4c = 1 + 7/2 \cdot c + 1 - 4c = 2 - 1/2 \cdot c$.

Ответ: $x_1 = 2 - c/2$; $x_2 = 1 + 7c/2$; $x_3 = c$, где c – произвольное число $(c \in \mathbf{R})$.

Из рассмотренного примера следует, что если в результате прямого хода СЛАУ приводится к ступенчатому (трапециевидному) виду с числом уравнений, меньшим, чем число неизвестных, то она имеет бесконечное множество решений.

Пример 1.9. Исследовать систему

$$\begin{cases} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ \ 7x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Прямой ход

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ -2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 7 & -8 & 5 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2)(-7) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & 1 & | & 10 \\ 0 & 6 & -2 & | & -25 \end{pmatrix} (2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице отвечает система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \\ \quad -3x_2 + x_3 = 10; \\ \qquad\qquad 0 = -5. \end{cases}$$

Очевидно, она несовместна, так как $0 \neq -5$. **Ответ:** СЛАУ несовместна.

Правило. Если на некотором шаге прямого хода все элементы некоторой строки расширенной матрицы равны нулю, кроме последнего элемента (элемента в столбце свободных членов), то система несовместна.

Задачи для самостоятельной работы

Следующие СЛАУ решить по правилу Крамера:

1. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 = 8, \\ 4x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + y = 12. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} -x + 5y = 2, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 3, \\ 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 32, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -9. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

Следующие системы исследовать с помощью метода Гаусса и найти их решения в случае совместности:

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 5. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - 7 = 0. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Найти ранги следующих матриц:

17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответы

1. $x_1 = 2; \quad x_2 = -5$. **2.** $x = 4, \quad y = 0$.
3. $x_1 = 0; \quad x_2 = 3$. **4.** $x = 11/7; \quad y = 5/7$.
5. $x_1 = 1/3; \quad x_2 = -1/3; \quad x_3 = 14/3$.
6. $x_1 = 1/2; \quad x_2 = -3/2; \quad x_3 = 1$. **7.** $x_1 = 5; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = -1$.
8. $x_1 = 2; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -2$. **9.** $x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1$.
10. $x_1 = 3; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 2$.
11. $x_1 = (9 - 7c)/5; \; x_2 = (1 + 2c)/5; \; x_3 = c, \; \mathbf{c} \in \mathbf{R}$.
12. $x_1 = 1; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1$. **13.** Система несовместна.
14. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **15.** $x_1 = 7c, \; x_2 = -2c, \; x_3 = -5c, \; c \in \mathbf{R}$.
16. $x_1 = 4c, \quad x_2 = -5c, \quad x_3 = -7c, \; c \in \mathbf{R}$. **17.** 3. **18.** 2.

3.4.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили решение систем *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса и по правилу Крамера;освоили понятие о совместность систем линейных алгебраических уравнений и критерии Кронекера-Капелли.
- приобрели умения и навыки решения систем *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса и по правилу Крамера, использования критерия Кронекера-Капелли для проверки совместность систем линейных алгебраических уравнений.

3.5 Практическое занятие № 5 (2 часа).

Тема: «Однородная и неоднородная системы. Фундаментальная система решений»

3.1 Задание для работы:

1. Однородные системы. Фундаментальные системы решений.

2 Неоднородные системы.

3. Прикладные задачи. Другие методы решения СЛАУ

3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Однородные системы. Фундаментальные системы решений.

<u>Определение.</u> Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется **однородной**. Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Теорема. Однородная СЛАУ имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т.е. $r(A) < n$.

Свойства решений однородных СЛАУ: любая линейная комбинация нескольких решений однородной СЛАУ вновь будет решением этой системы.

Определение. Система линейно независимых решений однородной СЛАУ называется **фундаментальной**, если каждое решение системы является линейной комбинацией этих решений.

Теорема. Если ранг $r(A) = r$ матрицы однородной СЛАУ меньше числа неизвестных, т.е. $r < n$, то всякая **фундаментальная** система решений состоит из $n - r$ решений.

Теорема. Если **фундаментальной** системой решений однородной СЛАУ является $e(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k)$, то общее решение этой системы имеет вид

$$\vec{x}^* = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \vec{e}_i .$$

2 Неоднородные системы.

3. Прикладные задачи. Другие методы решения СЛАУ

Теорема. Общее решение любой СЛАУ из m уравнений с n неизвестными рано сумме общего решения соответствующей ей однородной СЛАУ и произвольного частного решения данной СЛАУ, т.е.

$$\vec{x} = \vec{x}^* + \vec{x}^0 \equiv \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \vec{e}_i + \vec{x}^0 .$$

3.5.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили элементы теории однородных и неоднородных систем, понятие о фундаментальной системе решений;
- приобрели умения и навыки решения однородных и неоднородных систем.

3.6 Практическое занятие № 6 (2 часа).

Тема: «Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек»

3.6.1 Задание для работы:

1. Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами.

2. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек

3.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Векторы и скаляры. Линейные операции над векторами.

Задача 2.1. В прямоугольнике ABCD (рис. 2.19) даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Найти векторы $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FC}$, если F – середина стороны AB, а E – середина стороны DC.

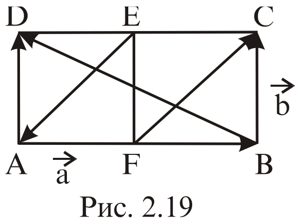


Рис. 2.19

Решение. Вектор $\overrightarrow{BD}$ можно найти двумя способами. По правилу параллелограмма как сумму векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) = \vec{b} - \vec{a} .$$

С другой стороны, можно рассуждать так: вектор $\overrightarrow{BD}$ направлен из конца вектора $\overrightarrow{AB}$ в конец вектора $\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\right)$ и тогда по определению разности векторов $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Аналогично $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF} = -1/2\,\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \left(-\overrightarrow{BC}\right) = -1/2\vec{a} - \vec{b}$,

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = 1/2\,\overrightarrow{A\mathbf{B}} + BC = 1/2\vec{a} + \vec{b}.$$

Ответ: $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{EA} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{FC} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

2. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек

Задача 2.2. Вектор $\vec{a} = (3;2;-1)$ приложен в точке $A = (-1;2;4)$. Найти координаты точки B – конца вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а также орт $\overrightarrow{a^0}$ вектора $\vec{a}$.

Решение. Пусть точка B имеет координаты $x; y; z$. В соответствии с формулой (2.9) получаем

$$(3,2,-1) = (x-(-1),\, y-2,\, z-4),$$

откуда, по определению равенства двух векторов, имеем $3 = x+1$, $2 = y-2$, $-1 = z-4$ или $x = 2,\quad y = 4,\quad z = 3$. Первая часть задачи решена.

Найдем $\overrightarrow{a^0}$. Поскольку $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}$ и $\overrightarrow{a^0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$,

то $\overrightarrow{a_0^0} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, -\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$.**Ответ:** $B(2;4;3)$, $\quad \overrightarrow{a^0} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, -\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

Задача 2.3. Выяснить, можно ли из векторов $\vec{a} = (-1;2)$; $\vec{b} = (2;0)$; $\vec{c} = (-7;6)$ выделить базис на плоскости. Если такой базис существует, разложить третий вектор по базису.

Решение. Как известно (п.2.4), всякие три вектора на плоскости линейно зависимы, т.е. заданные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в совокупности линейно зависимы. Базис на плоскости образуют два неколлинеарных вектора. Проверим, образуют ли базис векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По определению линейной независимости векторов в этом случае равенство $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = 0$ должно выполняться только для нулевых λ_1 и λ_2. Проверим, так ли это.

$$\lambda_1(-1,2) + \lambda_2(2,0) = (0,0)$$

или

$$(-\lambda_1 + 2\lambda_2,\, 2\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0) = (0,0),$$

откуда

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Значит, векторы $\vec{a}, \overleftarrow{b}$ линейно независимы, т.е. образуют базис на плоскости. Разложим теперь вектор $\vec{c}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где α и β – числа, подлежащие определению. Перепишем линейную комбинацию $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ в координатной форме

$$(-7,6) = \alpha(-1,2) + \beta(2,0) \text{ или } (-7,6) = (-\alpha + 2\beta,\ 2\alpha),$$

откуда получаем систему $\begin{cases} -\alpha + 2\beta = -7, \\ 2\alpha \qquad\ = 6. \end{cases}$

Решая ее, находим $\alpha = 3,\quad \beta = -2$. Итак, $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.**Ответ:** базис $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$; $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

2.6.3. Задачи для самостоятельной работы

1. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Выразить через $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторы, совпадающие с медианами $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{CL}$ треугольника.

2. В прямоугольнике $ABCD$ даны векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$, совпадающие с диагоналями параллелограмма. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, совпадающие со сторонами прямоугольника.

3. Определить начало вектора $\vec{a}=(2;-3;-1)$, если его конец совпадает с точкой $B(1;-1;2)$. Найти также модуль и орт $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$.

4. В пространстве в прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(1;1;1)$, $B(-3;2;0)$. Найти расстояние от этих точек до начала координат и проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на координатные оси.

5. Даны две координаты $a_x=4$, $a_y=-12$ вектора $\vec{a}$. Определить третью координату $\vec{a}_z$ при условии, что $|\vec{a}|=13$.

6. На плоскости даны два вектора $\vec{p}=(2;-3)$ и $\vec{q}=(9;4)$. Проверить, образуют ли они базис и, если образуют, найти разложение вектора $d=(49;14)$ по базису $\langle\vec{p},\vec{q}\rangle$.

7. Проверить, образуют ли базис векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

а) $\vec{a}=(-2;1;3)$, $\vec{b}=(0;2;1)$, $\vec{c}=(6;4;0)$,б) $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(-1;2;1)$, $\vec{c}=(1;2;3)$.

Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не образуют базис, то найти линейную зависимость между ними.

ОТВЕТЫ

1. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CL}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$.

2. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$.

3. $A(-1;2;3)$, $|\vec{a}|=\sqrt{14}$, $\overrightarrow{a^0}=\frac{1}{\sqrt{14}}(2;-3;-1)$.

4. $\rho(O,A)=\sqrt{3}$, $\rho(O,B)=\sqrt{13}$, $\text{Пр}_{0x}AB=-4$, $\text{Пр}_{0y}AB=1$, $\text{Пр}_{0z}AB=-1$.

5. ± 3. 6. $\vec{d}=2\vec{p}+5\vec{q}$. 7. а) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис; б) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ линейно зависимы: $\overrightarrow{2a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$.

3.6.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о векторах и скалярах, линейных операциях над векторами, декартовых координатах векторов и точек;
- приобрели умения и навыки выполнения линейных операций над векторами, в то числе в координатной форме.

3.7 Практическое занятие № 7 (2 часа).

Тема: «Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов»

3.7.1 Задание для работы:

1. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.

2. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов.

3.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.

Скалярное произведение векторов. Решение типовых задач

Задача 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{a} + 2\vec{b}\right)$.

Решение

$$\left(3\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{a} + 2\vec{b}\right) = 3(\vec{a};\vec{a}) + 6(\vec{a};\vec{b}) - 2(\vec{b};\vec{a}) - 4(\vec{b};\vec{b}) = = 3|\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 + 4(\vec{a};\vec{b}) = 3\cdot 9 - 4\cdot 16 + 4|a|\cdot|b|\cdot\cos\frac{2\pi}{3} =$$

$= 27 - 64 + 4\cdot 3\cdot 4\cdot(-1/2) = -61$.**Ответ:** -61.

Задача 2. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут перпендикулярны.

Решение. Предположим, что $\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right) \perp \left(\vec{a} - \alpha\vec{b}\right)$, тогда

$$\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{a} - \alpha\vec{b}\right) = 0 \Rightarrow (\vec{a},\vec{a}) - \alpha(\vec{a},\vec{b}) + \alpha(\vec{b},\vec{a}) - \alpha^2(\vec{b},\vec{b}) = 0 \quad \Rightarrow \Rightarrow |\vec{a}|^2 - \alpha|\vec{b}|^2 = 9 \Rightarrow 9 - 25\alpha^2 = 0, \quad \alpha^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{3}{5}.$$

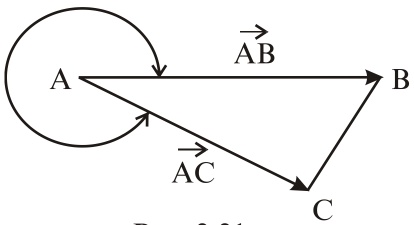


Рис. 2.21

Ответ: $\alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Задача 3. Даны вершины треугольника $A(3;2;4)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Определить его внешний угол при вершине A (рис. 2.21).

Решение.

$\overrightarrow{AB} = (5-3; 1-2; -1-4) = (2; -1; -5)$; $\overrightarrow{AC} = (1-3; -2-2; \ 1-4) = (-2; -4; -3)$;

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \hat{\ } \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2(-2) + (-1)(-4) + (-5)\cdot(-3)}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{4+16+9}} = = \frac{15}{\sqrt{30}\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{15}{58}}$$

.**Ответ:** внешний угол при вершине A равен $2\pi - \arccos\sqrt{\frac{15}{58}}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; -4)$, $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить:а) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, б) $\vec{a}^{\,2}$, в) $\sqrt{\vec{b}^{\,2}}$, г) $\left(2\vec{a} - 3\vec{b}; \vec{a} + 2\vec{b}\right)$, д) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$, е) $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$.

2. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}, \vec{a}) = 3$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. Вычислить $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ и $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$

4. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ взаимно перпендикулярны?

5. Вычислить $\text{Пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, если $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$.

6. Вычислить $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, если $\vec{a} = (5;\, 2;\, 5)$, $\vec{b} = (2;\, -1;\, 2)$.

7. Вычислить работу, производимую силой $\vec{F} = (3;-2;-5)$ при прямолинейном перемещении точки ее приложения из $A(2;-3;5)$ в точку $B(3;-2;-1)$.

8. Даны вершины треугольника $A(-1;\, -2;\, 4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;\, -2;\, 1)$. Найти внутренний угол φ_A при вершине A и внешний φ_B при вершине B.

Ответы

1. а) 22, б) 36, в) 7, г) -200, д) 129, е) 41. **2.** $\vec{x} = (1;\ 1/2;\ -1/2)$.**3.** $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 13$.

4. $\left(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}\right) = \pi/3$.**5.** $\text{Пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -4$.**6.** $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 6$.**7.** $A = 31$. **8.** $\varphi_A = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_B = \dfrac{3\pi}{4}$.

2. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов.

Векторное произведение. Решение типовых задач

Задача 2.7. Дано $|\vec{a}| = 10$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ и $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 12$.Вычислить: $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$.

Решение. $\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$, $\sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = 0{,}8$,

$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 10 \cdot 2 \cdot 0{,}8 = 16$.**Ответ:** $\left|\left[\vec{a}; \vec{b}\right]\right| = 16$.

Задача 2.8. Дано: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.Найти: а) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, б) $\left[3\vec{a} - 2\vec{b};\, \vec{a} + 2\vec{b}\right]$.

Решение: а) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$.б) $\left[3\vec{a} - 2\vec{b};\, \vec{a} + 2\vec{b}\right] = 3\left[\vec{a}, \vec{a}\right] + 6\left[\vec{a}, \vec{b}\right] - 2\left[\vec{b}, \vec{a}\right] - 4\left[\vec{b}, \vec{b}\right] =$

$= 6\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + 2\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = 8\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = 8\left(5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}\right) = 40\vec{i} + 8\vec{j} + 56\vec{k}$.**Ответ:** а) $\left|\left[\vec{a}; \vec{b}\right]\right| = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$;

б) $\left[3\vec{a} - 2\vec{b};\, \vec{a} + 2\vec{b}\right] = 40\vec{i} + 8\vec{j} + 56\vec{k}$.

Задача 2.9. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1;-2;\,0)$, $B(3;\,2;1)$, $C(-1;-4;\,2)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (4;\, 4;\, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0;-2;\, 2)$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|10\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}\right| = \sqrt{57}$$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{57}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

а) $\left|\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\right]\right|$, б) $\left|\left[3\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}\right]\right|$.

2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны?

3. Даны точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = (2;-3;1)$ и $\vec{b} = (1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

5. В пространстве $\mathbf{R}^3$ даны точки: $A(1;1;2)$, $B(3;1;-1)$, $C(0;-2;2)$, $D(3;4;-2)$. Найти координаты точки $M(x;y;z)$, если известно, что $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC}$ и $|DM| = \sqrt{18}$.

6. К точке $M(2;-1;3)$ приложены две силы: $\vec{F}_1 = (5;0;-2)$ и $\vec{F}_2 = (-1;3;2)$. Найти момент равнодействующей этих сил относительно точки M_1, симметрично точке M относительно точки $O(0;0;0)$ начала координат. **Указание:** $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \parallel \vec{x}$.

Ответы: **1.** а) 24; б) 60. **2.** $\vec{a} \parallel \vec{b}$. **3.** $S_\Delta = 14$. **4.** $\vec{x} = (7;5;1)$. **5.** $M_1(0;1;-2)$; $M_2(6;7;-2)$. **6.** $\vec{M} = -18\vec{i} + 24\vec{j} + 20\vec{k}$.

Смешанное произведение векторов. Решение типовых задач

Задача 2.10. Определить ориентацию тройки векторов $\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle$, если $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$.

Решение.

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$. В силу свойства 6 смешанного произведения тройка $\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle$ является правой. **Ответ:** правая тройка.

Задача 2.11. Вычислить объем треугольной пирамиды, заданной своими вершинами в декартовой прямоугольной системе координат: $A(-1;-3;1)$, $B(3;3;-2)$, $C(-1;4;2)$, $D(0;0;5)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (4;6;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (0;7;1)$, $\overrightarrow{AD} = (1;3;4)$,

$$V_{пир} = \frac{1}{6}|AB\cdot AC\cdot AD| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 127 = \frac{127}{6}.$$ **Ответ:** $\frac{127}{6}$.

Задача 2.12. Определить, можно ли провести плоскость через данные четыре точки:

а) $A(3;2;-1)$, $B(1;2;-2)$, $C(-1;0;1)$, $D(1;1;1)$,

б) $A(-2;0;1)$, $B(3;1;2)$, $C(0;-1;3)$, $D(1;2;0)$.

Решение. Если четыре точки лежат в одной плоскости, то любые три вектора, построенные на этих точках, будут компланарны. В силу свойства 5 смешанное произведение таких векторов должно быть равно нулю:

а) $\overrightarrow{AB} = (-2;0;-1)$; $\overrightarrow{AC} = (-4;-2;2)$; $\overrightarrow{AD} = (-2;-1;2)$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Значит, через точки A, B, C, D в случае «а» плоскость провести нельзя;

б) $\overrightarrow{AB} = (5;1;1)$; $\overrightarrow{AC} = (2;-1;2)$; $\overrightarrow{AD} = (3;2;-1)$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Точки A, B, C, D в данном случае лежат в одной плоскости.

Ответ: а) нельзя; б) можно.

Задачи для самостоятельной работы

1. Установить, компланарные ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

а) $\vec{a} = (2;3;-1); \vec{b} = (1;-1;3)$; $\vec{c} = (1;9;-11)$;б) $\vec{a} = (3;-2;1); \vec{b} = (2;1;2)$; $\vec{c} = (3;-1;-2)$.

2. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;1)$ и $D(4;1;3)$ (система координат декартова прямоугольная).

3. Найти длину высоты тетраэдра ABCD, опущенной из вершины D, если заданы координаты вершин $A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$ в декартовой системе координат.

4. Найти расстояние от точки $D(1;-3;2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(2;2;-2)$, $B(-1;0;4)$ и $C(-2;1;3)$.

5. Можно ли тройку векторов $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ взять в качестве базиса трехмерного пространства, если $\vec{a} = (2;-1;3)$, $\vec{b} = (0;2;-4)$ и $\vec{c} = (-1;4;0)$.

Ответы.1. а) компланарные; б) некомпланарные.**2.** $V = 1$.**3.** $h = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$. **4.** $\dfrac{29}{\sqrt{122}}$. **5.** Можно, т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$.

3.7.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о скалярном, векторном и смешанном произведении векторов, их основных свойствах, координатном выражении; приложениях произведений векторов;
- приобрели умения и навыки вычисления скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, использования произведений векторов в приложениях.

3.8 Практическое занятие № 8 (2 часа).

Тема: «Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой»

3.8.1 Задание для работы:

1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.

2.Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

3.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.

Решение типовых примеров

Задача 1. Составить уравнение прямой L, проходящей через **заданную точку** $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей **заданный направляющий вектор** $\vec{q} = (l, m)$.

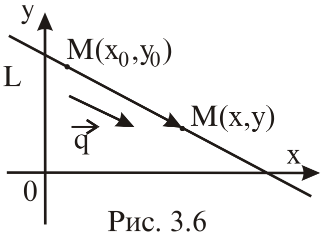


Рис. 3.6

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и образуем вектор $\overline{M_0M}$ (рис. 3.6). Точка M будет лежать на прямой L тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \parallel \vec{q}$. Но если $\overline{M_0M} \parallel \vec{q}$, то существует число $t \in R$ такое, что $\mathbf{\overline{M_0M} = t\vec{q}}$, (3.7)

или в скалярной форме $(x - x_0,\ y - y_0) = t(l, m)$, откуда

$$\begin{cases} \mathbf{x = x_0 + tl,} \\ \mathbf{y = y_0 + tm.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Уравнения (3.7), (3.8) есть искомые **параметрические уравнения** прямой L в векторной (3.7) и скалярной (3.8) формах.

Исключая параметр t из уравнений (3.8), получаем уравнение $\mathbf{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}}$,

(3.9)

называемое **каноническим уравнением** прямой L, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей **заданный направляющий вектор** $\vec{q} = (l, m)$.

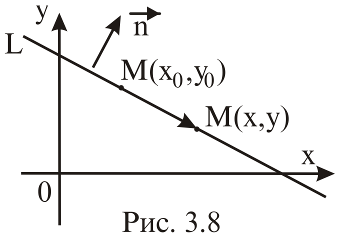


Рис. 3.8

Задача 2. Составить уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной к заданному вектору $\vec{n} = (A, B)$.**Решение.** Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка на искомой прямой L, не совпадающая с заданной точкой M_0. Образуем вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0).$$

По условию $\vec{n} \perp L$ и, значит, $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$ (рис. 3.8).

Из условия перпендикулярности векторов получаем искомое уравнение прямой L в векторной форме $\mathbf{\left(\vec{n}, \overline{M_0M}\right) = 0}$. (3.12)

Перепишем его в скалярной форме $\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$. (3.13)

Уравнения (3.12) в векторной форме и (3.13) в скалярной являются искомым уравнением прямой L, **проходящей** через **заданную точку** $M_0(x_0, y_0)$ и **перпендикулярной к заданному вектору** $\vec{n} = (A, B)$.

Рассмотрим конкретный пример. **Пример 3.2.** Составить уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(5; 1)$ параллельно прямой $L_1:\ 3x + 2y + 5 = 0$.

Решение. По условию $L \parallel L_1$. Поэтому вектор нормали $\vec{n}_1 = (3; 2)$ прямой L_1 будет одновременно и вектором нормали прямой L. В результате задача свелась к рассмотренной выше задаче 2: составить уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(3;1)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (3; 2)$. В соответствии с (3.13) получаем окончательно

$L_1:\ 3(x - 5) + 2(y - 1) = 0$, или $L_1:\ 3x + 2y - 17 = 0$. **Ответ:** $L_1:\ 3x + 2y - 17 = 0$.

Задача 3. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные не совпадающие точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

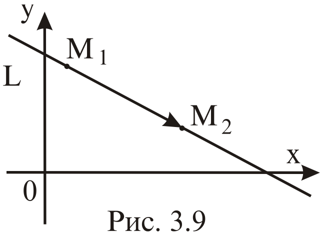


Рис. 3.9

Решение. Образуем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 3.9). Он параллелен прямой L, и, значит, его можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{q}$ этой прямой. В результате задача свелась к задаче 1: составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку $\mathbf{M_1}$ (или $\mathbf{M_2}$) и имеющей заданный направляющий вектор

$$\vec{\mathbf{q}} = \overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}} = (\mathbf{x_2 - x_1}; \quad \mathbf{y_2 - y_1}).$$

С учетом (3.3) получим **искомое уравнение**

$$\frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}} \tag{3.14}$$

прямой L, проходящей через две заданные точки.

Задача 4. Составить уравнение прямой L, отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки величиной a и $b(a \neq 0, \quad b \neq 0)$.

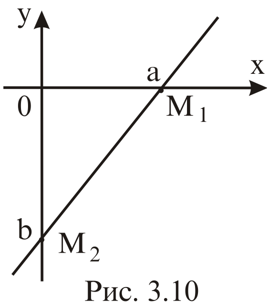


Рис. 3.10

Решение. Введем в рассмотрение точки $M_1(a; 0)$ и $M_2(0; b)$ (рис. 3.10). В соответствии с формулой (3.14) можем записать

$$L: \quad \frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \quad \text{или} \quad -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}.$$

Отсюда получаем **уравнение прямой в отрезках** $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1}$.

(3.15)

Замечание. Параметр $a > 0$, если прямая L пересекает ось Ox в ее положительной части, и $a < 0$, если прямая L пересекает ось Ox в ее отрицательной части. Аналогично определяется знак параметра b, но относительно оси Oy. Так, на рис. 3.10 $a > 0$, $b < 0$.

Пример 3.3. Составить уравнения сторон треугольника ABC, а также уравнение высоты, опущенной из вершины B, если заданы координаты вершин $B(3; 4)$ и $C(6; 0)$, угловой коэффициент $k_{AB} = 3$ стороны AB и направляющий вектор $\vec{q}_{AC} = (5; 2)$ стороны AC.

Решение. Уравнение стороны BC составим как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки B и C:

$$L_{BC}: \quad \frac{x - 3}{6 - 3} = \frac{y - 4}{0 - 4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{-4}.$$

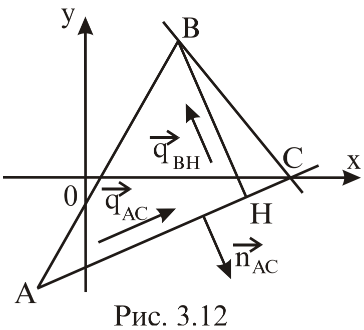


Рис. 3.12

Для стороны AB известны координаты точки B и угловой коэффициент $k_{AB} = \operatorname{tg}\alpha = 3$ (рис. 3.12). Поэтому ее уравнение удобно записать, используя формулу (3.16):

$$L_{AB}: \quad y - 4 = 3(x - 3) \Rightarrow 3x - y - 5 = 0.$$

Уравнение стороны AC можно записать как каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $C(6;0)$ с заданным направляющим вектором $\vec{q}_{AC} = (5; 2)$:

$$L_{AC}: \quad \frac{x - 6}{5} = \frac{y - 0}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x - 5y - 12 = 0.$$

Вектор нормали $\vec{n}_{AC} = (2;-5)$ прямой AC можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{q}_{BH} = (2; -5)$ высоты BH $(\vec{n}_{AC} \perp AC \quad \text{и} \quad \vec{g}_{BH} \perp AC)$. Тогда в соответствии с (3.9) получаем уравнение высоты BH:

$$L_{BH}: \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 4}{-5} \quad \Rightarrow \quad -5x - 2y + 23 = 0.$$

Ответ. $L_{AB}: \quad 3x - y - 5 = 0$; $L_{AC}: \quad 2x - 5y - 12 = 0$; $L_{BC}: \quad \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{-4}$;

$L_{BH}: \qquad 5x+2y-23=0.$

2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Задача 5. Найти расстояние $\rho(M_0, L)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $L: \quad Ax+By+C=0$.
Решение. Пусть точка $M_0 \notin L$. В противном случае $\rho(M_0, L)=0$. Расстояние $\rho(M_0, L)$ находится по формуле

$$\boldsymbol{\rho(M_0, L)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}. \qquad (3.18)$$

Так, если $M_0(5;6)$, а $L: -4x+3y+7=0$, то $\rho(M_0; L)=\dfrac{|-4\cdot5+3\cdot6+7|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\dfrac{5}{5}=1$.

Пример 3.4. Установить взаимное расположение прямых

а) $2x+3y+1=0$ и $-6x+4y-1=0$;

б) $x+3y-5=0$ и $2x+6y+1=0$;

в) $-5x+y-2=0$ и $15x-3y+6=0$

и в случае их пересечения найти угол между ними, а для параллельных прямых – расстояние между ними.

Решение: а) здесь $\vec{n}_1=(2;3)$, $\vec{n}_2=(-6;4)$. Очевидно $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, так как $\dfrac{2}{-6}\neq\dfrac{3}{4}$. Это означает, что прямые пересекаются. Найдем угол между ними. В соответствии с (3.20) имеем

$$\cos\alpha=\frac{2\cdot(-6)+3\cdot4}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\sqrt{(-6)^2+4^2}}=\frac{0}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}}=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны;

б) прямые $L_1: x+3y-5=0$ и $L_2: 2x+6y+1=0$ параллельны, поскольку коэффициенты A, B в уравнениях этих прямых пропорциональны: $1/2=3/6$.

Расстояние между прямыми L_1 и L_2 равно расстоянию от произвольной точки, лежащей, например, на прямой L_1, до второй прямой L_2. Зададим произвольно одну координату, например $x=-1$, точки на прямой L_1. Из уравнения L_1 находим $3y=6$ или $y=2$, т.е. точка $M_0(-1;2)\in L_1$. Далее по формуле (3.18) находим расстояние $\rho(M_0, L_2)=\rho(L_1, L_2)$:

$$\rho(M_0, L_2)=\frac{|2\cdot(-1)+6\cdot2+1|}{\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{11}{2\sqrt{10}};$$

в) здесь $\dfrac{-5}{15}=\dfrac{1}{-3}=\dfrac{-2}{6}$, т.е. пропорциональны все коэффициенты A, B, C в уравнениях прямых L_1 и L_2. Значит, прямые L_1 и L_2 совпадают.

Ответ: а) прямые перпендикулярны; б) прямые параллельны: $\rho(L_1, L_2)=\dfrac{11}{2\sqrt{10}}$;
в) прямые L_1 и L_2 совпадают.

Задачи для самостоятельной работы

1. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4;2)$.

2. Определить точки пересечения линии $y=x^2-4x+3$ с осями координат и построить ее.

3. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Ox и от точки $F(0;2)$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-5)$ и:

а) перпендикулярной к прямой $2x+6y-1=0$;

б) перпендикулярной к вектору $\vec{n}=(-1;3)$;

в) проходящей через точку $M_1(-2;1)$.

5. Составить уравнения сторон квадрата $ABCD$, если известны координаты смежных вершин $A(2;1)$, $B(6;4)$.

Указание. Рассмотреть один из двух квадратов, а именно лежащий в верхней полуплоскости относительно стороны AB.

6. Найти угол между прямыми

$$L_1:\quad y=3x+6 \quad \text{и} \quad L_2:\quad 2x-3y+5=0.$$

7. Установить взаимное расположение прямых

$$\begin{array}{llcl} \text{а)} & -4x+y+3=0 & \text{и} & 4x+3y-4=0, \\ \text{б)} & 3x-5y+1=0 & \text{и} & 9x-15y-6=0, \\ \text{в)} & x+3y-6=0 & \text{и} & -4x-12y+24=0 \end{array}$$

,

в случае их пересечения найти угол между ними, а для параллельных прямых – расстояние между ними.

8. Найти основание F перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(-3;4)$ на прямую $L:\quad 2x-3y-6=0$.

9. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого $A(-4;2)$, $B(2;-5)$, $C(5;0)$.

10-11. Построить область, определяемую неравенствами

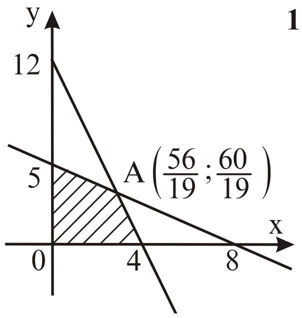
$$\begin{cases} 3x+y-12\le 0, \\ 5x+8y-40\le 0, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y-30\le 0, \\ 5x+2y-40\le 0, \\ x-4y-2\le 0, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0. \end{cases}$$

Ответы. 1. $2x-y+5=0$. **2.** $(1;0)$; $(3;0)$; $(0;3)$. **3.** $y=x^2/4+1$. **4.** а) $3x-y-14=0$; б) $-x+3y+18=0$; в) $6x+5y+7=0$. **5.** $AB:\quad 3x-4y-2=0$; $CD:\quad 3x-4y+23=0$; $DA:\quad 4x+3y-11=0$; $BC:\quad 4x+3y-36=0$. **6.** $\alpha=\arccos\left(9/\sqrt{130}\right)$.

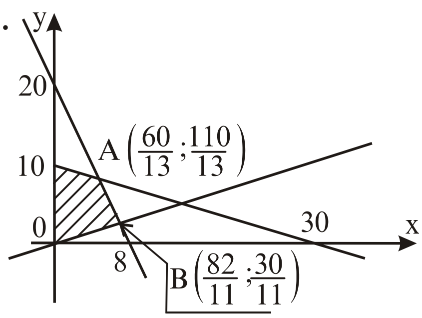
7. а) прямые пересекаются: $\alpha=\arccos\left(\dfrac{-13}{5\sqrt{17}}\right)$; б) прямые параллельные: $\rho(L_1,L_2)=3/\sqrt{34}$; в) прямые совпадают: $\rho(L_1,L_2)=0$. **8.** $F(9/13;-20/13)$.

9. $(1;-1)$ - точка пересечения медиан; $(8/3;-2)$ - точка пересечения высот.

10.



11.



3.8.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили основные типовые задачи для прямой на плоскости;
- приобрели умения и навыки решения основных типовых задач для прямой на плоскости.

3.9 Практическое занятие № 9 (2 часа).

Тема: «Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью»

3.9.1 Задание для работы:

1. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение плоскости и прямой в пространстве.
2. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

3.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

2. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Решение типового варианта

Задача №1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(2;-3), B(5;1),C(3;-4). Не находя координаты вершины D, найти:

1) уравнение стороны AD;
2) уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;
3) длину высоты BK;
4) уравнение диагонали BD;
5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Решение. Сначала построим чертеж. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $A(2;-3)$, $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Построим отрезки AB и BC.

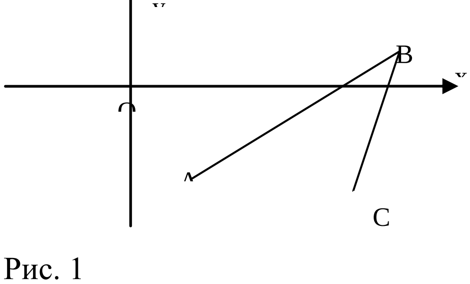


Рис. 1

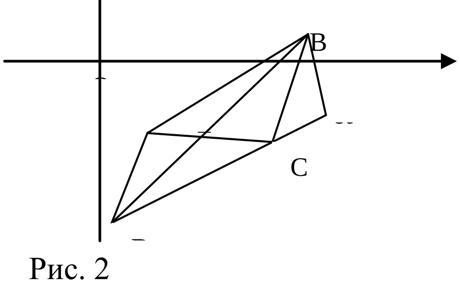


Рис. 2

Достроим полученный рисунок до параллелограмма и нанесем на чертеж высоту BK.

1) Составим уравнение прямой AD.

а) Предварительно найдем уравнение прямой ВС. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (3.1)$$

По условию $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Подставим координаты точек B и C в уравнение (3.1): $\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-1}{-4-1}$, т.е. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-1}{-5}$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, то есть в виде $Ax+By+C=0$. Для этого в последнем уравнении избавимся от знаменателей $-5(x-5)=-2(y-1)$ и проведем преобразования, перенося все слагаемые в левую часть равенства: $-5x+2y+23=0$ или $5x-2y-23=0$.

Из этого уравнения выразим y: $-2y=-5x+23$; $y=\frac{5}{2}x-\frac{23}{2}$. Получили уравнение вида $y=kx+b$ - уравнение с угловым коэффициентом.

б) Воспользуемся тем фактом, что противоположные стороны параллелограмма параллельны. Составим искомое уравнение прямой AD как уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ в данном направлении, имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, (3.2)

где направление определяется угловым коэффициентом k.

Условие параллельности двух прямых $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ имеет вид

$$k=k_1 \qquad (3.3)$$

По условию задачи $A(2;-3)$, прямая BC: $y=\frac{5}{2}x-\frac{23}{2}$. Подставим координаты точки A в уравнение (3.2): $y+3=k(x-2)$. Так как прямая AD параллельна прямой BC, то в силу формулы (3.3) их угловые коэффициенты совпадают. Угловой коэффициент прямой BC равен $\frac{5}{2}$, следовательно, уравнение прямой AD имеет вид $y+3=\frac{5}{2}(x-2)$.

Запишем уравнение прямой AD в общем виде. Для этого раскроем скобки и все слагаемые перенесем в левую часть равенства: $-\frac{5}{2}x+y+8=0$. Умножим обе часть равенства на (-2) и получим общее уравнение прямой AD: $5x-2y-16=0$.

Запишем уравнение прямой AD в виде с угловым коэффициентом. Для этого выразим y из общего уравнения: $y=\frac{5}{2}x-8$.

2)Составим уравнение высоты BK, проведенной из вершины B на сторону AD как уравн нение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AD. Условие пер пендикулярности двух прямых $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ имеет вид

$$k=-\frac{1}{k_1} \qquad (3.4)$$

Подставим координаты точки B в уравнение (3.2): $y-1=k(x-5)$. Так как высота BK перпендикулярна прямой AD, то их угловые коэффициенты связаны соотношением (3.4). Угловой коэффициент прямой AD равен $\frac{5}{2}$, следовательно, угловой коэффициент высоты BK равен $-\frac{2}{5}$ и уравнение прямой BK имеет вид $y-1=-\frac{2}{5}(x-5)$. Запишем уравнение высоты BK в общем виде: $2x+5y-15=0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y=-\frac{2}{5}x+3$.

3) Найдем длину высоты BK как расстояние от точки B до прямой AD.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую и определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{3.5}$$

Так как BK перпендикулярна AD, то длина BK может быть найдена с помощью формулы (3.5). По условию $B(5;1)$, прямая AD определяется уравнением $5x-2y-16=0$. В силу формулы (3.5) длина высоты BK равна $d=\frac{|5\cdot 5-2\cdot 1-16|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{|7|}{\sqrt{25+4}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$.

4)Найдем уравнение диагонали BD как уравнение прямой, проходящей через точки B и E, где E - середина отрезка AC.

а) Если $A(x_1;y_1)$ и $C(x_2;y_2)$, то координаты точки $E(x_0;y_0)$ - середины отрезка AC, определяются формулами

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \tag{3.6}$$

По условию $A(2;-3), C(3;-4)$. В силу формул (3.6) имеем: $x_0=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$,

$y_0=\frac{-3-4}{2}=-\frac{7}{2}$. Следовательно $E(\frac{5}{2};-\frac{7}{2})$.

б) Так как точка пересечения диагоналей является их серединой, то точка E (середина отрезка AC) является точкой пересечения диагоналей и диагональ BD проходит через точку E.

Воспользуемся уравнением (3.1). По условию $B(5;1)$, $E(\frac{5}{2};-\frac{7}{2})$. В силу формулы (3.1) уравнение прямой BE (диагонали BD) имеет вид: $\frac{x-5}{\frac{5}{2}-5}=\frac{y-1}{-\frac{7}{2}-1}$ или $\frac{x-5}{-\frac{5}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{9}{2}}$. Запишем это уравнение в общем виде: $9x-5y-40=0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y=\frac{9}{5}x-8$.

5)Найдем тангенс угла между диагоналями BD и AC.

а) Найдем уравнение диагонали AC как уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Воспользуемся уравнением (3.1). По условию $A(2;-3)$, $C(3;-4)$. Следовательно, $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+3}{-4+3}$. Общее уравнение диагонали AC имеет вид $x+y+1=0$, уравнение с угловым коэффициентом – вид $y=-x-1$, угловой коэффициент k_1 прямой AC равен -1.

б) Уравнение диагонали BD имеет вид $y=\frac{9}{5}x-8$, ее угловой коэффициент $k_2=\frac{9}{5}$.

в) Тангенс угла φ между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется формулой

$tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$. Следовательно, $tg\varphi = \left|\dfrac{\frac{9}{5} - (-1)}{1 + \frac{9}{5}\cdot(-1)}\right| = \left|\dfrac{\frac{14}{5}}{-\frac{4}{5}}\right| = \dfrac{7}{2}$. Отсюда $\varphi = arctg\,\dfrac{7}{2}$.

Задача №2. Приведем решения простейших задач, входящих в это задание.

1)Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;3;2)$, $B(-2;1;0)$, $C(4;2;-3)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.7)$$

Тогда уравнение плоскости ABC в силу уравнения (3.7) имеет вид $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -2-1 & 1-3 & 0-2 \\ 4-1 & 2-3 & -3-2 \end{vmatrix} = 0$ или $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, т.е. в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.Для этого раскроем определитель по первой строке. $(x-1)\cdot(10-2)-(y-3)\cdot(15+6)+(z-2)\cdot(3+6)=0$. После преобразований получим: $8x - 21y + 9z + 37 = 0$.

2)Найти нормальный вектор плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$.

Решение. Нормальный вектор $\overline{N}$ - это вектор, перпендикулярный плоскости. Если плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то нормальный вектор имеет координаты $\{A, B, C\}$.

Для плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$ нормальным является вектор $\overline{N} = \{2;3;-1\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\overline{N} = \{2;3;-1\}$ так же является нормальным вектором плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-\lambda\}$ будет являться нормальным вектором рассматриваемой плоскости.

3) Найти косинус угла между плоскостями $2x - 3y + z - 4 = 0$ и $x + 5y + 4z = 0$.

Решение. Угол φ между двумя плоскостями $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ представляет собой угол между их нормальными векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Для плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$ координаты нормального вектора $\overline{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ определяются равенствами $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $C_1 = 1$. Для плоскости $x + 5y + 4z = 0$-равенствами $A_2 = 1$, $B_2 = 5$, $C_2 = 4$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot1 + (-3)\cdot5 + 1\cdot4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + 5^2 + 4^2}} =$$

$$\frac{2 - 15 + 4}{\sqrt{4 + 9 + 1}\cdot\sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{-9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{42}} = -\frac{9}{\sqrt{588}} = -\frac{9}{14\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

4)Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1;-2;5)$ параллельно плоскости P_1: $2x + 3y - z + 5 = 0$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{3.8}$$

Подставим в уравнение (3.8) координаты точки M_0: $A(x-1)+B(y+2)+C(z-5)=0$.Условие параллельности плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{3.9}$$

Так как плоскости P и P_1 параллельны, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости P можно взять нормальный вектор $\overline{N_1}=\{2;3;-1\}$ плоскости P_1, т.е. в формуле (3.9) отношение $\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{-1}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P_1 примет вид $2(x-1)+3(y+2)-(z-5)=0$. Запишем это уравнение в общем виде: $2x+3y-z+9=0$.

5)Найти расстояние от точки $M_0(1,3,-2)$ до плоскости P: $3x-2y+4z-5=0$.

Решение. Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $P: Ax+By+Cz+D=0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, и определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{3.10}$$

Для плоскости $3x-2y+4z-5=0$ координаты нормального вектора $\overline{N}=\{A;B;C\}$ определяются равенствами $A=3$, $B=-2$, $C=4$. Следовательно,

$$d=\frac{|3\cdot 1-2\cdot 3+4\cdot(-2)-5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{16}{\sqrt{29}}.$$

6)Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;-2;3)$, $M_2(3;1;2)$

Решение. Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{3.11}$$

Так как $M_1(1;-2;3)$, $M_2(3;1;2)$, то в силу (3.11) получим уравнения $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-3}{2-3}$ или $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

7)Найти направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$.

Решение. Направляющий вектор $\bar{s}$ - это вектор, параллельный прямой. Если прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$, то направляющий вектор $\bar{s}$ имеет координаты $\{p;q;r\}$.Для рассматриваемой прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$ направляющим вектором является вектор $\bar{s}=\{2;3;-2\}$. Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\bar{s}=\{2;3;-2\}$ так же является направляющим вектором прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-2\lambda\}$ будет являться направляющим вектором рассматриваемой прямой.

8)Найти косинус угла между прямыми $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$.

Решение. Угол φ между двумя прямыми $l_1:\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и

$l_2:\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ представляет собой угол между их направляющими векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

Для прямой $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}_1=\{p_1;q_1;r_1\}$ определяются равенствами $p_1=2, q_1=-2,\ r_1=3$. Для прямой $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$ - равенствами $p_2=3,\ q_2=-4,\ r_2=1$. Значит, $\cos\varphi=\frac{2\cdot3+(-2)\cdot(-4)+3\cdot1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}=$

$\frac{6+8+3}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}=\frac{17}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$.

9)Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(3;2;-1)$ параллельно прямой $l_1:\ \frac{x-5}{4}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-6}{3}$

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$. Здесь $(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки, через которую проходит прямая.В канонические уравнения прямой l подставим координаты точки M_0. Получим: $\frac{x-3}{p}=\frac{y-2}{q}=\frac{z+1}{r}$.

Условие параллельности прямых $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и $\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ имеет вид

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2} \qquad (3.12)$$

Так как прямые l и l_1 параллельны, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять направляющий вектор $\bar{s}_1=\{4;-2;3\}$ прямой l_1, т.е. в формуле (3.12) отношение $\frac{p}{4}=\frac{q}{-2}=\frac{r}{3}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}$.

10) Найти угол между прямой l: $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ и плоскостью P: $2x-y+3z-4=0$.

Решение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Угол φ между прямой и плоскостью равен $\frac{\pi}{2}-\psi$, где ψ - угол между направляющим вектором $\bar{s}$ прямой и нормальным вектором $\bar{N}$ плоскости.

Угол φ между прямой $l: \dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ и плоскостью $P: Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой

$$\sin\varphi=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Для плоскости P: $2x-y+3z-4=0$ координаты нормального вектора $\overline{N}=\{A;B;C\}$ определяются равенствами $A=2$, $B=-1$, $C=3$. Для прямой l: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}=\{p;q;r\}$ - равенствами $p=5$, $q=3$, $r=-1$. Синус угла между прямой и плоскостью равен $\sin\varphi=\dfrac{2\cdot 5+(-1)\cdot 3+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{4}{\sqrt{490}}$. Следовательно, $\varphi=\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{490}}$.

11) Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1,-2,-3)$ перпендикулярно прямой $l: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z-0}{-2}$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Подставим в указанное уравнение координаты точки M_0. Получим: $A(x-1)+B(y+2)+C(z+3)=0$. Условие перпендикулярности плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и прямой $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ имеет вид

$$\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r} \qquad (3.13)$$

Так как искомая плоскость P перпендикулярна прямой l, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости можно взять направляющий вектор $\bar{s}=\{4,1,-2\}$ прямой l, т.е. в формуле (3.13) отношение $\dfrac{A}{4}=\dfrac{B}{1}=\dfrac{C}{-2}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P примет вид $4\cdot(x-1)+1\cdot(y+2)+(-2)\cdot(z+3)=0$. Запишем это уравнение в общем виде: $4x+y-2z-8=0$.

12) Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(5;-3;2)$ перпендикулярно плоскости $P: x+4y-z=0$.

Решение. Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку, имеют вид $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$. Подставим в эти уравнения координаты точки M_0. Получим: $\dfrac{x-5}{p}=\dfrac{y+3}{q}=\dfrac{z-2}{r}$. Условие перпендикулярности прямой $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид $\dfrac{A}{p}=\dfrac{B}{q}=\dfrac{C}{r}$. Так как прямая l перпендикулярна плоскости P, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять нормальный вектор $\overline{N}=\{1;4;-1\}$ плоскости P, т.е. в формуле (3.13) отношение $\dfrac{1}{p}=\dfrac{4}{q}=\dfrac{-1}{r}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-1}$.

13) Найти координаты точки пересечения прямой l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости P: $x+2y-z+5=0$.

Решение. Координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ пересечения прямой $\begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ представляют собой решение системы

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases} \qquad (3.14)$$

Запишем параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-1+t \end{cases}$ и подставим выражения для x,y,z в уравнение плоскости P: $(1+2t)+2\cdot 3t-(-1+t)+5=0$. Отсюда $7t+7=0$; $t=-1$. Подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{cases}$. Следовательно, $M_0(-1;-3;-2)$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(1;2), B(-1;3),C(-4;-2). Не находя координаты вершины D, найти:

6) уравнение стороны AD;
7) уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;
8) длину высоты BK;
9) уравнение диагонали BD;
10) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Задача 2. Даны точки A(1;2;3), B(-1;3;5), C(2;0;4), D(3;-1;2). Найти:

1) общее уравнение плоскости ABC;
2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;
3) расстояние от точки D до плоскости ABC;
4) канонические уравнения прямой AB;
5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB;
6) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.

3.9.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили основные задачи для плоскости и прямой в пространстве;
- приобрели умения и навыки решения основных задач для плоскости и прямой в пространстве.

3.10 Практическое занятие № 10 (2 часа).

Тема: «Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Поверхности второго порядка»

3.10.1 Задание для работы:

1. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.

2. Поверхности второго порядка.

3.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.

Пример 1. Для эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти:а) полуоси,б) координаты фокусов, в) эксцентриситет,г) уравнения директрис.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду. Для этого разделим обе части на 225:

$$\frac{x^2}{\frac{225}{9}} + \frac{y^2}{\frac{225}{25}} = 1, \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Из канонического уравнения имеем $a = 5,\ b = 3$. Далее находим: $c = \sqrt{25 - 9} = 4$; $e = 4/5 = 0{,}8$; $D_1 : x = \frac{-5}{0{,}8} = -\frac{25}{4}$; $D_2 : x = 25/4$.

Ответ: а) $a = 5,\ b = 3$; б) $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$; в) $e = 0{,}8$; г) $D_1 :\ x = -\frac{25}{4}$, $D_2 :\ x = \frac{25}{4}$.

Пример 2. Эллипс, симметричный относительно координатных осей, проходит через точки $M_1\left(2; \sqrt{3}\right)$ и $M_2\left(-1; \sqrt{15}/2\right)$. Написать его уравнение и найти фокальные радиусы точки M_1.

Решение. Поскольку точки M_1 и M_2 принадлежат искомому эллипсу, то координаты этих точек удовлетворяют его уравнениям:

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{(-1)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{15}{4b^2} = 1.$$

Умножим второе уравнение (относительно параметров a и b) на 4 и вычтем из первого. Получим $-12/b^2 = -3$, или $b^2 = 4$. Тогда, например, из первого уравнения получаем $4/a^2 + 3/4 = 1$ и $a^2 = 16$.Теперь можем записать каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Найдем фокусы эллипса. Так как $c = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$, то $F_1\left(-2\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{3};0\right)$. Далее находим эксцентриситет $e = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и, используя формулы (3.52), фокальные радиусы точки M_1:

$r_1 = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4 + \sqrt{3}$; $r_2 = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 - \sqrt{3}$.**Ответ:** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; $r_1 = 4 + \sqrt{3}$; $r_2 = 4 - \sqrt{3}$.

Пример 3. Для гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$ найти:

а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения

директрис.

Решение. Разделив обе части уравнения $16x^2-9y^2=144$ на 144, получим каноническое уравнение $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. В результате: $a=3$; $b=4$; $c=\sqrt{9+16}=5$; $e=5/3$; уравнения асимптот: $y=-4/3\,x$ и $y=4/3\,x$; уравнения директрис: $x=-9/5$; $x=9/5$.**Ответ:** а) $a=3,\ b=4$; б) $F_1(-5;0), F_2(5;0)$; в) $e=\frac{5}{3}$; г) $y=-\frac{4}{3}x$, $y=\frac{4}{3}x$; д) D_1: $x=-\frac{9}{5}$, D_2: $x=\frac{9}{5}$.

Пример 4. Написать уравнение параболы с вершиной в точке $O(0;0)$:

а) симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $M(1;-3)$;

б) симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $M(2;-4)$.

Решение: а) так как парабола симметрична относительно оси Ox и имеет вершину в точке $O(0;0)$, то ее каноническое уравнение $y^2=2px$. Подставляя в него координаты точки M, находим параметр $p:(-3)^2=2\cdot p\cdot 1$, $p=9/2$. В результате имеем $y^2=2\cdot\frac{9}{2}x$, или $y^2=9x$;

б) так как парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку $O(0;0)$, то ее уравнение $x^2=2py$ или $x^2=-2py$. Поскольку ордината y_M точки M отрицательна $(y_M=-4)$, то уравнение параболы x^2-2py. Теперь находим значение параметра p и искомое уравнение параболы $2^2=-2p(-4)$, $p=\frac{1}{2}$ и $x^2=-2\frac{1}{2}y$, или $y=-x^2$.**Ответ:** а) $y^2=9x$; б) $y=-x^2$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Построить эллипс $x^2+4y^2=64$ и найти для негоа) полуоси; б) координаты фокусов;в) эксцентриситет; г) уравнения директрис; д) фокальные радиусы точки $M(-4;2\sqrt{3})$.

2. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что:а) $c=4$; $b=3$;б) $a=6$; $e=0{,}5$.

3. В эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ вписан прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Вычислить площадь прямоугольника, если длина одной его стороны равна 3. Рассмотреть оба варианта расположения прямоугольника в эллипсе.

4. Построить гиперболу $x^2-4y^2=16$ и найти для нее:а) полуоси; б) координаты фокусов;в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис;е) фокальные радиусы точки $M(-8;-2\sqrt{3})$.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что: а) $a=4; c=5$;б) $a=2\sqrt{5}$; $e=\sqrt{1{,}2}$.

6. Гипербола симметрична относительно координатных осей, проходит через точку $M(6;-2\sqrt{2})$ и имеет мнимую полуось $b=2$. Написать ее уравнение и найти фокальные радиусы точки M.

7. Построить параболы:а) $y^2=9x$; б) $y^2=-9x$; в) $x^2=9y$; г) $x^2=-9y$; найти координаты их фокусов и составить уравнения директрис.

Ответы

1. а) $a=8$, $b=4$;б) $F_1\left(-4\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(4\sqrt{3};0\right)$;в) $e=\sqrt{3}/2$; г) $D_1: x=-16/\sqrt{3}$; $D_2: x=16/\sqrt{3}$; д) $r_1=8-2\sqrt{3}$; $r_2=8+2\sqrt{3}$.**2.** а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$.**3.** $S_1=12\sqrt{3}$; $S_2=\dfrac{9}{4}\sqrt{55}$.

4. а) $a=4$; $b=2$;б) $F_1\left(-2\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5};0\right)$; в) $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$;г) $y=-\dfrac{x}{2}$, $y=\dfrac{x}{2}$; д) $D_1: x=-\dfrac{8}{\sqrt{5}}$; $D_2: x=8/\sqrt{5}$;е) $r_1=4\left(\sqrt{5}-1\right)$, $r_2=4\left(1+\sqrt{5}\right)$.**5.** а) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{4}=1$.**6.** $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$; $r_1=6\sqrt{3}$; $r_2=2\sqrt{3}$.**7.** а) $F\left(\dfrac{9}{4};0\right), D: x=-\dfrac{9}{4}$; б) $F\left(-\dfrac{9}{4};0\right)$, $D: x=\dfrac{9}{4}$;в) $F\left(0;\dfrac{9}{4}\right), D: y=-\dfrac{9}{4}$;г) $F\left(0;-\dfrac{9}{4}\right)$, $D: y=\dfrac{9}{4}$.**8.** $M_1\left(3;-3\sqrt{2}\right), M_2\left(3;3\sqrt{2}\right)$.

2. Поверхности второго порядка.

3. .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили основные задачи на кривые и поверхности второго порядка;
- приобрели умения и навыки решения задач на кривые и поверхности второго порядка.

3.11 Практическое занятие № 11 (2 часа).

Тема: «Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики»

3.11.1 Задание для работы:

1. Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества. Множество вещественных чисел.

2. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

3.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

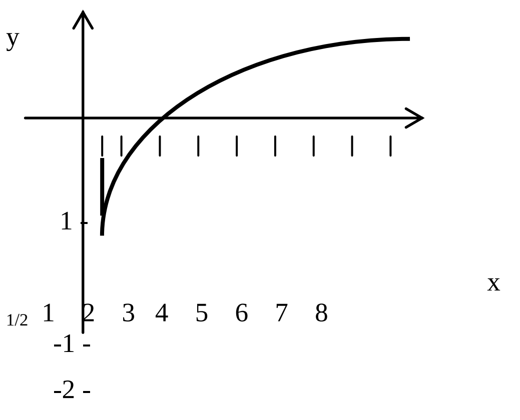
1. Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества. Множество вещественных чисел.

2. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

Решение типовых задач

1) Построить график функции путем сдвигов и деформаций $y=\log_2(1-x)-2$

1. Строим график функции $y=\log_2 x$ (рис.1)



x	y=$\log_2$x
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

2. Симметрично отображаем этот график относительно оси *OY* и получаем график функции $y = \log_2(-x)$ (на рис.2 – сплошная линия).

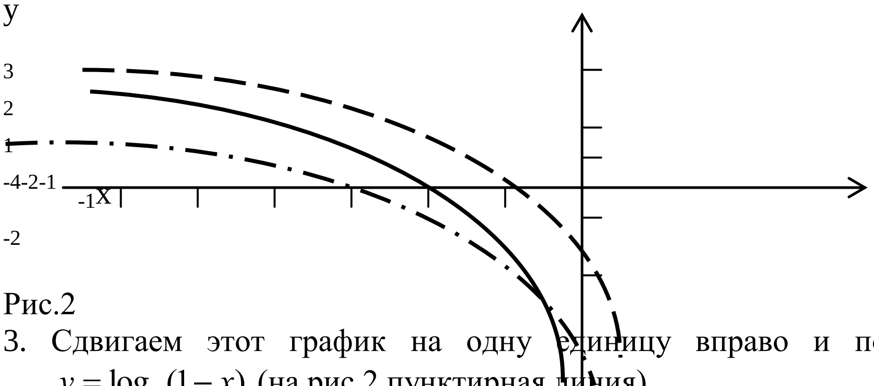


Рис.2

3. Сдвигаем этот график на одну единицу вправо и получаем график функции $y = \log_2(1-x)$ (на рис.2 пунктирная линия).
4. Сдвигаем этот график на 2 единицы вниз и получаем график функции $y = \log_2(1-x) - 2$ (на рис.2 штрихпунктирная линия), что и будет графиком данной функции.

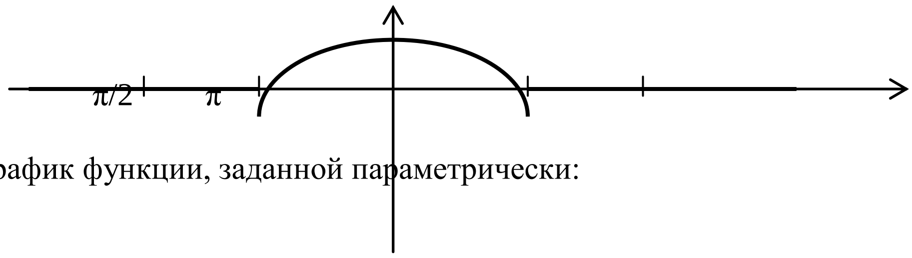
2) Построить график функции, заданной несколькими аналитическими выражениями:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & при \quad |x| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & при \quad |x| \rangle \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Запишем данную функцию по интервалам возрастания аргумента x:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \langle -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & при \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & при \quad x \rangle \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Графиком *f(x)* при $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ будет часть оси OX, при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ часть косинусоиды, затем при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \infty\right)$ снова часть оси *OX*



3) Построить график функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

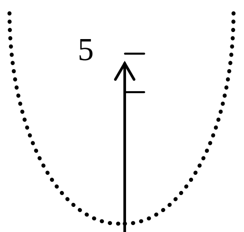
График функции, который надо построить, проходит через точки с координатами $(x(t), y(t))$. Чтобы найти координаты этих точек $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, составим таблицу связи аргумента t и координат точек *(x,y)* в зависимости от t.

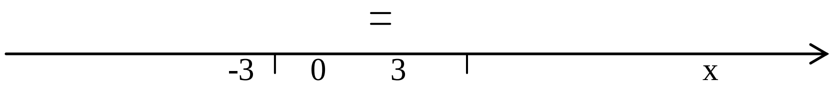
t	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

(x=t-1)

(y=t²-2t+2)

Для построения графика берем две последние строки таблицы и о
ной плоскости точки (-3,10), (-2,5), (-1,2), (0,1), (1,2), (2,5), (3,10), и
находятся в столбцах.



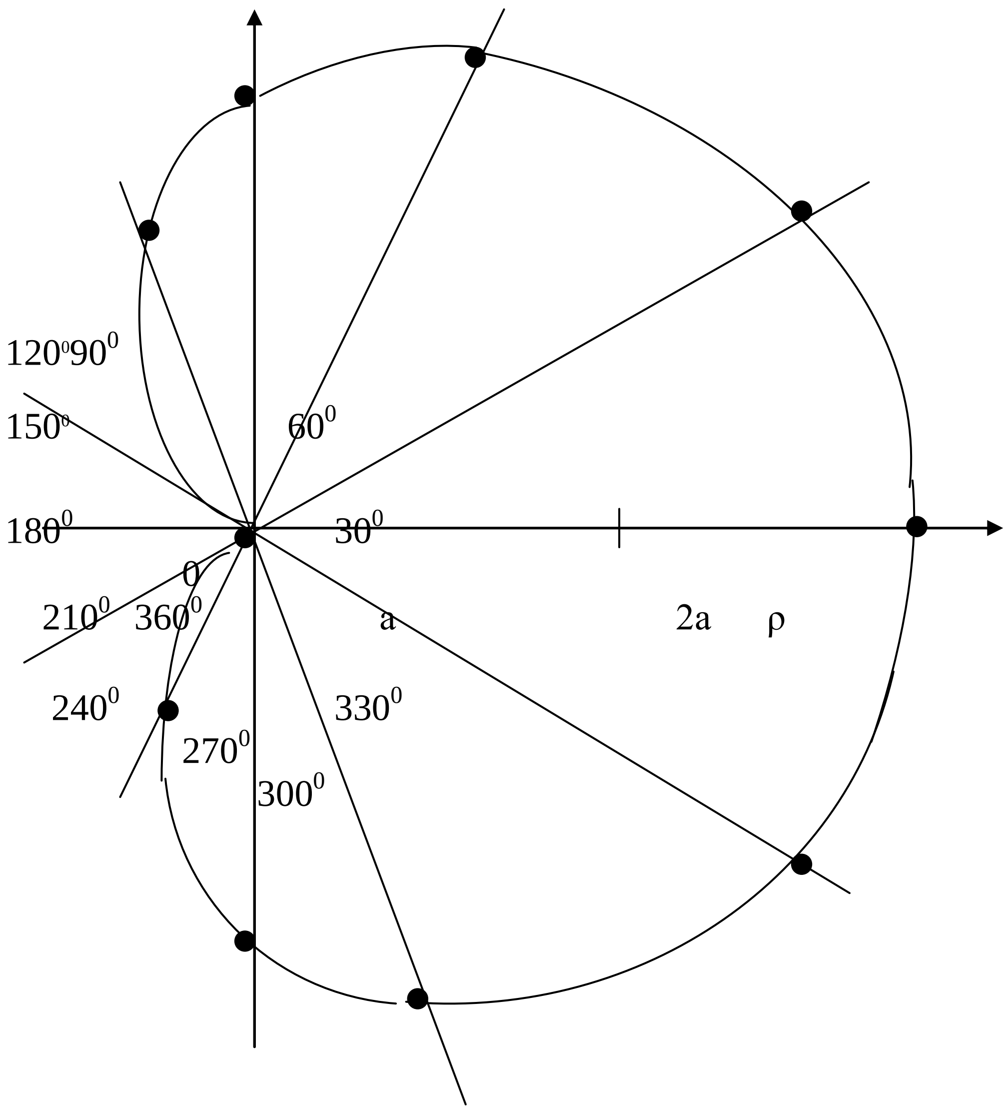


Затем соединяем полученные точки кривой (в данном случае получилась парабола вида $y = x^2$, смещенная на оси OY на 1 вверх, то есть $y = x^2 + 1$).

4)Построить график функции, заданной в полярной системе координат: $\rho = a(1+\cos\varphi)$. Здесь a выступает в роли масштаба. На полярной оси откладываем вместо единиц *a, 2a, 3a* и т.д. Заносим в таблицу значения ρ, вычисленные для углов $\varphi \in [0, 360°]$ $\left(удобнее \dfrac{\rho}{a} \right)$.

φ	0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0	360^0
$\dfrac{\rho}{a}$	2	1,9	1,5	1	0,5	0,1	0	0,1	0,5	1	1,5	1,9	2

На полярной оси откладываем ρ и проводим окружность этого радиуса. Проводим луч под углом φ и находим точку пересечения этой окружности и этого луча. Сначала строим точку $(\rho,\varphi) = (2a, 0)$ так: на оси $o\rho$ откладываем отрезок длины $2a$, это и будет искомая точка. Затем строим точку $(\rho,\varphi) = (1{,}9a; 30^0)$ так: на оси $o\rho$ откладываем отрезок длиной *1,9a*, проводим окружность этого радиуса, строим луч под углом 30^0 и находим точку их пересечения ,это и будет искомая точка и т.д.



откладываем вместо единиц $a, 2a, 3a$ и т.д. Заносим в таблицу значения ρ, вычисленные для углов $\varphi \in [0, 360°]$ $\left(удобнее \dfrac{\rho}{a} \right)$.

Задачи для самостоятельной работы

ЗАДАНИЕ № 1.Построить графики функций путем сдвигов и деформаций:

1. $y = \dfrac{1}{x+2} - 3$ 2. $y = (x-1)^3 + 7$ 3. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - 1$ 4. $y = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

ЗАДАНИЕ № 2. Построение графика функции, заданной несколькими аналитическими выражениями:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad |x| > 2 \\ 1, & при \quad 1 < |x| \le 2 \\ -x^2 + 2, & при \quad |x| < 1 \end{cases}$ 3. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & если \ -\pi \le x \le 0 \\ 2, & если \ 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & если \ 1 \le x \le 4 \end{cases}$

ЗАДАНИЕ № 3. Построить графики функций заданных параметрически:

1. $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{a^3}{t^2 + a^2} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

ЗАДАНИЕ № 4. Построить графики функций в полярных координатах:

1. $\rho = \sin 2\varphi$ 2. $\rho = a\cos 3\varphi$

3.12.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили основные задачи по теме «Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики»;

- приобрели умения и навыки решения основных задач по теме «Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики».

3.12 Практическое занятие № 12 (2 часа).

Тема: «Предел и непрерывность функции действительной переменной»

3.12.1 Задание для работы:

1. Предел функции действительной переменной.
2. Непрерывность функции действительной переменной.

3.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Предел функции действительной переменной.

Решение типовых задач

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2x + 3} = \left| \begin{matrix} подставляем \\ x = 1 \end{matrix} \right| = \dfrac{1 - 5 + 1}{1 + 2 + 3} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$. Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x^2-1}=\left|\begin{matrix}\text{подставляем} & & \\ x=-1 & \text{получаем} & \left(\frac{0}{0}\right)-\text{это неопределенность}\end{matrix}\right|$. Чтобы избавиться от такой неопределенности следует и в числителе, и в знаменателе выделить “ноль”, то есть множители , которые и дают нули. В данном примере *(x+1)* обращается в *0* при x=-1, его и будем выделять, чтобы потом сократить.

1. $x^2-1=(x-1)\underline{(x+1)}$ 2. $x^2-5x-6=0$ (находим корни этого уравнения):

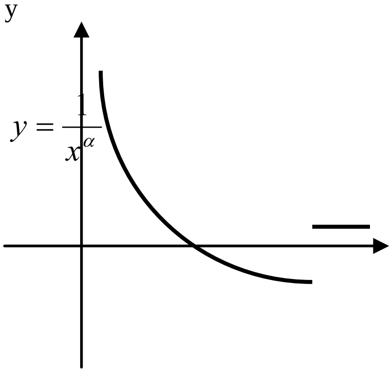
$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm 7}{2}\Rightarrow \begin{matrix}x_1=6\\ x_2=-1\end{matrix}\qquad\Rightarrow\quad x^2-5x-6=(x-6)\underline{(x+1)};$$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-6)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-6}{x-1}\left|\begin{matrix}\text{подставляем}\\ x=-1\end{matrix}\right|=\frac{-1-6}{-1-1}=\frac{7}{2}$. Отв: $\frac{7}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+3x-1}{4x^3+2x+5}=\left|\begin{matrix}\text{при} & \text{подстановке} & \\ x=\infty & \text{получаем} & \left(\frac{\infty}{\infty}\right)-\text{это неопределенность}\end{matrix}\right|$.

Чтобы избавиться от такой неопределенности , следует и в числителе, и в знаменателе вынести за скобки наивысшую степень x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+3x-1}{4x^3+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}(1-4\overset{0}{\frac{1}{x}}+3\overset{0}{\frac{1}{x^2}}-\overset{0}{\frac{1}{x^3}})}{\cancel{x^3}(4+2\underset{0}{\frac{1}{x^2}}+\underset{0}{\frac{5}{x^3}})}=\frac{1}{4}.$$



…учили в ответе отношение коэффициентов
… старших степенях x.Ответ : $\frac{1}{4}$.

4) li…

Для р… формулой сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Домножим числитель и знаменатель на $2+\sqrt{1-x}\Rightarrow$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\left(2-\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to -3}\frac{2^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to -3}\frac{4-(1-x)}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{3+x}}{\cancel{(x+3)}\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\left|\frac{1}{2+\sqrt{1-(-3)}}\right|=\frac{1}{4}.\qquad\qquad \textit{Ответ}:\frac{1}{4}.$$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)=|\infty-\infty|$.

Для решения применяем тот же прием, что и выше: домножаем числитель и знаменатель на сумму этих корней, чтобы получить разность квадратов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cancel{+2x}-3-\left(x^2\cancel{-2x}+1\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=4\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Как и в примере 3) вынесем за скобки x в первой степени, причем

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x^2\left(1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=x\sqrt{1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}\text{, тогда}$$

0

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=4\frac{1}{1+1}=2$$

0 0 0 0

Ответ: 2.

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin15x}{tg13x}=\left|\dfrac{0}{0};\ \textit{применяем первый замечательный предел}: \lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1\right|=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin15x\cdot15x\cdot13x\cdot\cos13x}{15x\cdot13x\cdot\sin13x}=\lim_{x\to0}\frac{15x}{13x}=\frac{15}{13}\quad.$$

11

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}=\left|\ \textit{т.к.}\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{3}{3}=1,\quad \textit{то имеем неопределенность}\ (1)^{\infty}\right|$

Применяем второй замечательный предел: $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$. Выделяем в основании степени “единицу” так: прибавляем *1* и вычитаем *1*.

$$\frac{3x+4}{3x-2}+1-1=1+\frac{3x+4}{3x-2}-\underbrace{1}_{3x-2}=1+\frac{\cancel{3x}+4-\cancel{3x}+2}{3x-2}=1+\frac{6}{3x-2}\quad.$$

В нашем случае $u=\dfrac{6}{3x-2}$, т.е. $\dfrac{1}{u}=\dfrac{3x-2}{6}$, поэтому

$$\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}}=e$$

Подставляем это в пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\boxed{\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}}}^{\frac{6}{3x-2}\cdot2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6}{3x-2}\cdot2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x}{3x-2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}}=e^{\frac{12}{3}}=e^4.e\qquad\text{Ответ: } e^4.$$

2. Непрерывность функции действительной переменной.

Исследовать на непрерывность и построить график функции:

1) $$f(x)=\begin{cases}x, & x\langle -1\\ x^2+1, & -1\le x\le 2\\ 7-x, & x\rangle\, 2\end{cases}$$

Для исследования функции на непрерывность воспользуемся тем, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если выполняются равенства: $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$

Все элементарные функции, входящие в данную функцию, непрерывны на своих интервалах, поэтому проверять непрерывность будем в точках «склеивания».

<u>x=-1</u>

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<-1}} f(x)=\lim_{x\to -1-0} x=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>-1}} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2+1`)=(-1)^2+1=\underline{2}$$

$$f(-1)=(-1)^2+1=\underline{2}$$

Сравниваем эти три числа и видим, что первое равенство в (*) не выполняется. Следовательно, $x=-1$ - точка разрыва I рода, причем неустранимого (т.е. скачок).

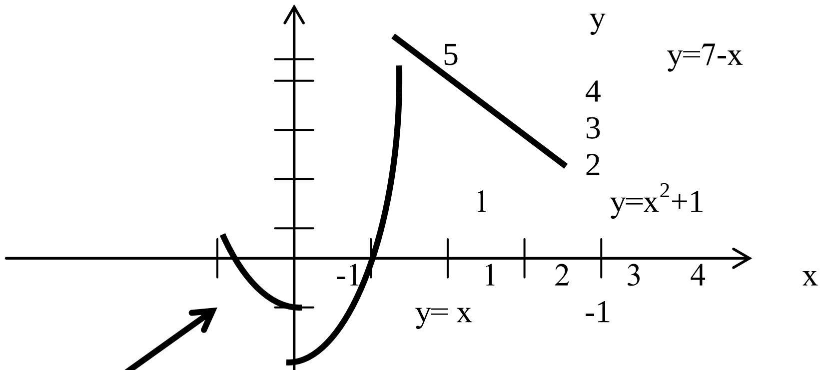
<u>x=2</u>

$$\lim_{\substack{x\to 2-0\\ x<2}} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x^2+1)=2^2+1=\underline{5}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2-0\\ x>2}} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(7-x)=7-2=\underline{5}$$

$$f(2)=2^2+1=\underline{5}$$

Сравниваем эти три числа и видим, что все равенства в (*) выполняются. Следовательно, в точке $x=2$ данная функция непрерывна.



На графике функции на конце прямой $y=x$ в точке (-1,-1) ставим стрелку, так как функция $f(x)=x$ при x, строго меньшем -1, а при $x=-1$ значение функции $f(x)$ вычисляется уже по другой формуле x^2+1. Причем в точках непрерывности никаких стрелок не ставится.

$$2)\ f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

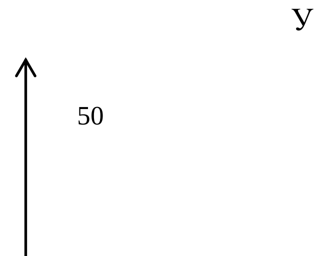
О.Д.З. $x\neq 1$.

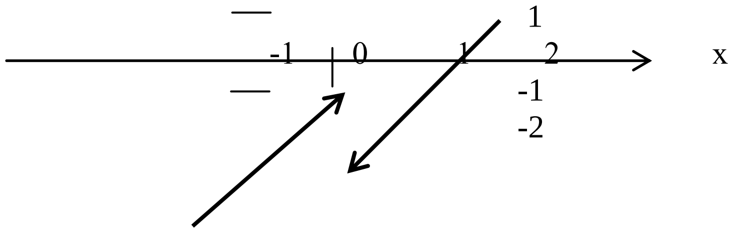
Так как $x=1$ не входит в область допустимых значений (О.Д.З.) функции, то $x=1$ является точкой разрыва данной функции. Выясним с помощью односторонних пределов, разрыв какого рода терпит функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to 1-0\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1-0\\ x<1}}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}(x-2)=1-2=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1+0\\ x>1}} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}(x-2)=1-2=-1$$

Получили, что в (*) первое равенство выполняется, а функция $f(1)$ не существует, т.е. второе равенство не выполняется. Следовательно, x=1 – точка разрыва I рода, причем устранимого. На графике выкалывается точка (1,-1) стрелками, так как x=1 не входит в О.Д.З.





3) $f(x)=1-2^{\frac{1}{x+3}}$ О.Д.З. $x\neq -3$. Значит x=-3 - точка разрыва.

Определяем тип разрыва функции в этой точке. Для этого опять находим левый и правый пределы при $x\to -3$.

Левый предел.

$$\lim_{\substack{x\to -3-0\\ x<-3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -3-0\\ x<-3}}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|\begin{matrix}x+3\to -0\\ т.к.\ x<-3\end{matrix}\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to -\infty\right.$$

$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to 0\Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}\to (1-0)=1\right| =1$$

Правый предел.

$$\lim_{\substack{x\to -3+0\\ x>-3}} f(x)=\lim_{\substack{x-3+0\\ x>-3}}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|\begin{matrix}x+3\to +0\\ т.к.\ x>-3\end{matrix}\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to +\infty\Rightarrow\right.$$

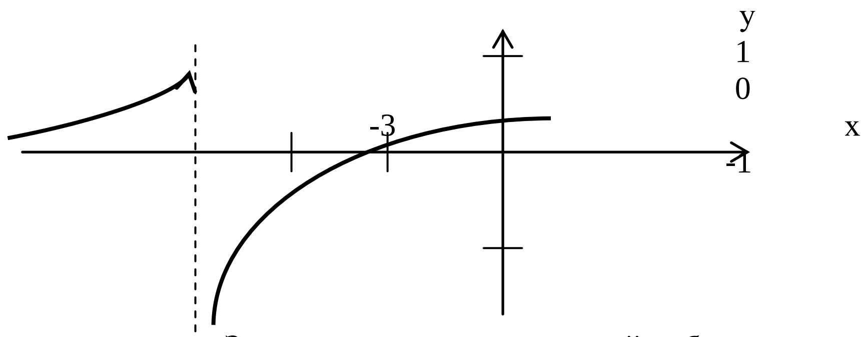
$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to \infty\Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}=(1-\infty)=-\infty\right| =-\infty$$

получился бесконечный предел, поэтому x=-3 – точка разрыва II рода.

Исследуем поведение функции при $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|x+3\to\infty\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to 0\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to 1\Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}\to (1-1)=0\right| =0$$



Задачи для самостоятельной работы

ЗАДАНИЕ № 1. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+5x-1}{x+5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x^2-2x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-1}{x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{3x^2+x-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^3+2x-5}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{6x+1}-1}{3x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{4(1-\cos x)^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tg3x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 2x}$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x-5}\right)^{\frac{2x+3}{5}}$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+4}$

ЗАДАНИЕ 2. Исследовать на непрерывность и построить графики функций:

1) $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), x\le -1\\ (x+1)^3, -1<x<0\\ x, x\ge 0\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-x, x\le 0\\ -(x-1)^2, 0<x<2\\ x-3, x\ge 2\end{cases}$ 3) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 4) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$

3.12 .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили основные задачи, связанные с понятиями предела и непрерывности;
- приобрели умения и навыки решения основных задач, связанных с понятиями предела и непрерывности.

3.13 Практическое занятие № 13 (2 часа).

Тема: «Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически»

3.1 Задание для работы:
1. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах.
2. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

3.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах.
2. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Решение типовых задач

Найти производные функций:

1) $y = e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

$$y' = (e^{x^3-5x^2+4x+12})' = \left| \begin{array}{l} \textit{Можно представить данную функцию как} \quad y = e^u, \\ \textit{где}\, u = x^3 - 5x^2 + 4x + 12.\ \textit{Зная, что}\ \left(e^u\right)' = e^u \cdot u', \textit{получим} \end{array} \right| =$$

$= e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(x^3 - 5x^2 + 4x + 12\right)' = e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(3x^2 - 10x + 4\right)$.Ответ: $y' = \left(3x^2 - 10x + 4\right)e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

2) $y = tg^3 5x$.

$$y' = \left[(tg5x)^3\right]' = \left| \begin{array}{l} \textit{Можно представить}\ y = u^3, \textit{где} \quad u = tg5x. \\ \textit{Причем}\ \left(u^3\right)' = 3u^2 \cdot u' \end{array} \right| = 3(tg5x)^2 \cdot (tg5x)' =$$

$= 3tg^2 5x \dfrac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = 15tg^2 5x \dfrac{1}{\cos^2 5x}$.Ответ: $y' = 15\dfrac{tg^2 5x}{\cos^2 5x}$.

3) $y = 3x \ln x$.

$$y' = 3(x \cdot \ln x)' = \left|(u \cdot v)' = u'v + v'u; \quad (c \cdot u)' = cu'\right| = 3\left[(x)' \cdot \ln x + x(\ln x)'\right] = 3\left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = 3(\ln x + 1)$$

Ответ: $y' = 3(\ln x + 1)$.

4) $y = \dfrac{x^2 - 3 + 1}{2x}$.

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)' = \left|\text{Правило}: \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-3x+1\right)' x - (x)'\left(x^2-3x+1\right)}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)x - \left(x^2-3x+1\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2-3x-x^2+3x-1}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2}$$

Ответ: $y' = \dfrac{x^2-1}{2x^2}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1) $y = e^{\sin x}x^5 + \lg(5x+1)$ 2) $y = \dfrac{\cos^2 3x}{2x+3} - \arcsin 2x$ 3) $y = \sqrt{3x^2+1} + 2^{tgx}$ 4) $y = ctg^2 8x - 2x^3 + 1$

5) $y = arctg^3(\cos x)$ 6) $y = 3^{x^2}\sin 3x$ 7) $y = \dfrac{\arccos 2x}{x} - 8\sqrt{x} + 2x$ 8) $y = \lg(\sin 2x) + \cos 3x$

9) $y = 3^{\ln x} arcctg 2x$ 10) $y = \ln^2 \dfrac{1}{x}$

3.13 .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили основные задачи по теме «Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически»;
- приобрели умения и навыки решения основных задач по теме «Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически»;.

3.14 Практическое занятие № 14 (2 часа).

Тема: «Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталя. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений»

3.14.1 Задание для работы:

1. Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталя.
2. Производные и дифференциалы высших порядков.
3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений

3.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталя.

2. Производные и дифференциалы высших порядков.

Решение типовых задач

В данных задачах необходимо найти $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функций, заданных неявно или параметрически.

Чтобы продифференцировать функцию, неявно заданную выражением $F(x,y)=0$, необходимо это выражение продифференцировать по x, считая y функцией от x и из полученного выражения найти y`.

Пример: Найти y' и y'' от функции $y-x-arctgy=0$, заданной неявно.

Решение: На основании правила дифференцирования сложной функции имеем: $y'-1-\dfrac{y'}{1+y^2}=0$.

Отсюда $y'\left(1-\dfrac{1}{1+y^2}\right)=1$, $y'\cdot\dfrac{1+y^2-1}{1+y^2}=1$, $y'\cdot\dfrac{y^2}{1+y^2}=1$, $y'=\dfrac{y^2+1}{y^2}$, или $y'=\dfrac{1}{y^2}+1$. Найдем y'' :

$y''=\left(\dfrac{1}{y^2}+1\right)'$. $y''=-\dfrac{2y\cdot y'}{y^4}=-\dfrac{2y'}{y^3}$. Подставляя вместо y' его значение, получим:

$y''=-\dfrac{2\left(\dfrac{1}{y^2}+1\right)}{y^3}$, преобразуя, имеем: $y''=-\dfrac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}$.

Если функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, то ее производная $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Вторая ее производная $\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''$ находится по формуле: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{x'(t)}$.

Пример: Найти $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функции, заданной параметрически $\begin{cases} x=arctgt, \\ y=\ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

Решение:

$$x'(t)=\left(arctg\right)_t'=\frac{1}{1+t^2}\cdot\ y'(t)=\left(\ell n\left(1+t^2\right)\right)_t'=\frac{\left(1+t^2\right)'}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{dy}{dx}=y_x'=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}}=2t.$$

Найдем $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{x'(t)}=\left(2t\right)_t'\cdot\dfrac{1}{x'(t)}=2\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)}=2\left(1+t^2\right)$. $y_x'=\dfrac{dy}{dx}=2t.$

$$\begin{cases} x = arctg\, t, \\ \dfrac{dy}{dx} = 2t. \end{cases}$$ **Ответ**: $\begin{cases} x = arctgt, \\ \dfrac{dy}{dx} = 2t. \end{cases}$ $\begin{cases} x = arctgt, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\left(1+t^2\right). \end{cases}$

Задача .Найти пределы функций по правилу Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+x-2}$ = (неопределенность $\frac{0}{0}$) = $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-6x+5)'}{(x^2+x-2)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-6}{2x+1}=-\dfrac{4}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+x-2}$ = (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$)=

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-6x+5)'}{(x^2+x-2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-6}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-6)'}{(2x+1)'}=\frac{2}{2}=1$$

3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений

Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную $(n+1)-$го порядка. Тогда для любого x из указанной окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^2(x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

где функция $R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора и в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0)),0<\Theta<1.$$

Формулой Маклорена называют формулу Тейлора при $x_0=0.$ Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x),$$

где $$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(\Theta x),0<\Theta<1.$$

Укажем разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций:

1) на любом отрезке $[-r;r],(r>0)$ $\quad e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+R_{N+1^{(x)}}$, (4)

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\cdot e^{\Theta x},(0<\Theta<1)\text{'}\ \left|R_{n+1}(x)\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\Theta x}$$

Например, при $x\in[0;1]$ $e^{\Theta x}<e^x<e<3,$ т.е. $\left|R_{n+1}(x)\right|<\dfrac{3\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)}$. (5)

2)На любом отрезке $[-r;r]$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+3}(x), \qquad (6)$$

$$\left|R_{2n+3}(x)\right| \le \frac{r^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ или } \left|R_{2n+3}(x)\right| \le \frac{1}{(2n+3)!} \text{ при } x \in [-1;1] \qquad (7)$$

3) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x) \qquad (8)$$

Причем для $x \in (0;1]$ $\left|R_{n+1}(x)\ \right| \le \frac{1}{n+1}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача. Найти производные первого и второго порядков функций заданных: а) явно, б) параметрически , в) неявно.

2.1$a)$ $y = sin^2 3x$; б) $x = \sqrt{t}$; $y = \sqrt[5]{t}$; в) $4x + 5y = arcctgy$

2.2а) $y = cos^2 4x$; б) $x = e^{-5t}$; $y = e^{-2t}$; в) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^3}{3} = 1$

3.14 .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили теоремы о среднем для дифференциального исчисления, их применение; правила Лопиталя, производные и дифференциалы высших порядков,формулу Тейлора и разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора;применение формулы Тейлора для приближенных вычислений;
- приобрели умения и навыки вычисления производных высших порядков; вычисления пределов по правилу Лопиталя; разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора и применения формулы Тейлора для приближенных вычислений.

3.15 Практическое занятие № 15 (2 часа).

Тема: «Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке»

3.15.1 Задание для работы:

1. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

3.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия.

Решение типовых задач

Задача. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = x^3 + 1{,}5x^2 - 18x + 1$.

Решение. Функция определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси.

Находим производную: $y' = (x^3 + 1{,}5x^2 - 18x + 1)' = 3(x^2 + x - 6)$.

Находим критические точки, которые будут стационарными:

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ или $x = 2$

Область определения функции точками $x=-3$ и $x=2$ разбивается на 3 промежутка знакопостоянства производной. Далее выявляем знаки производной в каждом из промежутков. Результат удобно записать в таблицу:

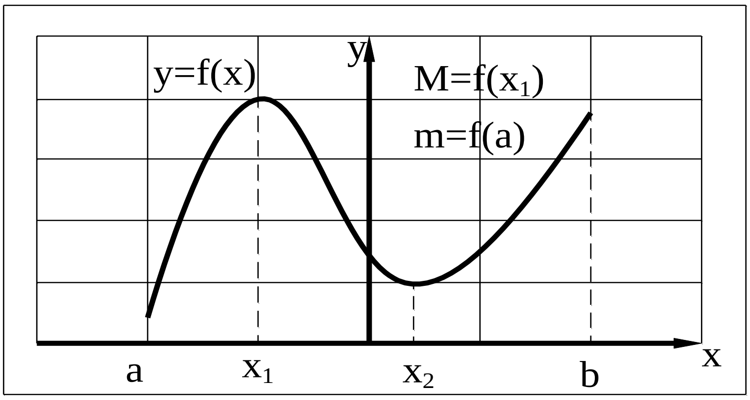
x / y	(-∞;-3)	(-3)	(-3;-2)	2	(2;+∞)
y'	+	0	-	0	+
Y	↗	max	↘	min	↗

Пользуясь признаком монотонности функции и первым достаточным условием экстремума заключаем: в интервалах (-∞;-3) и (2;+ ∞) функция строго возрастает, а в интервале (-3;2) строго убывает, $x=-3$ является точкой максимума, $y_{\max}=y(-3)=41{,}5$, $x=2$ является точкой минимума и $y_{\min}=y(2)=-21.$

2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

Задание функции y=f(x) предполагает задание числовых множеств X – области определения, Y – области значений. Наибольший элемент во множестве Y называется наибольшим значением функцииf(x) на множестве X и обозначается M= maxf(x); наименьший элемент во множестве Y называется наименьшим значением функции и обозначается m = minf(x).

Имеет место следующая теорема Вейерштрасса: **Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то существуют наибольшее и наименьшее значения ее на этом отрезке.**



На рисунке для функции y=f(x) x_1 – точка максимума, в этой же точке функция имеет наибольшее значение M на отрезке [a,b], x_2 –точка минимума, но наименьшее значение функция имеет в точке a. Так, что наибольшее и наименьшее значения функции на множестве X не следует смешивать с максимумом и минимумом функции.

Можно указать следующее рабочее правило отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции y=f(x) на отрезке.

1. Найти критические точки y=f(x) (f'(x)=0 либо f'(x) не существует), расположенные на отрезке [a,b];

2. Вычислить значения функции в концевых точках отрезка [a,b] и в выбранных критических точках;

3. Из найденных значений функций выбрать наибольшее значение M и наименьшее значение m.

При решении задач на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на промежутках можно использовать также следующие утверждения.

Если функция y=f(x) монотонна на отрезке [a,b], то наибольшее и наименьшее значения ее достигаются в концевых точках отрезка (функция может быть непрерывной либо разрывной).

Если функция f(x) непрерывна на промежутке X, имеет только одну критическую (f'(x)=0 или f '(x) не существует) и она есть точка максимума (минимума), то в этой точке функция имеет соответственно наибольшее (наименьшее) значение.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке [-8;0,125].

Функция непрерывна на указанном отрезке и следовательно имеет наибольшее и наименьшее значения (по теореме Вейерштрасса). Отыскание их выполним по указанному правилу отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке.

1)Находим критические точки функции, расположенные внутри отрезка [-8;0,125]:

$y = 2x - 3\frac{2}{3}x^{-1/3} = 2\left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$; y = 0 при $x_1 = 1 \notin [-8;0{,}125]$, $x_2 = -1 \notin [-8;0{,}125]$; y не существует при $x_1 = 0 \notin [-8;0{,}125]$.

2)Вычислим значения функции в критических точках x = 0, x = –1 и в концевых точках отрезка x = –8, x = 0,125.

$f(-8) = 64 - 3\cdot 4 = 52$; $f(-1) = 1 - 3 = -2$; $f(0) = 0$; $f(0{,}125) = \frac{1}{64} - 3\frac{1}{4} = \frac{1}{64} - \frac{48}{64} = -\frac{47}{64}$.

3) Из найденных значений функции выбираем наибольшее M и наименьшее m: M = y(–8) = 52 , m = y(–1) = –2.

Задачи для самостоятельной работы

Задача № 1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

4.1$y = x^3 - 12x^2 + 45x - 47$;

4.2$y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 18$;

4.3$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$;

Задача № 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

1.1 $y = x^2 + \frac{4}{x-1} - 2, [1{,}5;3]$. **1.2** $y = -x^2 - \frac{4}{x-1} + 2, [1{,}5;4]$.

3.15.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия экстремума функции, необходимые и достаточные условия экстремума; правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке;
- приобрели умения и навыки отыскания экстремума функции, наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

3.16 Практическое занятие № 16 (2 часа).

Тема: «Вектор-функция скалярного аргумента. Понятие кривой, гладкая кривая. Касательная к кривой. Кривизна кривой. Радиус кривизны. Главная нормаль. Бинормаль. Кручение кривой»

3.16.1 Задание для работы:
1. Вектор-функция скалярного аргумента. Понятие кривой, гладкая кривая. Касательная к кривой. Кривизна кривой. Радиус кривизны.
2. Главная нормаль. Бинормаль. Кручение кривой.

3.16.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Вектор-функция скалярного аргумента. Понятие кривой, гладкая кривая. Касательная к кривой. Кривизна кривой. Радиус кривизны.
2. Главная нормаль. Бинормаль. Кручение кривой.

Пример 1. Движение точки задано уравнением $\vec{r}(t) = a\sin t \cdot \vec{i} - a\cos t \cdot \vec{j} + \frac{1}{4}bt^2 \cdot \vec{k}$, где a,b–постоянные, t–время. Найти вектор и численное значение скорости, вектор и численное значение ускорения при $t_0 = 2$.

Находим производную первого порядка функции $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}'(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + \frac{1}{2}bt \cdot \vec{k}.$$

При $t_0 = 2$ имеем: $\vec{v}(2) = \vec{r}(t) = a\cos 2\vec{i} + a\sin 2\vec{j} + b\vec{k}$ – вектор скорости.

$|v(2)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – численное значение вектора скорости.

Находим производную второго порядка функции $\vec{r}(t)$:

$r''(t) = [\vec{r}(t)] = -a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + \frac{1}{2}b\vec{k}$ – вектор ускорения, $|r''(t)| = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ – численное значение вектора ускорения в любой момент времени t, в том числе и при $t_0 = 2$.

Задачи для самостоятельной работы

Пример. Движение точки задано уравнением $\vec{r}(t) = 2\sin^2 t \cdot \vec{i} - 2\cos^3 t \cdot \vec{j} + 3t^2 \cdot \vec{k}$, где t–время. Найти вектор и численное значение скорости, вектор и численное значение ускорения при $t_0 = 3$.

3.16.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия о вектор-функции скалярного аргумента, понятие кривой, гладкой кривой, касательной к кривой, нормали;
- приобрели умения и навыки дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента, отыскания касательной и нормали.

3.17 Практическое занятие № 17 (2 часа).
Тема: «Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа»

3.17.1 Задание для работы:

1.Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости.
2. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.

3.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости.

Решение типовых задач и задания для самостоятельной работы

Пример 1. Вычислить $z_1+z_2,\ z_1-z_2$, если $z_1=1-2i,\ z_2=3+5i$.

Решение. $z_1+z_2=1-2i+3+5i=1+3+(-2+5)i=4+3i$,

$z_1-z_2=1-2i-(3+5i)=1-3+(-2-5)i=-2-7i$.

Пример 2. Вычислить $z_1\cdot z_2$, взяв $z_1,\ z_2$ из примера 1.

Решение. $z_1\cdot z_2=\left(1-2i\right)\cdot\left(3+5i\right)=3+5i-6i-10i^2=13-i$.

Пример 3. Найти комплексное число, сопряжённое к $z=4+2i$ и изобразить числа $z,\overline{z}$ на комплексной плоскости.

Решение. $\overline{z}=4-2i$ (Рис 1).

Пример 4. Вычислить(представить в алгебраической форме) $\dfrac{z_1}{z_2}$, взяв $z_1,\ z_2$ из примера 1.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-2i}{3+5i}=\frac{\left(1-2i\right)\cdot\left(3-5i\right)}{\left(3+5i\right)\cdot\left(3-5i\right)}=\frac{3-5i-6i+10i^2}{3^2+5^2}=\frac{-7-11i}{34}=-\frac{7}{34}-\frac{11}{34}i.$$

Задание № 1. Вычислить $z_1+z_2,z_1-z_2,\ \overline{z_1\cdot z_2},\ \dfrac{z_2}{z_1}$.

1. $z_1=2+i, z_2=1-2i$.

2. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.

Пример 6. Найти модуль и аргумент комплексного числа, записать число в тригонометрической форме. Изобразить число на комплексной плоскости:

1.$z_1=1+i$; 2.$z_2=-2i$; 3.$z_3=-1+i\cdot\sqrt{3}$.

Решение. 1. $x_1=\operatorname{Re}z_1=1,\ y_1=\operatorname{Im}z_1=1,\ \left|z_1\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

$$\varphi_1=arctg\frac{y_1}{x_1}=arctg\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}, z_1=\left|z_1\right|\cdot\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

(Рис. 3).

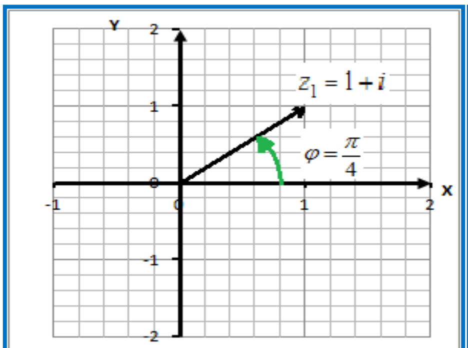


Рис. 3

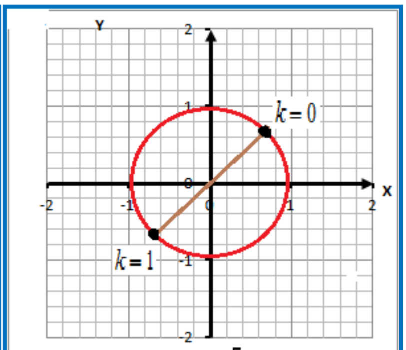


Рис.6 $\sqrt{i}$

$$z_3 = |z_3| \cdot (\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3) = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Пример 7. Вычислить $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме:

$z_1 = 1 + i,\ z_2 = \sqrt{3} - i$.

Решение. Запишем комплексные числа в тригонометрической форме.

1. $x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1,\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1,\ |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\ \varphi_1 = arctg\dfrac{y_1}{x_1} = arctg\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$,

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2. $x_2 = \operatorname{Re} z_2 = \sqrt{3},\ y_2 = \operatorname{Im} z_2 = -1,\ |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+3} = 2$,

$$\varphi_2 = arctg\frac{y_2}{x_2} = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6},$$

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Находим произведение и частное чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Значения $\cos\dfrac{\pi}{12},\ \sin\dfrac{\pi}{12}$ вычисляем с MathCAD:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \to \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0.966,\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \to \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.259.$$

Поэтому

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{12} + 2}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{12} - 2}{2} \approx 2{,}732 + 0{,}732 \cdot i.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Вновь вычисляем с MathCAD

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\to-\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}{2}\approx 0.183,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\to\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}{2}\approx 0.683$$ и окончательно находим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\approx 0{,}183+0{,}683\cdot i.$$

Возведение в степень комплексных чисел с помощью формулы Муавра упрощает вычисления.

Пример 8. Вычислить z^{20}, если $z=1-i$.

Решение. Запишем число z в тригонометрической форме.

$$x=\operatorname{Re}z=1,\ y=\operatorname{Im}z=-1,\ |z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\varphi=arctg\frac{y}{x}=arctg\frac{-1}{1}=-\frac{\pi}{4},$$

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

По формуле Муавра возведения в степень при $n=20$ получим

$$z^{20}=|z|^{20}\cdot(\cos 20\varphi+i\sin 20\varphi)=\left(\sqrt{2}\right)^{20}\cdot\left(\cos 20\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin 20\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2^{10}\cdot\left(\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi)\right)=2^{10}\cdot(-1+0\cdot i)=-2^{10}.$$

Комплексные числа $z_1=|z_1|\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=|z_2|\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда

$|z_1|=|z_2|,\ Arg(z_1)-Arg(z_2)=2\pi m,\ m$ - целое.

С помощью этого понятия равенства комплексных чисел и формулы Муавра возведения в степень получают следующую *формулу Муавра извлечения корней* $n-$*ой* степени из комплексных чисел:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,...,n-1.$$

В общем случае для любого комплексного $z\neq 0$ существует ровно n различных значений $\sqrt[n]{z}$, которые изображаются на комплексной плоскости вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r=\sqrt[n]{|z|}$ с центром в нулевой точке(либо значения $\sqrt[n]{z}$ изображают радиус-векторами).

Пример 9. Найти все значения корня $\sqrt{i}$.

Решение. Число $z = i$ представим в тригонометрической форме:

$$x = \operatorname{Re} z = 0,\ y = \operatorname{Im} z = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1, \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

По формуле Муавра извлечения корней находим

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right)\right),\ k = 0,1.$$

Здесь $\sqrt{1} = 1$-арифметический корень, поэтому $\sqrt{i}$ имеет два значения:

при $k = 0$ $\left(\sqrt{i}\right)_{k=0} = \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

при $k = 1$ $\left(\sqrt{i}\right)_{k=1} = \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найденные значения корня $\sqrt{i}$ комплексно-сопряжённые и, так как $|z| = |i| = 1$, изображаются на комплексной плоскости концами диаметра единичной окружности с центром в нулевой точке(Рис. 6):

Задания для самостоятельной работы

Задание 2. Найти модуль и аргумент комплексного числа, записать число в тригонометрической форме. Изобразить число на комплексной плоскости:

$1. z = 2i$ $1. z = 2 + 2i$

Задание 3. Вычислить $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме:

$1. z_1 = 2 + 2i; z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

Задание 4. Вычислить: $1. z = i^{10}$, $1. z = (1-i)^{10}$

Задание 5. Найти все значения корня из комплексного числа и изобразить их на комплексной плоскости: $1. \sqrt[3]{-i}$, $1. \sqrt[3]{1-i}$

3.17.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о комплексных числах и действиях над ними, понятие изображения комплексных чисел на плоскости; понятия модуля и аргумента комплексного числа, алгебраической и тригонометрической форм комплексного числа;
- приобрели умения и навыки действий с комплексными числами, отыскания модуля и аргумента комплексного числа, представления в алгебраическй и тригонометрической формах.

3.18 Практическое занятие № 18 (2 часа).

Тема: «Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел»

3.18.1 Задание для работы:

1. Показательная форма комплексного числа.

2.Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел.

3.18.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Показательная форма комплексного числа.

Решение типовых задач и задания для самостоятельной работы

Пример 11. Записать число в показательной форме:

$1. z_1 = 1 + i,\ \ 2. z_2 = -2i,\ \ 3. z_3 = -1 + i \cdot \sqrt{3}.$

Решение. $1.\ x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1,\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1,$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\ \varphi_1 = arctg\frac{y_1}{x_1} = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле Эйлера запишем число в показательной форме в виде

$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot i}$ (Рис. 8).

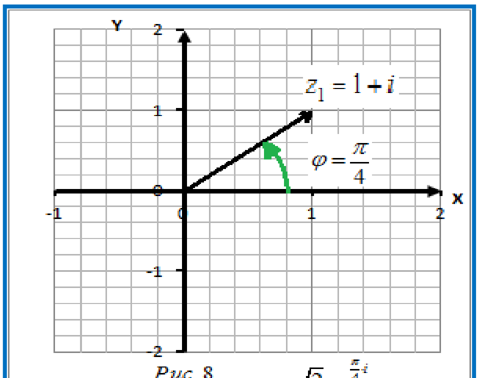


Рис. 8 $z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i}$

Пример 12. Вычислить $z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$ в показательной форме:

$z_1 = 1 + i,\ z_2 = \sqrt{3} - i.$

Решение. Запишем комплексные числа в показательной форме.

$$1.\ x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1,\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1, |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \varphi_1 = arctg\frac{y_1}{x_1} = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

$$z_1=|z_1|\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ z_1=|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2. $x_2=\operatorname{Re}z_2=\sqrt{3},\ y_2=\operatorname{Im}z_2=-1,\ |z_2|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{1+3}=2$,

$$\varphi_2=arctg\frac{y_2}{x_2}=arctg\frac{-1}{\sqrt{3}}=-arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6},$$

$$z_2=|z_2|\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right),\ z_2=|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}=2\cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Находим произведение и частное чисел:

$$z_1\cdot z_2=|z_1\cdot z_2|\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=2\sqrt{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}=2\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}}\cdot=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

2.Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Записать число в показательной форме. $1.z=2i$, $1.z=2+2i$

Задание 2. Вычислить $z_1\cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$ в показательной форме

Задание 3. Комплексное число дано в показательной форме. Записать число в тригонометрической и алгебраической формах. Изобразить число на комплексной плоскости: $1.z=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

3.18.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о показательной форме комплексного числа, формулах Эйлера;
- приобрели умения и навыки действий с комплексными числами в показательной форме.

3.19 Практическое занятие № 19 (2 часа).

Тема: «Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы»

3.19.1 Задание для работы:

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Табличные интегралы.

3.19.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.

2. Табличные интегралы.

Решение типовых задач

Задание1. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{x^2dx}{(5+4x^3)^4}=\left|\begin{array}{l}\text{Делаем замену переменных. Так как } x^2 - \text{это почти производная } x^3,\\ \text{то за t можно взять } x^3, \text{а лучше } t=5+4x^3, \text{тогда } dt=d(5+4x^3)=\\ =(5+4x^3)'dx=12x^2dx. \text{ Выразим отсюда } x^2dx=\frac{1}{12}dt.\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{12}dt}{t^4}=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{t^4}=\frac{1}{12}\int t^{-4}dt=\frac{1}{12}\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+c=-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{t^3}+c=-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3}+C.$$

Можно проверить, что интеграл найден верно. Для этого воспользуемся формулой $\left(F(x)\right)'=f(x)$.

$$\left(-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3}+c\right)'=-\frac{1}{36}\left((5+4x^3)^{-3}\right)'=-\frac{1}{36}\cdot(-3)(5+4x^3)^{-4}(5+4x^3)'=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^4}\cdot12x^2=$$

$=\dfrac{x^2}{(5+4x^3)^4}-$ получили подынтегральную функцию.

Ответ: $I=-\dfrac{1}{36}\cdot\dfrac{1}{(5+4x^3)^3}+C$

3. .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о первообразной, неопределенном интеграле, его свойствах; табличных интегралах;
- приобрели умения и навыки нахождения простейших неопределенных интегралов, первообразных с помощью табличных интегралов.

3.20 Практическое занятие № 20 (2 часа).

Тема: «Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций»

3.20.1 Задание для работы:

1. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

2. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

3.20.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

Решение типовых задач

Применяя формулу интегрирования по частям, мы не сразу находим первообразную, а заданный интеграл приводим к другому (формула (*)), и если этот интеграл проще заданного или табличный, то формула применена правильно.

1) Найти $\int x^2\cdot\sin3xdx$

Обозначим $u=x^2$; $dv=\sin3xdx$. Найдем $du=2xdx$; $v=\int\sin3xdx=-\frac{1}{3}\cos3x$. Подставляя в формулу (*), получим $\int x^2\cdot\sin3xdx=-x^2\cdot\frac{1}{3}\cos3x-\int\cdot2x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos3x\right)dx=-\frac{1}{3}x^2\cos3x+\ +\frac{2}{3}\int x\cos3xdx$

.

К последнему интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям.

Положим $u = x$; $dv = \cos 3x dx$. Тогда $du = dx$; $v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x$. По формуле (*), получим:

$$\int x^2 \cdot sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}x^2\, cos\, 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\, sin 3x - \frac{1}{3}\int sin 3x dx\right) = = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) + c.$$

$$\mathrm{I} = \int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + c.$$

2. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

2) Найти: $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}dx = \mathrm{I}$.

Подынтегральная дробь неправильная: степень числителя выше степени знаменателя (5>4).Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^5 + 2x^3 + 4x + 4 & x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ \cline{2-2} x^5 + 2x^4 + 2x^3 \qquad\qquad & x - 2 \\ \hline -2x^4 + 4x + 4 \qquad & \\ -2x^4 - 4x^3 - 4x^2 \qquad & \\ \hline 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 & \end{array}$$

Подынтегральная дробь будет иметь вид: $\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + 4\cdot\left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}\right)$.

Тогда

$$\mathrm{I} = \int\left((x-2) + 4\cdot\left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}\right)\right)dx = \frac{(x-2)^2}{2} + 4\int\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}dx = \frac{(x-2)^2}{2} + 4\mathrm{I}_1,$$ где

$\mathrm{I}_1 = \int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}dx$.

Разложим знаменатель подынтегральной функции $x^4 + 2x^3 + 2x^2$ на множители:

$x^4 + 2x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 + 2x + 2)$.

Напишем схему разложения данной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 2x + 2} \Rightarrow$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = A_1 x(x^2 + 2x + 2) + A_2(x^2 + 2x + 2) + (M_1 x + N_1)x^2$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = A_1 x^3 + 2A_1 x^2 + 2A_1 x + A_2 x^2 + 2A_2 x + 2A_2 + M_1 x^3 + N_1 x^2$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^3(A_1 + M_1) + x^2(2A_1 + A_2 + N_1) + x(2A_1 + 2A_2) + 2A_2.$$

Составим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A_1 + M_1 = 1 \\ x^2 & 2A_1 + A_2 + N_1 = 1 \\ x & 2A_1 + 2A_2 = 1 \\ x^0 & 2A_2 = 1 \end{array}$$

$2A_2=1 \Rightarrow A_2=\dfrac{1}{2}$. $2A_1+2A_2=1 \Rightarrow 2A_1+2\cdot\dfrac{1}{2}=1$, $\begin{matrix}2A_1+1=1,\\ A_1=0,\end{matrix}$ $A_1+M_1=1 \Rightarrow M_1=1-A_1=1-0=1$,

$M_1=1$, $2A_1+A_2+N_1=1 \Rightarrow N_1=1-2A_1-A_2$, $N_1=1-2\cdot 0-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, $N_1=\dfrac{1}{2}$, $A_1=0$; $A_2=\dfrac{1}{2}$; $M_1=1$; $N_1=\dfrac{1}{2}$.

Подставим найденные значения A_1, A_2, M_1, N_1 в схему разложения:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{1/2}{x^2}+\frac{x+1/2}{x^2+2x+2}.$$

Подставляя в интеграл и интегрируя, получим:

$$\mathrm{I}_1=\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx==-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\mathrm{I}_3.$$

Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1.$$

Заменим переменную x, полагая $x+1=t$, тогда

$$x=t-1,$$
$$dx=dt.$$

$$\mathrm{I}_3=\int\frac{2(t-1)+1}{t^2+1}\cdot dt=\int\frac{2t-2+1}{t^2+1}dt=\int\frac{2t-1}{t^2+1}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}.$$

Применяя формулы $\int\frac{u'}{u}dx=\ln|u|+c$ **и** возвращаясь к переменной x, получим

$$\mathrm{I}_3=\ln\left|x^2+2x+2\right|-\operatorname{arctg}(x+1)$$

Окончательно:
$$\mathrm{I}=\frac{(x-2)^2}{2}+4\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+2\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)\right)+c=\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{2}{x}+$$
$$+2\ln\left|x^2+x+2\right|-2\operatorname{arctg}(x+1)+c.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы

а) $\int\dfrac{x+2}{(2x+3)\cdot(x+1)^2}\,dx$; б) $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$; в) $\int\left(x^2+1\right)\sin x\,dx$.

3. .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили методы замены переменной и интегрирования по частям в неопределенном интеграле; методыинтегрирования рациональных функций,интегрирования некоторых иррациональных и трансцендентных функций;
- приобрели умения и навыки вычисления интегралов методом замены переменной и интегрирования по частям, от рациональных функций, некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

3.21 Практическое занятие № 21 (2 часа).

Тема: «Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов»

3.21.1 Задание для работы:

1. Определенный интеграл, его свойства.

2. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.

3.22.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определенный интеграл, его свойства.

2. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.

Решение типовых задач

Вычислить $\int\limits_0^4 \frac{3\,dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[4]{2x+1}}$.

Вводим новую переменную интегрирования, полагая, что $\sqrt[4]{2x+1}=t.$ Отсюда находим $2x+1=t^4$, $x=\frac{t^4-1}{2}$, $dx=\frac{4t^3}{2}dt=2t^3dt.$ Находим новые пределы интегрирования при $x_1=0$, $t_1=\sqrt[4]{2\cdot 0+1}=1$;

при $x_2=4$, $t_2=\sqrt[4]{2\cdot 4+1}=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$. Подставляя, получим:

$\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{3\cdot 2t^3dt}{t^2+t}=6\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^3dt}{t(t+1)}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{t+1}$. Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\frac{t^2}{t+1}=\frac{(t^2-1)+1}{t+1}=\frac{(t+1)(t-1)+1}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}.$$

Тогда $\mathrm{I}=6\cdot\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=6\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t+ln(t+1)\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=6\cdot\left(\frac{(\sqrt{3})^2}{2}-\sqrt{3}+ln(\sqrt{3}+1)\right)-$

$-6\left(\frac{1}{2}-1+ln\,2\right)=6\cdot\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}+ln(\sqrt{3}+1)\right)+3-6\,ln\,2=6\cdot\frac{4-2\sqrt{3}+2\,ln\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}}{2}=$

$=3\left(4-2\sqrt{3}+2\,ln\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\right).$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить определенные интегралы.

31. $\int\limits_0^2 \ln(x^2+4)\;dx$. **32.** $\int\limits_0^1 \mathrm{x}^3\,\mathrm{arctgx}\;\;\mathrm{x}$. **33.** $\int\limits_0^1 3x^2\arcsin x\;dx$. **34.** $\int\limits_{-1}^0 (2x+3)\;e^{-2x}dx$.

3.21.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия определенного интеграла, его свойства, формулу Ньютона-Лейбница;
- приобрели умения и навыки вычисления определенного интеграла.

3.22 Практическое занятие № 22-23 (4 часа).

Тема: «Геометрические и механические приложения определенного интеграла. Приближённые вычисления интегралов»

3.22.1 Задание для работы:

1. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

2. Приближённые вычисления интегралов.

3.22.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

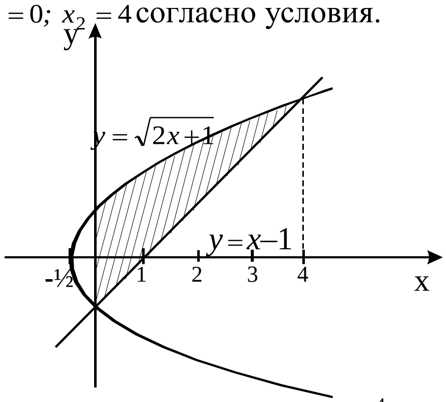
Решение типовых задач

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+1;\ x-y-1=0;\ x=0$.

Решая совместно данные уравнения $\begin{cases} y^2 = 2x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$, найдем точки пересечения этих линий

$$\begin{cases} y^2 = 2x+1 \\ y = x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (x-1)^2 = 2x+1 \\ x^2-2x+1 = 2x+1 \quad x(x-4)=0 \\ x^2-4x=0 \quad x_1=0 \;\; x_2=4. \end{array}$$

Изобразим в плоскости XOY фигуру, ограниченную данными линиями, причем $x_1=0;\ x_2=4$ согласно условия.



$$S=\int_0^4\left(\sqrt{2x+1}-(x-1)\ dx\right)= \quad =\int_0^4(2x+1)^{1/2}dx-\int_0^4(x-1)\ dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4(2x+1)^{1/2}d(2x+1)-$$

$$-\int_0^4(x-1)\ d(x-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4-\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_0^4=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\Bigg|_0^4-\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{1^3}\right)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}(27-1)-\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}26-4=\frac{14}{3}=4\frac{1}{2}\ \text{(ед.}^2\text{)}.$$

2. Приближённые вычисления интегралов.

2. Вычислить определенные интегралы сначала по формуле Ньютона – Лейбница, а затем приближенно по формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей. Вычисления производить с округлением до четвертого десятичного знака. Сравнить полученные значения интеграла.

1. $\int_1^4 \ln(3x-2)\ dx$.

Задачи для самостоятельной работы

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=\frac{x^2}{2}-x+1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+3x+6$.

2. $\int_2^5 \ln(3x-5)\ dx$.

3. .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили геометрические и механические приложения определенного интеграла, элементы численногоинтегрирования;
- приобрели умения и навыки в использовании геометрических и механических приложения определенного интеграла, численного интегрирования.

3.23 Практическое занятие № 24 (2 часа).

Тема: «Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства. Понятие сингулярных интегралов»

3.23.1 Задание для работы:

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

2. Понятие сингулярных интегралов.

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

2. Понятие сингулярных интегралов.

Решение типовых задач

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}.$$

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2+4x+9}$. Вычислим отдельно $\int_1^{b}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int_1^{b}\frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)+5}=\int_1^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+5}=$

$$=\int_1^{b}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Bigg|_1^b=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{(b+2)}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Тогда $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{(b+2)}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3}{\sqrt{5}}$. Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{e}\frac{dx}{x(\ln x)^2}.$$

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ при $x=1$ неограниченна (т.е. терпит разрыв).

$$\int_1^{e}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{\frac{1}{x}dx}{(\ln x)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e}\right)=$$

$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln e}+\frac{1}{\ln|1+\varepsilon|}\right)=\infty$. Следовательно, данный несобственный интеграл расходится.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

1. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}$. **2.** $\int_0^{\infty}x^2e^{-x^3}dx$. **3.** $\int_0^{3}\frac{dx}{(x-3)^2}$.

4. $\int_2^{4}\frac{dx}{x^2-4}$. **5.** $\int_5^{\infty}\frac{dx}{x^2-8x+17}$. **6.** $\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

3.23.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия о несобственных интегралах с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства;
- приобрели умения и навыки вычисления несобственных интегралах с бесконечными пределами и от неограниченных функций.

3.24 Практическое занятие № 25 (2 часа).
Тема: «Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции»

3.24.1 Задание для работы:
1. Функции нескольких переменных.

2. Предел и непрерывность функции

3.24.2 Краткое описание проводимого занятия:

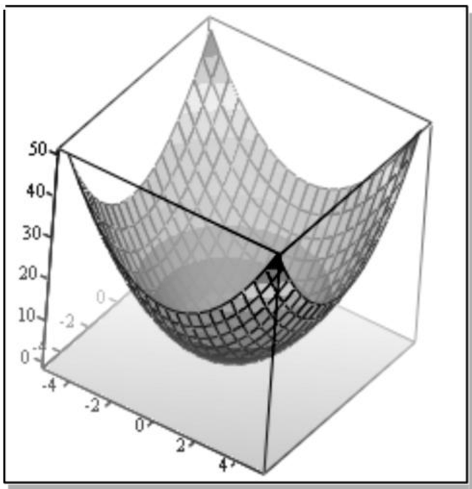
1. Функции нескольких переменных.

Переменная z называется функцией переменных x и y,если каждой паре значений xи yиз некоторой области их изменения поставлено в соответствие определенное значение z. Функциональная зависимость zот x и *y* записывается в виде:

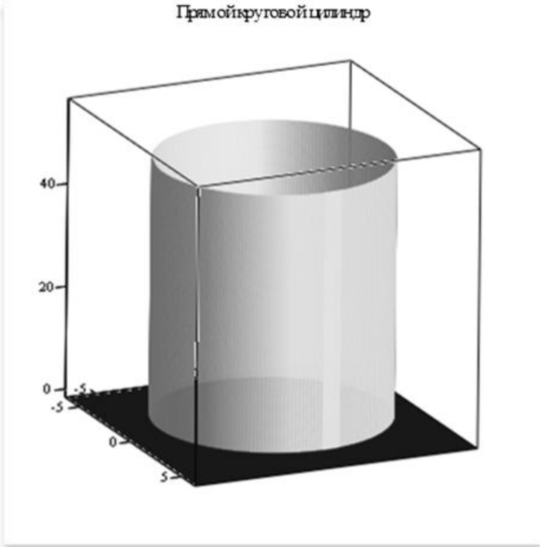
$z = f(x, y)$.

Аналогичным образом определяются функции трех и более переменных. В этой работе используются только функции двух переменных, поэтому все определения и задачибудут проиллюстрированы только такими функциями.

Функции двух переменных допускают геометрическую интерпретацию. Графиком функции z=f(x, y), определенной в области G, называется множество точек (x, y, z) пространства, у которых (x, y) принадлежат Gи z=f(x, y). В наиболее простых случаях такой график представляет некоторую поверхность. Поверхности удобно изображать с MathCAD. Например, параболоид $z=x^2+y^2$ и цилиндр имеют вид



F



(x,y,z)

2. Предел и непрерывность функции

Функция z=f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Например, функция $z = \frac{xy - 2}{x^2 + y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением точки O(0,0), где она имеет разрыв.

Функция, непрерывная во всех точках области G, называется непрерывной данной области.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) z$: 1) $z = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$, $z = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$.

3.24.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о функции нескольких переменных, предела и непрерывности функции;

- приобрели умения и навыки решения простейших задач по теме «функции нескольких переменных, предел и непрерывности функции»

3.25 Практическое занятие № 26 (2 часа).

Тема: «Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала»

3.25.1 Задание для работы

1. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала.
2. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала.

3.25.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала.

Решение типовых задач

Из определения частных производных следует, что правила их вычисления остаются такими же, как и для функций одной переменной, только необходимо помнить по какой переменной ищется производная.

Пример 1. а) $z = 2x + y^3 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$

б) $z = arctg\,\frac{x}{y}, \quad z_x = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}(\frac{x}{y})'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, z_y = -\frac{x}{x^2+y^2}.$

2. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью дифференциала.

Задача № 2. Даны функция z=f(x,y) и точка $M_0(x_0, y_0)$. С помощью дифференциала вычислить приближенное значение функции в данной точке. Оценить относительную погрешность вычисления:

$$z = x^2 + 2xy - 3y^2, \ M_0(2{,}97;0{,}99).$$

Решение. Найдем частные производные и полный дифференциал в любой точке:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y, \qquad dz = (2x + 2y)dx + (2x - 6y)dy.$$

Вычислимего в точке M(2;1) при приращениях

$$dx = \Delta x = 1{,}97 - 2 = -0{,}3, \qquad dy = \Delta y = 0{,}99 - 1 = -0{,}01;$$

$$dz = (2 \cdot 2 + 2 \cdot 1)(-0{,}03) + (2 \cdot 2 - 6 \cdot 1)(-0{,}01) = -0{,}18 + 0{,}02 = -0{,}16.$$

Найдём $z(M) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 5.$

Тогда $\bar{z} = \bar{z}(M_0) = z(M) + dz = 5 - 0{,}16 = 4{,}84.$

Вычислим точное значение функции z в точке M_0:

$$z = 1{,}97^2 + 2 \cdot 1{,}97 \cdot 0{,}99 - 3 \cdot 0{,}99^2 = 3{,}8809 + 3{,}9006 - 2{,}9403 = 4{,}8412.$$

Найдём относительную погрешность:

$$\delta = \left|\frac{\bar{z} - z}{\bar{z}}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{4{,}8412 - 4{,}84}{4{,}8412}\right| \cdot 100\% \approx 0{,}025\%.$$

Ответ: приближённое значение $\bar{z} = 4{,}84.$ Относительная погрешность $\delta \approx 0{,}025\%.$

Задачи для самостоятельной работы

Дана функция $z = f(x, y)$. Найти: 1) полный дифференциал dz; 2) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 3) смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

1. $z = \frac{\operatorname{tg} x}{y}$. **2.** $z = \arccos \frac{y}{x}$. 3. $z = \ln\sqrt{x^2 + 4y}$.

3. Дана функция $z = \frac{xy}{x+y}$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

3.25 .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия частных производных,полного дифференциала, его связь с частными производными,инвариантность формы полного дифференциала,геометрическиеприложения,приближённые вычисления с помощью дифференциала;
- приобрели умения и навыки вычисления производных и дифференциала.

3.26 Практическое занятие № 27 (2 часа).

Тема: «Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций. Теорема об обратном отображении»

3.26.1 Задание для работы

1. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

2. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций. Теорема об обратном отображении.

3.26.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

2. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций. Теорема об обратном отображении.

Решение типовых задач

Задача 1.Дана функция $z = 3x^2 - 5xy + 7y$, точка A(2,1) и вектор $\bar{a} = \{4;3\}$. Найти: **1)** ∇z в точке A ;**2)** производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

Решение. **1)** По определению градиента $\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\bar{j}$.Градиент в точке A вычислим по формуле:

$$\nabla z\big|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cdot\bar{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cdot\bar{j}\,.$$

Найдём частные производные в точке A:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = 6x - 5y\big|_A = 6\cdot 2 - 5\cdot 1 = 7\,,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = -5x - 7\big|_A = -5\cdot 2 - 7 = -3.$$

Следовательно $\nabla z\big|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cdot\bar{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cdot\bar{j} = 7\bar{i} - 3\bar{j}\,\cdot$

2) Производную от функции z по направлению вектора $\bar{a}$ в точке A определим из соотношения:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ представляют собой направляющие косинусы заданного вектора

$\bar{a}(a_x, a_y)$ и вычисляются по формулам $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|a|}$; $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|a|}$, где

$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Тогда $|\bar{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$; $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$;

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A = 7 \cdot \dfrac{4}{5} - 3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{28}{5} - \dfrac{9}{5} = 3\dfrac{4}{5}$. Ответ: $\nabla z|_A = 7\bar{i} - 3\bar{j}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A = 3\dfrac{4}{5} = 3{,}8$.

Задачи для самостоятельной работы

Дана функция z = f(x,y), точка A(x_0,y_0), вектор $\vec{a}$. Найти gradz и его численное значение в точке A, производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

3.1 $z = 2x^2 + xy$; $A(-1;1)$; $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

3.2 $z = 5x^2y + 3xy^2$; $A(1;-1)$; $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$.

3.3 $z = 3x^2y - xy^3$; $A(-1;1)$; $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$.

3.26.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о производной по направлению, градиенте, частных производных и дифференциалах высших порядков, формуле Тейлора;
- приобрели умения и навыки вычисления производных по направлению, градиента, частных производных и дифференциалов высших порядков.

3.27 Практическое занятие № 28 (2 часа).

Тема: «Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа»

3.27.1 Задание для работы

1. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

2. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

3.27.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

2. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Решение типовых задач

Пример. Найти экстремум функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

Решение: функция z определена на всей плоскости xoy. Находим частные производные 1-го порядка.

$z'_x = 3x^2 - 6y$

$z'_y = 24y^2 - 6x$

Решая систему $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$, находим критические точки.

$$\begin{cases} 3x^2-6y=0 \\ 24y^2-6x=0 \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ 4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2=x \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ x^4-x=0 \end{cases} \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ x\ \left(x^3-1\right)=0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1=0;\ y_1=0;\ x_2=1;\ y_2=\dfrac{1}{2}$ Критические точки $M_1(0;0)\ M_2\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Чтобы установить наличие экстремума в критических точках, вычисляем значение $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$, где $A=f''_{xx}(M), B=f''_{xy}(M), C=f''_{yy}(M)$. M -критическая точка.

При этом: 1) если $\Delta>0$, то M - есть точка экстремума: при $A<0$ (или $C<0$) точка максимума, а при $A>0$ (или $C>0$) точка минимума.

2) если $\Delta<0$, то в точке M нет экстремума.

3) если $\Delta=0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M требуется дальнейшее исследование, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

Найдем $z''_{xx}=6x\ z''_{xy}=-6\ z''_{yy}=48y$.

Для точки $M_1(0;0)$ получим $A=0$, $B=-6$, $C=0$, $\Delta=AC-B^2=-36<0$, следовательно, в точке $M_1(0;0)$ нет экстремума.

Для точки $M_2\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ имеем $A=6$, $B=-6$, $C=24$. $\Delta=AC-BC^2=6\cdot 24-36=144-36=108>0$

Т.к. $A=6>0$ (и $C=24>0$) то точка M_2 есть точка минимума.

$$z_{\min}=z(M_2)=1^3+8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-6\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+5=1+1-3+5=4\ z_{\min}=z(M_2)=4$$

Задачи для самостоятельной работы

Данную функцию $z=f(x,y)$ исследовать на экстремум.

1. $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$. **2.** $z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y+1$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой областиD, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

3. $z=x^2+3y^2-x+18y-4;\quad D: 0\le x\le 1; 0\le y\le 1.$

4. $z=x^2+3y^2-x+18y-4;\quad D: 0\le x\le x^2\le 0\le y\le 4.$

3.27.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия об экстремумах функций нескольких переменных, условном экстремуме;
- приобрели умения и навыки исследования экстремум функций нескольких переменных.

3.28 Практическое занятие № 29 (2 часа).

Тема: «Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие *n*-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты»

3.28.1 Задание для работы

1. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие *n*-кратного интеграла.
2. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

3.28.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие *n*-кратного интеграла.

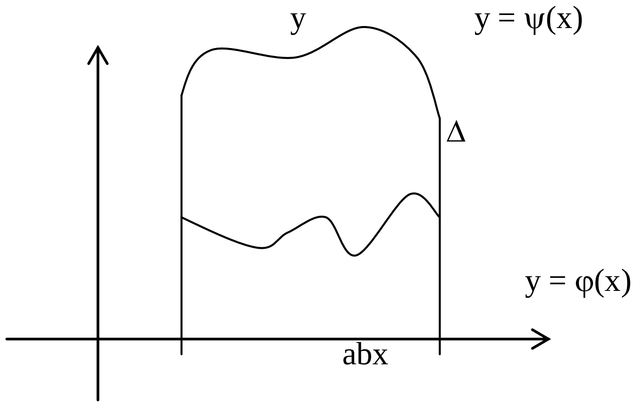
2. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

Решение типовых задач

Вычисление двойного интеграла.

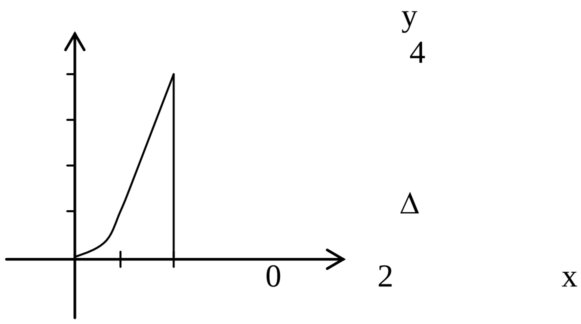
Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a<b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ≤ψ, тогда*

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$



Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями:

y = 0, y = x^2, x = 2.



$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2}(x-y)dy = \int_0^2 (xy - \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 (x^3 - \frac{x^4}{2})dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 4 - 3{,}2 = 0{,}8$$

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c<d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤Ψ(y)), то*

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1,

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интегралы: 1). $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2. 2). $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y^2, y = 2. 3). Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями xy=1, y = $\sqrt{x}$, x = 2.

3.28 .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о двойном и тройном интегралах, их свойствах, сведении кратного интеграла к повторному, замене переменных в кратных интегралах; полярных, цилиндрических и сферических координатах;
- приобрели умения и навыки вычисления кратных интегралов.

3.29 Практическое занятие № 30 (2 часа).

Тема: «Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Их свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов»

3.29.1 Задание для работы

1. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Их свойства и вычисление.
2. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

3.29.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Поверхностные интегралы. Их свойства и вычисление.
2. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Решение типовых задач

Вычисление криволинейных интегралов второго рода производится путем преобразования их к определенным интегралам по формулам:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

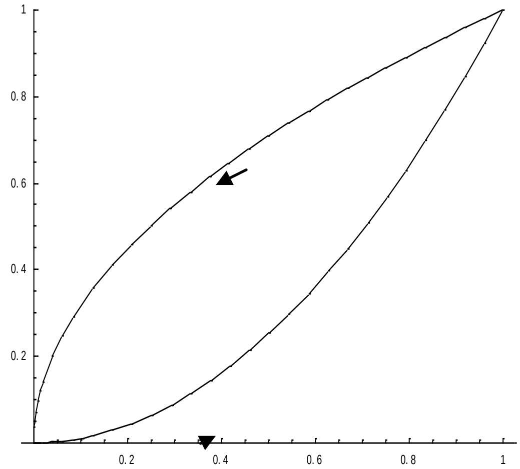
$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right]dt$$

В случае, если AB – плоская кривая, заданная уравнением *y = f(x),* то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B}\left[P(x,f(x)+Q(x,f(x))f'(x)\right]dx$$

<u>Пример.</u> Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} x^2ydx+x^3dy$. L – контур, ограниченный параболами $y^2=x$; $x^2=y$. Направление обхода контура положительное.



Представим замкнутый контур L как сумму двух дуг $L_1 = x^2$ и $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint_L x^2ydx + x^3dy = \int_{L_1} x^2ydx + \int_{L_1} x^3dy + \int_{L_2} x^2ydx + \int_{L_2} x^3dy = \int_0^1 x^4dx + \int_0^1 x^3 \cdot 2xdx + \int_1^0 x^2\sqrt{x}dx +$$

$$+\int_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}}dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интеграл 1) $\int_L x^2ydx + x^3dy$. L: $y = x^3, 0 \le x \le 1$, 2) $\int_L xy^2dx + x^2dy$. L: $y = x, -1 \le x \le 2$.

Вычислить интеграл $\int_L 3x^2ydx + x^3dy$ по 1) L1: $y = x, 0 \le x \le 1$, 2) L2: $y = x^2, 0 \le x \le 1$.

3) L3: $y = x^3, 0 \le x \le 1$, сравнить значения интегралов, сделать вывод.Направление обхода контура положительное.

3. .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия о криволинейных и поверхностных интегралах, их свойствах и вычислении, геометрических и механических приложениях;
- приобрели умения и навыки вычисления криволинейных интегралов.

3.30 Практическое занятие № 31 (2 часа).

Тема: «Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости»

3.30.1 Задание для работы

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами.
2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.

3.30.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами.

2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.

Решение типовых задач

Признак Даламбера

Если в знакоположительном ряде $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ признак Даламбера ответа на вопрос о сходимости ряда не дает и надо использовать другие признаки.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(2n)!}$.

Решение. Поскольку $u_n=\dfrac{5^n}{(2n)!}$, то $u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{(2(n+1))!}=\dfrac{5\cdot 5^n}{(2n+2)!}=\dfrac{5\cdot 5^n}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}$. (Напомним, что $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$). Теперь найдем предел отношения $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5\cdot 5^n}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}}{\dfrac{5^n}{(2n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{(2n+1)(2n+2)}=0$

Так как 0<1, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

Радикальный признак Коши

Если в знакоположительном ряде $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример **.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{(2n+1)}\right)^n$.

Решение. Поскольку общий член ряда содержит n-ую степень, применим радикальный признак Коши.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}<1$, следовательно, ряд сходится.

Интегральный признак Коши

Если $u_n=f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x\geq a\geq 1$, то ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ и интеграл $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример . Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. При $x\geq 2$ функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна, т.е. удовлетворяет условию интегрального признака Коши. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_2^{\infty}f(x)dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{\infty}=\infty\cdot$$

Из расходимости интеграла следует расходимость исходного ряда.

Задачи для самостоятельной работы

Исследовать сходимость ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{n}$.   2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^{n}}$.   3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}}{e^{n}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{2}}{(2n-1)^{3}}$.   5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

3.30.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о числовых рядах, сходимости и сумме ряда, признаках сходимости рядов с неотрицательными членами;
- приобрели умения и навыки исследования сходимости рядов по необходимому признаку и рядов с неотрицательными членами.

3.31 Практическое занятие № 32 (2 часа).

Тема: «Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов»

3.31.1 Задание для работы

1. Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости.
2. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

3.31.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости.
2. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Признак сходимости Лейбница

Если для знакочередующегося ряда выполнены условия:

1. $u_n \ge u_{n+1} \ge u_{n+2} \ge \ldots$ (начиная с некоторого *n*),2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,то ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}$.

Решение.Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака сходимости Лейбница: $u_n=\frac{1}{n}$, $\frac{1}{1}\ge\frac{1}{2}\ge\frac{1}{3}\ge\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, поэтому ряд сходится. Он сходится условно, т.к. ряд, составленный из абсолютных значений, является гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{2^{n}}$.

Решение.Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных значений $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^{n}}$. Применим к нему признак сходимости Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$$, следовательно, этот ряд сходится, поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

Задачи для самостоятельной работы

Исследовать сходимость ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{e^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{(2n-1)^3}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

3.31.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия обабсолютной и условной сходимости,освоили признак Лейбница,свойства абсолютно сходящихся рядов;
- приобрели умения и навыки исследования рядов на абсолютную и условную сходимость.

3.32 Практическое занятие № 33 (2 часа).

Тема: «Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости»

3.32.1 Задание для работы

1. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование.
2. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости.

3.32.2 Краткое описание проводимого занятия:

Решение типовых задач

Пример . Определить область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

Решение.Применим к ряду признак сходимости Даламбера и рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x-2|^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\frac{|x-2|^{2n}}{2n}}=|x-2|^2.$$

Исходный ряд сходится абсолютно, если $|x-2|^2<1$, то есть при $1<x<3$. Ряд расходится, если $|x-2|^2>1$, то есть при $-\infty<x<1,\ 3<x<\infty$.

Рассмотрим поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1-2)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}.$$

Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака сходимости Лейбница: $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{8} \geq \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$. Поэтому ряд сходится (сходится условно, т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а умножение всех членов ряда на постоянное число, отличное от нуля, не меняет его сходимости).

При $x = 3$ получаем такой же сходящийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3-2)^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}.$$

Окончательный ответ: ряд сходится при $1 \leq x \leq 3$.

Задачи для самостоятельной работы

Определить область сходимости ряда.

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{n}$. 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^{2n}}{2n}$.

4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$. 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n^2+1}$.

3.32.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о функциональных и степенных рядах ряды, их свойствах, области сходимости;
- приобрели умения и навыки отыскания области сходимости степенных рядов.

3.33 Практическое занятие № 34 (2 часа).

Тема: «Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов»

3.33.1 Задание для работы

1. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.
2. Приложение рядов.

3.33.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.

2. Приложение рядов.

Решение типовых задач

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд.

1. Существует также способ разложения в степенной ряд **при помощи алгебраического деления.** Это – самый простой способ разложения, однако, пригоден он только для разложения в ряд алгебраических дробей.

Пример. Разложить в ряд функцию $\frac{1}{1-x}$.

Суть метода алгебраического деления состоит в применении общего правила деления многочленов:

$$\begin{array}{r|l} -\,1 & 1 - x \\ \underline{1 - x} & \overline{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots} \\ - & \\ - & \end{array}$$

x
x – x^2
x^2
x^2 – x^3
x^3
………
2. Разложение при помощи рядов Тейлора и Маклорена.

Если применить к той же функции формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

то получаем: $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $f'(0) = 1$;

$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$; $f''(0) = 2$;

$f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$; $f'''(0) = 3!$;

………………………………

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$; $f^{(n)}(0) = n!$;

Итого, получаем: $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$

3. Рассмотрим способ разложения функции в ряд **при помощи интегрирования.**

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до x.

$$\int_0^x df(x) = \int_0^x f'(x)dx; \qquad f(x)\Big|_0^x = \int_0^x f'(x)dx; \; f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx;$$

Пример. Разложить в ряд функцию $f(x) = \ln(1+x)$.

Разложение в ряд этой функции по формуле Маклорена было рассмотрено выше. Теперь решим эту задачу при помощи интегрирования.

При $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ получаем по приведенной выше формуле:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+x}$ может быть легко найдено способом алгебраического деления аналогично рассмотренному выше примеру.

Задачи для самостоятельной работы

Разложить в ряд Маклорена функции

1. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 2. $f(x) = \sin x^2$, 3. $f(x) = e^{-x^2}$

3.33.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия о рядах Тейлора и Маклорена, разложении функций в степенные ряды;
- приобрели умения и навыки разложения функций в степенные ряды.

3.34 Практическое занятие № 35-36 (4 часа).

Тема: «Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье по ортогональным системам. Полнота и замкнутость системы. Тригонометрические ряды Фурье»

3.34.1 Задание для работы

1. Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме. Ортогональные и ортонормированные системы.
2. Ряды Фурье по ортогональным системам. Полнота и замкнутость системы. Тригонометрические ряды Фурье.

3.34.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Нормированные пространства, бесконечномерные евклидовы пространства. Сходимость по норме. Ортогональные и ортонормированные системы.
2. Ряды Фурье по ортогональным системам. Полнота и замкнутость системы. Тригонометрические ряды Фурье.

Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+...$$

или, короче, $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$

Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если функция *f(x)* – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx;\quad n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,...$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции *f(x).*

Определение. **Рядом Фурье** для функции *f(x)* называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции *f(x)* сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье.

Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.

Теорема. (Теорема Дирихле) *Если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке [-π;π] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-π;π] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$*, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке [-π;π].

<u>Теорема.</u>*Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке [-π;π] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. *При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке [-π;π].

<u>Пример.</u>Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^3$ с периодом T = 2π на отрезке [-π;π].

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n=1,2,...)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\sin nx dx=\left\{\begin{aligned} &u=x^3; \quad dv=\sin nx dx;\\ &du=3x^2dx; \quad v=-\frac{\cos nx}{n}; \end{aligned}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{n}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx\right)=$$

$$=\left\{\begin{aligned} &u=x^2; \quad dv=\cos nx dx;\\ &du=2xdx; \quad v=\frac{\sin nx}{n}; \end{aligned}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right]\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\int_0^{\pi}x\sin nx dx\right)=\left\{\begin{aligned} &u=x; \quad dv=\sin nx dx;\\ &du=dx; \quad v=-\frac{\cos nx}{n}; \end{aligned}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{6\pi\cos\pi}{n^3}-\frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)\right)=-\frac{2\pi^2\cos\pi n}{n}+\frac{12\cos\pi n}{n^3}=(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Получаем:

$$x^3=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx .$$

Задачи для самостоятельной работы

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, заданную на интервале-периоде.

1. $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } -1<x<0, \\ -1 & \text{при } 0\le x\le 1. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{при } -\pi\le x<0, \\ 0 & \text{при } 0\le x<\pi. \end{cases}$

3. $f(x)=x^2$ при $-1\le x<1.$

3.34.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о рядах Фурье по ортогональным системам, полноте и замкнутости системы, тригонометрических рядах Фурье;
- приобрели умения и навыки разложения функций в тригонометрический ряд Фурье.

3.36 Практическое занятие №37 (2 часа).

Тема: «Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши»

3.36.1 Задание для работы

1.Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины.

3. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

3.36.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

<u>**Определение.**</u>**Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Пример. Простейший случай равноускоренного движения материальной точки. Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S=V_0t+\frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V*, которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е.

$$V=\frac{dS}{dt};\qquad a=\frac{dV}{dt}=\frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S=f(t)=V_0t+\frac{f''(t)\cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины.

<u>**Определение.**</u> Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

<u>**Определение.**</u> Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

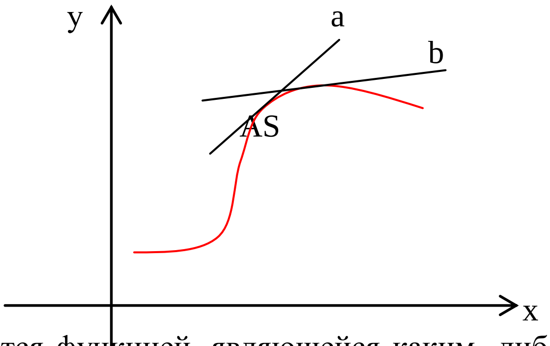
<u>Пример.</u>

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



Линия S, которая задается функцией, являющейся каким- либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная y' является **угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.**

В любой точке А(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки А можно наглядно изобразить **поле направлений** кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

<u>Определение.</u> Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется **полем направлений.**

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

<u>Определение.</u> Линии равного наклона в поле направлений называются **изоклинами**.

3. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков равна единице.
2. Найти уравнение движения парашютиста массой m, если сила сопротивления воздуха f пропорциональна скорости движения с коэффициентом k.
3. Найти уравнение кривой, проходящей через точку А(0; 5), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой точке ее равен ординате этой точки, увеличенной в 7 раз.

4. За какое время вытечет вода из цилиндра радиуса R и высотой H, стоящего вертикально, через отверстие радиуса r в дне. Указания: истечение жидкости подчиняется закону Торричелли: $V = 0.6\sqrt{2gH}$.

3.36.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о физических задачах, приводящих к дифференциальным уравнениям, о ДУ первого порядка, изоклинах, Задаче Коши;
- приобрели умения и навыки геометрически истолковывать ДУ 1-го порядка, строить простейшие математические модели на основе ДУ.

3.37 Практическое занятие № 38-39 (4 часа).

Тема: «Основные классы уравнений 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах»

3.37.1 Задание для работы

1. Однородные и линейные уравнения.
2. Уравнения в полных дифференциалах.

3.37.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Однородные и линейные уравнения.

2. Уравнения в полных дифференциалах.

Решение типовых задач

Решить дифференциальные уравнения: 1) $2x\sqrt{y^2-2}\,dx - x^2 ydy = 3ydy$.

Переносим второе слагаемое в правую часть и выносим ydy за скобку

$2x\sqrt{y^2-2}\,dx = y(3+x^2)dy$. Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на множители, «лишние» при дифференциалах. При dx «лишним», т.е. не зависящим от x, является $\sqrt{y^2-2}$, а при dy «лишним» будет $(3+x^2)$.

$$\frac{2x\sqrt{y^2-2}\,dx}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} = \frac{y(3+x^2)dy}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} \Rightarrow \quad \frac{2xdx}{3+x^2} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}}.$$

Теперь можно проинтегрировать, так левая часть зависит только от x, а правая зависит только от y:

$$\int\frac{2xdx}{3+x^2} = \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}} \quad . \qquad (*)$$

Находим интегралы по отдельности.

$$\int\frac{2xdx}{3+x^2} = \left|\begin{matrix} t = 3+x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + \ln c = \ln tc = \ln c(3+x^2),$$

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}} = \left|\begin{matrix} t = y^2-2 \\ dt = 2ydy \\ \dfrac{dt}{2} = ydy \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{y^2-2}.$$

Подставляем найденные интегралы в (*) : $\ln c\left(x^2+3\right)=\sqrt{y^2-2}$. Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Можно его записать по – другому: $\ln(3+x^2)+c_1=\sqrt{y^2-2} \quad \Rightarrow \sqrt{y^2-2}-\ln(3+x^2)=c$. Ответ: $\sqrt{y^2-2}=\ln c(x^2+3)$.

2) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{xe^x}, \quad y(1)=0.$

Так как y и y' присутствуют в диф. уравнении только в первых степенях, то это линейное ДУ 1-го порядка. Так как даны начальные условия, то следует после нахождения общего решения ДУ найти частное решение, удовлетворяющее этому начальному условию, то есть решить так называемую задачу Коши.

Ищем общее решение ДУ методом Бернулли, т.е. в виде $y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'v+v'u$. Подставляем в исходное уравнение $u'v+v'u+\dfrac{uv}{x}=\dfrac{1}{xe^x}$.

Группируем первое и третье слагаемые и выносим за скобки v, получаем

$$v\left(u'+\frac{u}{x}\right)+v'u=\frac{1}{xe^x}. \qquad (*)$$

Ищем такую функцию $u=u(x)$, чтобы скобка была равна нулю. $u'+\dfrac{u}{x}=0$ - это ДУ с разделяющимися переменными. Заменяем $u'=\dfrac{du}{dx} \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=-\dfrac{u}{x}$, $du=-\dfrac{u}{x}dx$. Здесь «лишний» множитель u при dx, делим на него обе части уравнения $\dfrac{du}{u}=-\dfrac{u}{u}\cdot\dfrac{dx}{x}$, $\displaystyle\int\frac{du}{u}=-\int\frac{dx}{x}$,

$\ln u=-\ln x \Rightarrow \ln u=\ln x^{-1} \Rightarrow u=\dfrac{1}{x}$.

Нашли функцию u, при которой выражение в скобках равно нулю. Подставляем найденное u в (*), получаем $v\cdot 0+v'\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{xe^x} \Rightarrow \dfrac{v'}{x}=\dfrac{1}{xe^x}\Big|\cdot x$. Получили

$v'=e^{-x} \Rightarrow \dfrac{dv}{dx}e^{-x} \Rightarrow dv=e^{-x}dx$. Интегрируем обе части уравнения.

$\int dv=\int e^{-x}dx, \quad v=-e^{-x}+c$. Получили общее решение ДУ $y=u\cdot v=\dfrac{1}{x}\cdot\left(c-e^{-x}\right)$;

$y=\dfrac{c}{x}-\dfrac{1}{xe^x}$ - общее решение.

Замечание. *Здесь первое слагаемое* $\dfrac{c}{x}$ *является общим решением линейного однородного уравнения* $y'+\dfrac{y}{x}=0,$ *а второе слагаемое* $-\dfrac{1}{xe^x}$ *является частным решением исходного линейного неоднородного уравнения* $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{xe^x}$. *Сделаем проверку общего решения линейного однородного дифуравнения* y_0. $y_0=\dfrac{c}{x} \Rightarrow y_0'=c\left(x^{-1}\right)'=-\dfrac{c}{x^2}$. *Подставляем в* $y'+\dfrac{y}{x}=0$, *получаем* $-\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{c}{x\cdot x}=0,$ *т.е. верное равенство* $\Rightarrow y_0=\dfrac{c}{x}$ *- общее решение линейного однородного (с нулевой правой частью) дифуравнения.*

Теперь сделаем проверку для частного решения

$\widetilde{y} = -\frac{1}{xe^x} = -x^{-1}e^{-x}, \widetilde{y}' = -\left(x^{-1}e^{-x}\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x}\right) = \frac{1}{x^2e^4} + \frac{1}{xe^x}$. *Подставляем в исходное ДУ* $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{xe^x}$,

$\frac{1}{x^2e^x} + \frac{1}{xe^x} + \left(-\frac{1}{xe^x}\right)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{xe^x}, \quad \frac{1}{x^2e^x} + \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{x^2e^x} = \frac{1}{xe^x}$. *Получили верное равенство, т.е. именно такая функция* $y = -\frac{1}{xe^x}$ *при прохождении через данное дифференциальное уравнение дала правую часть* $\frac{1}{xe^x}$, *что и доказывает, что найденное* $\widetilde{y}$ *является частным решением исходного дифуравнения.*

Теперь приступим к решению задачи Коши. Подставим данное начальное условие в полученное общее решение $y = \frac{c}{x} - \frac{1}{xe^x}$, $y(1) = 0$, $0 = \frac{c}{1} - \frac{1}{1e^1} \Rightarrow 0 = c - \frac{1}{e} \Rightarrow c = \frac{1}{e} = 0$. Найденное c подставляем в общее решение. $y = \frac{1}{xe} - \frac{1}{xe^x}$ - решение задачи Коши. Можно его записать по - другому $y = \frac{1}{x}\left(e^{-1} - e^{-x}\right)$. Ответ: $y = \frac{1}{x}\left(e^{-1} - e^{-x}\right)$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$,

2) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$,

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 1$,

4) $y' - y\cdot ctgx = 2x\sin x$,

5) $\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$,

6) $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$,

7) $y' + y\cdot tgx = \cos^2 x$,

8) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$,

3.37.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия об основных классах уравнений 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах;
- приобрели умения и навыки интегрирования основных классов уравнений 1-го порядка.

3.38 Практическое занятие № 40 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка»

Практическое занятие № 41 (2 часа).

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши.

3.38.1 Задание для работы

1. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка.

3.38.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Решение типовых задач

1).Решить ДУ, допускающие понижение порядка: а) $xy''' + y'' = 1$.

ДУ третьего порядка. В этом уравнении отсутствует неизвестная функция $y = y(x)$ и ее первая производная y'. Понижаем порядок дифуравнения заменой $y'' = z$, тогда $y''' = z'$. Исходное уравнения теперь запишется как $xz' + z = 1 \Rightarrow xz' = 1 - z$ - дифуравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными.

$$x\frac{dz}{dx} = 1 - z \Big| \cdot dx \Rightarrow xdz = (1 - z)dx \Big| : x(1 - z) \Rightarrow \frac{dz}{1 - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{1 - z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|z| + \ln c_1 = \ln|x|, \quad \ln\frac{c_1}{z} = \ln|x| \Rightarrow \frac{c_1}{z} = x \Rightarrow z = \frac{c_1}{x}.$$

Подставляем $z = y''$, получаем $y'' = \frac{c_1}{x}$. Так как $y' = \int y''dx$, то $y' = \int \frac{c_1}{x}dx = c_1 \ln|x| + c_2$.

Так как $y = \int y'dx$, то $y = \int (c_1 \ln|x| + c_2)dx$. Найдем сначала с помощью формулы интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$:

$$\int \ln|x|dx = \begin{vmatrix} u = \ln|x| & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix} = x\ln|x| - \int x\frac{dx}{x} = x\ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x.$$

$$y = c_1\int \ln|x|dx + c_2\int dx = c_1(x\ln|x| - x) + c_2x + c_3 = c_1x\ln|x| - c_1x + c_2x + c_3 = c_1x\ln|x| + (c_2 - c_1)x + c_3$$

Обозначим $c_2 - c_1$ другой константой, пусть это будет c_2, тогда $y = c_1x\ln|x| + c_2x + c_3$.

Ответ: $y = c_1x\ln|x| + c_2x + c_3$.

Замечание. Так как исходное уравнение было 3-го порядка, то и найденная функция содержит три произвольных константы.

Задачи для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1) $yy'' - (y')^2 = 0$, 2) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$, 3) $xy'' - y' = 0$, 4) $3y \cdot y'' + (y')^2 = 0$,

3.38.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о ДУ высших порядков, задаче Коши, понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений, о ДУ, допускающих понижение порядка;
- приобрели умения и навыки интегрировать простейшие ДУ высших порядков и решать задачу Коши.

3.39 Практическое занятие № 42-43 (4 часа).

Тема: «Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами».

3.39.1 Задание для работы

1. Дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами однородные.

2. Дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами неоднородные»

3.39.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами однородные.

2. Дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами неоднородные.

Решение типовых задач

Решить линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1.$$

Линейные дифуравнения с постоянными коэффициентами решаем в два этапа. Сначала решается уравнение с нулевой правой частью.

$$I.\ y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение, заменяя y'' *на* r^2, y' *на* r, *вместо* y *пишем 1.*

$r^2 - 3r + 2 = 0,\ r_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2},\ r_1 = 2, \quad r_2 = 1.$

Запишем фундаментальные решения $y_1 = e^{r_1 x} = e^{2x}, \quad y_2 = e^{r_2 x} = e^x$. *Запишем общее решение однородного уравнения* $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$. *Теперь находим частное решение* $\widetilde{y}$ *исходного уравнения.*

$$II. \quad y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1 \quad (*)$$

Ищем $\widetilde{y} = Ax^2 + Bx + C$, *так как правая часть представляет собой многочлен второго порядка. Ищем* A, B, C, *«прогоняя» функцию* $\widetilde{y}$ *через исходное дифуравнение. Находим*

$y' = (\widetilde{y})' = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B, \quad y'' = (y')' = (2Ax + B)' = 2A.$. *Подставляем все в (*).*

$2A - 3(2Ax + B) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2 - 4x + 1,$

$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2 - 4x + 1.$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{array}{l|l} x^2: & 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \\ x^1: & -6A + 2B = -4 \Rightarrow -6 + 2B = -4 \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B = 1 \\ x^0: & 2A - 3B + 2C = 1 \Rightarrow 2 - 3 + 2C = 1 \Rightarrow 2C = 2 \Rightarrow C = 1 \end{array}$$

Подставляем в $\widetilde{y} \Rightarrow \widetilde{y} = x^2 + x + 1$. *Так как общее решение линейного дифуравнения* $y = y_0 + \widetilde{y}$, *то* $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$, 2) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

3) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \cdot \sin 6x$. 4) $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$, 5) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.

6) $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$, 7) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

8) $y'' - 3y' = x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{2}{7}$,

3.39.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о методах интегрирования линейных ДУ второго и высших порядков с постоянными коэффициентами;
- приобрели умения и навыки интегрирования линейных ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

3.40 Практическое занятие № 44-45 (4 часа).

Тема: «Системы линейных дифференциальных уравнений. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений»

3.40.1 Задание для работы

1. Системы линейных дифференциальных уравнений.
2. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений.

3.40.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Системы линейных дифференциальных уравнений.
2. Понятие о качественной теории дифференциальных уравнений.

Решение типовых задач

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}.$$

Решение. Сведем предложенную систему к одному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами второго порядка. Для этого продифференцируем первое уравнение системы по *t:*

$x'' = -7x' + y'$ и заменим y' воспользовавшись для этого вторым уравнением системы:

$x'' = -7x' - 2x - 5y, \quad y = x' + 7x$. Окончательно $x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x)$.

$x'' + 12x' + 37x = 0$ - однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 12k + 27 = 0; \quad k_{1,2} = -6 \pm i$

Следовательно, решение: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Из первого уравнения $y = x' + 7x$, поэтому $y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$;

$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$.

Ответ: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$; $y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$, 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$.

3.40.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили методы интегрирования простейших систем ДУ, понятие о качественной теории ДУ;
- приобрели умения и навыки интегрирования простейших систем ДУ.

3.43 Практическое занятие № 46-47 (4 часа).

Тема: «Понятие случайного события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей. Методы вычисления вероятностей»

3.43.1 Заданиедля работы
1. Понятие случайного события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей.
2. Методы вычисления вероятностей

3.43.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Понятие случайного события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей.

2. Методы вычисления вероятностей Решение типовых задач

Задача 1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и набрал их наудачу, помня, что они различны. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Для решения задачи используем классическое определение вероятности. Событие А – номер набран верно.

P(A)=$\frac{m}{n}=\frac{1}{90}$, где $m=1$, так как только один вариант набора верен, всего таких вариантов $n=A_{10}^{2}=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!}=90.$ Ответ: P(A)=$\frac{1}{90}$.

Задача 2. Круговая мишень состоит из трёх зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35 и 0,4. Найти вероятность:
а) попадания в первую или третью зоны;
б) промаха по мишени.

Решение. События: A_1 - попасть в первую зону; A_2 - попасть во вторую зону; A_3 - попасть в третью зону; A – попасть в первую или третью зоны; B – промах по мишени.
а) Так как события A_1 и A_3 несовместны, используем теорему сложения для несовместных событий . P(A)=$P(A_1)+P(A_3)$ =0,1+0,4=0,5.
б) События A_1, A_2 и A_3 независимы используем формулу умножения вероятностей для независимых событий P(B)=$P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})$=(1-0,1)·(1-0,35)·(1-0,4)=0,9·0,65·0,6=0,351.Ответ: P(A)=0,5; P(B)=0,351.

Задача 3. В ящике находятся пять одинаковых приборов, причем три из них неработающих. Наудачу достают два прибора. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных приборов окажутся:

а) один неработающий прибор;
б) два неработающих прибора;
в) хотя бы один неработающий прибор.

Решение: а) определим событие A = {один неработающий прибор}. Число благоприятных для события A исходов равно m(A) = 3·2 = 6. Общее число возможных исходов составит $\mathrm{n}=\mathrm{C}_5^2=\frac{5!}{(5-2)!2!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2}=10.$Тогда P(A)= $\frac{\mathrm{m(A)}}{\mathrm{n}}=\frac{6}{10}=0{,}6;$

б) определим событие B = {два неработающих прибора}. Число благоприятных для события B исходов равно $\mathrm{m(B)}=\mathrm{C}_3^2=\frac{3!}{(3-2)!2!}=3.$

Общее число исходов $\mathrm{n}=\mathrm{C}_5^2=10$, потому что условия опыта те же. Тогда $\mathrm{P(B)}=\frac{\mathrm{m(B)}}{\mathrm{n}}=\frac{3}{10}=0{,}3;$

в) определим событие C = {хотя бы один неработающий прибор}. В этом случае удобно перейти к дополнительному событию $\overline{\mathrm{C}}$ = {ни одного неработающего прибора} = {оба работающих прибора}. Число благоприятных исходов для события $\overline{\mathrm{C}}$ равно $\mathrm{m}(\overline{\mathrm{C}})=1$, так как только одним способом можно выбрать два работающих прибора из двух работающих.
Число всех исходов n = 10, так как условия опыта остались прежними. Тогда P($\overline{\mathrm{C}}$) = $\frac{\mathrm{m}(\overline{\mathrm{C}})}{\mathrm{n}}=\frac{1}{10}=0{,}1.$
Для вероятности исходного события C, используя свойства вероятности, получим

P(C) = 1 – P($\overline{\mathrm{C}}$) = 1 – 0,1 = 0,9.

Задача 4. В первой коробке 5 красных и 3 зеленых карандаша, а во второй – 3 красных и 4 зеленых. Из первой коробки наудачу достают 3 карандаша, а из второй – 2 карандаша. Найти вероятность того, что среди взятых карандашей будут:

а) все карандаши красного цвета;
б) все карандаши одного цвета.

*Решение*а) определим события:

К = {все карандаши красного цвета};

$К_1$ = {красные карандаши из первой коробки};

$К_2$ = {красные карандаши из второй коробки}.

Событие К наступит, если наступят одновременно события и $К_1$, и $К_2$, т. е. $К = К_1 \cdot К_2$. Так как коробки различные, то события $К_1$ и $К_2$ – независимые. Тогда по теореме умножения получим

$P(К) = P(К_1 \cdot К_2) = P(К_1) \cdot P(К_2)$.$P(К_1) = \frac{m(К_1)}{n_1}$, так как все исходы равновозможные.

$m(К_1) = C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$; $n_1 = C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$. Отсюда $P(К_1) = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$.

Аналогично находим $P(К_2) = \frac{m(К_2)}{n_2}$; $m(К_2) = C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$; $n_2 = C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

Отсюда $P(К_2) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$. Окончательно получаем $P(К) = \frac{5}{28} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{196}$;

б) определим события:

В = {все карандаши одного цвета};

К = {все карандаши красные};

З = {все карандаши зеленые}.

Событие В наступит, если наступит какое-либо одно из событий К или З, т. е. В = К + З.

А так как события К и З несовместные, то по теореме сложения получим

$P(В) = P(К + З) = P(К) + P(З)$.

Используя формулу классической вероятности и теорему умножения, получим

$P(З) = P(З_1) \cdot P(З_2)$,

где $З_1$ = {зеленые карандаши из первой коробки}; $З_2$ = {зеленые карандаши из второй коробки}.

$P(З_1) = \frac{m(З_1)}{n_1} = \frac{1}{C_8^3} = \frac{1}{56}$; $P(З_2) = \frac{m(З_2)}{n_2} = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

Отсюда, получаем $P(З) = \frac{1}{56} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{196}$. Таким образом, с учетом ответа в пункте а) имеем

$P(В) = \frac{5}{196} + \frac{1}{196} = \frac{6}{196} = \frac{3}{98}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. В партии готовой продукции из 20 изделий имеется 8 повышенного качества. Наудачу отбирают пять изделий. Какова вероятность, что среди них будут:а) четыре повышенного качества; б) хотя бы одно повышенного качества; в) ни одного повышенного качества.

Задача 2. В первой урне a_1 красных, $в_1$ белых и c_1 черных шаров. Во второй a_2 красных, $в_2$ белых и c_2 черных шаров. Из первой урны взято m_1 шаров, а из второй – m_2. Определить вероятность того, что среди вынутых шаров будут: а) все шары одного цвета; б) один шар черного цвета. Исходные данные представлены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Вариант	a_1	$в_1$	c_1	a_2	$в_2$	c_2	m_1	m_2
0	5	3	2	0	3	2	2	1

Задача 3. В ящике 15 деталей, среди которых 10 - окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Найти вероятность того, что эти детали окрашены.

Задача 4. По предмету теория вероятностей и математическая статистика имеется 30 экзаменационных билетов. Студент выучил только 20. Каким ему выгоднее зайти на экзамен – первым или вторым?

3.43.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятие случайного события, вероятности; освоили элементарную теорию вероятностей, методы вычисления вероятностей;
- приобрели умения и навыки вычисления вероятностей по формуле классической вероятности.

3.44 Практическое занятие № 48 (2 часа).

Тема: «Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса»

3.44.1 Задание для работы

1. Условная вероятность.
2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3.44.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Условная вероятность.
2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Решение типовых задач

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий B_1, $B_2,\ldots B_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)P(A/B_n).$$

Эта формула **называется формулой полной вероятности**.

Задача 1. По цели произведено три последовательных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле p_1=0,3, при втором p_2=0,6, при третьем p_3=0,8. При одном попадании вероятность поражения цели r_1=0,4, при двух попаданиях r_2=0,7, при трех попаданиях r_3=1. Вычислить вероятность поражения цели при трех выстрелах.

Решение. Рассмотрим полную группу несовместных событий:

B_1 – было одно попадание;

B_2 – было два попадания;

B_3 – было три попадания;

B_4 – не было ни одного попадания.

Определим вероятность каждого события. По теоремам умножения и сложения вероятностей будем иметь

$$P(B_1)=p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3=0{,}332.$$

$$P(B_2)=p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3=0{,}468.$$

$$P(B_3)=p_1p_2p_3=0{,}144.$$

$$P(B_4)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)=0{,}056.$$

Пусть событие A – цель поражена. Выпишем условные вероятности поражения цели при осуществлении каждого из событий B_1, B_2, B_3, иB_4.

$$P(A/B_1)=0{,}4,\ P(A/B_2)=0{,}7,\ P(A/B_3)=1,\ P(A/B_4)=0.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)+P(B_4)P(A/B_4)=0{,}6044$$

Ответ:0,6044

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий B_1, $B_2,\ldots B_n$ вероятности появления которых $P(B_1)$, $P(B_2),\ldots,P(B_n)$. Событие A может произойти только вместе с каким-либо из событий B_1, B_2,…B_n, которые будем называть гипотезами. Если событие A произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1)$, $P(B_2)$,…, $P(B_n)$:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}, \ i=1,2,\ldots,n.$$

Полученная формула **называется формулой Байеса**. Здесь $P(A)$ определяется формулой полной вероятности.

Задача 2. 30% приборов собирает специалист высокой квалификации и 70% специалист средней квалификации. Надежность работы прибора, собранного специалистом высокой квалификации, 0,9, надежность прибора, собранного специалистом средней квалификации, 0,8. Взятый прибор оказался надежным. Вычислить вероятность того, что он собран специалистом высокой квалификации.

Решение. Событие A – безотказная работа прибора; B_1 – прибор собран специалистом высокой квалификации; B_2 – прибор собран специалистом средней квалификации.

Вероятности гипотез равны: $P(B_1) = 0{,}3$, $P(B_2) = 0{,}7$.

Условные вероятности события A равны: $P(A/B_1) = 0{,}9$, $P(A/B_2) = 0{,}8$.

Полная вероятность события A: $P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}83$.

Вычислим вероятность гипотезы B_1 при условии, что событие A произошло

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}9}{0{,}83} = 0{,}325.$$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Вычислить вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможные все предположения о первоначальном составе шаров.

Задача 2. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие попало, если вероятности попадания в цель каждым из орудий равны p_1=0,4, p_2=0,3, p_3=0,5.

3.44.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятиеусловной вероятности;освоили формулу полной вероятности иформулу Байеса;
- приобрели умения и навыки вычисления вероятностей по формуле полной вероятности и формуле Байеса.

3.45 Практическое занятие № 49-50 (4 часа).

Тема: «Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа»

3.45.1 Задание для работы

1. Схема Бернулли.
2. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа

3.45.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Схема Бернулли.

Решение типовых задач

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p, то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях k раз, выражается формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } q=1\text{-}k.$$

В частности, отсюда $P_n(0)=q^n$, $P_n(1)=npq^{n-1}$, … , $P_n(n)=p^n$.

Пример 1. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Решение. Событие A – достали белый шар. Тогда вероятности $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$. По формуле Бернулли требуемая вероятность

$$P_4(2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}.$$

Пример 2. Монета подбрасывается 5 раз в неизменных условиях. Успехом считается герб (событие А). Найти вероятность того, что герб появится 3 раза.

Решение. Для решения задачи используем формулу Бернулли (контент, п.3.1.1).

$$P_5(3)=C_5^3(0,5)^3\cdot(1-0,5)^{5-3}=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}\cdot(0,5)^5=0,3125.$$

Ответ: вероятность того, что герб выпадет 3 раза из 5 равна 0,3125.

2. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа

Формула Пуассона

При большом числе испытаний n и малой вероятности p формулой Бернулли пользоваться неудобно, например, $0{,}95^{1000}$ вычислить трудно. В этом случае для вычисления вероятности того, что в n испытаниях (n – велико) событие произойдет k раз используют формулу Пуассона

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $\lambda=np=\text{const}$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

Пример 3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течении времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

Решение. N=1000, p=0,002, $\lambda=np$=2, k=3. Искомая вероятность

$$P_{1000}(3)=\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}=\frac{2^3}{2e^2}=0{,}18.$$

Формулы Муавра – Лапласа

Пример 4. Стрелок выполнил 400 выстрелов. Найти вероятность 325 попаданий, если вероятность при каждом выстреле 0,8.

Решение. Воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа

$$P_{400}(325)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot0{,}8\cdot0{,}2}}\varphi\left(\frac{325-400\cdot0{,}8}{\sqrt{400\cdot0{,}8\cdot0{,}2}}\right)=\frac{1}{8}\cdot\varphi\left(\frac{5}{8}\right)=0{,}125\cdot\varphi(0{,}625)=0{,}125\cdot0{,}327=0{,}0409.$$

Значения функции $\varphi(x)$ берём из таблицы.Ответ: вероятность того, что стрелок попадёт 325 раз 400 равна 0,0409.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Задача 2. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6. Он собирается произвести 10 выстрелов. Найти вероятность того, что он попадёт в цель три раза.

Задача 3. Найти вероятность того, что при подбрасывании игральной кости 5 очков появится два раза.

Задача 4. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути повреждено меньше трех изделий.

3.45.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили формулу Бернулли,приближённые формулы Пуассона и Муавра-Лапласа;
- приобрели умения и навыки вычисления вероятностей по формуле Бернулли,приближённым формулам Пуассона и Муавра-Лапласа.

3.46 Практическое занятие № 51 (2 часа).

Тема: «Случайные дискретные величины. Функция распределения и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия случайной дискретной величины»

3.46.1 Задание для работы

1. Случайные дискретные величины. Функция распределения и ее свойства.
2. Математическое ожидание и дисперсия случайной дискретной величины.

3.46.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Случайные дискретные величины. Функция распределения и ее свойства.

Решение типовых задач

Задание 1 Из коробки, содержащей 25 конфет, среди которых 6 шоколадных, наудачу выбраны три конфеты. Случайная величина X – число шоколадных конфет среди отобранных. Записать ряд распределения СВ X, найти функцию распределения F(x) (и построить ее график), математическое ожидание, дисперсию. Построить многоугольник распределения.

Решение. Случайная величина X – дискретная и принимает значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятность каждого значения по формуле классической вероятности.

$P(X = 0) = P$ (все три конфеты не шоколадные) $= = \frac{C_{19}^{3}}{C_{25}^{3}} = \frac{969}{2300} \approx 0{,}42;$

$P(X = 1) = P$ (одна из трех конфет шоколадная) $= = \frac{C_{6}^{1}C_{19}^{2}}{C_{25}^{3}} = \frac{1026}{2300} \approx 0{,}45;$

$P(X = 2) = P$ (две конфеты из трех шоколадные) $= = \frac{C_{6}^{2}C_{19}^{1}}{C_{25}^{3}} = \frac{285}{2300} \approx 0{,}12;$

$P(X = 3) = P$ (все три конфеты шоколадные) $= = \frac{C_{6}^{3}}{C_{25}^{3}} = \frac{20}{2300} \approx 0{,}01.$

Ряд распределения СВ X имеет следующий вид:

X	0	1	2	3
P	0,42	0,45	0,12	0,01

Проверка: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}42 + 0{,}45 + 0{,}12 + 0{,}01 = 1.$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}42, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}87, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}99, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения F(x) представлен на рис. 2.

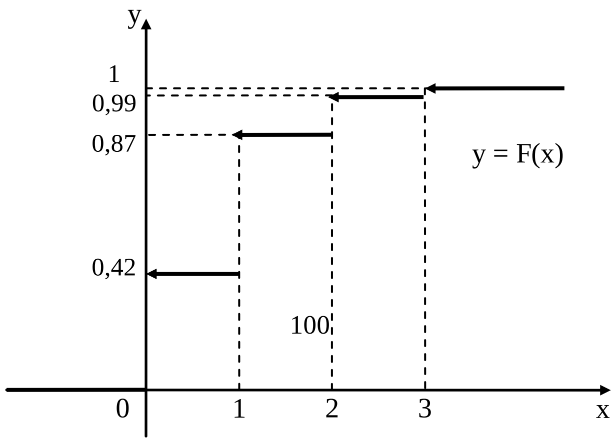


Рис. 2

Многоугольник распределения СВ X представлен на рис. 3.

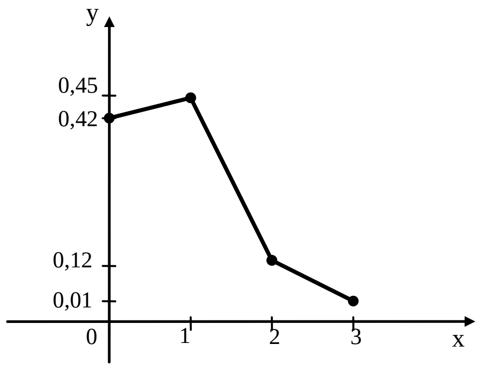


Рис. 3

2. Математическое ожидание и дисперсия случайной дискретной величины.

Математическое ожидание СВ X:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}42 + 1 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}01 = 0{,}72.$$

Дисперсия СВ X:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - 0{,}72)^2 p_i = (0 - 0{,}72)^2 \cdot 0{,}42 + (1 - 0{,}72)^2 \cdot 0{,}45 +$$

$$+(2 - 0{,}72)^2 \cdot 0{,}12 + (3 - 0{,}72)^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}5.$$

Задачи для самостоятельной работы

Задание. Для заданной СВ X записать ее ряд распределения, найти функцию распределения (и построить ее график), математическое ожидание, дисперсию. Построить многоугольник распределения.

В урне 3 черных и 7 белых шаров. Из урны пять раз наудачу извлекают шар (с возвращением перед каждым извлечением). Случайная величина X – число вынутых белых шаров.

3.46.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятие о случайной дискретной величине,функции распределения и ее свойствах,математическом ожидании и дисперсии случайной дискретной величины;
- приобрели умения и навыки составления закона распределения ДСВ, функции распределения, нахождения математического ожидания и дисперсииДСВ.

3.47 Практическое занятие № 52 (2 часа).

Тема: «Случайные непрерывные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия случайной непрерывной величины»

3.47.1 Задание для работы

1. Случайные непрерывные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства.
2. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величин

3.47.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Случайные непрерывные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства.

Решение типовых задач

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, заданную а некотором интервале (a, b). Закон распределения вероятностей для такой величины должен позволять находить вероятность попадания ее значения в любой интервал (x_1, x_2).

Функция распределения непрерывной случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения $x \in (a, b)$ вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Как любая вероятность $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.
3. $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
4. $P(X=x_1)=0$.
5. Если все возможные значения случайной величины X находятся на интервале (a, b), то $F(x)=0$ при $x \le a$ и $F(x)=1$ при $x \ge b$.
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины X называют производную от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Плотность распределения непрерывной случайной величины X обладает свойствами:

1. $f(x) \ge 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
3. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения случайной величины $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.
4. $$P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 2, \\ (x-2)^2 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения этой случайной величины и вероятность попадания ее в интервал (1; 2,5).

По определению $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < 2, \\ 2(x-2) \quad \text{при} \quad 2 < x < 3, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$

Требуемая вероятность будет $P(1 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$.

2. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величин

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Аналогично тому, как это было сделано для дискретной случайной величины, определим числовые характеристики непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ называется выражение

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\cdot$$

Если случайная величина X может принимать значения только на конечном отрезке $[a, b]$, то $M[X]=\int_{a}^{b} xf(x)dx\cdot$

Дисперсия непрерывной случайной величины X вычисляется согласно равенству:

$$D[X]=M[X-M(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X])^2 f(x)dx,$$

или

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(M[X])^2\cdot$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, указанные для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин

Среднеквадратичным отклонением случайной величины X называется число, равное корню квадратному из дисперсии:

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}\,.$$

Значение случайной величины X, при котором плотность распределения $f(x)$ имеет наибольшее значение называется модой$M_0[X]$.

Медианой$M_e[X]$ непрерывной случайной величины X, называют ее значение, определяемой равенством

$$P(X<M_e[X])=P(X>M_e[X])$$

или

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx=\int_{M_e}^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x\le 0, \\ x-\frac{1}{4}x^3 \quad \text{при} \quad 0<x<2, \\ 0 \quad \text{при} \quad x\ge 2. \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение величины X.

Воспользуемся отношениями:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^2 x\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}=\frac{16}{15}\cdot$$

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}\cdot$$

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\frac{4}{3}-\frac{256}{225}=\frac{44}{225}\cdot \qquad \sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\frac{2\sqrt{11}}{15}\,.$$

2. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x\le 1, \\ x-\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 1<x\le 2, \\ 0 \quad \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения этой величины.

Воспользуемся формулой $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x\le 1$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0\cdot$

Если $1<x\le 2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}t\right)\Bigg|_0^x=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right).$$

Если $x>2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\int\limits_{2}^{x} 0dx=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\Big|_0^2=1\cdot$$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x\le 1, \\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right) \ \text{при} \ 1<x\le 2, \\ 1 \ \text{при} \ x>2. \end{cases}$$

3. Случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей:

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, x\le -2 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, -2<x\le 2, \\ 1, x>2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение меньше 0.

Решение. Для решения задачи воспользуемся одним из свойств функции распределения $P(\xi<0)=F_\xi(0)-F_\xi(-\infty)=0{,}5.$ Ответ: вероятность того, что ξ меньше 0 равна 0,5.

3.47 .3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия случайные непрерывные величины,функции распределения, плотности вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства;математического ожидания и дисперсии случайной непрерывной величины;
- приобрели умения и навыки решения задач на НСВ.

3.48 Практическое занятие № 53-54 (4 часа).
Тема: «Основные законы распределения»

Практическое занятие № 55 (2 часа).Нормальное распределение и его свойства»

3.48.1 Задание для работы
1. Нормальное распределение и его свойства
3.48.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Нормальное распределение и его свойства
.

Решение типовых задач

Задание. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m = 11 и σ = 1. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения:

а) из интервала [5,13];

б) меньшее 5;

в) большее 13;

г) отличающееся от своего среднего *m* по абсолютной величине не больше чем на 6.

Решение:

а) вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал [a, b] определяется формулой:

$$P(a\le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$ где Ф(x) – функция Лапласа.

Отсюда получаем

$$P(5 \le X \le 13\ ) = \Phi\left(\frac{13-11}{1}\right) - \Phi\left(\frac{5-11}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(-6) == 0{,}4772 + 0{,}4999 = 0{,}9771;$$

б) вероятность того, что случайная величина X принимает значения, меньшие a, определяется формулой

$$P(X<a) = \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) + 1.$$ Отсюда получаем

$$P(X< 5) = \Phi\left(\frac{5-11}{1}\right) + 1 = \Phi(-6) + 1 = -0{,}4999 + 1 = 0{,}5001;$$

в) вероятность того, что случайная величина X принимает значения, большие b, определяется формулой

$$P(X>b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$$

Отсюда получаем $P(X> 13) = 1 - \Phi\left(\frac{13-11}{1}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}4772 = 0{,}5228;$

г) вероятность отклонения случайной величины X от среднего m не более чем на ε находится по формуле

$$P(|X-m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$ Отсюда получаем

$$P(|X-11| < 6) = 2\Phi\left(\frac{6}{1}\right) = 2\Phi(6) = 2 \cdot 0{,}4999 = 0{,}9998.$$

Задачи для самостоятельной работы

Задание. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения:

а) из интервала [a, b];

б) меньшее a;

в) большее b;

г) отличающееся от своего среднего m по абсолютной величине не больше, чем на ε.

Значения параметров заданы в табл. 3.

Таблица 3

Вариант	m	σ	a	b	ε
0	1	3	-1	5	2
1	2	4	1	8	3
2	3	5	-1	11	4

3.48.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия нормального распределения и его свойства;
- приобрели умения и навыки решения задач, связанных с нормальным распределением.

3.49 Практическое занятие № 56 (2 часа).

Тема: «Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия»

3.49.1 Задание для работы

1. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд.
2. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

3.49.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд.

Решение типовых задач

Задание 1. По списку на предприятии числится 20 рабочих, которые имеют следующие разряды: 1,5,2,4,3,4,6,4,5,1,2,2,3,4,5,3,4,5,2,1.

Составьте сгруппированный ряд распределения рабочих по разрядам. Определите средний разряд рабочего, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Решение**.** Построение сгруппированного ряда для дискретного признака: составим таблицу, в которой перечислим варианты и их частоты.

x_i^*	1	2	3	4	5	6
n_i	3	4	3	5	4	1

Для определения выборочных характеристик воспользуемся формулами приведёнными в § 9.5.

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 3 + 4\cdot 5 + 5\cdot 4 + 6\cdot 1) = 3{,}3.$$

$$D_B = \frac{1}{20}(1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 4 + 3^2\cdot 3 + 4^2\cdot 5 + 5^2\cdot 4 + 6^2\cdot 1) - 3{,}3^2 = 2{,}21.$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{2{,}21} = 1{,}49.$$

Ответ: средний разряд рабочего равен 3,3 при среднем квадратическом отклонении 1,49.

2. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Задание 2. Задана выборка: 2, 0, 2, 0, 3, 2, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1.

По заданной выборке:

а) составить вариационный ряд и статистический закон распределения;

б) построить полигон;

в) составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

г) вычислить несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S;

д) найти доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}8$.

Решение: а) вариационный ряд: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Объем выборки n = 20.

Статистический закон распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	7	4	1	1
μ_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

где n_i – частота; μ_i – относительная частота; i = 1, 2, …, 6;

б) полигон частот выборки приведен на рис. 4.

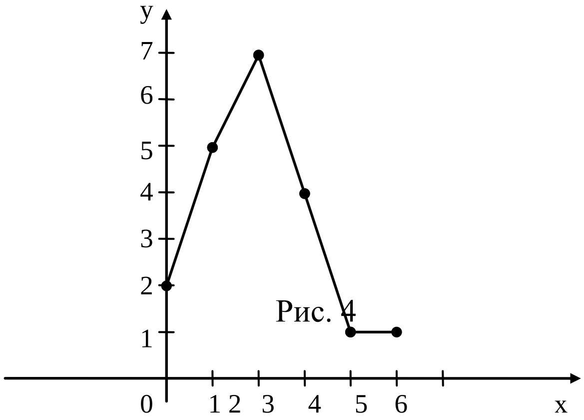


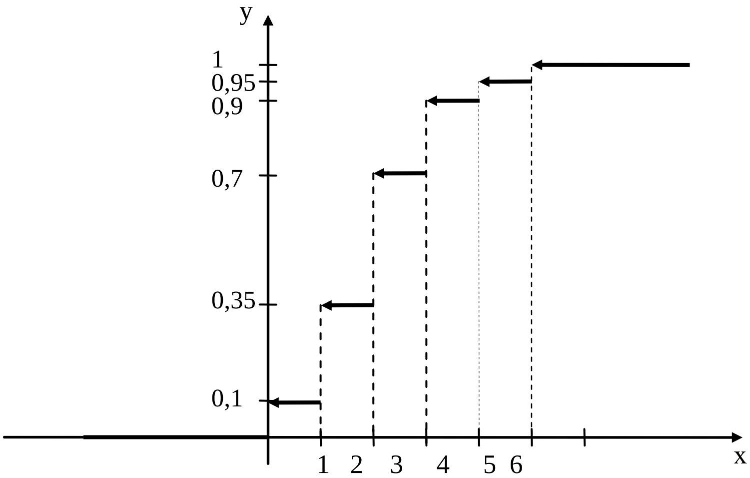
Рис. 4

Изображаем точки с координатами (x_i, n_i) и соединяем их отрезками;

в) эмпирическая функция распределения $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}1, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}35, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}70, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}9, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}95, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

При построении графика функции $F^*(x)$ откладываем значения в (0;1) (рис. 5);



г) выборочное среднее $\overline{x}$ вычисляем как среднее арифметическое всех выборочных значений

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1) = 2.$$

Несмещенная выборочная дисперсия S^2 равна

$$S^2 = \frac{1}{20-1}((0-2)^2 \cdot 2 + (1-2)^2 \cdot 5 + (2-2)^2 \cdot 7 + (3-2)^2 \cdot 4 +$$

$$+ (4-2)^2 \cdot 1 + (5-2)^2 \cdot 1) = \frac{1}{19}(8 + 5 + 4 + 4 + 9) = 1{,}58.$$

Стандартное отклонение S равно $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1{,}58} = 1{,}26$;

д) так как объем выборки n = 20, по таблице распределения Стьюдента найдем t_α, для $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}2$ и $k = n - 1 = 19$, $t_\alpha = 1{,}33$.

Доверительный интервал для среднего m вычислим по формуле

$$\overline{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}};$$

$$2 - 1{,}33\frac{1{,}26}{\sqrt{20}} \le m \le 2 + 1{,}33\frac{1{,}26}{\sqrt{20}};$$

$$1{,}63 \le m \le 2{,}37.$$

Задачи для самостоятельной работы

Задание.По заданной выборке

а) составить вариационный ряд и статистический закон распределения;

б) построить полигон;

в) составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

г) вычислить несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\overline{x}$, S^2, S;

д) найти доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью γ.

52, 34, 49, 44, 45, 45, 37, 36, 46, 36; γ = 0,8.

3.49.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о статистических оценках, погрешностях оценки,доверительной вероятности и доверительном интервале;
- приобрели умения и навыки по заданной выборке:

а) составлять вариационный ряд и статистический закон распределения;б) строить полигон;в) составлять эмпирическую функцию распределения и строить ее график;г) вычислять несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\overline{x}$, S^2, S;д) находить доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью γ.

3. 50 Практическое занятие № 57 (2 часа).

Тема: «Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия»

3.50.1 Задание для работы

1. Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал.
2. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.

3.50.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Статистические оценки, погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал.

Решение типовых задач

Задание. Для определения потерь зерна при уборке проведено 100 измерений случайным образом. Средняя величина потерь составила 1,8 ц с одного гектара посевов при среднем квадратическом отклонении 0,5 ц с га. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых может находиться средняя величина потерь с 1 га.

Решение. В этой задаче требуется построить доверительный интервал для математического ожидания при известном среднем квадратическом отклонении.

$$a \in (1{,}8 - \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{10}; 1{,}8 + \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{10}) = (1{,}702; 1{,}898).$$

Параметр t_β определяем из равенства: $\Phi_0(t_\beta) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475 \Leftrightarrow t_\beta = 1{,}96$. Для нахождения t_β используем таблицу 12.2.

Ответ: средняя величина потерь находится в границах (1,702;1,898).

2. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.

Задачи для самостоятельной работы

Задание 1. Взято 16 проб молока, поступивших на реализацию из акционерного сельскохозяйственного предприятия. Средняя жирность молока составила 3,7% при среднем квадратическом отклонении 0,5%. Какова вероятность того, что средняя жирность молока всех партий не выйдет за пределы от 3,6% до 3,8%?

Задание 2. С помощью случайной выборки изучалось время открытия банковского счёта в различных банках. На основании 60 наблюдений установлено, что в среднем на выполнение этой операции затрачивалось 0,5 часа, при среднем квадратическом отклонении 0,12 часа. Считая время выполнения производственной операции нормально распределённой случайной величиной, определить границы, в которых находится среднее время открытия счёта с доверительной вероятностью 0,9.

3.50.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о статистических оценках, погрешностях оценки,доверительной вероятности и доверительном интервале;
- приобрели умения и навыки по заданной выборке:

а) составлять вариационный ряд и статистический закон распределения; б) строить полигон;в) составлять эмпирическую функцию распределения и строить ее график;г) вычислять несмещенные оценки среднего значения m, дисперсии σ^2 и среднего квадратичного отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S;д) находить доверительный интервал для среднего значения m с доверительной вероятностью γ.

3.51 Практическое занятие № 58 (2 часа).

Тема: «Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки»

3.51.1 Задание для работы

1. Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства.
2. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

3.51.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Функциональная зависимость и регрессия. Линии регрессии, их свойства.
2. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

Рассказать студентам, что такое корреляционный и регрессионный анализ. Объяснить, что статистическое исследование наличия или отсутствия зависимости между случайными величинами производится с помощью выборочного коэффициента корреляции. Выделение линейной части этой зависимости производится с помощью выборочного коэффициента регрессии и выборочного уравнения (линейной) регрессии.

Напомнить, что если в результате осуществления некоторого эксперимента наблюдаются две величины X и Y, то *выборочный корреляционный момент* $\mu^*_{x,y}$ величин X и Y определяется формулой:

$$\mu^*_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

где $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ — n пар наблюденных значений, полученных в n независимых повторениях эксперимента, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. *Выборочный коэффициент корреляции* $r^*_{x,y}$ равен:

$$r^*_{x,y} = \frac{\mu^*_{x,y}}{\sigma^*_x \cdot \sigma^*_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}},$$

где

$$\sigma^*_x = \sqrt{D^*(X)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \; \sigma^*_y = \sqrt{D^*(Y)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}.$$

Выборочный коэффициент регрессии Y *на* x:

$$\rho^*_{y/x} = r^*_{x,y}\frac{\sigma^*_y}{\sigma^*_x} = \frac{\mu^*_{x,y}}{(\sigma^*_x)^2}.$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y *на* x имеет вид:

$$y - \overline{y} = \rho^*_{y/x}(x - \overline{x}) \text{ или } \frac{y - \overline{y}}{\sigma^*_y} = r^*_{x,y}\frac{x - \overline{x}}{\sigma^*_x},$$

выборочное уравнение прямой линии регрессии X *на* y:

$$\frac{x - \overline{x}}{\sigma^*_x} = r^*_{x,y}\frac{y - \overline{y}}{\sigma^*_y} \quad \text{или} \quad \frac{y - \overline{y}}{\sigma^*_y} = \frac{1}{r^*_{x,y}}\frac{x - \overline{x}}{\sigma^*_x}.$$

Отметить, что эти уравнения можно вывести с помощью метода наименьших квадратов.

Напомнить, что в качестве оценки отклонения найденного значения $r^*_{x,y}$ от точного значения $r_{x,y}$ коэффициента корреляции берется среднее квадратическое отклонение, приближенно равное:

$$\sigma^*_r = \frac{1 - (r^*_{x,y})^2}{\sqrt{n}}.$$

Доверительный интервал для $r_{x,y}$ имеет вид:

$$r^*_{x,y} - t_\gamma \cdot \frac{1 - (r^*_{x,y})^2}{\sqrt{n}} < r_{x,y} < r^*_{x,y} + t_\gamma \cdot \frac{1 - (r^*_{x,y})^2}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, проверка гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции может быть осуществлена с помощью проверки условия

$$| r^*_{x,y} | < t_\gamma \cdot \frac{1 - (r^*_{x,y})^2}{\sqrt{n}}.$$

3.51.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о функциональной зависимости и регрессии,коэффициенте корреляции, корреляционном отношении, их свойствах и оценках;
- приобрели умения и навыки нахождения выборочного коэффициента регрессии и выборочного уравнения (линейной) регрессии.

3.52 Практическое занятие № 59 (2 часа).

Тема: «Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов»

3.52.1 Задание для работы

1. Понятие о методе наименьших квадратов

2. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

3.52.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Понятие о методе наименьших квадратов

В различных практических исследованиях приходится находить эмпирические функции по отдельным значениям этих функций, полученным на основании опытных данных (измерений). Один из способов получения таких функций–метод наименьших квадратов. Пусть, например, на основании эксперимента необходимо установить функциональную зависимость между температурой x и урожайностью y. По результатам измерений составляем таблицу:

x	x_1	…	x_i	…	x_n
y	y_1	…	y_i	…	y_n

Предположим, что эти точки на координатной плоскости находятся приблизительно на одной прямой. В данном случае естественно предположить, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся уравнением

$$y = a \cdot x + b$$

Так как точки (x_i, y_i), i=1… n лишь приблизительно лежат на одной прямой, то равенства $y_i - (ax_i + b) = 0$ будут выполняться приближенно и величины $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$ будут отличны от нуля.

Составим сумму $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$ и подберем параметры a и bтак, чтобы функция S(a,b) принимала наименьшее значение, т.е. чтобы сумма квадратов погрешностей $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$ была наименьшей. Из необходимых условий экстремума следует:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i + b)\right]\cdot(-x_i)\right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i + b)\right]\cdot(-1)\right) = 0. \end{cases} \text{или} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем a и bи подставив их в уравнение

$$y = a \cdot x + b$$

получим эмпирическую функцию исследуемой зависимости.

Задача. Экспериментально получены пять значений искомой функции y=f(x) при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию y=f(x) в виде $y = a \cdot x + b$.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Решение. Предварительно вычислим суммы:

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1+2+3+4+5 = 15$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 0{,}5+1+1{,}5+2+3 = 8$,

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1{,}5 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3 = 30.$$

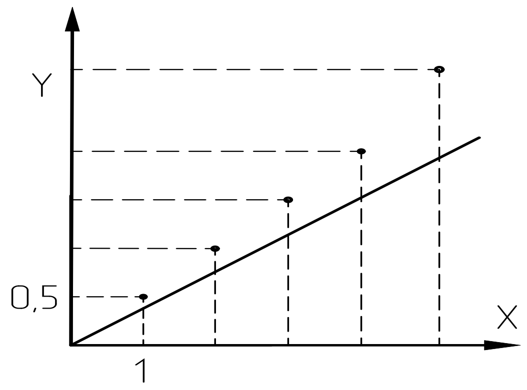
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 30 - a\cdot 55 - b\cdot 15 = 0, \\ 8 - a\cdot 15 - b\cdot 5 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 15b + 55a = 30, \\ 5b + 15a = 8. \end{cases}$$

Решив систему уравнений найдём a=0,6, b= –0,2.Следовательно, эмпирическая функция определяется формулой

$$y = 0{,}6x - 0{,}2.$$

Построим график этой зависимости и нанесем на него экспериментальные точки (облако точек).



Ответ: y = 0,6x – 0,2.

Нахождение эмпирической функции с MathCAD

Пусть задана таблица экспериментальных значений из **задачи № 5**.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1	1.5	2	3

Процедура нахождения эмпирической функции в MathCAD методом наименьших квадратов предполагает использование функций MathCAD.

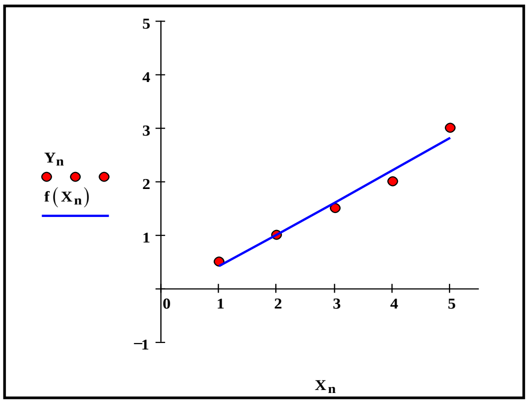
$$m := \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1.5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad m := \mathrm{csort}(m, 0)$$

$$X := m^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := m^{\langle 1 \rangle}$$

$$n := 0 .. \mathrm{rows}(m) - 1$$

$$b := \mathrm{intercept}(X, Y) \qquad a := \mathrm{slope}(X, Y)$$

$$f(x) := b + a\cdot x \qquad b = -0.2 \qquad a = 0.6$$



2. Определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов.

Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии среднеквадратичнойрегрессии по не сгруппированным данным

Пусть изучается система количественных признаков (X, Y). В результате n независимых опытов получены и пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n).

Найдем по данным наблюдений выборочное уравнение прямой линии среднеквадратичной регрессии Y на X вида

$$Y = \rho_{yx}x + b. \qquad (*)$$

Угловой коэффициент прямой линии регрессии Y на X называют выборочным коэффициентом регрессииY на X и обозначают через ρ_{yx}; он является оценкой коэффициента регрессии β .

Назовем отклонением разность

$$Y_i - y_i \ (i = 1, 2. .... n),$$

где Y_i—вычисленная по уравнению (*) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i; y_i—наблюдаемая ордината, соответствующая x_i. Подберем параметры ρ_{yx} и b так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной (в этом состоит сущность метода наименьших квадратов).чтобы точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n), построенные по данным наблюдений, на плоскости xOy лежали как можно ближе к прямой (*).

Так как каждое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, то и сумма квадратов отклонений есть функция F этих параметров (временно вместо ρ_{yx} будем писать ρ):

$$F(\rho,b) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 \text{, или } F(\rho,b) = \sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)^2 .$$

Для отыскания минимума приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\frac{dF}{d\rho} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)x_i = 0;$$

$$\frac{dF}{db} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i) = 0 .$$

Выполнив элементарные преобразования, получим систему двух линейных уравнений относительно ρ и b*$^{)}$:

$$\left(\sum x^2\right)\rho + \left(\sum x\right)b = \sum xy; \quad \left(\sum x\right)\rho + nb = \sum y. \qquad (**)$$

Решив эту систему, найдем искомые параметры:

$$\rho_{yx} = \left(n \cdot \sum xy - \sum x \cdot \sum y\right) / \left(n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right);$$

$$b = \left(\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum xy\right) / \left(n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right). \qquad (***)$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y = \rho_{xy}x + C,$$

где ρ_{xy} —выборочный коэффициент регрессии X на Y.

Пример. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Yна X по данным n = 5 наблюдений:

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Решение. Составим расчетную табл. 11. Найдем искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (***):

$\rho_{xy} = (5 \cdot 26,975 — 15 \cdot 8,15)/(5 \cdot 57,5 — 15^2) ==0,202;$

Ь= (57,5·8,15—15·26,975)/62,5= 1,024.

(Для простоты записи вместо $\sum_{i=1}^{n}$ условимся писать $\sum$.

Таблица 11

x_i	y_i	x^2_i	$x_i y_i$
1,00 1,50 3,00 4,50 5,00	1,25 1,40 1,50 1,75 2.25	1,00 2,25 9,00 20,25 25,00	1,250 2,100 4,500 7,875 11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x_i^2 = 57{,}50$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$

Напишем искомое уравнение регрессии:

$$Y = 0{,}202x + 1{,}024.$$

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения Y_iсогласуются с наблюдаемыми значениями y_i найдем отклонения Y_i—y_i. Результаты вычислений приведены в табл. 12.

Таблица 12

x_i	Y_i	y_i	Y_i - y_i
1,00 1,50 3,00 4,50 5,00	1,226 1,327 1,630 1,933 2,034	1,25 1,40 1,50 1,75 2,25	—0,024 —0,073 0,130 0,183 - 0,216

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

Задачи для самостоятельной работы

3.52.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили определение параметров уравнений регрессии методом наименьших квадратов;
- приобрели умения и навыки определения параметров уравнения регрессии методом наименьших квадратов.

3.53 Практическое занятие № 60 (2 часа).

Тема: «Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения»

3.53.1 Задание для работы

1. Понятие о критериях согласия.
2. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения.
3. Проверка гипотезы о виде распределения.

3.53.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Понятие о критериях согласия.
2. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения.
3. Проверка гипотезы о виде распределения.

Применение критериев согласия (алгоритм)

Рассказать студентам об основных принципах статистической проверки гипотез. Напомнить понятия *статистической гипотезы* (простойи сложной), *нулевой* и *конкурирующей* гипотезы, *ошибок первого* и *второго рода*, *уровня значимости*, *статистическогокритерия*, *критической области*, *области принятия гипотезы*. Кроме того, напомнить понятия *наблюдаемогозначения* критерия и *критической точки*.

Напомнить критерии для проверки гипотез о вероятности события, о математическом ожидании, о сравнении двух дисперсий. Напомнить критерий «*хи-квадрат*» К. Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения. Рассказать о порядке выполнения работы «Статистическая обработка результатов измерений»:

А) По данной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n строится *статистический ряд*

y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
k_1	k_2	k_3	$\cdots$	k_m

Здесь $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ — элементы выборки, записанные в порядке возрастания, k_i — число повторений элемента y_i в выборке. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{m} k_i = n.$

Б) При большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы, и строится *группированная выборка*, а затем*группированный статистический ряд*. Для этого отрезок $[a,b]$, содержащий все элементы выборки, разбивается на N интервалов одинаковой длины $h = \frac{b-a}{N}$. В зависимости от объема выборки число интервалов группировки N берется от 6 до 20. Находятся концы интервалов $\xi_i = a + (i-1)h$ $(i = 1,2,\ldots,N+1)$, середины интервалов

$z_j = \frac{1}{2}(\xi_j + \xi_{j+1})$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ и соответствующие *эмпирические частоты* — количество n_j элементов выборки, попавших в j-ый интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу). Очевидно, что $\sum_{j=1}^{N} n_j = n.$

Также строится *группированный статистический ряд относительных частот* $w_j = \frac{n_j}{n}$ $(j = 1,2,\ldots,N)$.

В) Строится график *выборочной функции распределения* $\overline{F}(x)$, где $\overline{F}(x) = 0$ при $x \le z_1$,

$$\overline{F}(x) = \frac{n_1 + \ldots + n_i}{n} = \sum_{j=1}^{i} w_j \quad \text{при} \quad z_i < x \le z_{i+1}\ (i = 1,2,\ldots,N-1)$$

и $\overline{F}(x) = 1$ при $x > z_N$.

Г) Строится *гистограммаотносительных частот* — ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ и высотами $h_j = \frac{w_j}{h}$ $(j = 1,2,\ldots,N)$.

Д) Находится оценка математического ожидания — *выборочное среднее*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} n_j z_j ,$$

оценка дисперсии — *исправленная выборочная дисперсия*

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N} n_j (z_j - \overline{x})^2 ,$$

исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{s^2}$.

Е) Находятся *теоретические частоты* $n_j^{/} = np_j$, где

$$p_j = \Phi\left(\frac{\xi_{j+1} - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{\xi_j - \overline{x}}{s}\right), \quad j = 1,2,\ldots, N.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся по таблицам.

Ж) Для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности сначала составляется расчетная таблица:

Номер интервала	Границы интервала	Эмпирические частоты	Теоретические частоты		
j	ξ_j, ξ_{j+1}	n_j	$n_j^{/}$	$(n_j - n_j^{/})^2$	$\dfrac{(n_j - n_j^{/})^2}{n_j^{/}}$
1 2 … N					

З) Если $n_j < 5$ или $n_j^{/} < 5$ при некотором j , то j -ый интервал объединяется с соседним, при этом эмпирические и теоретические частоты суммируются. После объединения получаются r интервалов $(r \le N)$, в каждом из которых $n_j \ge 5$ и $n_j^{/} \ge 5$.

И) По расчетной таблице находится *наблюдаемое значение* статистики «хи-квадрат» (Пирсона):

$$\chi^2_{набл} = \sum_{j=1}^{r}\frac{(n_j - n_j^{/})^2}{n_j^{/}}.$$

К) По заданному *уровню значимости* α и *числу степеней свободы* $k = r - 3$ находится из таблиц *критическая точка* $\chi^2(\alpha, k)$. Если $\chi^2_{набл} \le \chi^2(\alpha, k)$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении случайной величины X и поэтому она принимается. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2(\alpha, k)$, то гипотезу отвергают.

Л) Если гипотеза принимается, то с помощью таблиц строится график плотности

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\overline{x})^2}{2s^2}}$$

случайной величины X (распределенной по нормальному закону). Этот график строится в тех же осях и масштабе, что и гистограмма относительных частот.

Решение типовых задач

Задание. Результат прочности на сжатие (случайная величина ξ) – 200 образцов бетона – представлены в виде сгруппированного ряда:

Интервалы прочности кг/$см^2$	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
n_i	10	26	56	64	30	14

Требуется проверить основную гипотезу о нормальном законе распределения прочности образцов бетона на сжатие. Уровень значимости принять q = 0,01.

Решение. В качестве основной гипотезы будем рассматривать гипотезу H_0: $\xi \in N(\bar{x}; \sigma_B)$. Для её проверки воспользуемся критерием Пирсона, алгоритм использования которого изложен в § 11.2.

Начнём решение задачи с определения выборочных характеристик.

$$\bar{x} = \frac{1}{200}(195 \cdot 10 + 205 \cdot 26 + 215 \cdot 56 + 225 \cdot 64 + 235 \cdot 30 + 245 \cdot 14) = 221.$$

$$D_B = \frac{1}{200}((195-221)^2 \cdot 10 + (205-221)^2 \cdot 26 + (215-221)^2 \cdot 56 + (225-221)^2 \cdot 64 +$$
$$+ (235-221)^2 \cdot 30 + (245-221)^2 \cdot 14) = 152.$$

$$\boldsymbol{\sigma}_B = \sqrt{152} = 12{,}33.$$

Для определения $\chi^2_{набл}$ составим таблицу.

Интервалы, I_k	Частоты, n_k	$p_k = \Phi_0(\frac{x_{k+1}-\bar{x}}{\sigma_B}) - \Phi_0(\frac{x_k-\bar{x}}{\sigma_B})$	$\frac{(n_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}$
-∞-200	10	0,0446	0,13
200-210	26	0,1421	0,21
210-220	56	0,2814	0,0013
220-230	64	0,2992	0,289
230-240	30	0,1709	0,511
240-+∞	14	0,0614	0,241

Например, $p_1 = \Phi_0(\frac{200-221}{12.33}) - \Phi_0(-\infty) = 0{,}5 - 0{,}4554 = 0{,}0446.$

$\chi^2_{набл} = 0{,}13 + 0{,}21 + 0{,}0013 + 0{,}289 + 0{,}511 + 0{,}241 = 1{,}3823.$

Для определения критической точки воспользуемся таблицей 12.4 критических точек распределения хи-квадрат. Так как неизвестные параметры распределения были заменены их точечными оценками, число степеней свободы будет на 3 меньше числа интервалов, то есть $k = 6 - 3 = 3$. Итак, $\chi^2_{кр} = \chi^2_3(0{,}01) = 11{,}3.$

Так как $\chi^2_{набл} = 1{,}3823 < 11{,}3 = \chi^2_{kp}$, то гипотеза H_0 принимается.

Ответ: данные согласуются с гипотезой о нормальном законе распределения.

Задачи для самостоятельной работы

Задание 1. Распределение работников предприятия по стажу их работы на данном предприятии представлено интервальным рядом:

Стаж рабо-	До 1	1-5	5-10	10-15	15-20	20-25

ты, лет						
Число работников	8	12	16	14	10	5

На уровне значимости α =0,05 проверить гипотезу о том, что данная генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения.

Задание 2. Из нормальной генеральной совокупности сельскохозяйственных предприятий, рассматриваемых по показателю урожайности пшеницы, с известным средним квадратическим отклонением σ = 9,4 и генеральной средней a_0 = 38,1, извлечена выборка объёма n = 50. По ней найдена выборочная средняя $\overline{x}$ = 42. Требуется при уровне значимости α =0,05 проверить основную гипотезу H_0: $a = a_0$ =38,1 при конкурирующей гипотезе $H_1 : a \neq 38{,}1$.

3.53.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:
- освоили понятия о критериях согласия, о проверке гипотезы о значении параметров нормального распределения, опроверке гипотезы о виде распределения;
- приобрели умения и навыки проверки гипотезы о виде распределения;

3.55 Практическое занятие № 61-62 (2 часа).

Тема: «Основные понятия теории функций комплексного переменного. Элементарные функции, их свойства. Дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана. Гармонические и аналитические функции.Конформные отображения»

3.55.1 Задание для работы

1. Основные понятия теории функций комплексного переменного. Элементарные функции, их свойства. Дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана.
2. Гармонические и аналитические функции.Конформные отображения.

3.55.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Основные понятия теории функций комплексного переменного. Элементарные функции, их свойства. Дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана.

Решение типовых задач

Пример 1. Функцию $w = z^2$ представить в алгебраической форме

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Решение. Т.к. $w = \left(x + i \cdot y\right)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$, то $u\left(x, y\right) = x^2 - y^2$, $v\left(x, y\right) = 2xy$.

Поэтому $w = z^2 \equiv x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$.

Пример 22. Выяснить, в каких точках комплексной плоскости дифференцируемы функции и вычислить производные в этих точках. В каких точках плоскости функции аналитические?

1. $f(z) = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y$; **2**. $f(z) = \left|z\right|^2$; **3**. $f(z) = \overline{z}$.

*Решение.***1.** Функция определена на всей комплексной плоскости. В пред-ставлении в алгебраической форме $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ данной функции действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ равны

$$u(x, y) = e^x \cdot \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \cdot \sin y.$$

Частные производные существуют и непрерывны на всей плоскости xOy:

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cdot \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cdot \cos y$

и выполняются условия (КРЭД). По достаточному признаку дифференци-руемости данная функция дифференцируемая, а значит и аналитическая, на всей комплексной плоскости. Производная может быть найдена по формуле

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y \cdot$

Замечание. Видно, что $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$ для всех точек комплексной плоскости. В действительной области подобным свойством обладает только одна функция: $f(x) = e^x$. Поэтому функцию

$f(z) = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y$

называют комплексной показательной функцией(экспонентой) и обозначают e^z или $\exp z$:

$f(z) = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y$.

2. $f(z) = |z|^2 \Rightarrow f(z) = x^2 + y^2$, $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$. Вычисляем производные $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$. Условия (КРЭД)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 2x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 2y = 0 \end{cases}$$

выполняются лишь в точке $z = 0$. Функция дифференцируема только в одной точке $z = 0$, но не является аналитической ни в одной точке плоскости, производная в точке $z = 0$ (при $z = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$) вычисляется по формуле

$f'(0) = \frac{\partial u(0;0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(0;0)}{\partial x} = 2 \cdot 0 + i \cdot 0 = 0 \cdot$

3. Функция не дифференцируема и не является аналитической ни в одной точке плоскости. Действительно, $f(z) = \overline{z} \equiv x - i \cdot y$, $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. Вычисляем производные $u_x(x,y) = 1$, $u_y(x,y) = 0$, $v_x(x,y) = 0$, $v_y(x,y) = -1$. Условия (КРЭД) не выполняются ни в одной точке комплексной плоскости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 1 \neq -1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 0 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция не дифференцируема ни в одной точке плоскости, не является аналитической.

2. Гармонические и аналитические функции. Конформные отображения.

Пример. Проверить, является ли функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$, и если является, то найти эту аналитическую функцию, если $f(0) = 0$.

Решение. Функцию $f(z)$ будем искать в виде $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, где $u(x,y)$ дана в условиях задачи, а $v(x,y)$ неизвестна. Функция $u(x,y)$ определена на всей комплексной плоскости (в односвязной области). Вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

Видно, что функция $u(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Поэтому она гармоническая и является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ на всей плоскости. Найдём гармоническую функцию $v(x,y)$, сопряжённую с функцией $u(x,y)$. Тогда будет восстановлена и функция $f(z)$. Существует несколько способов восстановления $f(z)$.

Первый способ восстановления $f(z)$ (с помощью неопределённого интеграла от функции действительного аргумента). Из условий Коши- Римана следует, что

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2.\end{cases}$$

Следовательно, функция $v(x,y)$ является решением системы дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+2.\end{cases}\qquad\text{(S)}$$

Интегрировать эту систему уравнений можно с помощью неопределённого интеграла или криволинейного.

Интегрируя первое уравнение системы (S) по x (считая y постоянным), восстанавливаем функцию $v(x,y)$ с точностью до произвольной гладкой (пока неизвестной) функции $\varphi(y)$:

$$\begin{cases}v(x,y)=\int 2y\cdot dx+\varphi(y),\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v(x,y)=2y\cdot\int dx+\varphi(y),\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+2,\end{cases}\text{т.е.}\begin{cases}v(x,y)=2yx+\varphi(y),\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+2.\end{cases}$$

Найденную в первом уравнении этой системы уравнений функцию $v(x,y)$ продифференцируем по y и подставим во второе уравнение системы (исключим из системы уравнений $\dfrac{\partial v}{\partial y}$):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+\varphi'(y),\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v(x,y)=2yx+\varphi(y),\\ 2x+\varphi'(y)=2x+2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v(x,y)=2yx+\varphi(y),\\ \varphi'(y)=2.\end{cases}$$

Решим второе уравнение этой системы $\varphi'(y)=2$ (простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение) и найдём функцию $\varphi(y)$: $\varphi(y)=2y+C$, где C - произвольная вещественная постоянная. Эту функцию подставим в первое уравнение системы и найдём сопряжённую гармоническую функцию

$v(x,y)=2xy+2y+C$.

Аналитическая функция $f(z)$ восстановлена нами в виде

$$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)=x^2-y^2+2x+i\cdot\left(2yx+2y+C\right),$$

т.е.

$$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)=x^2-y^2+2x+i\cdot\left(2yx+2y\right)+i\cdot C.$$

Подставляя в эту формулу начальное значение $f(0)=0$, $z=0\Rightarrow x=0, y=0$, находим C: $0=i\cdot C\Rightarrow C=0$. Итак, по действительной части $u(x,y)$ найдена функция аналитическая на всей комплексной плоскости

$$f(z)=x^2-y^2+2x+i\cdot\left(2yx+2y\right).$$

Заметим, что $f(z)$ можно задать аналитическим выражением, зависящим от z. Полагая $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}, y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, получим

$$f(z)=\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2+2\frac{z+\overline{z}}{2}+i\cdot 2\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}\left(\frac{z+\overline{z}}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{z^2+z\cdot\overline{z}+\left(\overline{z}\right)^2+z^2-z\cdot\overline{z}+\left(\overline{z}\right)^2}{4}+z+\overline{z}+\frac{z^2-\left(\overline{z}\right)^2}{2}+z-\overline{z},$$

$$f(z)=\frac{z^2}{2}+\frac{\left(\overline{z}\right)^2}{2}+2z+\frac{z^2}{2}-\frac{\left(\overline{z}\right)^2}{2}=z^2+2z, \text{ т.е. } f(z)=z^2+2z.$$

Замечание. Для того, чтобы выразить $f(z)$ аналитическим выражением от z, достаточно в формуле $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ выполнить формальную замену $x=z$, $y=0$.

Задачи для самостоятельной работы

Задание 1. Функцию $w=f(z)$ представить в алгебраической форме $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$

1. $w=z^2-2z+2$ 2. $w=z^2-2z+i$ 3. $w=z^2-2iz-1$

Задание 2. Найти образ области при указанном отображении с помощью функции $w=f(z)$.

1. $\operatorname{Im} z\ge\operatorname{Re} z,\ w=\dfrac{z}{z+i}$ 2. $0\le\arg z\le\dfrac{\pi}{2},\ w=z^2$ 3. $|z-2|\le1,\ w=\dfrac{1}{z}$

Задание 3. Выяснить, в каких точках комплексной плоскости дифференцируемы функции и вычислить производные в этих точках. В каких точках плоскости функции аналитические?

1. $f(z)=z\cdot\overline{z}$ 2. $f(z)=|z|\cdot\overline{z}$ 3. $f(z)=(\overline{z})^2$

3.55.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия основные теории функций комплексного переменного;элементарные функции, их свойства;дифференцируемость и аналитичность, Условия Коши-Римана;гармонические и аналитические функции,конформные отображения;

- приобрели умения и навыки проверять дифференцируемость функций комплексного переменного, дифференцировать функции.

3.56 Практическое занятие № 63-64 (4 часа).

Тема: «Интегрирование по комплексной переменной. Первообразная. Теорема Коши. Интегральная формула Коши»

3.56.1 Задание для работы

1. Интегрирование по комплексной переменной. Первообразная. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Интегрирование по комплексной переменной. Первообразная. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Рассматриваются следующие простейшие методы вычисления интеграла функции комплексного аргумента:

1) выражение значения интеграла ФКП в алгебраической форме через два действительных криволинейных интеграла 2-го типа;

2) сведение вычисления интеграла ФКП по гладкой дуге L к вычислению интеграла от комплекснозначной функции вещественного аргумента t на отрезке $[\alpha;\beta]$;

3) применение аналога формулы Ньютона-Лейбница для аналитической функции, которая позволяет вычислить интеграл ФКП, если известна её первообразная.

Интеграл от комплекснозначной функции вещественного аргумента

Рассмотрим комплексную функцию вещественного аргумента t на отрезке $[a;b]$: $w = f(t) \equiv u(t) + i \cdot v(t)$, где функции $u(t),\ v(t)$ непрерывны на этом отрезке.

Интеграл функции $w = f(t)$ *на отрезке* $[a;b]$ *вычисляется по формуле*

$$\int_a^b f(t)\cdot dt = \int_a^b u(t)\cdot dt + i\cdot\int_a^b v(t)\cdot dt.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\cdot t}\cdot dt$.

Решение. Представим функцию $f(t) = e^{i\cdot t}$ в алгебраической форме с помощью формулы Эйлера: $e^{i\cdot t} = \cos t + i\cdot\sin t$. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\cdot t}\cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot dt + i\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - i\cdot\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - i\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1 + i.$$

Интеграл от функции комплексного переменного по линии

Рассмотрим теперь функцию $w = f(z) \equiv u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ комплексного переменного $z = x + i\cdot y$ и вычисление интеграла от ФКП по гладкой дуге L. *Первый спо-*

соб вычисления интеграла ФКП по гладкой дуге. Интеграл от ФКП $w=f(z)$ по гладкой дуге вычисляется по формуле

$$\int_L f(z)\cdot dz=\int_L (u+i\cdot v)\cdot(dx+i\cdot dy)=\int_L u\cdot dx-v\cdot dy+i\cdot\int_L v\cdot dx+u\cdot dy,$$

которая выражает значение интеграла ФКП через два действительных криволинейных интеграла 2-го типа.

Пример. Вычислить интеграл $\int_L \left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz$ по линии L, соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$, 1) по отрезку прямой, 2) по дуге параболы $y=x^2$, 3) по ломаной OAB (Рис. 47). Убедиться в том, что интеграл не зависит от формы линии интегрирования и указать достаточное условие независимости.

Решение. Представим функцию $f(z)=6\cdot z^2-2z-i$ в алгебраической форме:

$$f(z)=6\cdot z^2-2z-i=6\cdot(x+iy)^2-2(x+iy)-i=6\cdot\left(x^2-y^2+2ixy\right)^2-2(x+iy)-i=$$
$$=6x^2-6y^2+12ixy-2x-2iy-i=6x^2-6y^2-2x+i\cdot(12xy-2y-1),$$

$$u(x,y)=6x^2-6y^2-2x,\ v(x,y)=12xy-2y-1.$$

Поэтому,

$$\int_L\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz=\int_L(u+i\cdot v)\cdot(dx+i\cdot dy)=\int_L u\cdot dx-v\cdot dy+i\cdot\int_L v\cdot dx+u\cdot dy=$$
$$=\int_L\left(6x^2-6y^2-2x\right)dx-(12xy-2y-1)dy+i\int_L(12xy-2y-1)dx+\left(6x^2-6y^2-2x\right)dy$$

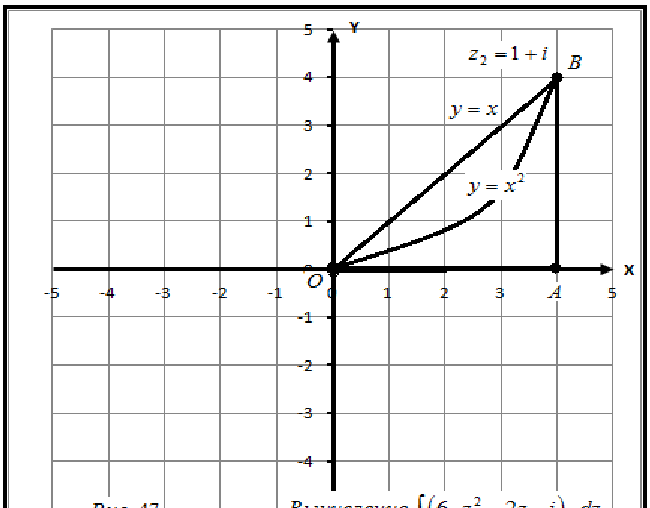


Рис. 47 Вычисление $\int_L\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz$

1) Вдоль отрезка OB прямой (Рис. 47) $y=x,\ dy=dx,\ 0\le x\le 1$

$$\int_L\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz=\int_0^1\left(1-12x^2\right)\cdot dx+i\cdot\int_0^1\left(12x^2-4x-1\right)\cdot dx=$$
$$=\left(x-4x^3\right)\Big|_0^1+i\cdot\left(4x^3-2x^2-x\right)\Big|_0^1=(1-4)+i\cdot(4-2-1)=-3+i\ .$$

2) Вдоль дуги OB параболы (Рис. 47) $y=x^2,\ dy=2xdx,\ 0\le x\le 1$

$$\int_L\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz=\int_L\left(6x^2-6y^2-2x\right)\cdot dx-(12xy-2y-1)\cdot dy+$$
$$+i\cdot\int_L(12xy-2y-1)\cdot dx+\left(6x^2-6y^2-2x\right)\cdot dy=$$

$$=\int_0^1\left(6x^2+4x^3-30x^4\right)\cdot dx+i\cdot\int_0^1\left(24x^3-6x^2-12x^5-1\right)\cdot dx=$$

$$=\left(2x^3+x^4-6x^5\right)\Big|_0^1+i\cdot\left(6x^4-2x^3-2x^6-x\right)\Big|_0^1=(2+1-6)+i\cdot(6-2-2-1)=-3+i$$

3) Вдоль ломаной OAB (Рис. 47)

$$\int_L\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz=\int_{OA}\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz+\int_{AB}\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz=$$

$$=\int_{OA}\left(6x^2-6y^2-2x\right)\cdot dx-(12xy-2y-1)\cdot dy+$$

$$+i\cdot\int_{OA}(12xy-2y-1)\cdot dx+\left(6x^2-6y^2-2x\right)\cdot dy+$$

$$+\int_{AB}\left(6x^2-6y^2-2x\right)\cdot dx-(12xy-2y-1)\cdot dy+$$

$$+i\cdot\int_{AB}(12xy-2y-1)\cdot dx+\left(6x^2-6y^2-2x\right)\cdot dy\cdot$$

Вдоль отрезка OA действительной оси (Рис. 47) $y=0,\ dy=0,\ 0\le x\le 1$; вдоль отрезка AB вертикальной прямой $x=1,\ dx=0,\ 0\le y\le 1$, поэтому

$$\int_L\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz=\int_0^1\left(6x^2-2x\right)\cdot dx-i\cdot\int_0^1 dx-\int_0^1(12y-2y-1)\cdot dy+$$

$$+i\cdot\int_0^1\left(4-6y^2\right)\cdot dy=\left(2x^3-x^2\right)\Big|_0^1-i\cdot x\Big|_0^1-\left(5y^2-y\right)\Big|_0^1+i\cdot\left(4y-2y^3\right)\Big|_0^1=$$

$$=(2-1)-i-(5-1)+i\cdot(4-2)=1-i-4+i\cdot 2=-3+i\cdot$$

Отметим, что интеграл $\int_L\left(6\cdot z^2-2z-i\right)\cdot dz$ *по трём различным линиям* L, *соединяющим точки* $z_1=0$ *и* $z_2=1+i$, *имеет одно и то же значение* ($-3+i$), *т.е. не зависит от формы дуги интегрирования*. Этим свойством обладает не всякая интегрируемая функция. Известно следующее *условие независимости интеграла от формы линии интегрирования* - **следствие из интегральной теоремы Коши**: *если функция аналитическая в односвязной области и* L_1, L_2 *- линии, лежащие в этой области и имеющие общие концы, то интегралы по этим линиям равны*. В этом примере функция $f(z)=6\cdot z^2-2z-i$ является аналитической на всей комплексной плоскости и интеграл этой функции не зависит от формы дуги интегрирования.

Второй способ вычисления интеграла ФКП по гладкой дуге L. Предполагая дугу L гладкой, записывают её уравнение в комплексно-параметрической форме: $z=z(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, т.е. $z=\varphi(t)+i\cdot\psi(t)$. Тогда

$$\int_L f(z)\cdot dz=\int_\alpha^\beta f\left(z(t)\right)\cdot z'(t)\cdot dt=\int_\alpha^\beta \mathrm{Re}(t)\cdot dt+i\cdot\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}(t)\cdot dt,$$

где $\mathrm{Re}(t)=\mathrm{Re}\,f\left(z(t)\right)\cdot z'(t)$, $\mathrm{Im}(t)=\mathrm{Im}\,f\left(z(t)\right)\cdot z'(t)$. Таким образом, эта формула позволяет свести вычисление интеграла ФКП по гладкой дуге L к вычислению интеграла от комплекснозначной функции вещественного аргумента t на отрезке $[\alpha;\beta]$ (см. §1).

Пример. Вычислить *вторым способом* интеграл $\int_L \overline{z}\cdot dz$ по отрезку прямой L, соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$ (Рис. 47).

Решение. Уравнение отрезка прямой $y = x,\ 0 \le x \le 1$ запишем в комплексно-параметрической форме $z = t + i \cdot t$, $t \in [0;1]$ и сведём вычисление данного интеграла к интегралу от комплекснозначной функции вещественного аргумента . Так как $z'(t) = 1 + i$, $f(z) = \bar{z}$, то

$$f\left(z(t)\right) \cdot z'(t) = \bar{z} \cdot (1+i) = (t - i \cdot t) \cdot (1+i) = t + i \cdot t - i \cdot t - i^2 \cdot t = 2t,$$

$$\mathrm{Re}(t) = \mathrm{Re}\, f\left(z(t)\right) \cdot z'(t) = 2t,\ \mathrm{Im}(t) = \mathrm{Im}\, f\left(z(t)\right) \cdot z'(t) = 0,$$

$$\int_L \bar{z} \cdot dz = \int_\alpha^\beta f\left(z(t)\right) \cdot z'(t) \cdot dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}(t) \cdot dt + i \cdot \int_\alpha^\beta \mathrm{Im}(t) \cdot dt =$$

$$= \int_0^1 2t \cdot dt + i \cdot \int_0^1 0 \cdot dt = t^2 \Big|_0^1 + i \cdot 0 = 1 \cdot$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{z - z_0}$, где L - окружность с центром в точке z_0 радиуса r в положительном направлении.

Решение. Уравнение окружности L запишем в комплексно-параметрической форме: $z = z_0 + r \cdot e^{i \cdot t}$, $t \in [0;2\pi]$. Поэтому

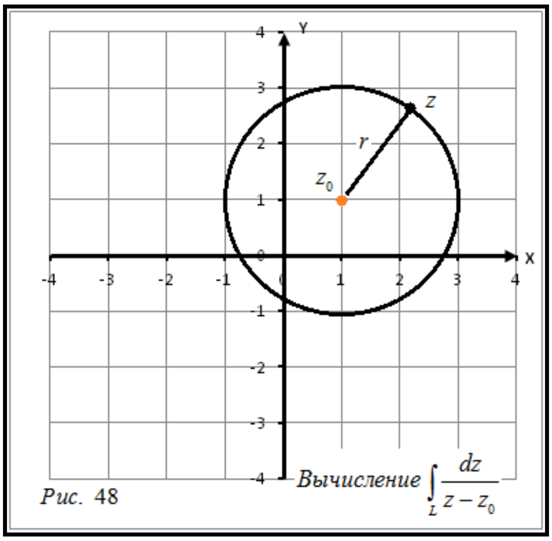


Рис. 48

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{d\left(z_0 + r \cdot e^{i \cdot t}\right)}{r \cdot e^{i \cdot t}} = \int_0^{2\pi} \frac{r \cdot i \cdot e^{i \cdot t} dt}{r \cdot e^{i \cdot t}} = i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \text{ (Рис. 48).}$$

1. $\int_L \bar{z} \cdot dz$. 2. $\int_L (\bar{z} + i) \cdot dz$. 3. $\int_L (\bar{z} - i) \cdot dz$. 4. $\int_L (\bar{z} + 2i) dz$. 5. $\int_L (\bar{z} - 2i) dz$.

Задачи для самостоятельной работы

Задание 1. Вычислить интегралы от комплекснозначных функций веще-ственного аргумента

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2 \cdot i \cdot t} \cdot dt$. 2. $\int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2} \cdot i \cdot t} \cdot dt$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2 \cdot i \cdot t} \cdot dt$.

Задание 2. Вычислить интегралы первым способом (через два действительных криволинейных интеграла 2-го типа) по линии L, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$, 1) по отрезку прямой, 2) по дуге параболы $y = x^2$ 3) по ломаной OAB, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z^* = 1$ и $z_2 = 1 + i$. Выполнить рисунок

3.56.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия интеграла от функции комплексной переменной,первообразной;теорему Коши,интегральную формулу Коши;
- приобрели умения и навыки вычисления интеграла от функции комплексной переменной, первообразной;применять теорему Коши,интегральную формулу Коши.

3.57 Практическое занятие № 65 (2 часа).

Тема: «Ряды Тейлора. Ряды Лорана. Вычеты, их вычисление. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов»

3.57.1 Задание для работы

1. Ряды Тейлора. Ряды Лорана.
2. Вычеты, их вычисление. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов

3.57.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Ряды Тейлора. Ряды Лорана.
2. Вычеты, их вычисление. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов

Решение типовых задач

Определение. Пусть z_0 – изолированная особая точка функция f(z), т.е. пусть функция f(z) – аналитическая в некотором круге $|z - z_0| < R$ из которого исключена точка z_0. Тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz = \underset{z=z_0}{Выч}\, f(z)$$

называется **вычетом** функции f(z) в точке z_0, где L – контур в круге $|z - z_0| < R$, ориентированный против часовой стрелки и содержащей в себе точку z_0.

Вычет также обозначают иногда $\underset{z_0}{\mathrm{Re}s}\, f(z)$.

Если $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k; \qquad 0 < |z - z_0| < R;$ есть ряд Лорана функции f в точке z_0, то $\underset{z=z_0}{Выч}\, f(z) = c_{-1}$.

Таким образом, если известно разложение функции в ряд Лорана, то вычет легко может быть найден в случае любой особой точки.

В частных случаях вычет может быть найден и без разложения в ряд Лорана.

Например, если функция $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет простой нуль при z = z_0 $(\psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0)$, то z = z_0 является простым полюсом функции f(z).

Тогда можно показать, что вычет находится по формуле

$$\underset{z=z_0}{Выч} = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Если z = z_0 – полюс порядка m≥ 1, то вычет может быть найден по формуле:

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}$$

Пример. Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z-3)}$ относительно точки z = 2.

Эта точка является полюсом второго порядка. Получаем:

$$\underset{z=2}{\text{Выч}} = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}[(z-2)^2 f(z)] = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\frac{1}{z-3} = \lim_{z\to 2} \frac{1}{(z-3)^2} = -1.$$

Теорема о вычетах.

Теорема. *Пусть функция f(z) – аналитическая на всей плоскости z, за исключением конечного числа точек z_1, z_2, …, z_N. Тогда верно равенство:*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underset{z=z_k}{\text{Выч}}\, f(z) + \underset{z=\infty}{\text{Выч}}\, f(z) = 0}$$

А интеграл от функции по контуру L, содержащему внутри себя эти точки, равен

$$\boxed{\int_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \underset{z=z_j}{\text{Выч}} f(z)}$$

Эти свойства применяются для вычисления интегралов. Если функция f(z) аналитическая в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением N точек, то справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \underset{z=z_j}{\text{Выч}} f(z)$$

Пример. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Подынтегральная функция является аналитической в верхней полуплоскости за исключением точки 2i. Эта точка является полюсом второго порядка.

Найдем вычет функции $\underset{z=2i}{\text{Выч}} \dfrac{1}{(z^2+4)^2} = \lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right) = \lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{d}{dz}\dfrac{1}{(z+2i)^2} =$

$= \lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{-2}{(z+2i)^3} = -\dfrac{2}{(4i)^3} = \dfrac{1}{32i};$ Получаем $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}.$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z-3)}$ относительно точки z = 3.

2. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

3.56.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия о рядах Тейлора и Лорана, понятие вычета, вычисление вычетов и применение к вычислению интегралов;
- приобрели умения и навыки разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, вычисления вычетов и применения к вычислению интегралов.

3.57 Практическое занятие № 66 (2 часа).

Тема: «Элементы операционного исчисления:преобразование Лапласа, его свойства. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Применение к описанию линейных моделей»

3.57.1 Задание для работы

1. Элементы операционного исчисления:преобразование Лапласа, его свойства.
2. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Применение к описанию линейных моделей.

3.57.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Элементы операционного исчисления:преобразование Лапласа, его свойства.
2. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Применение к описанию линейных моделей.

Операционное исчисление используется как для нахождения значений интегралов, так и для решение дифференциальных уравнений.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

Требуется найти решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0; \quad x'(0) = x_0'; \quad \ldots \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Если функция x(t) является решением этого дифференциального уравнения, то оно обращает исходное уравнение в тождество, значит функция, стоящая в левой части уравнения и функция f(t) имеет (по теореме единственности) одно и то же изображение Лапласа.

$$L\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k x}{dt^k}\right] = L[f(t)]$$

Из теоремы о дифференцировании оригинала $\{ pF(p) - f(0) \doteq f'(t) \}$ можно сделать вывод, что $L\left[\frac{d^k x}{dt^k}\right] = p^k L[x] - p^{k-1}x(0) - \ldots - px^{(k-2)}(0) - x^{(k-1)}(0).$

Тогда $a_n L\left[\frac{d^n x}{dt^n}\right] + \ldots + a_0 L[x] = L[f]$. Обозначим $L[x] = \bar{x}(p), \quad L[f] = F(p).$

Получаем: $\bar{x}(p)[a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0] = a_n[p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}] +$

$$+ a_{n-1}[p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}] + \ldots + a_2[px_0 + x_0'] + a_1 x_0 + F(p).$$

Это уравнение называется **вспомогательным (изображающим)** или **операторным уравнением.**

Отсюда получаем изображение $\bar{x}(p)$, а по нему и искомую функцию *x(t).*

Изображение получаем в виде: $\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} + \frac{\Psi_{n-1}(p)}{R_n(p)}$,

где $R_n(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$;

$$\Psi_{n-1}(p) = a_1 x_0 + a_2(px_0 + x_0') + a_3(p^2 x_0 + px_0' + x_0'') + \ldots + a_n(p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0{}' + \ldots + px_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)})$$

Этот многочлен зависит от начальных условий. Если эти условия нулевые, то многочлен равен нулю, и формула принимает вид:

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)}$$

Рассмотрим применение этого метода на примерах.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + 4y = 2; \qquad y(0) = y'(0) = 0.$

Изображение искомой функции будем искать в виде:

$$\bar{y} = \frac{F(p)}{R_n(p)}$$

$$F(p) = L[f] = L[2] = \frac{2}{p}; \qquad R_n(p) = 1\cdot p^2 + 0\cdot p + 4 = p^2 + 4.$$

$$\bar{y} = \frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right]$$

Находим оригинал, т.е. искомую функцию: $\bar{y} \doteqdot y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' - 2y = 0; \quad y(0) = 1.$

$$F(p) = L[f] = L[0] = 0; \quad R_n(p) = p - 2; \quad \Psi_{n-1} = a_1 y_0 = 1; \; \bar{y} = \frac{1}{p-2}; \; \bar{y} \doteqdot y = e^{2x};$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = 0;$$

$$F(p) = L[f] = L[0] = 0; \quad R_n(p) = p^3 - 6p^2 + 11p - 6;$$

$$\Psi_{n-1}(p) = a_1 y_0 + a_2(py_0 + y_0') + a_3(p^2 y_0 + py_0' + y_0'') = -6 + p.$$

Изображение искомой функции $\bar{y} = \dfrac{-6+p}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6}$

Для нахождения оригинала необходимо разложить полученную дробь на элементарные дроби. Воспользуемся делением многочленов (знаменатель делится без остатка на *p – 1*):

$$\begin{array}{r|l}
p^3 - 6p^2 + 11p - 6 & p - 1 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{p^3 - p^2} \qquad\qquad\quad & p^2 - 5p + 6 \\
-\;-5p^2 + 11p \quad\;\; & \\
\underline{-5p^2 + 5p} \quad\;\; & \\
-\;6p - 6 & \\
\underline{6p - 6} & \\
0 \quad &
\end{array}$$

В свою очередь $p^2 - 5p + 6 = (p-2)(p-3)$. Получаем: $p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = (p-1)(p-2)(p-3).$

Тогда: $\bar{y} = \dfrac{-6+p}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p-2} + \dfrac{C}{p-3}$; Определим коэффициенты A, B и C.

$$A(p-2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p-2)=-6+p$$
$$Ap^2-5Ap+6A+Bp^2-4Bp+3B+Cp^2-3Cp+2C=-6+p$$
$$p^2(A+B+C)-p(5A+4B+3C)+6A+3B+2C=-6+p$$
$$\begin{cases}A+B+C=0\\5A+4B+3C=-1\\6A+3B+2C=-6\end{cases}\quad\begin{cases}C=-A-B\\2A+B=-1\\4A+B=-6\end{cases}\quad\begin{cases}C=-A-B\\B=-1-2A\\2A-1=-6\end{cases}\quad\begin{cases}A=-\frac{5}{2}\\B=4\\C=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

Тогда $\bar{y}=\dfrac{11-6p}{p^3-6p^2+11p-6}=\dfrac{-\frac{5}{2}}{p-1}+\dfrac{4}{p-2}+\dfrac{-\frac{3}{2}}{p-3}$; $\bar{y}\doteqdot y=-\dfrac{5}{2}e^x+4e^{2x}-\dfrac{3}{2}e^{3x}$;

Приемы операционного исчисления можно также использовать для решения систем дифференциальных уравнений.

Задачи для самостоятельной работы

Решить с помощью операционного исчисления задачи для дифференциальных уравнений

1). $y'-2y=0;\quad y(0)=1.$

2). $y'''-6y''+11y'-6y=0;\quad y(0)=0;\quad y'(0)=1;\quad y''(0)=0;$

3.57.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия об операционном исчислении,преобразовании Лапласа, его свойствах;познакомились с операционным методом решения дифференциальных уравнений и систем;
- приобрели умения и навыки простейшихприменений преобразования Лапласа, операционного метода.

3.58 Практическое занятие № 66-67 (4 часа).

Тема: «Основные уравнения математической физики. Классификация уравнений с частными производными. Основные задачии простейшие методы решения»

3.58.1 Задание для работы

1. Основные задачи.
2. Простейшие методы решения

3.58.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Основные задачи.
2. Простейшие методы решения.

Классификация основных уравнений математической физики.

1) **Волновое уравнение.** (Уравнение колебаний струны, электроколебания, крутильные колебания вала и др.) Это простейшее уравнение гиперболического типа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2) **Уравнение теплопроводности.** (Уравнение Фурье) Это простейшее уравнение параболического типа. Описывает процессы теплопроводности, фильтрации жидкости и газа, некоторые вопросы теории вероятностей.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3) **Уравнение Лапласа.** Это простейшее уравнение эллиптического типа. Описывает магнитные и электрические поля, гидродинамику, диффузию и др.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

В этих уравнениях функция u зависит от двух переменных, однако, задача может быть расширена для случая трех переменных:

1) Волновое уравнение: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

2) Уравнение теплопроводности: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

3) Уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Задача Коши состоит в *нахождении решения линейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка(в данном случае волнового) при начальных условиях*

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x),$$

<u>Решение задачи Коши методом Даламбера.</u>

Решение.Для нахождения решения введем новые переменные:

$$\alpha = x - at; \qquad \beta = x + at.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид: $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$

Решением этого уравнения будет функция $u = \varphi(\alpha) + \psi(\beta)$, где φ и ψ - некоторые функции, которые будем считать дважды дифференцируемыми.

Получаем: $u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$

Если продифференцировать полученный ответ, получим:

$$u'_x = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at)$$

$$u'_t = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at)$$

$$u''_{xx} = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at)$$

$$u''_{tt} = a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at)$$

Т.е. $a^2 u''_{xx} = u''_{tt}$.

Далее с использованием начальных условий находим функции φ и ψ.

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$-a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x)$$

Проинтегрировав последнее равенство на отрезке [0, x], получаем:

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x F(y)dy + C; \quad C = const.$$

Тогда:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy - \frac{C}{2};$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy + \frac{C}{2}.$$

Решение задачи Коши получаем в виде:

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at) = \frac{1}{2} f(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} F(y)dy + \frac{1}{2} f(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} F(y)dy$$

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(y)dy.$$

Эта формула называется **формулой Даламбера**.

Задачи для самостоятельной работы

Решить задачу Коши *для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с начальными условиями $u(x,0) = f(x),\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x),$

3.58.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятие о классификации линейных ДУ с частными производными 2-го порядка с двумя переменными. Освоили основные УМФ и задачи для них, решение Даламбера задачи Коши для волнового уравнения.
- приобрели умения и навыки классифицировать линейные ДУ с частными производными 2-го порядка с двумя переменными; находить решение Даламбера задачи Коши для волнового уравнения.

3.59 Практическое занятие № 69-70 (2 часа).

Тема: «Элементы численных методов алгебры, анализа,численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений»

3.59.1 Задание для работы

1. Численные методы алгебры, анализа.
2. Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.59.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Численные методы алгебры, анализа.
2. Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

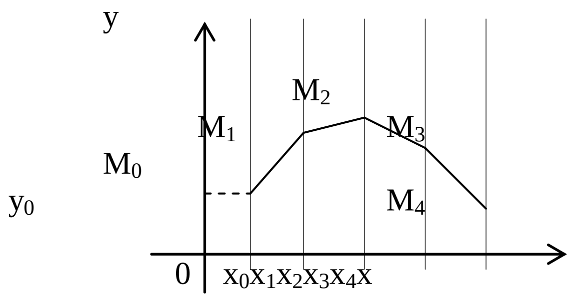
Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата. Рассмотрим некоторые из них.

Метод Эйлера.

(Леонард Эйлер (1707 – 1783) швейцарский математик)

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \ldots$ и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке

$$tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0).$$

Заменив на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Производя аналогичную операцию для отрезка $[x_1, x_2]$, получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется **ломаной Эйлера**. Можно записать общую формулу вычислений:

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).}$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h}$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый **уточненный метод Эйлера** или **формула пересчета**.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y_0' = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h;$$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2} h;$$

Затем третье:

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2} h;$$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений y. Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

Метод Рунге – Кутта.

Метод Рунге – Кутта является более точным по сравнению с методом Эйлера. Суть уточнения состоит в том, что искомое решение представляется в виде разложения в ряд Тейлора.

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + y_i''' \frac{h^3}{3!} + y_i^{IV} \frac{h^4}{4!} + \ldots$$

Если в этой формуле ограничиться двумя первыми слагаемыми, то получим формулу метода Эйлера. Метод Рунге – Кутта учитывает четыре первых члена разложения.

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + y_i''' \frac{h^3}{3!} = y_i + \Delta y_i .$$

В методе Рунге – Кутта приращения Δy_i предлагается вычислять по формуле:

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$$

где коэффициенты k_i вычисляются по формулам:

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i);$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^{(i)}\right);$$

Пример. Решить методом Рунге – Кутта дифференциальное уравнение $y' = x + y$ при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1.

Для i = 0 вычислим коэффициенты k_i.

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(x_0 + y_0) = 0{,}1(0 + 1) = 0{,}1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1\left(0{,}05 + 1{,}05\right) = 0{,}11;$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}055) = 0{,}1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1105) = 0{,}1211;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6}(0{,}1 + 0{,}22 + 0{,}221 + 0{,}1211) = 0{,}1104;$$

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1104 = 1{,}1104;$$

Последующие вычисления приводить не будем, а результаты представим в виде таблицы.

i	x_i	k		Δy_i	y_i
0	0	1	0,1000	0,1104	1
		2	0,1100		
		3	0,1105		
		4	0,1155		
1	0,1	1	0,1210	0,1325	1,1104
		2	0,1321		
		3	0,1326		
		4	0,1443		
2	0,2	1	0,1443	0,1569	1,2429
		2	0,1565		
		3	0,1571		
		4	0,1700		
3	0.3	1	0,1700	0,1840	1,3998
		2	0,1835		
		3	0,1842		
		4	0,1984		
4	0,4	1	0,1984	0,2138	1,5838
		2	0,2133		
		3	0,2140		
		4	0,2298		
5	0,5				1,7976

Решим эту же задачу методом Эйлера.

Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$
$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

$$x_1 = 0{,}1 \quad y_0 = 1{,}1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$
$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, получаем таблицу значений:

	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов численного решение данного уравнения решим его аналитически и найдем точные значения функции y на заданном отрезке.

Уравнение $y' - y = x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - y = 0; \qquad y' = y; \qquad \frac{dy}{dx} = y; \qquad \frac{dy}{y} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$$

$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \boxed{y = Ce^x;}$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \begin{cases} u = x; & dv = e^{-x}dx; \\ du = dx; & v = -e^{-x}; \end{cases} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

Общее решение: $\boxed{y = Ce^x - x - 1;}$

С учетом начального условия: $1 = C - 0 - 1; \qquad C = 2;$

Частное решение: $\boxed{y = 2e^x - x - 1;}$

Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i			
		Метод Эйлера	Уточненный метод Эйлера	Метод Рунге - Кутта	Точное значение
0	0	1	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1104	1,1103
2	0,2	1,22	1,243	1,2429	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3998	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5838	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7976	1,7975

Как видно из полученных результатов метод Рунге – Кутта дает наиболее точный ответ. Точность достигает 0,0001. Кроме того, следует обратить внимание на то, ошибка (расхождение между точным и приближенным значениями) увеличивается с каждым шагом вычислений. Это обусловлено тем, что в – первых полученное приближенное значение округляется на каждом шаге, а во – вторых – тем, что в качестве основы вычисления принимается значение, полученное на предыдущем шаге, т.е. приближенное значение. Таким образом происходит накопление ошибки.

Это хорошо видно из таблицы. С каждым новым шагом приближенное значение все более отличается от точного.

Решение задач для дифференциальных уравнений с MathCAD

Задача 1. Найти решение уравнения с разделенными переменными

$$ydy=(\exp(x)/1+\exp(x))dx,$$

удовлетворяющее начальному условию y(0)=1 (задача Коши). Изобразите график решения (интегральную кривую, проходящую через точку (0,1)).

Решение:

1) Установите режим автоматических вычислений.

2) Установите режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали, установив метку Horizontaly в окне диалога строки EvaluationStyle меню Symbolics.

3) Введите начальные условия y(x0)=y0:

$x0 := 0 \quad y0 := 1$

4) Если уравнение имеет вид Y(y)dy=X(x)dx, определите подынтегральные функции Y(y) и X(x):

$$X(x) := \frac{e^x}{1+e^x} \qquad Y(y) := y$$

5) Вычислите символьно интегралы с переменными верхними пределами и нижними пределами, равными начальным условиям x0 и y0:

$$\int_{x0}^{x} X(t)\,dt \to \ln(1+\exp(x)) - \ln(2) \qquad \int_{y0}^{y} Y(t)\,dt \to \frac{1}{2}\cdot y^2 - \frac{1}{2}$$

6) Запишите уравнение , задающее неявно y(x) как функцию x, и решите его символьно относительно переменной y:

$$\int_{x0}^{x} X(t)\,dt = \int_{y0}^{y} Y(t)\,dt$$

Given

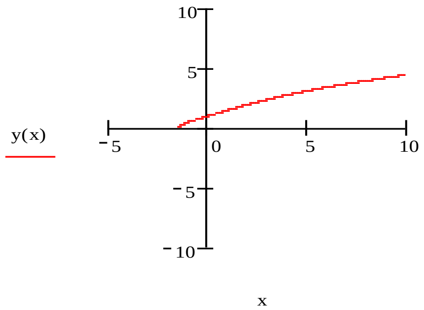
$$\ln(1+\exp(x)) - \ln(2) = \frac{1}{2}\cdot y^2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{Find}(y) \to \left[(2\cdot\ln(1+\exp(x)) + 1 - 2\cdot\ln(2))^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad -(2\cdot\ln(1+\exp(x)) + 1 - 2\cdot\ln(2))^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right]$$

7) Выбираете решение, удовлетворяющее условию y(0)=1, и определите как функцию переменной x:

$$y(x) := (2\cdot\ln(1+\exp(x)) + 1 - 2\cdot\ln(2))^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

8) Постройте график найденного решения:



Задача 2. Решите на отрезке [0,3] задачу Коши y'=sin(xy), y(0)=1 методом Рунге-Кутты с постоянным шагом на сетке из 20 (40, 100) равноотстоящих узлов.

Решение:

1) Установите режим автоматических вычислений.

2) Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1: $ORIGIN := 1$

3) Присвойте начальное значение решения переменной y1: $y_1 := 1$

4) Определите правую часть уравнения f(x,y):

$f(x,y) := \sin(x \cdot y_1)$

5) Вычислите решение, используя функцию rkfixed(y,x1,x2,npoints,f), где y - вектор начальных условий, x1 и x2 - концы отрезка интегрирования, npoints- число узлов на отрезке интегрирования, f - правая часть уравнения. В результате получите матрицу размерности (npoints, 2), в первом столбце которой содержатся значения x, во втором - значения y.

$Y1 := rkfixed(y, 0, 3, 20, f)$ $Y2 := rkfixed(y, 0, 3, 40, f)$

$Y3 := rkfixed(y, 0, 3, 100, f)$

Y1 =

	1	2
1	0	1
2	0.15	1.011
3	0.3	1.046
4	0.45	1.104
5	0.6	1.189
6	0.75	1.301
7	0.9	1.436
8	1.05	1.584
9	1.2	1.727
10	1.35	1.84
11	1.5	1.907
12	1.65	1.924
13	1.8	1.9
14	1.95	1.846
15	2.1	1.771
16	2.25	1.684

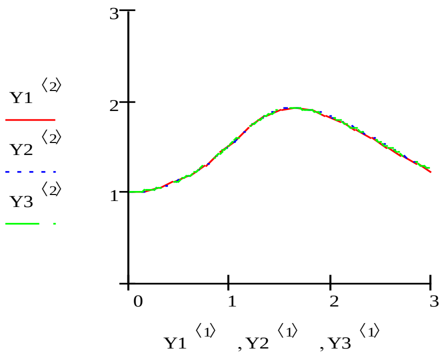
Y2 =

	1	2
1	0	1
2	0.075	1.003
3	0.15	1.011
4	0.225	1.026
5	0.3	1.046
6	0.375	1.072
7	0.45	1.104
8	0.525	1.143
9	0.6	1.189
10	0.675	1.242
11	0.75	1.301
12	0.825	1.366
13	0.9	1.436
14	0.975	1.509
15	1.05	1.584
16	1.125	1.658

Y3 =

	1	2
1	0	1
2	0.03	1
3	0.06	1.002
4	0.09	1.004
5	0.12	1.007
6	0.15	1.011
7	0.18	1.016
8	0.21	1.022
9	0.24	1.029
10	0.27	1.037
11	0.3	1.046
12	0.33	1.055
13	0.36	1.066
14	0.39	1.078
15	0.42	1.091
16	0.45	1.104

6) Постройте на одном графике найденные решения:



Задачи для самостоятельной работы

1. Решить аналитически дифференциальное уравнение $y' = 2x + y$ при начальном условии y(0) = 1.

2-3. Решить методом Эйлера и Рунге – Кутта дифференциальное уравнение $y' = 2x + y$ при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1(«ручные вычисления»).

4. Решите на отрезке [0,3] задачу Коши $y' = 2x + y$, y(0)=1 методом Рунге-Кутты с по-

стоянным шагом на сетке из 20 (40, 100) равноотстоящих узлов с **MathCAD/**

3.59.3 Результаты и выводы: в результате проведенного занятиястуденты:

- освоили понятия об элементах численных методов алгебры, анализа,численных методов решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- приобрели умения и навыки применения элементов численных методов к решению задач алгебры, анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

Семинарские занятия не предусмотрены РУП.