ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Часть 1. Лекции

Б1. Б.05

МАТЕМАТИКА

Направление подготовки: 27.03.04 Управление в технических системах

Профиль подготовки: интеллектуальные системы обработки информации и управления

Квалификация: бакалавр

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция № 1 (2 часа).

Тема: «Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.

2. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными по правилу Крамера.

<u>Матричный метод решения систем линейных уравнений.</u>

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных. Метод удобен для решения систем невысокого порядка. Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$; X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}; \quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$$

$$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}; \quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}; \quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$$

$$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}; \quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30. $x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix}$ = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60. $x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix}$ = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90. $x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$; *Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.*

Метод Гаусса.

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем: 1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения 2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \text{ где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \qquad j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2;\ x_2 = 5;\ x_1 = 1.$$

2. Наименование вопроса № 2. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные решения.

Решение произвольных систем линейных уравнений.

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

<u>Определение.</u> Для системы линейных уравнений матрица

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей системы, а матрица

A^*= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ называется расширенной матрицей системы

<u>Определение.</u> Если b_1, b_2, …,b_m = 0, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

<u>Теорема Кронекера – Капелли.</u>
(условие совместности системы)
(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

<u>Теорема:</u> *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$RgA = RgA^*.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

<u>Пример.</u> Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0 \quad RgA = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \qquad RgA^* = 3.$$

Система несовместна.

<u>Пример.</u> Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad RgA = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad RgA^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: {1, 2, 3, 4}.

1. 2 Лекция № 2 (2 часа).

Тема: «Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.

2. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл.

<u>Скалярное произведение векторов.</u>

<u>Определение.</u> Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

<u>Свойства</u> скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};}$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

<u>Пример.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\quad \vec{b} = (6, 4, -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};\qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \dfrac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\dfrac{2}{7}.$

<u>Пример.</u> Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3.$

$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2} +$

$+ 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$

2. Наименование вопроса № 2. Координатное выражение векторного и смешанного произведений. Приложения произведений векторов.

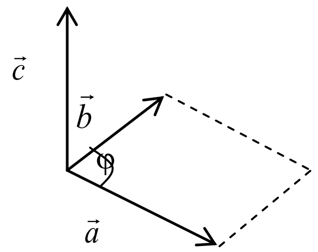
<u>Векторное произведение векторов.</u>

<u>Определение.</u> Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi \geq 0$; $\quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



<u>Свойства векторного произведения векторов:</u>

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}$ (x_a, y_a, z_a) и $\vec{b}$ (x_b, y_b, z_b) в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>Пример.</u> Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\quad \vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+ \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.$ $\qquad\qquad S_\Delta = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (ед^2).

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

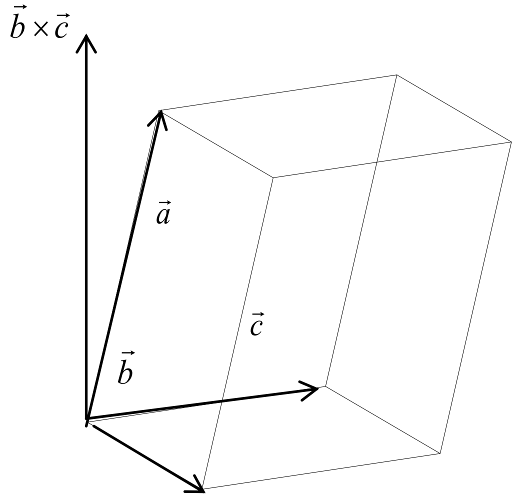
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$, т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2)$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + \mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$$

6)Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов:
$$\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов:
$$\overrightarrow{BA} = (-2;-3;-4)$$
$$\overrightarrow{BD} = (1;4;-3)$$
$$\overrightarrow{BC} = (4;-1;-2)$$

Объем пирамиды
$$V = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16)) =$$
$$= \frac{1}{6}(22+30+68) = 20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.
$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16) = -11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$
$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11^2+10^2+17^2} = \sqrt{121+100+289} = \sqrt{510}$$

$S_{осн} = \sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. $V = \dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h = \dfrac{3V}{S_{осн}} = \dfrac{120}{\sqrt{510}} = \dfrac{4\sqrt{510}}{17}$. (ед)

1. 3 Лекция № 3 (2 часа).

Тема: «Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.
2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости.

Уравнение линии на плоскости.

Определение. Уравнением линии называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { By + C = 0}- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { Ax + C = 0} – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$(3, -1).

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: 3х – у + С = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.
Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1.
Итого: искомое уравнение: 3х – у – 1 = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если$x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1),\ y - 2 = x - 1,\ x - y + 1 = 0.$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ax + By + C = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k;\quad -\frac{C}{B} = b;\quad т.е.\quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой Ax + By + C = 0.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку A(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1\cdot A + (-1)\cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C/A = 0. При x = 1, y = 2 получаем C/A = -3, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ax + By + C = 0 $C \neq 0$, то, разделив на –C, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A};\quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *a* является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Oy.

Пример. Задано общее уравнение прямой x – y + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

C = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, a = -1, b = 1.

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения Ax + By + C = 0 разделить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}$ – нормальное уравнение прямой.

Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu \cdot C < 0$.
p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример. Дано общее уравнение прямой 12х – 5у – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{1}{13} \qquad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \qquad \cos\varphi = 12/13;\ \sin\varphi = -5/13;\ p = 5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4, a = - 4 не подходит по условию задачи. Итого: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ или х + у – 4 = 0.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0}; \qquad \frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}; \qquad 3x-2y=0.$$

2. Наименование вопроса № 2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Угол между прямыми на плоскости.

<u>Определение.</u> Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$. Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

<u>Теорема.</u> *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

<u>Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.</u>

<u>Определение.</u> Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

<u>Расстояние от точки до прямой.</u>

<u>Теорема.</u> *Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

<u>Пример.</u> Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\qquad tg\varphi = \left|\frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

<u>Пример.</u> Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

<u>Пример.</u> Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны AB: $\frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 1}{5 - 1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y - 1}{4}$; $4x = 6y - 6$; $2x - 3y + 3 = 0$;

$y = \frac{2}{3}x + 1.$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$. $k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

1. 4 Лекция № 4 (2 часа).

Тема: «Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика»

1.16.1 Вопросы лекции:

1. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба.

2. Асимптоты функций.

3. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

1.16.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба.

2. Наименование вопроса № 2. Асимптоты функций.

3. Наименование вопроса № 3. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Общее исследование и построение графика функции

Общее исследование функции заключается в определении основных свойств функции, которые уточняются методами дифференциального исчисления.

Общее исследование функций и построение их графиков удобно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции, исследовать функцию на **непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов, определить четность, нечетность, периодичность функции, точки пересечения с осями координат.**

2.Найти нули функции и определить интервалы знакопостоянства.

3. Найти асимптоты графика функции и выяснить взаимное расположение графика функции с асимптотами.

4. Исследовать функцию на экстремум, и монотонность.

5. Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, перегиб.

6. Используя результаты исследования, строится график функции.

При необходимости уточнить отдельные участки кривой следует дополнительно вычислить координаты нескольких точек.

7*. Выполнить процедуру исследования и построить график с компьютерной математикой, например с MathCAD.

Указанную схему исследования можно считать примерной. В частности эскиз графика можно изобразить после нахождения асимптот.

1. 5 Лекция № 5 (2 часа).

Тема: «Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

2. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

1.5.2 Краткое содержание вопросов:

1. **Наименование вопроса № 1. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.**

Методы интегрирования. Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

2. Наименование вопроса № 2. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

Интегрирование элементарных дробей.

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$ m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и $b^2 - 4ac < 0$.

Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

1. 6 Лекция № 6 (2 часа).

Тема: «Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов»

1.6.1 Вопросы лекции:

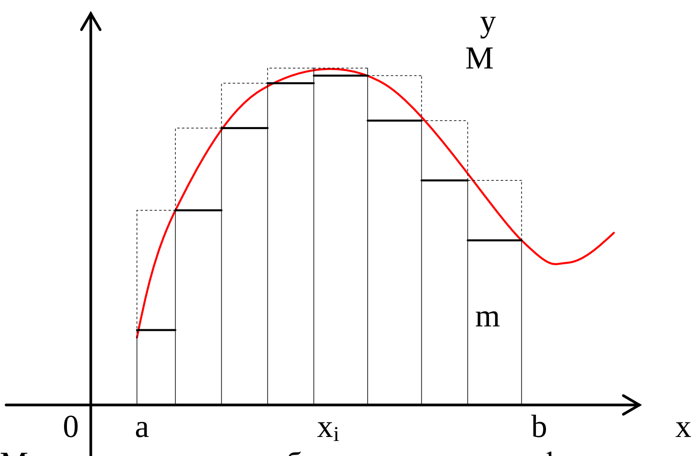
1. Определенный интеграл, его свойства.

2. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Определенный интеграл, его свойства.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_0, x_1] \to m_1, M_1; \quad [x_1, x_2] \to m_2, M_2; \; \ldots \; [x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n.$$

Составим суммы: $\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**. Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \; \ldots \;, x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad \underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной. Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности. Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$,

то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

__Определение:__ если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

__Определение:__ если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b]. Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$. $\qquad \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

__Теорема:__ Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

2. Наименование вопроса № 2. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница). Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница. Применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов. Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

1. 7 Лекция № 7 (2 часа).

Тема: «Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами.
2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.

1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами.

Рассмотрим выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

называемое бесконечным рядом, где $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ — члены ряда.

Ряд называется *числовым*, если членами ряда являются числа, и *функциональным*, если членами ряда являются функции. Сумма конечного числа первых n членов называется n *–ой частичной суммой ряда*:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$, то его называют *суммой ряда* и ряд называется *сходящимся*. Если предел не существует, то *ряд расходится* и суммы не имеет.

Отметим следующие *свойства рядов*.

1. На сходимости ряда не сказывается отбрасывание конечного числа его членов.

2. Сходимость ряда не нарушится, если все члены умножить на одно и то же ненулевое число.

3. Сумма (разность) сходящихся рядов есть ряд сходящийся.

Необходимый признак сходимости рядов

Если ряд сходится, то предел *n*-ого члена равен нулю при неограниченном возрастании *n*, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \cdot \tag{2}$$

Условие (2) является необходимым, но не достаточным условием сходимости, поэтому если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Сформулируем достаточные признаки сходимости некоторых рядов и вернемся к решению примера.

В первую очередь рассмотрим числовые ряды.

2. Наименование вопроса № 2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.

*Числовые з*накоположительные ряды

Рассмотрим два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{3}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{4}$$

называемых *знакоположительными*. Для них справедливы следующие признаки сходимости.

Признаки сравнения

*Признак 1***.** Если, начиная с некоторого *n,* выполняется условие $u_n \le v_n$ и ряд (4) сходится, то ряд (3) тоже сходится.

*Признак 2***.** Если, начиная с некоторого *n,* выполняется условие $u_n \ge v_n$, и ряд (4) расходится, то ряд (3) тоже расходится.

*Признак 3***.** Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$, то ряды (3) и (4) ведут себя одинаково, т.е. сходятся и расходятся одновременно.

При использовании этих признаков нужно сравнивать исследуемый ряд с рядом, сходимость или расходимость которого уже известна.

Для сравнения обычно выбирают один из следующих рядов:

I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ — гармонический ряд, он расходится.

II. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ $(a \neq 0)$ — геометрическая прогрессия, при $|q| < 1$ ряд сходится, при $|q| \ge 1$ расходится.

III. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$ — ряд Дирихле (обобщенный гармонический ряд), при $p>1$ сходится, при $p\le 1$ расходится.

Признак Даламбера

Если в знакоположительном ряде $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ признак Даламбера ответа на вопрос о сходимости ряда не дает и надо использовать другие признаки.

Радикальный признак Коши

Если в знакоположительном ряде $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Интегральный признак Коши

Если $u_n = f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x\ge a\ge 1$, то ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

1. 8 Лекция № 8 (2 часа).

Тема: «Понятие случайного события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей. Методы вычисления вероятностей»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Понятие случайного события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей.

2. Методы вычисления вероятностей.

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Понятие случайного события. Вероятность. Элементарная теория вероятностей.

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение. Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

<u>Определение.</u> События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

<u>Определение.</u> Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

<u>Пример.</u> В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С. Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

<u>Определение.</u> Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

<u>Операции над событиями.</u>

<u>Определение.</u> Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

<u>Теорема</u> (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

<u>Следствие 1:</u> *Если события* $A_1, A_2, ..., A_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

<u>Определение.</u> Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

<u>Теорема.</u> *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

<u>Следствие 2:</u> *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

<u>Определение.</u> Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

<u>Определение.</u> Событие А называется **независимым** от события В, вероятность события

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

<u>Теорема.</u> (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$

Также можно записать: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события. Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A)=1-q_1q_2...q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

2. Наименование вопроса № 2. Методы вычисления вероятностей.

1. 9 Лекция № 9 (2 часа).

Тема: «Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд.
2. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд.

Выборочный метод. Задачи математической статистики

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных - результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики - указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики - разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Краткая историческая справка

Математическая статистика возникла (XVII в.) и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX - начало XX в.) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пирсону и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, А. Н. Колмогоров, Н. В. Смирнов), а также английскими (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон) и американскими (Ю. Нейман, А. Вальд) учеными.

Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

2. Наименование вопроса № 2. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 - n_2 раз, x_k- n_k раз и $\sum n_i = n$ - объем выборки. Наблюдаемые значения x_i - называют *вариантами,* а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке,- *вариационным рядом.* Числа наблюдений называют *частотами,* а их отношения к объему выборки $n_i /n = W_i$ - *относительными частотами.*

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Заметим, что в теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике - соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x)= n_x/n,$$

где n_x - число вариант, меньших x; n - объем выборки. Таким образом, для того чтобы найти, например, $F^*(x_2)$, надо число вариант, меньших x_2, разделить на объем выборки:

$$F^*(x_2)= n_{x2}/n.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения.* Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события $X < x$, т.е. $F^*(x)$ стремится по вероятности к вероятности $F(x)$ этого события. Другими словами, при больших n числа $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого в том смысле, что $\lim\limits_{n\to\infty} P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1(\varepsilon > 0)$.Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2; n_2), .. ., (x_k; n_k). Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им частоты n_j. Точки (x_i; n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1; W_1), (x_2; W_2), ... , (x_k; W_k). Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i а на оси ординат- соответствующие им относительные частоты W_i. Точки (x_i; W_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

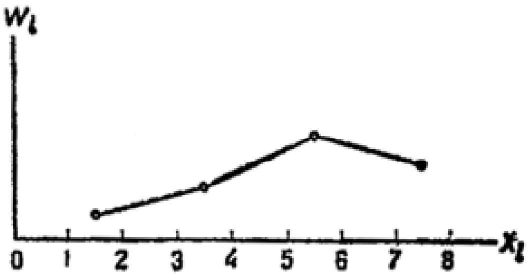


Рис. 20

На рис. 20 изображен полигон относительных частот следующего распределения:

X	1,5	3,5	5,5	7,5
W	0,1	0,2	0,4	0,3

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i - сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hn_i/h=n_i$ - сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.*

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению W_i/h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i/h. Площадь 1-го частичного прямоугольника равна $hW_i/h=W_i$ - относительной частоте вариант, попавших в 1-й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.*

1. 10 Лекция № 10 (2 часа).

Тема: «Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки»

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, их свойства.

2. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

1.10.2 Краткое содержание вопросов:

1. Наименование вопроса № 1. Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, их свойства.

<u>Зависимые и независимые случайные величины.</u>

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.*

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Аналогичную теорему можно сформулировать и для плотности распределения:

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих.*

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

2. Наименование вопроса № 2. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

<u>Определение.</u> Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин: $\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$

Для непрерывных случайных величин: $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dxdy$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y. Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов различных случайных величин.

Для того, чтобы устранить этот недостаток применятся другая характеристика – коэффициент корреляции.

<u>Определение.</u> Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин.

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

Свойство: Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}$$

Свойство: Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$|r_{xy}| \le 1$$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Наряду с коэффициентом корреляции степень зависимости случайных величин можно охарактеризовать и другой величиной, которая называется **коэффициентом ковариации**. Коэффициент ковариации определяется формулой:

$$k(X,Y) = M(XY) - M(X)\cdot M(Y)$$

Пример. Задана плотность распределения системы случайных величин X и Y.

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}$$

Выяснить являются ли независимыми случайные величины X и Y.

Для решения этой задачи преобразуем плотность распределения:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2(1+x^2))} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Таким образом, плотность распределения удалось представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y. Т.е. случайные величины X и Y независимы. Разумеется, они также будут и некоррелированы.

Линейная регрессия.

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y – зависимые случайные величины. Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная.

$$Y \cong g(X) = \alpha X + \beta$$

Определение. Функция *g(X)* называется **наилучшим приближением** случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y-g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция *g(x)* называется **среднеквадратической регрессией** Y на X.

Теорема. *Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по формуле:*

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$$

в этой формуле $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, $r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y) -$ коэффициент корреляции величин X и Y.

Величина $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется **коэффициентом регрессии** *Y* на *X*.

Прямая, уравнение которой

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

называется **прямой сренеквадратической регрессии** *Y* на *X*.

Величина $\sigma_y^2(1 - r^2)$ называется **остаточной дисперсией** случайной величины *Y* относительно случайной величины *X*. Эта величина характеризует величину ошибки, образующейся при замене случайной величины *Y* линейной функцией $g(X)=\alpha X + \beta$.

Видно, что если $r=\pm1$, то остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, ошибка равна нулю и случайная величина *Y* точно представляется линейной функцией от случайной величины *X*.

Прямая среднеквадратичной регрессии *X* на *Y* определяется аналогично по формуле:

$$x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)$$

Прямые среднеквадратичной регрессии пересекаются в точке (m_x, m_y), которую называют **центром совместного распределения** случайных величин *X* и *Y*.

Линейная корреляция.

Если две случайные величины *X* и *Y* имеют в отношении друг друга линейные функции регрессии, то говорят, что величины *X* и *Y* связаны **линейной корреляционной зависимостью**.

Теорема. *Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.*

2. Методические указания по выполнению лабораторных работ (не предусмотрены рабочим учебным планом).