ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.15 Теоретическая механика

Направление подготовки (специальность) 27.03.04 Управление в технических системах

Профиль подготовки (специализация) Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция № 1 (2 часа)

Тема: «Задачи курса. Аксиомы. Реакции связей. Силовые факторы и действия над ними»

1.1.1 Вопросы лекции

1. Статика. Структура курса. Историческая справка.
2. Аксиомы статики.
3. Связи, реакции связей.
4. Сила и пара сил. Проекции сил на оси и плоскости.
5. Алгебраический и векторный моменты сил относительно точки и оси.
6. Алгебраический и векторный моменты пар сил.

1.1.2 Краткое содержание вопросов

1. Статика. Структура курса. Историческая справка.

Теоретическая механика и её место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники.

Знание теоретической механики необходимо при изучении законов других естественных наук. Это науки, первоначально входившие в состав теоретической механики по мере накопления знаний, отделившиеся от теоретической механики и получившие самостоятельное значение, хотя теоретическая механики остается для них научной базой. Знание теоретической механики необходимо для расчета различных сооружений, проектирования, производства и эксплуатации машин и механизмов.

Основные исторические этапы развития механики.

Механика является одной из древнейших наук. В те далекие времена, когда запросы производства сводились главным образом к удовлетворению нужд строительной техники, начинает развиваться учение о простейших машинах (блок, рычаг, наклонная плоскость, ворот) и начальные понятия о равновесии тел. Обоснование начал статики появляется уже в сочинениях Архимеда (287 -212 до н.э.). Однако сведения по механике представляли собой ряд отдельных разрозненных работ, не объединенных научной системой. В создании такой системы большую роль сыграли труды Галилео Галилея (1564 - 1642), впервые сформулировавшего идеи об инерции вещества, ускорении, законы сложения движений и скоростей, падения тел. С момента выхода в свет в 1687 г. сочинения Исаака Ньютона (1643 - 1727) "Математические начала натуральной философии" можно считать, что механика действительно стала наукой.

Последующее развитие механики, опирающиеся на дифференциальные и интегральные исчисления, связано с разработкой аналитических методов, основы которых были заложены трудами Л. Эйлера (1707 - 1783), Ж. Даламбера (1717 - 1783), Ж. Лагранжа (1736 - 1813).

Огромное значение для развития механики имели работы отечественных ученых М.В. Остроградского (1801 - 1861), П.Л. Чебышева (1821 - 1894), СВ. Ковалевской (1850 - 1891), А.М. Ляпунова (1857 -1918), И.В. Мещерского (1859 -1935), К.Э. Циолковского (1857 - 1935), А.И. Крылов (1863 - 1945), И.Е. Жуковского (1847 - 1921), С.А. Чаплыгина (1869 - 1942).

Основные понятия и определения статики.

Абсолютно твердое тело (твердое тело, тело) – материальное тело, расстояние между любыми точками в котором не изменяется. Следствие размеры и форма тела не изменяются.

Материальная точка – тело, размерами которого по условиям задачи можно пренебречь.

Свободное тело – тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений.

Несвободное (связанное) тело – тело, на перемещение которого наложены ограничения.

Связи – тела, препятствующие перемещению рассматриваемого объекта (тела или системы тел).

Механическая система – совокупность взаимосвязанных между собой тел или материальных точек.

Твердое тело можно рассматривать как механическую систему, положения и расстояние между точками которой не изменяются.

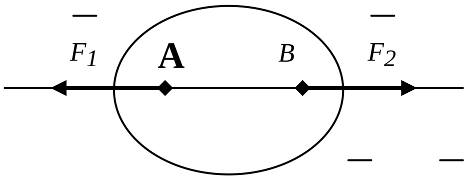
Сила – векторная величина, мера механического воздействия на материальную частицу со стороны других материальных объектов.

Сила как вектор характеризуется точкой приложения, направлением действия и абсолютным значением. Единица измерения модуля силы – Ньютон.

Силу, действие которой задано, называют *активной силой*, силу противодействия называют *реакцией*.

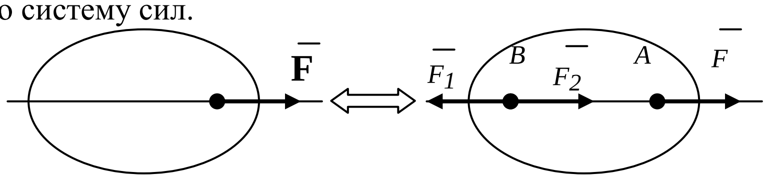
2. Аксиомы статики

1. Аксиома равновесия. Две силы, действующие на твердое тело, составляют уравновешенную систему сил, если они равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны.



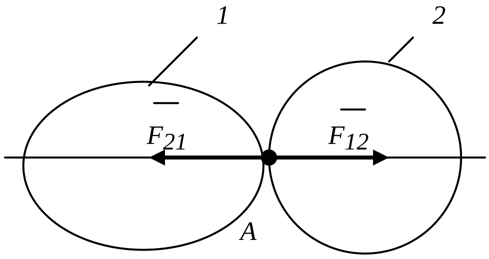
$$\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$$

2. Аксиома присоединения (исключения) уравновешенной системы сил. Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или исключить из нее любую уравновешенную систему сил.

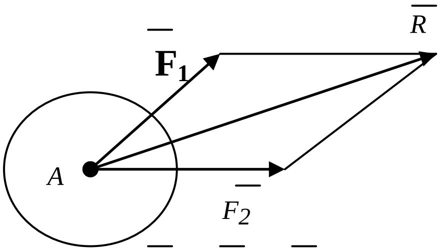


$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = |\bar{F}|$$

3. Аксиома о параллелограмме сил. Система двух сил, приложенных в одной точке твердого тела, имеет равнодействующую, приложенную в той же точке. Вектор равнодействующей является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.



$$\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$$



$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{R}$$

4. Аксиома противодействия. При действии одного твердого тела на другое возникает сила противодействия, равная по модулю, противоположно направленная действующей силе.

5. Аксиома связей. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими реакциями.

3. Связи, реакции связей.

Условимся называть тело свободным, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещения которого ограничены другими телами, называется несвободным, а тела, ограничивающие перемещения данного тела, связями. Как уже упоминалось, в точках контакта возникают силы взаимодействия между данным телом и связями. Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются реакциями связей.

Силы, не зависящие от связей, называются активными силами (заданными), а реакции связей - пассивными силами.

В механике принимают следующее положение, называемое иногда принципом освобождаемости: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действия связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу.

В статике полностью определить реакции связей можно с помощью условий или уравнений равновесия тела, которые будут установлены в дальнейшем, но направления их во многих случаях можно определить из рассмотрения свойств связей:

4. Сила и пара сил. Проекции сил на оси и плоскости.

Для оценки вращательного эффекта силы вводится понятие ее момента. Рассмотрим силу $\vec{F}$, приложенную в точке А твердого тела (Рис.1).

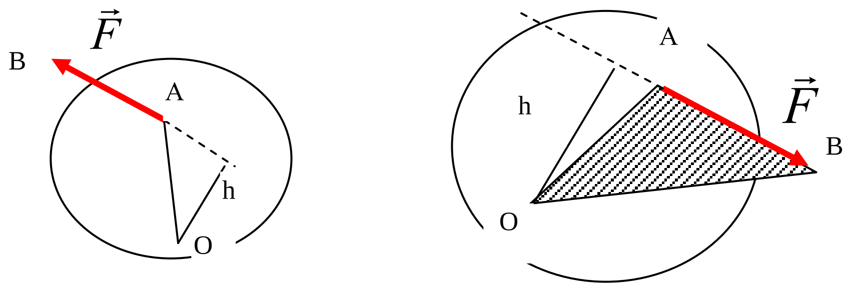


Рис.1

Перпендикуляр h , опущенный из центра О на линию действия силы $\vec{F}$, называется плечом силы $\vec{F}$ относительно центра О.

Так как вектор силы $\vec{F}$ можно перемещать вдоль линии ее действия, то вращательный эффект силы будет зависеть:

1) от модуля силы F и длины плеча h;
2) от положения плоскости поворота ОАВ, проходящей через центр О и силу $\vec{F}$;
3) от направления поворота в этой плоскости.

Пусть все силы лежат в одной плоскости. В этом случае плоскость поворота для всех сил является общей и в дополнительном задании не нуждается. Направление поворота можно охарактеризовать знаком, считая условно поворот в каком-нибудь одном направлении положительным, а в противоположном - отрицательным.

Для количественного измерения вращательного эффекта вводится следующее понятие о моменте силы:

Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра О называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Обозначать момент силы относительно центра О будем символом $m_o(\vec{F})$. Следовательно:

$$m_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h \qquad (8.3)$$

Если сила стремится повернуть тело вокруг центра О против хода часовой стрелки, то будем считать момент положительным, а если по ходу часовой стрелки -момент отрицательный .

Отметим следующие свойства момента силы:

1) момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии действия;

2) момент силы относительно центра О равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр О (плечо равно нулю);

3) момент силы численно выражается удвоенной площадью ΔOAB.

$$m_o(\vec{F}) = \pm 2пл\Delta OAB$$

Пара сил. Момент пары сил.

Парой сил называется система из двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 2).

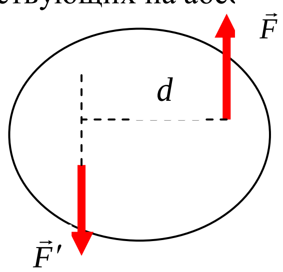


Рис.2

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары. Расстояние d между линиями действия сил пары - плечом пары.

Моментом пары называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо : $m = \pm F \cdot d$

Теорема Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра, лежащего в плоскости ее действия, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.

5. Алгебраический и векторный моменты сил относительно точки и оси.

Тела, препятствующие перемещению рассматриваемого объекта, будем называть связями. Сила, с которой связь действует на рассматриваемый объект, препятствуя его перемещению, называется *реакцией связи*. При определении возможных реакций связи следует исходить из того, что реакция это сила, препятствующая перемещению рассматриваемого тела. Реакция направлена в сторону, противоположную той, куда связь не позволяет перемещаться телу.

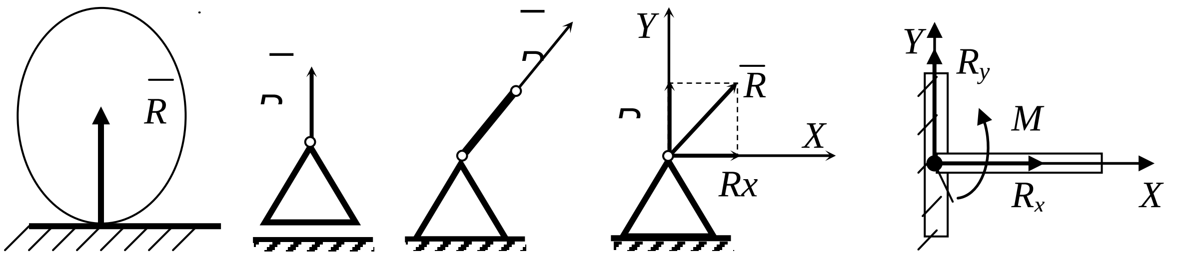
Гладкая поверхность ограничивает перемещение по нормали к поверхности опоры. Реакция направлена по общей нормали в точке касания.

Шарнирная подвижная опора ограничивает перемещение тела по нормали к опорной плоскости. Реакция направлена по нормали к опорной поверхности.

Шарнирная неподвижная опора противодействует любому перемещению в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира. При расчетах реакцию, как правило, представляют в виде двух составляющих по осям X и Y.

Шарнирный невесомый стержень противодействует перемещению тела по линии, соединяющей центры шарниров. Реакция будет направлена по линии, соединяющей центры шарниров.

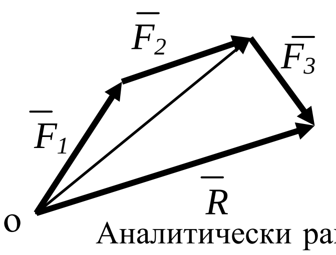
Глухая заделка противодействует любому перемещению и вращению в плоскости. Ее действие можно заменить силой, представленной в виде двух составляющих и парой сил с моментом.

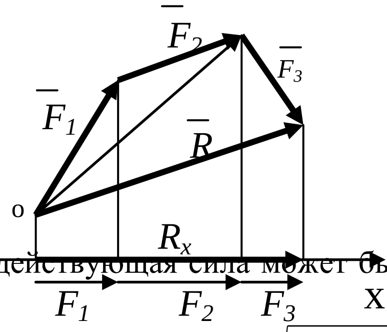


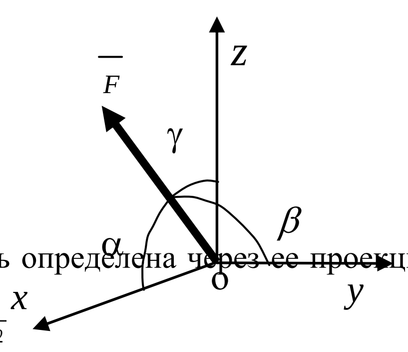
6. Алгебраический и векторный моменты пар сил.

Равнодействующая $\overline{R}$ двух сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ находится на основании аксиомы о параллелограмме сил. Геометрическая сумма любого числа сходящихся сил может быть определена путем последовательного сложения двух сил – способ векторного многоугольника.

Вывод*: система сходящихся сил ($\vec{F}_n$) приводится к одной равнодействующей силе* $\vec{R}$.







Аналитически равнодействующая сила может быть определена через ее проекции на оси координат

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\ .$$

Согласно теореме: *проекция равнодействующей на ось равна сумме проекций слагаемых сил на эту ось.* $R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$, или в общем виде

$$R_x = \sum F_{kx}\,.$$

Равнодействующая определяется выражением

$$R = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}\ .$$

Направление вектора равнодействующей определяется косинусами углов между вектором $\vec{R}$ и осями x, y, z

$$cos\alpha = \frac{\sum F_{kx}}{R};\quad \cos\beta = \frac{\sum F_{ky}}{R};\quad \cos\gamma = \frac{\sum F_{kz}}{R},\ \text{где}\ \alpha, \beta, \gamma$$

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Основная теорема статики. Уравнения равновесия. Статически определенные и статически неопределенные задачи»

1.2.1 Вопросы лекции

1. Условия равновесия системы сил.
2. Составление и использование уравнений равновесия.
3. Решение задач на определение реакций связи.
4. Статическая определимость.
5. Сочлененные конструкции.
6. Приведение системы сил к равнодействующей.
7. Инварианты системы сил.

1.2.2 Краткое содержание вопросов

1. Условия равновесия системы сил

Из основной теоремы статики следует, что любая система сил и моментов, действующих на твердое тело, может быть приведена к выбранному центру и заменена в общем случае **главным вектором** и **главным моментом**.

Если система уравновешена, то получаем условия равновесия: $R=0$, $M_o=0$. Из этих условий для пространственной системы сил получается шесть уравнений равновесия, из которых могут быть определены шесть неизвестных:

$$\begin{aligned} &\sum x_i =0, \quad \sum M_{ix}=0; \\ &\sum y_i =0, \quad \sum M_{iy}=0; \qquad (1) \\ &\sum z_i =0, \quad \sum M_{iz}=0. \end{aligned}$$

Для плоской системы сил (например, в плоскости Oxy) из этих уравнений получаются только три:

$$\begin{aligned} &\sum x_i=0; \\ &\sum y_i=0; \qquad (2) \\ &\sum M_o=0, \end{aligned}$$

причем оси и точка O , относительно которой пишется уравнение моментов, выбираются произвольно. Это **первая форма** уравнений равновесия.

Уравнения равновесия могут быть записаны иначе:

$$\begin{aligned} &\sum x_i =0; \\ &\sum M_A=0; \quad (3) \\ &\sum M_B=0. \end{aligned}$$

Это **вторая форма** уравнений равновесия, причем ось Ox не должна быть перпендикулярна линии, проходящей через точки A и B .

$$\begin{aligned} &\sum M_A=0; \\ &\sum M_B=0; \quad (4) \\ &\sum M_C=0. \end{aligned}$$

Это **третья форма** уравнений равновесия, причем точки A , B и C не должны лежать на одной прямой. Предпочтительность написания форм уравнений равновесия зависит от конкретных условий задачи и навыков решающего.

При действии на тело плоской системы параллельных сил одно из уравнений исчезает и остаются два уравнения (рисунок 1, а):

$$\begin{aligned} &\sum x_i =0; \\ &\sum M_o=0. \quad (5) \end{aligned}$$

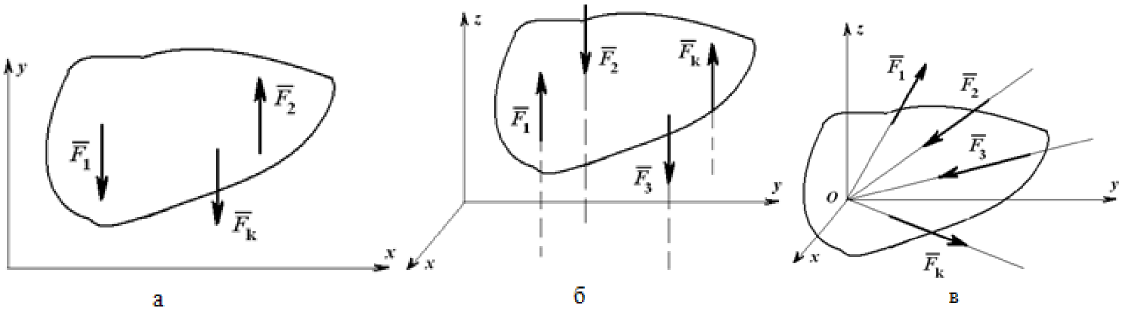


Рисунок 1

Для пространственной системы параллельных сил (рисунок 1, б) могут быть записаны три уравнения равновесия:

$$\sum z_i = 0;$$
$$\sum M_{ix} = 0;$$
$$\sum M_{iy} = 0.$$

Для системы сходящихся сил (линии действия которых пересекаются в одной точке) можно написать три уравнения для пространственной системы:

$$\sum x_i = 0;$$
$$\sum y_i = 0;$$
$$\sum z_i = 0$$

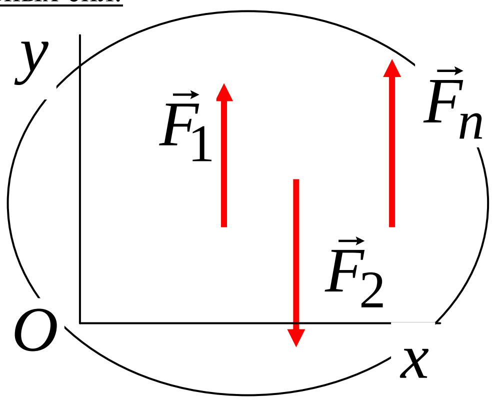
и два уравнения для плоской системы:

$$\sum x_i = 0;$$
$$\sum y_i = 0.$$

В каждом из вышеприведенных случаев число неизвестных, находимых при решении уравнений, соответствует числу записанных уравнений равновесия.

2. Составление и использование уравнений равновесия.

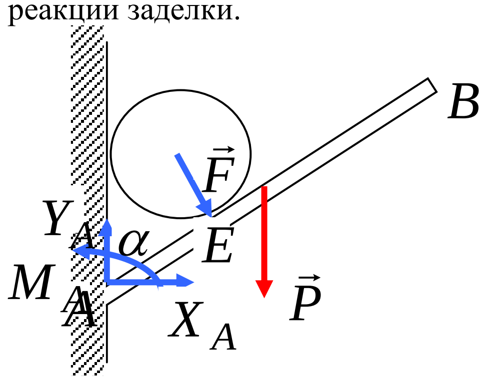
Равновесие плоской системы параллельных сил.



$\sum F_{ky} = 0 \quad \sum m_O(\vec{F}_k) = 0$

ПРИМЕР.

Однородный брус AB жестко заделан в стену , образуя с ней угол α . Выступающая из стены часть бруса имеет длину b м и вес P. Внутри угла DAB лежит цилиндр весом Q , касающийся бруса в точке E, причем AE=a . Определить реакции заделки.



Рассмотрим равновесие бруса.

$\sum F_{kx} = 0 \qquad X_A + F \cdot \cos\alpha = 0$

$\sum F_{ky} = 0 \qquad Y_A - P - F \cdot \sin\alpha = 0$

$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \qquad -F \cdot a - P \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\alpha + M_A = 0$

3. Решение задач на определение реакций связи.

Дано: P1=2кН; P2=12кН; P3=6кН; a=3м, α= 60°.

Определить реакции опор фермы от заданной нагрузки и усилия в стержнях.

Решение:

Определение реакций опор. Рассмотрим внешние силы приложенные к ферме: силы P1, P2, P3 и реакции опор R_A, R_B.

Для плоской системы сил составим три уравнения равновесия.

$$h = a \cdot \sin 60° = 2.598\,м$$

$$\sum M_B(F_{1k}) = 0 \quad -P_1 \cdot 2{,}598 + P_3 \cdot \sin 60° \cdot 1{,}5 + P_3 \cdot \cos 60° \cdot 2{,}598 + P_2 \cdot 4{,}5 - R_A \cdot 9 = 0$$

$$R_A = \frac{-P_1 \cdot 2{,}598 + P_3 \cdot \sin 60° \cdot 1{,}5 + P_3 \cdot \cos 60° \cdot 2{,}598 + P_2 \cdot 4{,}5}{9} = 7.154\,кН$$

$$\sum F_{1x} = 0 \quad -P_2 + P_3 \cdot \cos 60° + X_B = 0$$

$$X_B = -P_3 \cdot \cos 60° + P_2 = 9\,кН$$

$$\sum F_{1y} = 0 \quad P_2 + P_3 \cdot \sin 60° - R_A - Y_B = 0$$

$$Y_B = P_2 + P_3 \cdot \sin 60° - R_A = 10.04\,кН$$

Проверка

$$\sum M_A(F_{1k}) = 0 \quad P_1 \cdot 2.598 + P_3 \cdot \sin 60° \cdot 7.5 - P_3 \cdot \cos 60° \cdot 2.598 + P_2 \cdot 4.5 - Y_B \cdot 9 = 0$$

4. Статическая определимость.

Статическая система называется статически определимой, если число опорных реакций соответствует числу степеней свободы, и величины опорных реакций по принципу механического равновесия можно определить из величин внешних нагрузок.

Все другие системы называются статически неопределимыми.

Для расчёта всех статически определимых систем достаточно решать уравнения равновесия:

Осадка опор, температурные воздействия и неточности сборки в статически определимых системах не влияют на распределение и величину усилий.

5. Сочлененные конструкции

Равновесие сочлененных тел. Железнодорожные и строительные конструкции могут состоять из сочлененных между собой тел (балок, ферм). Количество наложенных связей может превышать число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для рассматриваемой конструкции. Такие задачи являются статически неопределимыми. Степень статической неопределимости для плоских систем равна: где Д – число жестких дисков, Ж – число жестких заделок, Ш – число неподвижных шарниров (опорных и соединяющих диски между собой, С – число шарнирных стержней (опорных или соединяющих диски между собой) или подвижных шарниров

6. Приведение системы сил к равнодействующей

Силы называются сходящимися, если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке.

Теорема: Система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна сумме всех этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

Пусть задана система сходящихся сил F_1, F_2, F_3, ..., F_n, приложенных к абсолютно твердому телу (рис. 2.1, а). Перенесем точки приложения сил по линиям их действия в точку пересечения этих линий (21, б). Получили сист сил, прил к одной точке. Она эквивалентна заданной. Сложим F_1 и F_2, получим их равнодействующую: $R_2=F_1+F_2$. Сложим R_2 с F_3: $R_3=R_2+F_3=F_1+F_2+F_3$. Сложим $F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n=R_n=R=åF_i$. Ч.т.д. Вместо параллелограммов можно построить силовой многоугольник. Пусть система состоит из 4 сил (рис 2.2.). От конца вектора F_1 отложим вектор F_2. Вектор, соединяющий начало О и конец вектора F_2, будет вектором R_2. Далее отложим вектор F_3 помещая его начало в конце вектора F_2. Тогда мы получим вектор R_8, идущий от точки О к концу вектора F_3. Точно так же добавим вектор F_4; при этом получим, что вектор, идущий от начала первого вектора F_1 к концу вектора F_4, является равнодействующей R. Такой пространственный многоугольник называется силовым. Если конец последней силы не совпадает с началом первой силы, то силовой многоугольник наз разомкнутый. Если для нах равнодействующей исп прав геометр, то этот способ наз геометрическим.

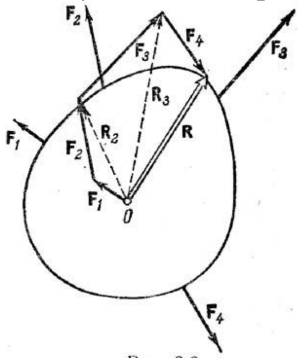


Рис. 2.2

Вычисление равнодействующей

Для аналитического определения равнодействующей найдем ее проекции R_x, R_y, R_z на оси декартовой системы координат. Имеем

$$R_x = \Sigma F_{kx}\,, \qquad R_y = \Sigma F_{ky}\,, \qquad R_z = \Sigma F_{kz}\,. \qquad (2)$$

Тогда величина равнодействующей определится следующей формулой:

$$R^* = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,. \qquad (3)$$

или

$$R^* = \sqrt{(\sum_{k=1}^{N} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{N} F_{ky})^2 + (\sum_{k=1}^{N} F_{kz})^2}\,. \qquad (4)$$

Для определения направления равнодействующей R^* воспользуемся обычными выражениями для направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = R_x/\mathrm{R}\,, \qquad \cos\beta = R_y/\mathrm{R}\,, \qquad \cos\gamma = R_z/\mathrm{R}\,. \qquad (5)$$

Здесь α, β, γ - углы между положительным направлением осей координат и равнодействующей.

Равенства (2)-(5) позволяют определить модуль и направление равнодействующей по заданным проекциям составляющих сил.

В случае плоской системы сходящихся сил оси координат можно взять в плоскости действия сил и тогда формулы (2)-(5) упрощаются.

7. Инварианты системы сил

Инварианты в статике, такие величины, для рассматриваемой системы сил, которые не изменяются при изменении центра приведения.

Виды инвариантов:

1) Векторный инвариант - главный вектор системы сил (R);

2) Скалярный инвариант.

Скалярное произведение главного вектора на главный момент не зависит от центра приведения.

Проекция главного момента на главный вектор не зависит от центра приведения.

Частные случаи приведения системы сил:

1) Приведение к паре сил.

В этом случае система сил приводится к одной паре.

2) Приведение к равнодействующей.

1.3 Лекция 3 (2 часа).

Тема: «Трение скольжения и трение качения. Центр параллельных сил, центр тяжести»

1.3.1 Вопросы лекции

1. Центр параллельных сил.
2. Способы определения положения центра тяжести.
3. Положение центров тяжести некоторых тел и фигур.
4. Трение скольжения. Угол трения.
5. Трение качения.
6. Примеры на равновесие сил, приложенных к твердому телу при наличии сил сцепления.

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Центр параллельных сил.

Рассмотрим систему n сил P_i, приложенных в точках A_i (x_i, y_i, z_i) и параллельных оси Ov с ортом l (рис.2).

Если заранее исключить случай системы, эквивалентной паре сил, нетрудно на основании предыдущего параграфа доказать существование ее равнодействующей R.

Определим координаты центра $C(x_c, y_c, z_c)$ параллельных сил, то есть координаты точки приложения равнодействующей этой системы.

Воспользуемся с этой целью теоремой Вариньона, на основании которой:

$M_0(R) = \Sigma M_0(P_i)$.

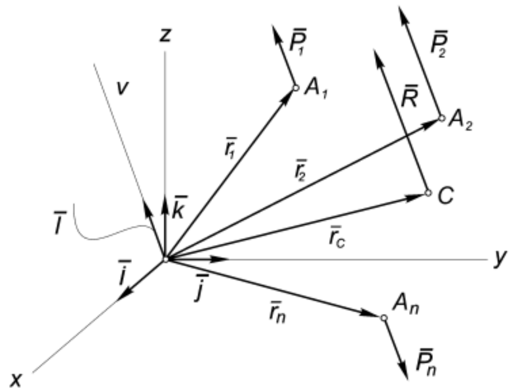


Рис.2

Вектор-момент силы можно представить в виде векторного произведения, поэтому:

$M_0(R) = r_c \times R = \Sigma M_{0i}(P_i) = \Sigma(r_i \times P_i)$.

Учитывая, что $R = R_v \cdot l$, а $P_i = P_{vi} \cdot l$ и воспользовавшись свойствами векторного произведения, получим:

$r_c \times R_v \cdot l = \Sigma(r_i \times P_{vi} \cdot l)$,

$r_c \cdot R_v \times l = \Sigma(r_i \cdot P_{vi} \times l) = \Sigma(r_i \cdot P_{vi}) \times l$,

или:

$[r_c R_v - \Sigma(r_i P_{vi})] \times l = 0$.

Последнее выражение справедливо только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю. Поэтому, опуская индекс v и учитывая, что равнодействующая $R = \Sigma P_i$, отсюда получим:

$r_c = (\Sigma P_i r_i)/(\Sigma P_i)$.

Проектируя последнее векторное равенство на оси координат, получим искомое *выражение координат центра параллельных сил*:

$x_c = (\Sigma P_i x_i)/(\Sigma P_i)$;

$y_c = (\Sigma P_i y_i)/(\Sigma P_i)$; (2)

$z_c = (\Sigma P_i z_i)/(\Sigma P_i)$.

2. Центр тяжести твёрдого тела.

Рассмотрим твердое тело весом P и объемом V в системе координат $Oxyz$, где оси x и y связаны с поверхностью земли, а ось z направлена в зенит.

Если разбить тело на элементарные части объемом ΔV_i , то на каждую его часть будет действовать сила притяжения ΔP_i, направленная к центру Земли. Предположим, что размеры тела значительно меньше размеров Земли, тогда систему сил, приложенных к элементарным частям тела можно считать не сходящейся, а параллельной (рис.3), и к ней применимы все выводы предыдущей главы.

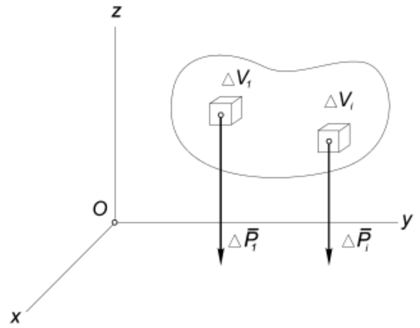


Рис.3

Определение. *Центром тяжести твердого тела называется центр параллельных сил тяжести элементарных частей этого тела.*

Напомним, что *удельным весом* элементарной части тела называется отношение ее веса ΔP_i к объему ΔV_i: $\gamma_i = \Delta P_i/\Delta V_i$. Для однородного тела эта величина является постоянной: $\gamma_i = \gamma = P/V$.

Подставляя в (2) $\Delta P_i = \gamma_i \cdot \Delta V_i$ вместо P_i, учитывая последнее замечание и сокращая числитель и знаменатель на γ, получим *выражения координат центра тяжести однородного тела*:

$x_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot x_i)/(\Sigma\Delta V_i)$;
$y_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot y_i)/(\Sigma\Delta V_i)$; (3)
$z_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot z_i)/(\Sigma\Delta V_i)$.

При определении центра тяжести полезны несколько теорем.

1) Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости.

Если оси x и y расположить в этой плоскости симметрии, то для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $x_i, y_i, -z_i$. И координата z_C по (3), будет равна нулю, т.к. в сумме $\Sigma P_i z_i$ все члены имеющие противоположные знаки, попарно уничтожаются. Значит центр тяжести расположен в плоскости симметрии.

2) Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Действительно, в этом случае, если ось z провести по оси симметрии, для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $-x_i, -y_i, z_i$ и координаты x_C и y_C, вычисленные по формулам (3), окажутся равными нулю.

Аналогично доказывается и третья теорема.

3) Если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела находится в этой точке.

И ещё несколько замечаний.

Первое. Если тело можно разделить на части, у которых известны вес и положение центра тяжести, то незачем рассматривать каждую точку, а в формулах (3) P_i – определять как вес соответствующей части и x_i, y_i, z_i – как координаты её центра тяжести.

Второе. Если тело однородное, то вес отдельной части его $P_i = V_i \cdot \gamma$, где γ- удельный вес материала, из которого сделано тело, а V_i - объём этой части тела. И формулы (3) примут более удобный вид. Например,

$x_C = \sum P_i x_i/P = \sum V_i \cdot \gamma \cdot x_i/V \cdot \gamma = \sum V_i x_i/V.$

И аналогично, $y_C = \sum V_i y_i/V,\ z_C = \sum V_i z_i/V,$ где $V = \sum V_i$ - объём всего тела.

Третье замечание. Пусть тело имеет вид тонкой пластинки площадью F и толщиной t, лежащей в плоскости Oxy. Подставляя в (3) $\Delta V_i = t \cdot \Delta F_i$, *получим координаты центра тяжести однородной пластинки*:

$x_c = (\Sigma\Delta F_i \cdot x_i) / (\Sigma\Delta F_i)$;
$y_c = (\Sigma\Delta F_i \cdot y_i) / (\Sigma\Delta F_i)$.
$z_c = (\Sigma\Delta F_i \cdot z_i) / (\Sigma\Delta F_i)$.

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести отдельных пластин; $F = \sum F_i$ – общая площадь тела.

Четвёртое замечание. Для тела в виде тонкого криволинейного стержня длиной L с площадью поперечного сечения a элементарный объем $\Delta V_i = a \cdot \Delta L_i$, поэтому *координаты центра тяжести тонкого криволинейного стержня* будут равны:

$x_c = (\Sigma\Delta L_i \cdot x_i)/(\Sigma\Delta L_i)$;
$y_c = (\Sigma\Delta L_i \cdot y_i)/(\Sigma\Delta L_i)$; (4)
$z_c = (\Sigma\Delta L_i \cdot z_i)/(\Sigma\Delta L_i)$.

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести i-го участка; $L = \sum \Delta L_i$.

Отметим, что согласно определению центр тяжести - это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

3. Центр тяжести объёма, площади и линии.

1) **Центр тяжести дуги окружности.** Рассмотрим дугу *AB* радиуса *R* с центральным углом $AOB = 2\alpha$. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси *Ox* (рис. 4).

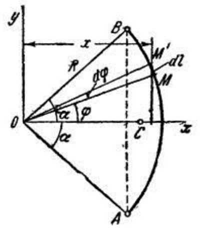


Рис.4

Найдем координату x_C по формуле $x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} x dl$. Для этого выделим на дуге *AB* элемент *MM'* длиною $dl = Rd\varphi$, положение которого определяется углом φ. Координата *x* элемента *MM'* будет $x = Rcos\varphi$. Подставляя эти значения *x* и d*l* и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим:

$$x_C = \frac{1}{L}\int_A^B x dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} cos\varphi d\varphi = \frac{2R^2}{L}\sin\alpha,$$

где L - длина дуги AB, равная $R = 2\alpha$.

Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O, равном $x_C = Rsin\alpha/\alpha$,

где угол α измеряется в радианах.

2) **Центр тяжести площади треугольника.** Рассмотрим треугольник, лежащий в плоскости *Oxy*, координаты вершин которого известны: A_i (x_i, y_i), (i = 1,2,3). Разбивая треугольник на узкие полоски, параллельные стороне A_1A_2, придем к выводу, что центр тяжести треугольника должен принадлежать медиане A_3 M_3 (рис.5).

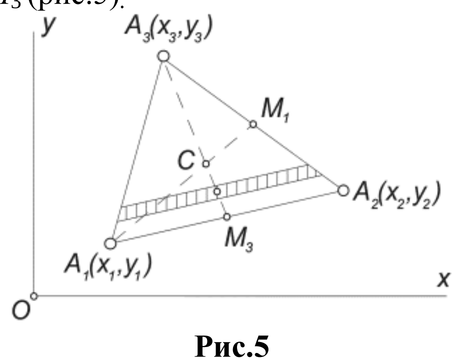


Рис.5

Разбивая треугольник на полоски, параллельные стороне A_2A_3, можно убедиться, что он должен лежать на медиане A_1M_1. Таким образом, *центр тяжести треугольника лежит в точке* *пересечения его медиан*, которая, как известно, отделяет от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

В частности, для медианы A_1M_1 получим, учитывая, что координаты точки M_1 – это среднее арифметическое координат вершин A_2 и A_3:

$x_c = x_1 + (2/3)\cdot(x_{M1} - x_1) = x_1 + (2/3)\cdot[(x_2 + x_3)/2 - x_1] = (x_1 + x_2 + x_3)/3$.

Таким образом, координаты центра тяжести треугольника представляют собой среднее арифметическое из координат его вершин:

$x_c = (1/3)\Sigma x_i$; $y_c = (1/3)\Sigma y_i$.

3) **Центр тяжести площади кругового сектора.** Рассмотрим сектор круга радиуса R с центральным углом 2α, расположенный симметрично относительно оси Ox (рис.6) .

Очевидно, что $y_c = 0$, а расстояние от центра круга, из которого вырезан этот сектор, до его центра тяжести можно определить по формуле:

$$x_c = \frac{1}{F}\int_F x dF. \qquad (5)$$

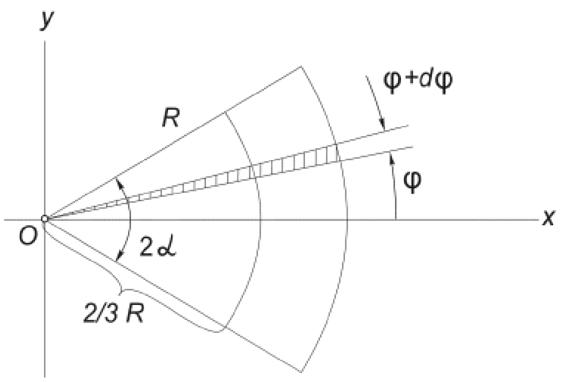


Рис.6

Проще всего этот интеграл вычислить, разбивая область интегрирования на элементарные секторы с углом $d\varphi$. С точностью до бесконечно малых первого порядка такой сектор можно заменить треугольником с основанием, равным $R\cdot d\varphi$ и высотой R. Площадь такого треугольника $dF=(1/2)R^2\cdot d\varphi$, а его центр тяжести находится на расстоянии $2/3R$ от вершины, поэтому в (5) положим $x = (2/3)R\cdot\cos\varphi$. Подставляя в (5) $F = \alpha R^2$, получим:

$$x_c = \frac{1}{\alpha R^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{3}R\cos\varphi\frac{1}{2}R^2 d\varphi = \frac{R}{3\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi =$$
$$= \frac{R\sin\varphi}{3\alpha}\Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{R}{3\alpha}[\sin\alpha - \sin(-\alpha)] = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}. \qquad (6)$$

4. Равновесие при наличии сил трения.

Силу трения включают в число активных сил и далее задачу решают обычным образом. адача сводится к рассмотрению предельного положения, когда сила трения достигает своего наибольшего значения $\overline{F}_{тр}$. В этом случае реакцию шероховатой связи изображают двумя составляющими $\overline{N}$ и $\overline{F}_{тр}$, где $\overline{F}_{тр} = f_0 N$. Затем составляют обычные условия равновесия статики, подставляя в них вместо $\overline{F}_{тр}$ величину $f_0 N$ и решая полученные уравнения, определяют искомые величины.

Если положение равновесия не является предельным, то сила трения $\overline{F}$ не равна $\overline{F}_{тр}$ и ее величина должна находиться из условий равновесия как неизвестная переменная.

При геометрическом решении реакцию шероховатой связи удобнее изображать одной силой $\overline{R}$, которая в предельном положении равновесия будет отклонена от нормали к поверхности на угол φ_0.

5. Коэффициент трения. Предельная сила трения. Угол и конус трения.

Пусть два тела I и II взаимодействуют друг с другом соприкасаясь в точке A.

Всегда реакцию $\vec{R}_A$, действующую, например, со стороны тела II и приложенную к телу I, можно разложить на две составляющие:

1) $\vec{N}_A$, направленную по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке A;

2) $\vec{T}_A$, лежащую в касательной плоскости.

Эти составляющие ($\vec{N}_A$ и $\vec{T}_A$) называются: $\vec{N}_A$ - нормальная реакция,

$\vec{T}_A$ - сила трения скольжения. Сила $\vec{T}_A$ препятствует скольжению тела I по телу II. Если поверхности идеально гладкие, то $\vec{T}_A = 0$. В реальных условиях

поверхности шероховаты и во многих случаях пренебречь силой трения нельзя.

Если нагрузка недостаточна для нарушения покоя, справедливы следующие уравнения равновесия: $N - P = 0,\ S - T = 0$. Отсюда следует, что $N = P,\ S = T$. Таким образом, пока тело находится в покое, сила трения остается равной силе натяжения нити S.

В зависимости от действия активных сил направление предельной реакции может меняться. Геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции $\vec{R}$ образует коническую поверхность – конус трения. Если коэффициент трения f во всех направлениях одинаков, то согласно конус трения будет круговым. В тех случаях, когда коэффициент трения f зависит от направления возможного движения тела, конус трения не будет круговым.

Рассмотрим теперь случай, когда активные силы, действующие на тело, приводятся к одной равнодействующей $\vec{F}$, составляющая угол α с нормалью к поверхности. Такая сила оказывает двоякое действие: во-первых, ее нормальная составляющая $\vec{F}_n$ определяет нормальную составляющую $\vec{N}$ реакции поверхности и, следовательно, предельную силу трения $T_{\max} = fN$, а во-вторых, ее касательная составляющая $\vec{F}_\tau$ стремится эту силу преодолеть. Если увеличивать модуль силы $\vec{F}$, то пропорционально будут возрастать обе составляющие. Отсюда можно заключить, что состояние покоя или движения тела не зависит от силы $\vec{F}$ и определяется только углом α - чем меньше этот угол, тем меньше тенденция к нарушению равновесию.

Для аналитического решения задачи составим условия равновесия тела:

$$\sum F_{kx} = 0,\quad T - F\sin\alpha = 0,\quad \sum F_{ky} = 0,\quad N - F\cos\alpha = 0,\quad T \le fN.$$

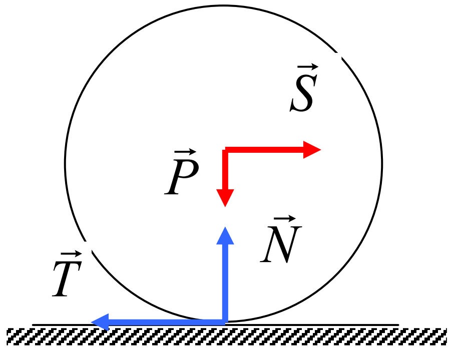
Из уравнений найдем $T = F\sin\alpha,\ N = F\cos\alpha$ и, подставляя в неравенство, найдем $tg\alpha \le f$ или, учитывая $tg\alpha \le tg\varphi$. Следовательно, при равновесии тела $\alpha \le \varphi$.

Это означает, что если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения, то увеличением ее модуля нельзя нарушить равновесие тела: для того, чтобы тело начало движение, необходимо (и достаточно), чтобы равнодействующая активных сил $\vec{F}$ находилась вне конуса трения.

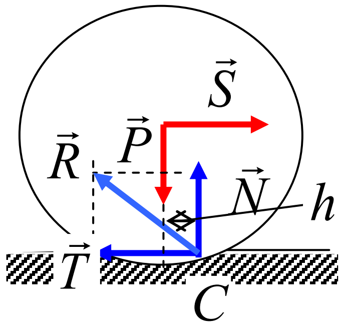
6. Трение качения. Коэффициент трения качения.

Рассмотрим цилиндр (каток), покоящийся на горизонтальной плоскости, когда на него действует горизонтальная активная сила $\vec{S}$; кроме нее, действуют сила тяжести $\vec{P}$, а также нормальная реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{T}$.

Как показывает опыт, при достаточно малой величины силы S цилиндр остается в покое. Но этот факт нельзя объяснить, если удовлетвориться введением сил, изображенных на рисунке. Согласно этой схеме, т.к. равновесие невозможно главный момент всех сил, действующих на цилиндр $M_{cz} = -Sr$, отличен от нуля и одно из условий равновесия не выполняется.



Причина выявившегося несоответствия состоит в том, что в наших рассуждениях мы продолжаем пользоваться представлением об абсолютно твердом теле и предполагаем касание цилиндра с поверхностью, происходящим по образующей. Для устранения отмеченного несоответствия теории с опытом необходимо отказаться от гипотезы абсолютно твердого тела и учесть, что в действительности цилиндр и плоскость вблизи точки С деформируются и существует некоторая площадь соприкосновения конечной ширины. Вследствие этого в ее правой части цилиндр прижимается сильнее, чем в левой, и полная реакция $\vec{R}$ приложена правее точки С.



Полученная теперь схема действующих сил статически удовлетворительна, т.к. момент пары $(\vec{S},\vec{T})$ может уравновеситься моментом пары $(\vec{N},\vec{P})$. Считая деформацию малой, заменим эту систему сил системой, изображенной на рисунке. В отличие от первой схемы к цилиндру приложена пара сил с моментом $M_t = Nh$.

Этот момент называется моментом трения качения**.** Составим уравнения равновесия цилиндра: $S - T = 0, N - P = 0, -Sr + M_t = 0$.

Первые два уравнения дают $T = S$, $N = P$, а из третьего уравнения можно найти M_t.

Тогда $h = Sr / P$. Как видно, с увеличением модуля активной силы S растет расстояние h. Но это расстояние связано с площадью поверхности контакта и, следовательно, не может неограниченно увеличиваться. Это значит, что наступает такое состояние, когда увеличение силы S приведет к нарушению равновесия. Обозначим максимально возможную величину h буквой δ. Экспериментально установлено, что величина δ пропорциональна радиусу цилиндра и различна для разных материалов. $h_{\max} = \delta$.

Следовательно, если имеет место равновесие, то выполняется $h \le \delta$. Величина δ называется коэффициентом трения качения. Она имеет размерность длины.

Условие можно также записать в виде $M_t \le \delta N$. Учитывая, что $M_t = Sr$, получим $S \le \frac{\delta}{r} N$.

Очевидно, что максимальный момент трения качения $M_t^{\max} = \delta N$ пропорционален силе нормального давления.

В справочных таблицах приводится отношение коэффициента качения к радиусу цилиндра ($\lambda = \delta / r$) для различных материалов.

1.4 Лекция 4 (2 часа).

Тема: «Способы задания движения, основные кинематические характеристики»

1.4.1 Вопросы лекции

1. Основные понятия раздела.
2. Кинематика точки.
3. Определение скорости точки при задании ее движения векторным, естественным и координатным способом.
4. Определение ускорения точки при задании ее движения векторным, координатным и естественным способом.

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия раздела.

Кинематикой (от греческого «кинема» — движение) называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

В кинематике изучают зависимости между пространственно-временными характеристиками механического движения. Поэтому кинематику называют также геометрией движения.

Основной задачей кинематики является нахождение положения тела в любой момент времени, если известны его положение, скорость и ускорение в начальный момент времени.

Обычно кинематику подразделяют на две части — кинематику точки и кинематику твердого тела.

Механическое движение - это изменение положения тел (или частей тела) относительно друг друга в пространстве с течением времени.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета.

Тело отсчета - тело (или группа тел), принимаемое в данном случае за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система отсчета - это система координат, связанная с телом отсчета, и выбранный способ измерения времени (рис. 1).

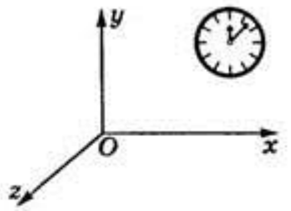


Рис.1

Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым они связаны).

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике мы рассматриваем, как трехмерное евклидово пространство.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т.е. как функции времени t.

В теоретической механике при измерении пространства за основную единицу длины принимают метр (м), а за основную единицу времени — секунду (с). Время предполагается одинаковым в любых системах отсчета (системах координат) и не зависимым от движения этих систем относительно друг друга. Время обозначается буквой и рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина, принимаемая в качестве аргумента.

При измерении времени в кинематике различают такие понятия, как промежуток времени, момент времени, начальный момент времени.

Промежутком времени называется время, протекающее между двумя физическими явлениями. Моментом времени называют границу между двумя смежными промежутками времени. Начальным моментом называется время, с которого начинают отсчет времени.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

2. Кинематика точки.

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) - значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Положение тела можно определить с помощью радиус-вектора $\vec{r}$ или с помощью координат.

Радиус-вектор $\vec{r}$ точки М - направленный отрезок прямой, соединяющий начало отсчета О с точкой М (рис. 2).

Координата x точки М - это проекция конца радиуса-вектора точки М на ось Ох. Обычно пользуются прямоугольной системой координат Декарта. В этом случае положение точки М на линии, плоскости и в пространстве определяют соответственно одним (x), двумя (x, y) и тремя (x, y, z) числами - координатами (рис. 2.1).

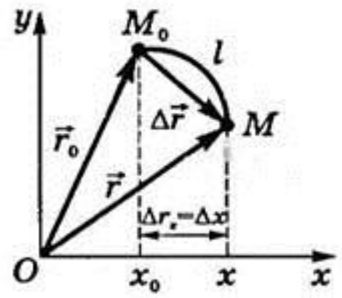


Рис.2

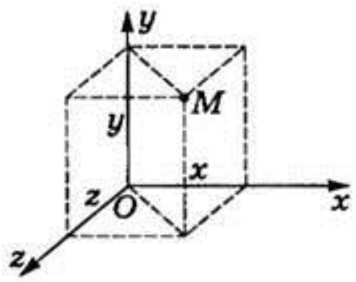


Рис.2.1

Материальная точка - тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь.

Этой моделью пользуются в тех случаях, когда линейные размеры рассматриваемых тел много меньше всех прочих расстояний в данной задаче или когда тело движется поступательно.

Основной задачей кинематики точки является изучение законов движения точки. Зависимость между произвольными положениями движущейся точки в пространстве и времени определяет закон ее движения. Закон движения точки считают известным, если можно определить положение точки в пространстве в произвольный момент времени. Положение точки рассматривается по отношению к выбранной системе координат.

Поступательным называется движение тела, при котором прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому для описания такого движения тела достаточно описать движение его одной произвольной точки.

В дальнейшем под словом "тело" будем понимать "материальная точка".

Линия, которую описывает движущееся тело в определенной системе отсчета, называется траекторией. На практике форму траектории задают с помощью математических формул (y=f(x) — уравнение траектории) или изображают на рисунке. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета. Например, траекторией тела, свободно падающего в вагоне, который движется равномерно и прямолинейно, является прямая вертикальная линия в системе отсчета, связанной с вагоном, и парабола в системе отсчета, связанной с Землей.

3. Определение скорости точки при задании ее движения векторным, естественным и координатным способом.

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки. Понятие скорости точки в равномерном прямолинейном движении относится к числу элементарных понятий.

Скорость - мера механического состояния тела. Она характеризует быстроту изменения положения тела относительно данной системы отсчета и является векторной физической величиной.

Единица измерения скорости – м/с. Часто используют и другие единицы, например, км/ч: 1 км/час=1/3,6 м/с.

Движение точки называется равномерным, если приращения радиуса-вектора точки за одинаковые промежутки времени равны между собой. Если при этом траекторией точки является прямая, то движение точки называется прямолинейным.

Для равномерно-прямолинейного движения

$\Delta r = v\Delta t$, (1)

где v – постоянный вектор.

Вектор v называется скоростью прямолинейного и равномерного движения полностью его определяет.

Из соотношения (1) видно, что скорость прямолинейного и равномерного движения является физической величиной, определяющей перемещение точки за единицу времени. Из (1) имеем $v = \frac{\Delta r}{\Delta t}$.

Направление вектора v указано на рис. 6.1.

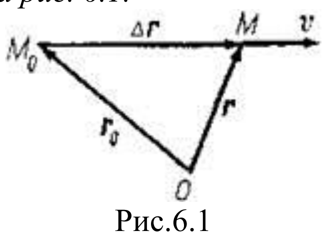


Рис.6.1

При неравномерном движении эта формула не годится. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения

Вектор скорости точки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, учитывая, что r_x=x, r_y=y, r_z=z, найдем:

$v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$.

Таким образом, проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т.е. углы α, β, γ, которые вектор v образует с координатными осями) по формулам

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Итак, численная величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) *s* точки по времени.

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, которая нам наперед известна.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Величину скорости можно определить как предел (Δr – длина хорды MM_1):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – длина дуги MM_1. Первый предел равен единице, второй предел – производная ds/dt.

Следовательно, скорость точки есть первая производная по времени от закона движения:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Направлен вектор скорости, как было установлено ранее, по касательной к траектории. Если величина скорости в данный момент будет больше нуля, то вектор скорости направляется в положительном направлении

4. Определение ускорения точки при задании ее движения векторным, координатным и естественным способом.

Ускорение — векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости. Оно показывает, на какую величину изменяется скорость тела за единицу времени. В СИ единицей ускорения является метр на секунду в квадрате $\left(\frac{м}{с^2}\right)$.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении *M* и имеет скорость v, а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость v_1 (рис. 8).

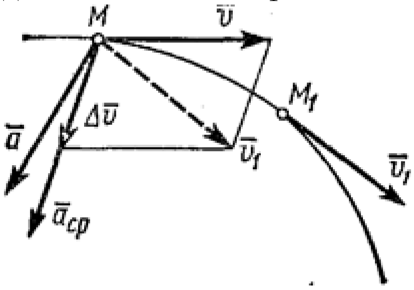


Рис.8

Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получает приращение $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$. Для построения вектора $\Delta\vec{v}$ отложим от точки *M* вектор, равный v_1, и построим параллелограмм, в котором диагональю будет $\vec{v}_1$, а одной из сторон $\vec{v}$. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta\vec{v}$. Заметим, что вектор $\Delta\vec{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$$\vec{a}_{ср} = \Delta\vec{v}/\Delta t.$$

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta\vec{v}$, т.е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени *t* называется векторная величина $\vec{a}$, к которой стремится среднее ускорение $\vec{a}_{ср}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю: Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Ускорение точки равно нулю лишь тогда, когда скорость точки v постоянна как по величине, так и по направлению: это соответствует только прямолинейному и равномерному движению.

При прямолинейном движении с возрастающей по модулю скоростью (рис. 9, а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{v_0}$ сонаправлены ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v_0}$) и проекция ускорения на направление движения положительна.

При прямолинейном движении с убывающей по модулю скоростью (рис. 9, б) направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{v_0}$ противоположны ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v_0}$) и проекция ускорения на направление движения отрицательна.

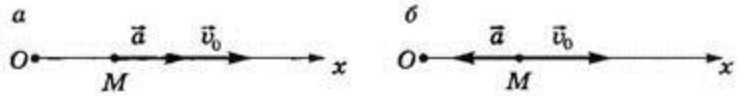


Рис.9

Определение ускорения при координатном способе задания движения

Вектор ускорения точки $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ в проекции на оси получаем:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Или

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z},$$

т.е. проекция ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a},$$

где α_1, β_1, γ_1 - углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

Определение ускорения при естественном способе задания движения. Касательное и нормальное ускорение точки

При естественном способе задания движения вектор $\vec{a}$ определяют по его проекциям на оси Mτnb, имеющие начало в точке *M* и движущиеся вместе с нею (рис.11). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника (или скоростными (естественными) осями), направлены следующим образом: ось Mτ - вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния *s*; ось Mn - по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb - перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Нормаль Mn, лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется главной нормалью, а перпендикулярная к ней нормаль Mb - бинормалью.

Естественные оси – это подвижные оси, связанные с движущейся точкой М и образующие правую прямоугольную систему координат. Плоскость, проходящая через обе нормали (главную нормаль n и бинормаль b), называется нормальной плоскостью. Координатная плоскость, проходящая через касательную нормаль n, называется соприкасающейся плоскостью.


Рис.11

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \qquad a_n = \frac{v^2}{p}.$$

1.5 Лекция 5 (2 часа).

Тема: «Простейшие движения твердого тела. Плоское движение твердого тела»

1.5.1 Вопросы лекции

1. Поступательное движение твердого тела.
2. Вращательное движение твердого тела.
3. Плоское движение.

1.5.2 Краткое содержание вопросов

1. Поступательное движение твердого тела.

В кинематике, как и в статистике, будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые.

Абсолютно твердым телом называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Кинематика твердого тела, также как и динамика твердого тела, является одним из наиболее трудных разделов курса теоретической механики.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1) задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;

2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Существует пять видов движения твердого тела:

1) поступательное движение;

2) вращение вокруг неподвижной оси;

3) плоское движение;

4) вращение вокруг неподвижной точки;

5) свободное движение.

Первые два называются простейшими движениями твердого тела.

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Приведем примеры.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.

2. Спарник *AB* (рис.3) при вращении кривошипов O_1A и O_2B также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

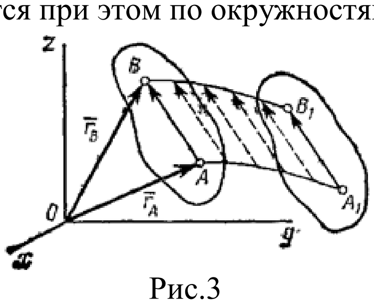


Рис.3

Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках (рис.4) относительно Земли.

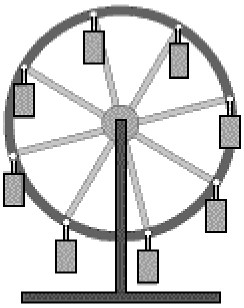


Рис.4

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета *Oxyz*. Возьмем в теле две произвольные точки *A* и *B*, положения которых в момент времени *t* определяются радиусами-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ (рис.5).

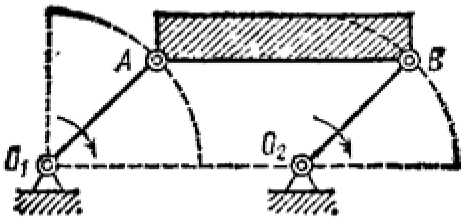


Рис.5

Проведем вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий эти точки.

Тогда $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$.

При этом длина *AB* постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление *AB* остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, вектор *AB* во все время движения тела остается постоянным (*AB*=const). Вследствие этого, траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\overrightarrow{AB}$. Следовательно, траектории точек *A* и *B* будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скоростей точек *A* и *B* продифференцируем обе части равенства по времени. Получим

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}.$$

Но производная от постоянного вектора *AB* равна нулю. Производные же от векторов $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ по времени дают скорости точек *A* и *B*. В результате находим, что

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

т.е. что скорости точек *A* и *B* тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Следовательно, ускорения точек *A* и *B* тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки *A* и *B* были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела определяется движением какой-нибудь одной из его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематике точки, нами уже рассмотренной.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\vec{v}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\vec{a}$ - ускорением поступательного движения тела. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ можно изображать приложенными в любой точке тела.

Заметим, что понятие о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях точки тела, как мы увидим, движутся с разными скоростями и ускорениями, и термины <<скорость тела>> или <<ускорение тела>> для этих движений теряют смысл.

2. Вращательное движение твердого тела.

Для кинематического описания вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси используются те же величины, что и для описания движения материальной точки по окружности.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными (рис.9).

Промежуток времени, в течение которого тело совершает один полный оборот вокруг оси, — период вращения. Величина, обратная периоду, — частота вращения.

Проходящая через неподвижные точки *A* и *B* прямая *AB* называется осью вращения.

Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то очевидно, что при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения, вдоль которой направим ось Az, полуплоскость - неподвижную и полуплоскость, врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (рис. 9).

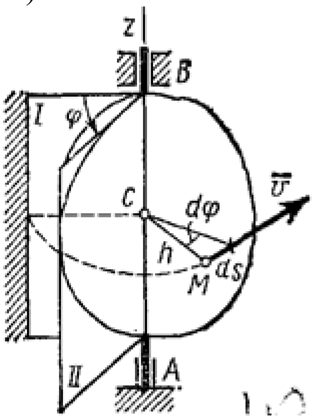


Рис.9

Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем углом поворота тела. Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем всегда в радианах. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени *t*, т.е.

$\varphi = f(t)$.

Уравнение выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

При вращательном движении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси *углы поворота радиуса-вектора различных точек тела одинаковы.*

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то численно средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем, что

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ или $\omega = \dot{\varphi}$.

Таким образом, числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени. Знак ω определяет направление вращения тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, $\omega>0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega<0$.

Размерность угловой скорости 1/T (т.е. 1/время); в качестве единицы измерения обычно применяют рад/с или, что тоже, 1/с ($с^{-1}$), так как радиан - величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен $|\vec{\omega}|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис.10). Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

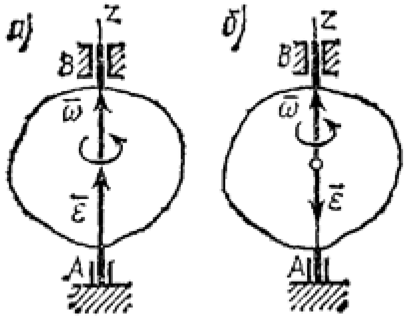


Рис.10

Угол поворота и угловая скорость характеризуют движение всего абсолютно твердого тела в целом. Линейная скорость какой-либо точки абсолютно твердого тела пропорциональна расстоянию точки от оси вращения:

$$v = \omega R = 2\pi\vartheta R = \frac{2\pi}{T} R$$

При равномерном вращении абсолютно твердого тела углы поворота тела за любые равные промежутки времени одинаковы, тангенциальные ускорения у различных точек тела отсутствуют, а нормальное ускорение точки тела зависит от ее расстояния до оси вращения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2\vartheta^2 R = \frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}\mathrm{R}$$

Вектор $\overrightarrow{a_n}$ направлен по радиусу траектории точки к оси вращения.

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t=t_1-t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega=\omega_1-\omega$, то числовое значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. В пределе при $\Delta t\to 0$ найдем,

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\omega}.$$

Таким образом, числовое значение углового ускорения, тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения $1/T^2$ ($1/время^2$); в качестве единицы измерения обычно применяется рад/$с^2$ или, что то же, 1/$с^2$ ($с^{-2}$).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает, - замедленным. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, - когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора ε, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

3. Плоское движение

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости *П* (рис.

28). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

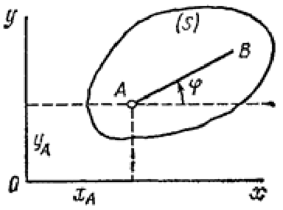


Рис.28

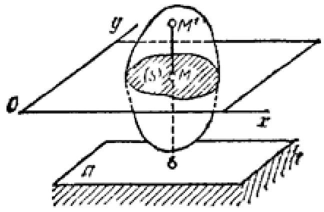


Рис.29

Рассмотрим сечение *S* тела какой-нибудь плоскости *Oxy*, параллельной плоскости *П* (рис.29). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой *MM*', перпендикулярной течению *S*, т. е. плоскости *П*, движутся тождественно.

Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости *Oxy* сечение *S* этого тела или некоторая плоская фигура *S*. Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры *S* в ее плоскости, т.е. в плоскости *Oxy*.

Положение фигуры *S* в плоскости *Oxy* определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка *AB* (рис. 28). В свою очередь положение отрезка *AB* можно определить, зная координаты x_A и y_A точки *A* и угол φ, который отрезок *AB* образует с осью *x*. Точку *A*, выбранную для определения положения фигуры *S*, будем в дальнейшем называть полюсом.

При движении фигуры величины x_A и y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости *Oxy* в любой момент времени, надо знать зависимости

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости. Они же являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Первые два из уравнений движения определяют то движение, которое фигура совершала бы при φ=const; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс *A*. Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при $x_A = const$ и $y_A = const$, т.е. когда полюс *A* неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса *A*. Отсюда можно заключить, что в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс *A*, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса $\vec{v}_{пост} = \vec{V}_A$, $\vec{a}_{пост} = \vec{a}_a$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

Определение скоростей точек плоской фигуры

Было отмечено, что движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью v_A полюса *A*, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки *M* фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

В самом деле, положение любой точки *M* фигуры определяется по отношению к осям *Oxy* радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}\,'$ (рис.30), где $\vec{r}_A$- радиус-вектор полюса *A*, $\vec{r}\,' = \overrightarrow{AM}$- вектор, определяющий положение точки *M* относительно осей Axy', перемещающихся вместе с полюсом *A* поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой вращение вокруг полюса *A*). Тогда

$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$

В полученном равенстве величина $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$ есть скорость полюса *A*; величина же $\frac{d\vec{r}'}{dt}$ равна скорости $\vec{v}_{MA}$, которую точка *M* получает при $\vec{r}_A = const$, т.е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса *A*. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$

Скорость $\vec{v}_{MA}$, которую точка *M* получает при вращении фигуры вокруг полюса *A*:

$v_{MA} = \omega MA \qquad \vec{v}_{MA} \perp \overrightarrow{MA},$

где ω - угловая скорость фигуры.

Таким образом, скорость любой точки *M* плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки *A*, принятой за полюс, и скорости, которую точка *M* получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости $\vec{v}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.31).

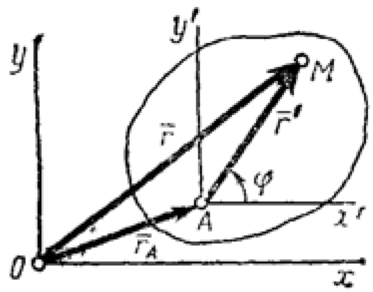


Рис.30

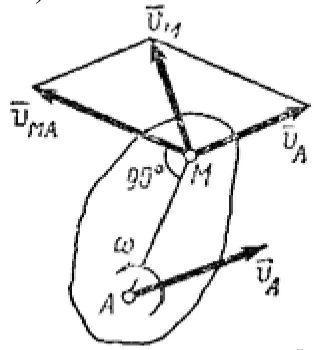


Рис.31

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени *t* существует и притом единственная. Пусть в момент времени *t* точки *A* и *B* плоской фигуры имеют скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, не параллельные друг другу (рис.33). Тогда точка *P*, лежащая на пересечении перпендикуляров *Aa* к вектору $\vec{v}_A$ и *Bb* к вектору $\vec{v}_B$, и будет мгновенным центром скоростей так как $\vec{v}_P = 0$. В самом деле, если допустить, что $\vec{v}_P = 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор $\vec{v}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен и *AP* (так как $\vec{v}_A \perp AP$) и *BP* (так как $\vec{v}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

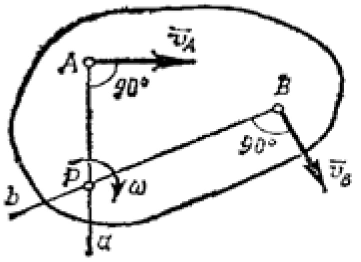


Рис.33

Если теперь в момент времени *t* взять точку *P* за полюс, то скорость точки *A* будет $\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PA}$, так как $\vec{v}_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При этом $v_A = \omega PA \quad (\vec{v}_A \perp PA)$; $v_B = \omega PB \quad (\vec{v}_B \perp PB)$ и т.д.

Из равенств, следует еще, что $\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$ точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от МЦС.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры, надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B. Тогда, восставив из точек A и B перпендикуляры к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, построим мгновенный центр скоростей P и по направлению $\vec{v}_A$ определим направление поворота фигуры. После этого, зная v_A, найдем скорость v_M любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор $\vec{v}_M$ перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P:

$\omega = v_B/PB$.

1.6 Лекция 6 (2 часа).

Тема: «Определение скоростей и ускорений точек. Составное движение точки»

1.6.1 Вопросы лекции

1. Относительное, переносное и абсолютное движение точки.
2. Теорема о сложении скоростей и ускорений. Теорема Кориолиса.
3. Модуль и направление кориолисова ускорения.
4. Примеры на применение теорем о сложении скоростей и о сложении ускорений при поступательном переносном движении.

1.6.2 Краткое содержание вопросов

1. Относительное, переносное и абсолютное движение точки.

До сих пор мы изучали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета. Однако в ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют *составным* или *сложным*. Например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода, можно считать совершающим по отношению к берегу сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе (подвижная система отсчета), и движение вместе с палубой парохода по отношению к берегу (неподвижная система отсчета). Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых.

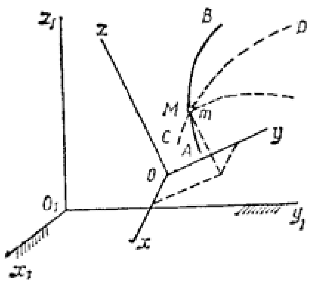


Рис.1

Рассмотрим точку *M*, движущуюся по отношению к подвижно системе отсчета *Oxyz*, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которую называем основной или условно неподвижной (рис.1). Каждая из этих систем отсчета связана, конечно, с определенным телом, на чертеже не показанным. Введем следующие определения.

1. Движение, совершаемое точкой *M* по отношению к подвижной системе отсчета (к осям *Oxyz*), называется *относительным движением* (такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с этими осями и перемещающийся вместе с ними). Траектория *AB*, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной траекторией. Скорость точки *M* по отношению к осям *Oxyz* называется относительной скоростью (обозначается $\vec{v}_r$), а ускорение - относительным ускорением (обозначается $\vec{a}_r$). Из определения следует, что при вычислении $\vec{v}_r$ и $\vec{a}_r$ можно движение осей *Oxyz* во внимание не принимать (рассматривать их как неподвижные).

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета *Oxyz* (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки *M переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями *Oxyz* точки *m*, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка *M*, называется переносной скоростью точки *M* в этот момент (обозначается $\vec{v}_e$), а ускорение этой точки *m* - переносным ускорением точки *M* (обозначается $\vec{a}_e$). Таким образом, $\bar{v}_{\text{пер}} = \bar{v}_m, \bar{a}_{\text{пер}} = \bar{a}_m$.

Если представить себе, что относительное движение точки происходит по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси *Oxyz*, то переносной скоростью (или ускорением) точки *M* в данный момент времени будет скорость (или ускорение) той точки т тела, с которой в этот момент совпадает точка *M*.

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется *абсолютным* или сложным. Траектория CD этого движения называется абсолютной траекторией, скорость - абсолютной скоростью (обозначается $\vec{v}_{аб}$) и ускорение - абсолютным ускорением (обозначается $\vec{a}_{аб}$).

В приведенном выше примере движение шара относительно палубы парохода будет относительным, а скорость - относительной скоростью шара; движение парохода по отношению к берегу будет для шара переносным движением, а скорость той точки палубы, которой в данный момент времени касается шар будет в этот момент его переносной скоростью; наконец, движение шара по отношению к берегу будет его абсолютным движением, а скорость - абсолютной скоростью шара.

При исследовании сложного движения точки полезно применять «Правило остановки». Для того, чтобы неподвижный наблюдатель увидел относительное движение точки, надо остановить переносное движение.

Тогда будет происходить только относительное движение. Относительное движение станет абсолютным. И наоборот, если остановить относительное движение, переносное станет абсолютным и неподвижный наблюдатель увидит только это переносное движение.

В последнем случае, при определении переносного движения точки, обнаруживается одно очень важное обстоятельство. Переносное движение точки зависит от того в какой момент будет остановлено относительное движение, от того, где точка находится на среде в этот момент. Так как, вообще говоря, все точки среды движутся по-разному. Поэтому логичнее определять *переносное движение точки как абсолютное движение той точки среды, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.*

2. Теорема о сложении скоростей и ускорений. Теорема Кориолиса.

Пусть некоторая точка M совершает движение по отношению к системе отсчета $Oxyz$, которая сама движется произвольным образом по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, (рис.2).

Конечно, абсолютное движение точки M определяется уравнениями

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t).$$

Относительное движение – в движущихся осях уравнениями

$$x_1 = x_1(t),$$
$$y_1 = y_1(t),$$
$$z_1 = z_1(t).$$

Уравнений, определяющих переносное движение точки, не может быть вообще. Так как, по определению, переносное движение точки M – это движение относительно неподвижных осей той точки системы $O_1x_1y_1z_1$, с которой совпадает точка в данный момент. Но все точки подвижной системы движутся по-разному.

Положение подвижной системы отсчета может быть также определено, если задать положение точки O радиусом-вектором r_0, проведенным из начала неподвижной системы отсчета, и направления единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ подвижных осей Ox, Oy, Oz.

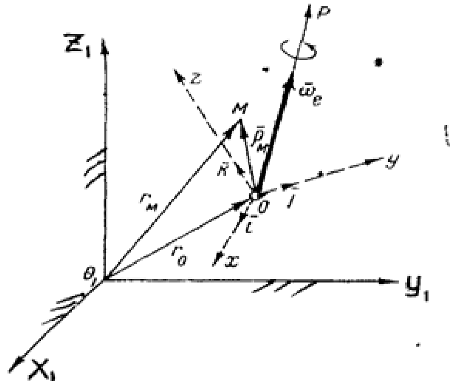


Рис.2

Произвольное переносное движение подвижной системы отсчета слагается из поступательного движения со скоростью v_0 точки O и движения вокруг мгновенной оси вращения OP, походящей через точку O, с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}_в$. Вследствие переносного движения подвижной системы отсчета радиус-вектора $\vec{r}_0$ и направления единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ изменяются. Если векторы $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы в функции времени, то переносное движение подвижной системы отсчета вполне определено.

Положение точки M по отношению к подвижной системе отсчета можно определить радиусом-вектором $\vec{\rho}_M$: $\vec{\rho}_M = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где координаты x, y, z точки M изменяются с течением времени вследствие движения точки M относительно подвижной системы отсчета. Если радиус-вектор $\vec{\rho}_M$ задан в функции времени, то относительное движение точки M, т.е. движение этой точки относительно подвижной системы отсчета, задано.

Положение точки М относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, может быть определено радиусом-вектором $\vec{r}_M$. Из рис.2 видно, что

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_M = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (1)$$

Если относительные координаты x,y,z точки M и векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ определены в функции времени, то слагающееся из относительного и переносного движений составное движение точки M, т.е. движение этой точки по отношению к неподвижной системе отсчета, также надо считать заданным.

Скорость составного движения точки M, или абсолютная скорость этой точки, равна, очевидно, производной от радиуса-вектора $\vec{r}_M$ точки M по времени t

$$\vec{v}_a = d\vec{r}_M/dt.$$

Поэтому, дифференцируя равенство (1) по времени t, получим

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (2)$$

Разобьем слагаемые в правой части этого равенства на две группы по следующему признаку. К первой группе отнесем те слагаемые, которые содержат производные только от относительных координат x,y,z, а ко второй - те слагаемые, которые содержат производные от векторов $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. от величин, изменяющихся только вследствие переносного движения подвижной системы отсчета

$$\vec{v}_r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \qquad (3)$$

$$\vec{v}_в = \vec{r}_0 x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \qquad (4)$$

Каждая из групп слагаемых, обозначенных через $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_в$, представляет собой, по крайней мере, по размерности некоторую скорость. Выясним физический смысл скоростей $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_в$.

Скорость $\vec{v}_r$, как это следует из равенства (3), вычисляется в предположении, что изменяются только относительные координаты x,y,z точки M, но векторы $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ остаются постоянными, т.е. подвижная система отсчета $Oxyz$ как бы условно считается неподвижной. Итак, скорость $\vec{v}_r$ представляет собой относительную скорость точки M.

Скорость $\vec{v}_в$ вычисляется так, как будто бы точка M не двигалась относительно подвижной системы отсчета, так как производные x,y,z в равенство (4) не входят. Поэтому скорость $\vec{v}_в$ представляет собой переносную скорость точки M.

Итак, $\vec{v}_a = \vec{v}_в. + \vec{v}_r$. (5)

Это равенство выражает теорему сложения скоростей в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютная скорость точки M равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки.

Пример 1. Колечко M движется по вращающемуся стержню (рис.3) так, что $OM=s=3t^2$ (см) и $\varphi = 2t$ (рад).

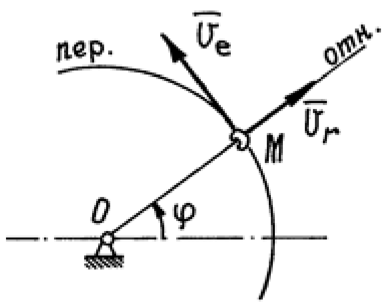


Рис.3

Ранее было установлено, что траектория относительного движения – прямая линия, совпадающая со стержнем, и движение это определяется уравнением s=s(t). Траектория переносного движения точки *M* в момент времени *t* – окружность радиуса OM=s.

Поэтому относительная скорость $v_r = \dot{s} = 6t$ см $\cdot\, c^{-1}$. И направлена по касательной к траектории вдоль стержня (рис.3). Переносная скорость колечка, как при вращении вокруг оси, $v_в = OM \cdot \omega = s\dot{\varphi} = 3t^2 \cdot 2 = 6t^2$ см $\cdot$ с$^{-1}$. Направлен вектор этой скорости по касательной к траектории переносного движения, перпендикулярно стержню.

Абсолютная скорость колечка $\vec{v}_M = \vec{v}_в + \vec{v}_r$. Величина ее, т.к. $\vec{v}_в \perp \vec{v}_r$.

$v_M = \sqrt{v_в^2 + v_r^2} = 6t\sqrt{1+t^2}$ см $\cdot$ с$^{-1}$.

Теорема сложения ускорений. Ускорение Кориолиса.

Ускорение составного движения точки *M*, или абсолютное ускорение этой точки, равно, очевидно, производной от абсолютной скорости точки *M* по времени *t*

$\vec{a}_a = d\vec{v}_a/dt$

Поэтому, дифференцируя равенство по времени, получим

$$\vec{a}_a = \ddot{\vec{r}}_0 + x\frac{d^2\bar{\imath}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{\jmath}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \ddot{x}\bar{\imath} + \ddot{y}\bar{\imath} + \ddot{z}\bar{\imath} + 2\left(\dot{x}\frac{d\bar{\imath}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{\jmath}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}\right).$$

Разделим слагаемые правой части этого равенства на три группы.

К первой группе отнесем слагаемые, содержащие только производные от относительных координат *x*,*y* и *z*, но не содержащие производные от векторов $\vec{r}_0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}.$

Ко второй группе отнесем слагаемые, которые содержат только производные от векторов $\bar{r}_0, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$, но не содержащие производных от относительных координат *x*,*y*,*z*:

$$\vec{a}_в = \ddot{\vec{r}}_0 + x\frac{d^2\bar{\imath}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{\jmath}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}.$$

Осталась еще одна группа слагаемых, которые не могли быть отнесены ни к первой, ни ко второй, так как они содержат производные от всех переменных *x, y, z*, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Обозначим эту группу слагаемых через $\vec{a}_k$:

$$\vec{a}_k = 2\left(\dot{x}\frac{d\vec{\imath}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{\jmath}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}\right).$$

Каждая из выделенных групп представляет собой, по крайней мере по размерности, некоторое ускорение. Выясним физический смысл всех трех ускорений: $\vec{a}_r, \vec{a}_в, \vec{a}_k$.

Ускорение $\vec{a}_r$, как это видно из равенства, вычисляется так, как если бы относительные координаты *x*,*y*,*z* изменялись с течением времени, а векторы $\vec{r}_0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ оставались неизменными, т.е. подвижная система отсчета *Oxyz* как бы покоилась, а точка *M* двигалась. Поэтому ускорение $\vec{a}_r$ представляет собой относительное ускорение точки *M*. Так как ускорение (и скорость) относительного движения вычисляется в предположении, что подвижная система отсчета находится а покое, то для определения относительного ускорения (и скорости) можно пользоваться всеми правилами, изложенными ранее в кинематике точки.

Ускорение $\vec{a}_в$, как это видно из равенства, вычисляется в предположении, что сама точка *M* покоится по отношению к подвижной системе отсчета *Oxyz* (*x* =const, *y* =const, *z* =const) и перемещается вместе с этой системой отсчета по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$. Поэтому ускорение $\vec{a}_в$ представляет собой переносное ускорение точки M.

Третья группа слагаемых определяет ускорение $\vec{a}_k$, которое не может быть отнесено не к относительному ускорению $\vec{a}_r$, так как содержит в своем выражении производные $\frac{d\vec{i}}{dt}, \frac{d\vec{j}}{dt}, \frac{d\vec{k}}{dt}$ не к переносному ускорению $\vec{a}_в$, так как содержит в своем выражении производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Преобразуем правую часть равенства, припомнив, что

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_в \times \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_в \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_в \times \vec{k}.$$

Подставляя эти значения производных в равенства, получим

$$\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_в \times x\vec{i} + \overline{\omega}_в \times x\vec{j} + \overline{\omega}_в \times x\vec{k})$$

или $\vec{a}_k = 2\overline{\omega}_в \times (x\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k})$.

Здесь вектор $x\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}$ есть относительная скорость $\vec{v}_r$ точки M, поэтому

$$\vec{a}_k = 2\overline{\omega}_в \times \vec{v}_r.$$

3. Модуль и направление кориолисова ускорения.

Ускорение $\vec{a}_k$ называют *ускорением Кориолиса*. Ввиду того, что ускорение Кориолиса появляется в случае вращения подвижной системы отсчета, его называют еще поворотным ускорением.

С физической точки зрения появление поворотного ускорения точки объясняется взаимным влиянием переносного и относительного движений.

Итак, ускорение Кориолиса точки равно по модулю и направлению удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Равенство, которое теперь можно сокращенно записать в виде

$$\vec{a}_a = \vec{a}_в + \vec{a}_r + \vec{a}_k.$$

представляет теорему сложения ускорений в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и поворотного ускорений. Эту теорему часто называют теоремой Кориолиса.

Из формулы следует, что модуль поворотного ускорения будет

$$a_k = 2\omega_в v_r sin\alpha$$

где α - угол между вектором $\overline{\omega}_в$ и вектором $\vec{v}_r$. Чтобы определить направление поворотного ускорения $\vec{a}_k$, нужно мысленно перенести вектор $\vec{\omega}_в$ в точку M и руководствоваться правилом векторной алгебры. Согласно этому правилу, вектор $\bar{a}$ нужно направлять перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами $\overline{\omega}_в$ и $\vec{v}_r$, и так, чтобы, смотря с конца вектора $\vec{a}$, наблюдатель мог видеть кратчайший поворот от $\overline{\omega}_в$ к $\vec{v}_r$ происходящим против движения часовой стрелки.

Для определения направления $\vec{a}_k$ можно также пользоваться следующим правилом Н. Е. Жуковского: чтобы получить направление поворотного ускорения $\vec{a}_k$, достаточно составляющую $\vec{v}_1$ относительной скорости $\vec{v}_r$ точки M, перпендикулярную к вектору $\overline{\omega}_в$, повернуть (в плоскости, перпендикулярной к вектору $\overline{\omega}_в$) на прямой угол вокруг точки M в направлении переносного вращения (рис.4).

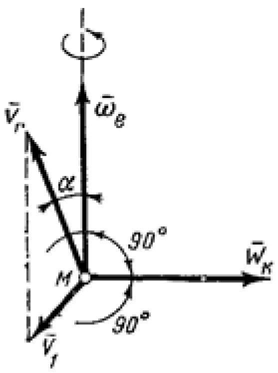


Рис.4

Если переносное движение подвижной системы отсчета есть поступательное движение, то $\vec{\omega}_в$=0 и поэтому поворотное ускорение a точки также равно нулю. Поворотное ускорение равно, очевидно, нулю и в том случае, когда $\vec{\omega}_в$ в данный момент времени обращается в нуль.

Кроме того, поворотное ускорение точки может, очевидно, обращаться в нуль, если:

а) вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ точки параллелен вектору угловой скорости $\vec{\omega}_в$ переносного вращения, т.е. относительное движение точки происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения;

б) точка не имеет движения относительно подвижной системы отсчета или относительная скорость $\vec{v}_r$ точки в данный момент времени равна нулю ($\vec{v}_r = 0$).

Нетрудно сформулировать более удобное правило определения направления вектора $\vec{a}_c$: нужно спроектировать вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ на плоскость перпендикулярную оси переносного вращения и затем повернуть эту проекцию на 90 градусов в плоскости по направлению переносного вращения. Конечное положение проекции вектора $\vec{v}_r$ укажет направление кориолисова ускорения. (Это правило было предложено Н.Е. Жуковским).

1.7 Лекция 7 (2 часа).

Тема: «Аксиомы динамики. Дифференциальные уравнения движения точки»

1.7.1. Вопросы лекции

1. Аксиомы динамики.

2. Динамика свободной материальной точки. Составление дифференциальных уравнений движения точки.

3. Способы решения второй задачи динамики.

4.Свободные колебания, затухающие колебания, вынужденные колебания.

1.7.2 Краткое содержание вопросов

1. Аксиомы динамики.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Под материальной точкой понимают материальное тело столь малых размеров, что различием в движении отдельных его точек можно пренебречь и положение которого можно определить координатами одной из его точек.

Точку будем называть изолированной, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Законы динамики

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверенные обширной общественно-исторической практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном.

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем, гласит: существуют такие системы отсчета, относительно которых тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют другие тела или действие этих тел компенсировано или в другой формулировке: если сумма действующих на тело сил равна нулю, то тело движется равномерно и прямолинейно или находится в покое.

Движение, совершаемое точ-кой при отсутствии сил, называется движением по инерции.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи - пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояний покоя и движения по инерции. Из него следует, что если F=0, то точка покоится или движется с постоян-ной по модулю и направлению скоростью (=const); ускорение точки при этом равно нулю: = 0); если же движение точки не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется инерциальной системой отсчета (иногда ее условно называют неподвижной). По данным опыта для нашей Сол-нечной системы инерциальной является система отсчета, начало кото-рой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые неподвижные звезды. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Системы отсчета, в которых не выполняется первый закон Ньютона, называются неинерциальными. Неинерциальными будут системы, движущиеся с ускорением, или вращающиеся.

Второй закон (основной закон динамики) гласит: произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между мате-риальными телами. Для двух материальных точек он гласит: две ма-териальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Заметим, что силы взаимодействия между свободными материаль-ными точками (или телами), как приложенные к разным объектам, не образуют уравновешенной системы.

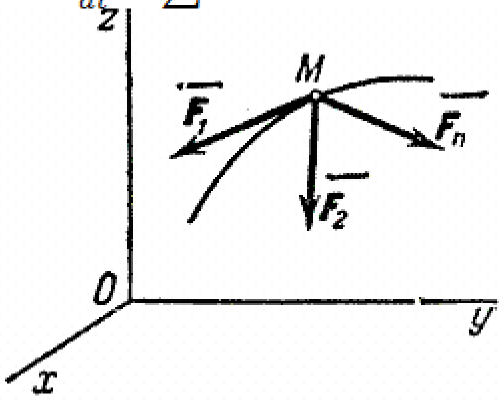
Четвертый закон (закон независимого действия сил). При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

2. Динамика свободной материальной точки. Составление дифференциальных уравнений движения точки.

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

1) ***Определение движения точки координатным способом.***

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$. Проведем неподвижные координатные оси *Oxyz*. Проектируя обе части равенства $ma = \sum F_k$ на эти оси и учитывая, что $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ и т.д., получим ***дифференциальные уравнения криволинейного движения точки*** в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат: $m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$



Так как действующие на точку силы могут зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости, то правые части уравнений могут содержать время *t*, координаты точки *x, y, z* и проекции ее скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. При этом в правую часть каждого из уравнений могут входить все эти переменные.Чтобы с помощью этих уравнений решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще начальные условия, т.е. положение и скорость точки в начальный момент. В координатных осях *Oxyz* начальные условия задаются в виде: при t=0

$$\begin{cases} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \\ v_x = v_{x_0}, \quad v_y = v_{y_0}, \quad v_z = v_{z_0} \end{cases}.$$

Зная действующие силы, после интегрирования уравнений найдем координаты *x, y, z* движущейся точки, как функции времени *t*, т.е. найдем закон движения точки.

3. Способы решения второй задачи динамики.

Общие теоремы динамики точки

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться так называемыми общими теоремами, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характери-стиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движений механических систем, широко при-меняемые в инженерной практике. Кроме того, общие теоремы позво-ляют изучать отдельные, практически важные стороны данного явле-ния, не изучая явление в целом. Наконец, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те опе-рации интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения. Сейчас мы рас-смотрим, как выглядят эти теоремы для одной материальной точки.

Количество движения (импульс) точки

Основными динамическими характеристиками движения точки являются количество движения и кинетическая энергия.

Количеством движения точки называется векторная величина равная произведению массы точки на вектор ее скорости. Направлен вектор так же, как и скорость точки, т. е. по каса-тельной к ее траектории.

Кинетической энергией (или живой силой) точки называется скалярная величина , равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Необходимость введения двух динамических характеристик объяс-няется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особен-ности движения точки.

4.Свободные колебания.

Движения, обладающие той или иной степенью повторяемости, называются ***колебаниями.***

В технике колебания либо выполняют определенные функциональные обязанности (маятник, колебательный контур, генератор), либо возникают как неизбежное проявление физических свойств (вибрация машин и сооружений, неустойчивости и вихревые потоки при движении тел в газах).

Если значения физических величин, изменяющихся в процессе движения, повторяются через равные промежутки времени, то такое движение называется ***периодическим.*** Примерами периодического движения могут служить движение планет вокруг Солнца, движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания и др. В зависимости от физической природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают механические и электромагнитные колебания. Колебательную систему вне зависимости от ее физической природы называют ***осциллятором.*** Примером осциллятора может служить колеблющийся груз, подвешенный на пружине или нити.

Полным колебанием называют один законченный цикл колебательного движения, после которого оно повторяется в том же порядке.

По способу возбуждения колебания делят на: ***свободные*** (собственные), происходящие в представленной самой себе системе около положения равновесия после какого-либо первоначального воздействия; ***вынужденные*** – происходящие при периодическом внешнем воздействии (например, колебания моста при прохождении по нему поезда или раскачивание человеком качелей); ***параметрические*** – происходящие при изменении какого-либо параметра колебательной системы; ***автоколебания*** – происходящие в системах, самостоятельно регулирующих поступление внешних воздействий.

Собственные колебания являются не только самыми распространенными, но и самыми важными с точки зрения теории колебаний, так как условия возникновения и характер всех других типов колебаний существенно зависят от характера собственных колебаний.

Начнем с изучения свободных колебаний точки без учета сил сопротивления. Рассмотрим точку *M,* движущуюся прямолинейно под действием одной только ***восстанавливающей силы*** $\bar{F}$, направленной к неподвижному центру *O* и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы $\bar{F}$ на ось *Ox* (рис.1) будет равна

$F_x = -cx.$

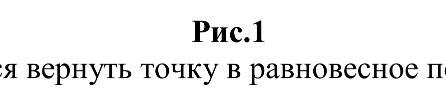


Рис.1

Сила $\bar{F}$, как видим, стремится вернуть точку в равновесное положение *O*, где F=0; отсюда и наименование «восстанавливающая» сила. Примером такой силы является сила упругости. Коэффициент *c* пропорциональности называется ***жесткостью упругого элемента.***

Любая другая сила, неупругая по природе, но удовлетворяющая соотношению $F = -cx$, называется ***квазиупругой.***

Найдем закон движения точки *M*. Составляя дифференциальное уравнение движения получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx.$$

Деля обе части равенства на *m* и вводя обозначение

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2,$$

приведем уравнение к виду

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Уравнение представляет собою ***дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления.*** Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка ищут в виде $x=e^{nt}$. Полагая $x=e^{nt}$, получим для определения *n* так называемое характеристическое уравнение, имеющее в данном случае вид $n^2 + \omega_0^2 = 0$. Поскольку корни этого характеристического уравнения являются чисто мнимыми ($n_{1,2} = \pm ik$), то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение имеет вид

$X=C_1\sin\omega_0 t+C_2\cos\omega_0 t$, где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Если вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные *a* и α, такие, что $C_1 = A\cos\alpha,\ C_2 = A\sin\alpha$, то мы получим $x = A(\sin\omega_0 t\cos\alpha + \cos\omega_0 t\sin\alpha)$ или $x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$.

Это другой вид решения, в котором постоянными интегрирования являются А и α. Им удобнее пользоваться для общих исследований.

Скорость точки в рассматриваемом движении равна

$$V_x = \dot{x} = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Несмотря на большое разнообразие колебательных процессов, все они совершаются по некоторым общим закономерностям и могут быть сведены к совокупности простейших периодических колебаний, называемых гармоническими.

Затухающие колебания.

Реально свободные колебания под действием сил сопротивления всегда *затухают*. Объясняется это действием сил, тормозящих движение, например, сил трения в месте подвеса при колебаниях маятника, или силой сопротивления среды. В этом случае энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против этих сил. Поэтому свободные колебания под действием сил сопротивления всегда затухают. Затухание нарушает периодичность колебаний, потому они уже не являются периодическим процессом (рис.10).

Пусть точка совершает линейное гармоническое колебание в вязкой среде. Из опыта известно, что сила сопротивления среды зависит от скорости и направлена в сторону, противоположную скорости. При малых скоростях: $F_{\text{сопр}} = -rv = -r\frac{dx}{dt}$, где *r* – постоянная величина, называемая *коэффициентом сопротивления среды.*

Уравнение колебаний:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}.$$

Введем обозначения: $\frac{r}{m} = 2\beta,\ \frac{k}{m} = \omega_0^2$, тогда дифференциальное уравнение затухающего колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (1)$$

где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота колебания. При отсутствии трения β=0, уравнение примет вид уравнения для свободных незатухающих колебаний. В результате решения уравнения (1) получим зависимость смещения х от времени, то есть уравнение затухающего колебательного движения:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (2)$$

Выражение $A_0 e^{-\beta t}$ называется амплитудой затухающего колебания. Амплитуда уменьшается по экспоненциальному характеру с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания. Огибающая на графике зависит от β. Чем она больше, тем круче огибающая, то есть колебания быстрее затухают (рис.10.1).

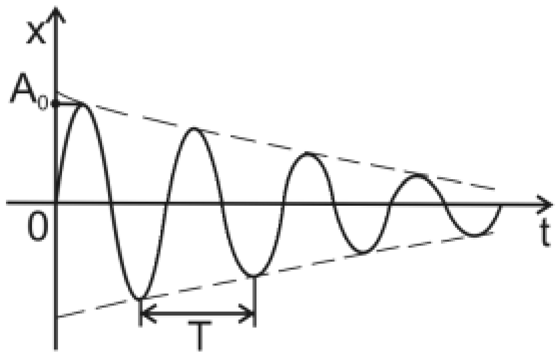


Рис.10

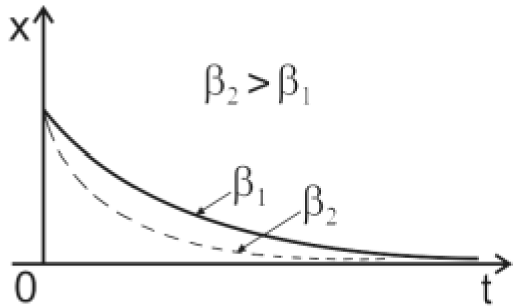


Рис.10.1

Путем подстановки функции (2) и ее производных по времени в уравнение (1), можно найти значение угловой частоты: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Период затухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

С увеличением трения период колебаний возрастает, а при $\beta=\omega_0$ период $T\Rightarrow\infty$. При дальнейшем увеличении β период становится мнимым, а движение точки *апериодическим* – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний (рис. 10.2).

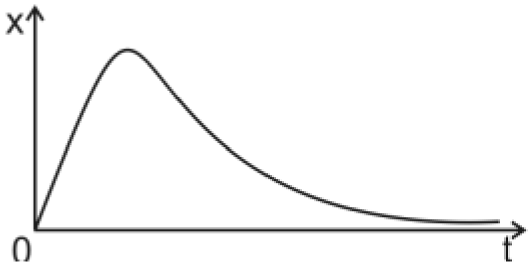


Рис.10.2

Критическое затухание («успокоение») имеет большое значение в измерительных приборах, таких как баллистические гальванометры, которые испытывают резкие импульсивные воздействия в положении нулевого смещения.

Наглядной характеристикой затухания является отношение значений двух амплитуд, соответствующих промежутку времени в один период. Это отношение называют *декрементом затухания* θ:

$$\theta = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Его натуральный логарифм есть безразмерная величина, называемая *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\delta = ln\frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T.$$

Логарифмический декремент затухания – величина, обратная числу колебаний N, по истечении которых амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз.

Промежуток времени $\tau = \frac{1}{\beta}$, в течение которого амплитуда затухающего колебания убывает в *e* раз, называют *временем релаксации*. Тогда выражение для логарифмического декремента затухания примет вид: $\delta = \frac{T}{\tau}$ или $\delta = \frac{1}{N}$.

Добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\delta}.$$

Вынужденные колебания

Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих, когда на точку, кроме восстанавливающей силы $\vec{F}$, действует еще периодически изменяющаяся со временем сила $\vec{Q}$, проекция которой на ось *Ox* равна

Q=Q_0sinpt.

Эта сила называется *возмущающей силой,* а колебания, происходящие при действии такой силы, называются *вынужденными.* Величина *P* является *частотой возмущающей силы.*

Возмущающей силой может быть сила, изменяющаяся со временем и по другому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда Q_x определяется указанным равенством. Такая возмущающая сила называется *гармонической.*

Рассмотрим движение точки, на которую, кроме восстанавливающей силы $\vec{F}$, действует только возмущающая сила $\vec{Q}$. Дифференциальное уравнение движения в этом случае

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q_0 sinpt.$$

Разделим обе части этого уравнения на *m* и положим

$$\frac{Q_0}{m} = P_0.$$

Тогда, учитывая обозначение, приведем уравнение движения к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = P_0 \sin pt.$$

Уравнение является *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления.* Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 - общее решение уравнения без правой части, а x_2 - какое-нибудь частное решение полного уравнения.

Полагая, что *p* = *k*, будем искать решение x_2 в виде

$$x_2 = A \cdot sinpt,$$

где *A* - постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство обратилось в тождество. Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение будем иметь:

$$-pAsinpt + k^2 Asinpt = P_0 sinpt.$$

Это равенство будет выполняться при любом *t,* если $A(k^2-p^2)=P_0$ или

$$A = \frac{P_0}{\omega_0^2 - p^2}.$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{\omega_0^2 - p^2} sinpt.$$

Так как $x = x_1 + x_2$, а общее решение имеет окончательно вид

$$x = Asin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{P_0}{\omega_0^2 - p^2} sinpt,$$

где *A* и α - постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Решение показывает, что колебания точки складываются в этом случае из: 1) колебаний с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой *k,* называемых *собственными колебаниями,* и 2) колебаний с амплитудой A (не зависящей от начальных условий) и частотой *p,* которые называются *вынужденными колебаниями*

График вынужденных колебаний показан на рис.16.

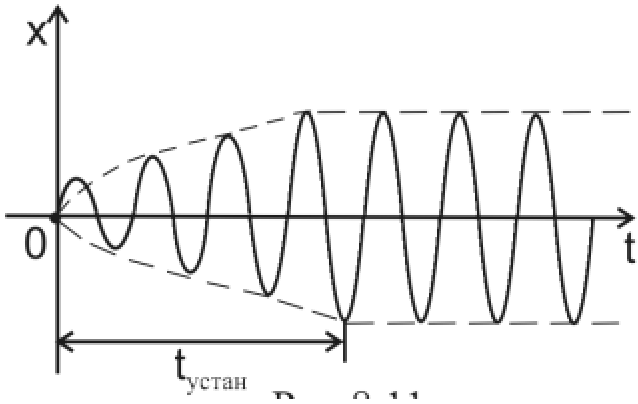


Рис.16

Частота p вынужденных колебаний, как видно, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2, можно представить в виде:

$$A = \frac{P_0}{|\omega_0^2 - p^2|} = \frac{\delta_0}{|1 - (\frac{p}{\omega_0})^2|},$$

где $\delta_0 = \frac{P_0}{\omega_0^2} = \frac{Q_0}{c}$, т. е. δ_0 есть величина статического отклонения точки под действием силы Q_0. Как видим, A зависит от отношения частоты p возмущающей силы к частоте ω_0 собственных колебаний.

1.8 Лекция 8 (2 часа).

Тема: «Динамика системы»

1.8.1 Вопросы лекции

1. Общие свойства системы материальных точек.
2. Внешние и внутренние силы системы и их свойства.
3. Моменты инерции.

1.8.2 Краткое содержание вопросов

1. Общие свойства системы материальных точек.

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных.

Материальное абсолютно твердое тело мы также будем рассматривать как систему материальных точек, образующих это тело и связанных между собой так, что расстояния между ними не изменяются, все время остаются постоянными.

Классическим примером механической системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения. Другим примером механической системы может служить любая машина или механизм, в которых все тела связаны шарнирами, стержнями, тросами, ремнями и т.п. (т.е. различными геометрическими связями). В этом случае на тела системы действуют силы взаимного давления или натяжения, передаваемые через связи.

Совокупность тел, между которыми нет никаких сил взаимодействия (например, группа летящих в воздухе самолетов), механическую систему не образует.

В соответствии со сказанным, силы, действующие на точки или тела системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.

Внутренними называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы. Будем обозначать внешние силы символом - $\vec{F}^e$, а внутренние - $\vec{F}^i$.

Как внешние, так и внутренние силы могут быть в свою очередь или ***активными,*** или ***реакциями связей.***

Реакции связей или просто – ***реакции,*** это силы которые ограничивают движение точек системы (их координаты, скорость и др.). В статике это были силы заменяющие связи. В динамике для них вводится более общее определение.

Активными или задаваемыми силами называются все остальные силы, все кроме реакций.

Необходимость этой классификации сил выяснится в следующих главах.

Разделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем. Например, если рассматривать движение всей солнечной системы в целом, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; при изучении же движения Земли по её орбите вокруг Солнца та же сила будет рассматриваться как внешняя.

2. Внешние и внутренние силы системы и их свойства.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. ***Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.*** В самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис.1) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\vec{F}_{12}^i$ и $\vec{F}_{21}^i$, сумма которых равна нулю. Так как аналогичный результат имеет место для любой пары точек системы, то

$$\sum \vec{F}_k^i = 0.$$

Рис.1

2. ***Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.*** Действительно, если взять произвольный центр *O*, то из рис.1 видно, что $\vec{m}_0(\vec{F}_{12}^i) + \vec{m}_0(\vec{F}_{21}^i) = 0$. Аналогичный результат получится при вычислении моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^i) = 0 \text{ или } \sum m_x(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Из доказанных свойств не следует однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к *разным* материальным точкам или телам и могут вызывать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенными внутренние силы будут тогда, когда рассматриваемая система представляет собою абсолютно твердое тело.

3. Моменты инерции.

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например (рис.3*)*, если расстояния *h* от оси *Oz* каждого из одинаковых шаров *A* и *B* увеличить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это скажется на движении системы (вращение вокруг оси *Oz* при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

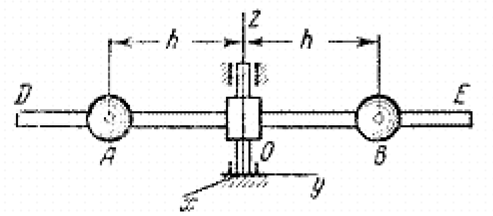


Рис.3

Поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс - момент инерции. *Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси*

$$I_z = \sum m_k h_k^2.$$

Момент инерции имеет размерность [кг·м^2]

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Заметим также, что момент инерции тела – это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения.

Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т.е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении* и зависит от распределения массы тела относительно оси вращения.

Согласно формуле момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии *h* от оси, $I_z = mh^2$.

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. *Радиусом инерции* тела относительно оси *Oz* называется линейная величина ρ_u, определяемая равенством

$$I_Z = M \cdot \rho_u^2,$$

где *M* - масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси *Oz* той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве $I_Z = \sum m_k h_k^2$, обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm = \rho dV$, где ρ - плотность, а *V* - объем тела, получим

$$I_Z = \int_{(V)} h^2 dm \text{ или } I_Z = \int_{(V)} \rho h^2 dV$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем *V* тела, а плотность ρ и расстояние *h* зависят от координат точек тела.

Моменты инерции некоторых однородных тел:

1.Тонкий однородный стержень длины *l* и массы *M.* Вычислим его момент инерции относительно оси *Az,* перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец *A* (рис.4).

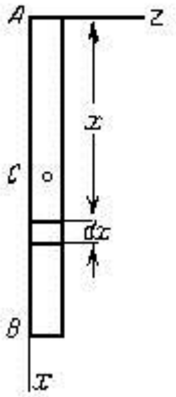


Рис.4

Направим вдоль *AB* координатную ось *Ax.* Тогда для любого элементарного отрезка длины *dx* величина *h*=*x,* а масса $dm = p_1 dx$, где $p_1 = M/l$ - масса единицы длины стержня. В результате

$$I_A = \int\limits_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 \frac{l^3}{3}.$$

Заменяя здесь ρ_1 его значением, найдем окончательно:

$$I_A = \frac{1}{3} M l^3.$$

А момент инерции тонкого однородного стержня длины *l* и массы *M* относительно оси проходящего через середину и перпендикулярную стержню равен

$$I_A = \frac{1}{12} M l^2.$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиуса *R* и массы *M.* Найдем его момент инерции относительно оси *Cz,* перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр (рис.4,*а).* Так как все точки кольца находятся от оси *Cz* на расстоянии h_k=*R,* то

$$I_C = \sum m_k R^2 = \left(\sum m_k\right) R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца $I_C = MR^2$.

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массы *M* и радиуса *R* относительно ее оси.

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиуса *R* и массы *M.* Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси *Cz,* перпендикулярной к пластине и проходящей через ее центр (см. рис.5,*а*). Для этого выделим элементарное кольцо радиуса *r* и ширины *dr* (рис.5,*б*).

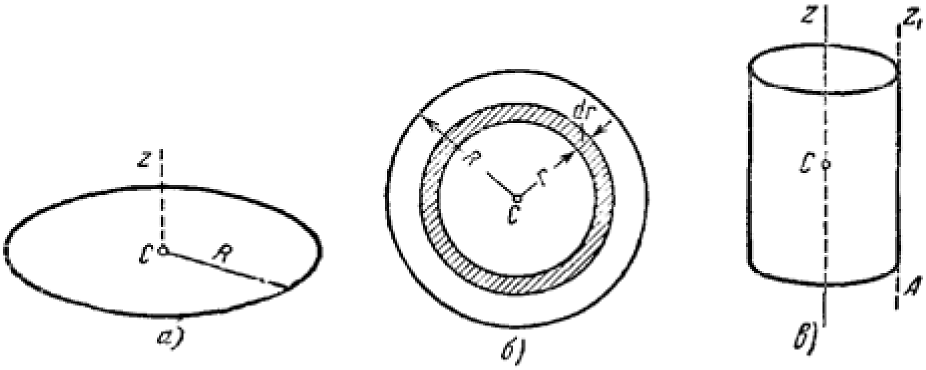


Рис.5

Площадь этого кольца равна $2\pi r dr$, а масса $dm = \rho_2 2\pi r dr$, где $\rho_2 = M/\pi R^2$- масса единицы площади пластины. Тогда для выделенного элементарного кольца будет

$dL_C = r^2 dm = 2\pi \rho_2 r^3 dr$,

а для всей пластины $I_C = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho_2 R^4$. Заменяя здесь ρ_2 его значением, найдем окончательно $I_C = \frac{1}{2}MR^2$.

Такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции I_z однородного круглого цилиндра массы *M* и радиуса *R* относительно его оси *Oz* (рис.5,*в*).

4. Прямоугольная пластина, конус, шар. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел:

а) сплошная прямоугольная пластина массы *M* со сторонами *AB* = *a* и *BD* = *b* (ось *x* направлена вдоль стороны *AB*, ось *y* - вдоль *BD*):

$I_X = \frac{1}{3}Mb^2,\quad I_Y = \frac{1}{3}Ma^2,$

б) прямой сплошной круглый конус массы *M* с радиусом основания *R* (ось *z* направлена вдоль оси конуса):

$I_Z = 0{,}3MR^2$;

г) сплошной шар массы *M* и радиуса *R* (ось *z* направлена вдоль диаметра): $I_Z = 0{,}4MR^2$.

1.9 Лекция 9 (2 часа).

Тема: «Основные теоремы динамики»

1.9.1 Вопросы лекции

1. Теорема об изменении количества движения.
2. Теорема о моменте количества движения.
3. Теорема о движении центра масс системы
4. Теорема о кинетической энергии системы

1.9.2 Краткое содержание вопросов

1. Теорема об изменении количества движения.

Теорема об изменении количества движения (импульса).

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения и сложим их почленно. Тогда получим:

$$\sum m_k\vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i.$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_k\vec{a}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k\vec{V}_k\right) = \frac{d\vec{Q}}{dt}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_k\vec{V}_k\right) = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e.$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения (импульса) системы в дифференциальной форме: ***производная по времени от количества движения (импульса) системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил***. В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum \vec{F}_{kx}^e, \quad \frac{dQ_Y}{dt} = \sum \vec{F}_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum \vec{F}_{kz}^e.$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент t=0 количество движения системы равно $\vec{Q}_0$, а в момент t_1 становится равным $\vec{Q}_1$. Тогда, умножая обе части равенства $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$ на dt и интегрируя, получим:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e dt$$

или

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил.

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: ***изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.***

В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1Y} - Q_{0Y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1Z} - Q_{0Z} = \sum S_{kz}^e.$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс. Так как $\vec{Q} = M\vec{V}_C$ то, подставляя это значение в равенство и учитывая, что $\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{a}_C$, мы получим

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e.$$

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм.

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

2. Теорема о моменте количества движения.

Главным моментом количеств движения (или кинетическом моментом) системы относительно данного центра O называется величина $\vec{L}_0$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра.

$$\vec{L}_0 = \sum m_0(m_k\vec{V}_k).$$

Теорема моментов для одной материальной точки будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для нее будет

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_0(m_k\vec{V}_k)] = \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^i),$$

где $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$ - равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_0(m_k\vec{V}_k)] = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда найдем окончательно:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e).$$

Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы: производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси *Oxyz* , получим:

$$\frac{dL_X}{dt} = \sum \vec{m}_X(\vec{F}_k^e), \qquad \frac{dL_Y}{dt} = \sum \vec{m}_Y(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dL_Z}{dt} = \sum \vec{m}_Z(\vec{F}_k^e).$$

Уравнения выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

В кинематике было показано, что движение твердого тела в общем случае слагается из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения тела может быть изучена с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная - с помощью теоремы моментов.

Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позволяет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

3. Теорема о движении центра масс системы

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела), достаточно знать закон движения ее центра масс. Например, если бросить камень в цель, совсем не нужно знать как он будет кувыркаться во время полета, важно установить попадет он в цель или нет. Для этого достаточно рассмотреть движение какой-нибудь точки этого тела.

Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим:

$$m_k\vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i. \qquad (1)$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы для радиус-вектора центра масс имеем:

$$\sum m_k\vec{r}_k = M\vec{r}_C. \qquad (2)$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\sum m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2},$$

или

$$\sum m_k\vec{a}_k = M\vec{a}_C. \qquad (3)$$

где $\vec{a}_C$- ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\sum\vec{F}_k^i = 0$, то, подставляя все найденные значения, получим окончательно:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e. \qquad (4)$$

Уравнение и выражает теорему о движении центра масс системы: ***произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.*** Сравнивая с уравнением движения материальной точки, получаем другое выражение теоремы: ***центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.***

Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum \vec{F}^{в}_{kx}, \qquad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum \vec{F}^{в}_{ky}, \qquad M\frac{d^2z_C}{dt^2} = \sum \vec{F}^{в}_{kz}.$$

Эти уравнения представляют **собою *дифференциальные уравнения движения центра масс*** в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1) Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений видно, что ***решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела***, т.е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс.

2) Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.

Так движение автомобиля по горизонтальной плоскости может происходить только под действием внешних сил, сил трения, действующих на колеса со стороны дороги. И торможение автомобиля тоже возможно только этими силами, а не трением между тормозными колодками и тормозным барабаном. Если дорога гладкая, то как бы не затормаживали колеса, они будут скользить и не остановят автомобиль.

Или после взрыва летящего снаряда (под действием внутренних сил) части, осколки его, разлетятся так, что центр масс их будет двигаться по прежней траектории.

Теоремой о движении центра масс механической системы следует пользоваться для решения задач механики, в которых требуется:

- по силам, приложенным к механической системе (чаще всего к твердому телу), определить закон движения центра масс;
- по заданному закону движения тел, входящих в механическую систему, найти реакции внешних связей;
- по заданному взаимному движению тел, входящих в механическую систему, определить закон движения этих тел относительно некоторой неподвижной системы отсчета.

С помощью этой теоремы можно составить одно из уравнений движения механической системы с несколькими степенями свободы.

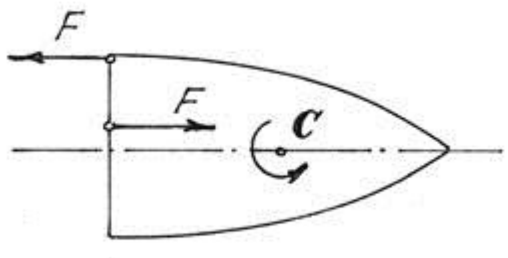
При решении задач часто используются следствия из теоремы о движении центра масс механической системы.

Следствие 1. Если главный вектор внешних сил, приложенных к механической системе, равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Так как ускорение центра масс равно нулю, $\vec{a}_C = 0$.

Следствие 2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то центр масс системы или не изменяет своего положения относительно данной оси, или движется относительно нее равномерно.

Например, если на тело начнут действовать две силы, образующие пару сил (рис.12), то центр масс *C* его будет двигаться по прежней траектории. А само тело будет вращаться вокруг центра масс. И неважно, где приложена пара сил.

Кстати, в статике мы доказывали, что действие пары на тело не зависит от того, где она приложена. Здесь мы показали, что вращение тела будет вокруг центральной оси *C*.



4. Теорема о кинетической энергии системы

Кинетический момент механической системы $\vec{K}_0$ относительно неподвижного центра *O* является мерой движения системы вокруг этого центра. При решении задач обычно применятся не сам вектор $\vec{K}_0$, а его проекции на оси неподвижной системы координат, которые называются кинетическими моментами относительно оси. Например, K_z - кинетический момент системы относительно неподвижной оси *Oz* .

Кинетический момент механической системы складывается из кинетических моментов точек и тел, входящих в эту систему. Рассмотрим способы определения кинетического момента материальной точки и твердого тела при различных случаях их движения.

Для материальной точки с массой m_k, имеющей скорость $\vec{V}_k$, кинетический момент относительно некоторой оси *Oz* определяется как момент вектора количества движения этой точки относительно выбранной оси:

$$K_z = m_z(m_k\vec{V}_k) = \vec{r}_k \times (m_k\vec{V}_k).$$

Кинетический момент точки считается положительным, если со стороны положительного направления оси движение точки происходит против часовой стрелки.

Если точка совершает сложное движение, для определения ее кинетического момента следует вектор количества движения $m_k\vec{V}_k$ рассматривать как сумму количеств относительного и переносного движений (рис.15)

$$m_k\vec{V}_k = m_k\vec{V}_{kr} + m_k\vec{V}_{ke}.$$

Тогда

$$K_z = m_z(m_k\vec{V}_k) = m_z(m_k\vec{V}_{kr}) + m_z(m_k\vec{V}_{ke}).$$

Но $V_{ke} = \omega h_e$, где h_e - расстояние от точки до оси вращения, и

$$m_z(m_k\vec{V}_{ke}) = m_k\omega h_e \cdot h_e = m_k\omega h_e^2.$$

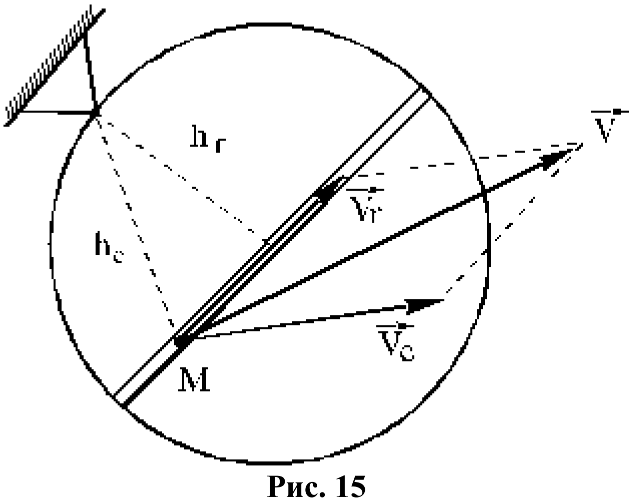


Рис. 15

Вторую составляющую вектора кинетического момента $m_z(m_k\vec{V}_{kr})$ можно определить так же, как и момент силы относительно оси. Как и для момента силы, величина $m_z(m_k\vec{V}_{kr})$ равна нулю, если вектор относительной скорости лежит в одной плоскости с осью переносного вращения.

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижного центра можно определить как сумму двух составляющих: первая из них характеризует поступательную часть движения тела вместе с его центром масс, вторая - движение системы вокруг центра масс:

$\vec{K}_0 = \vec{m}_0(M\vec{V}_C) + \vec{K}_{rC}$.

Если тело совершает поступательное движение, то вторая составляющая равна нулю

$\vec{K}_{rC} = 0$.

Наиболее просто вычисляется кинетической момент твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси

$K_z = I_z \omega$,

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ее движении вокруг неподвижного центра формулируется следующим образом: ***полная производная по времени от вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра О по величине и направлению равна главному моменту внешних сил, приложенных к механической системе, определенному относительно того же центра***

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e,$$

где $\vec{M}_0^e = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_k^e) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e$ - главный момент всех внешних сил относительно центра O.

При решении задач, в которых рассматриваются тела, вращающиеся вокруг неподвижной оси, используют теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^e).$$

Как и для теоремы о движении центра масс, теорема об изменении кинетического момента имеет следствия.

Следствие 1. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается неизменным.

Следствие 2. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается неизменным.

Теорема об изменении кинетического момента применяется для решения задач, в которых рассматривается движение механической системы, состоящей из центрального тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и одного или нескольких тел, движение которых связано с центральным.. Связь может осуществляться при помощи нитей, тела могут перемещаться по поверхности центрального тела или в его каналах за счет внутренних сил. С помощью данной теоремы можно определить зависимость закона вращения центрального тела от положения или движения остальных тел.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Реакции связей. Силовые факторы и действия над ними»

2.1.1 Задание для работы

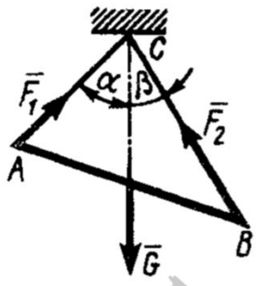
1. Реакции связей.
2. Система сходящихся сил.
3. Аналитический способ решения.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

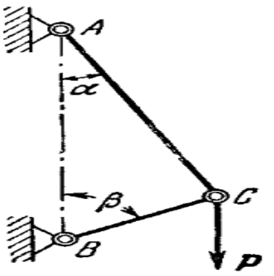
1. Плоская система трех сходящихся сил F_1 F_2 и F_3 находится в равновесии. Заданы модули сил $F_1 = 3$ Н и $F_2 = 2$Н, а также углы, образованные векторами сил F_1 и F_2 с положительным направлением горизонтальной оси *Ox,* соответственно равные $\alpha_1 = 15$ и $\alpha_2 = 45$. Определить модуль силы F_3. (4,84)

2. Силы $F_1 = F_2 = 10$ Н и F_3 находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по 120°. Определить модуль силы F_3. (10)

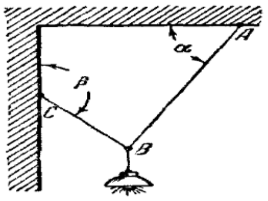
3. Определить вес балки *AB,* если известны силы натяжения веревок $F_1 = 120$ Н и $F_2 = 80$ Н. Заданы углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 30°$ между вертикалью и веревками *AC* и *BC* соответственно. (154)



4. Стержни *AC* и *BC* соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт *C* действует вертикальная сила $P = 1000$ Н.
Определить реакции этих стержней на шарнирный болт *C,* если углы, составляемые стержнями со стеной, равны: $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$.
Ответ: 866 Н; 500 Н.



5. Электрическая лампа веса 20 Н подвешена к потолку на шнуре *AB* и затем оттянута к стене веревкой *BC.* Определить натяжения: T_A шнура *AB* и T_C веревки *BC,* если известно, что угол $\alpha = 60°$, а угол $\beta = 135°$. Весом шнура и веревки пренебречь.
Ответ: $T_A =$ 14,6 Н; T_C=10,4 Н.



2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений статики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям статики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.2 Практическое занятие №2(2 часа).

Тема: «Основная теорема статики. Уравнения равновесия. Статически определенные и статически неопределенные задачи»

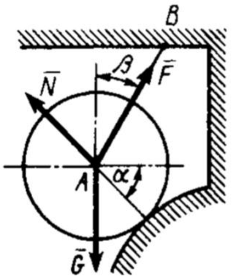
2.2.1 Задание для работы

1. Геометрический способ решения задачи.
2. Определение проекции силы на направление.
3. Определение проекции силы на плоскость.

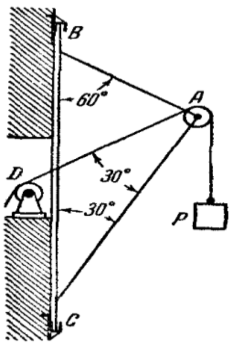
2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Два стержня *AC* и *BC* соединены шарнирно в точке *C,* к которой через блок D подвешен груз *1* весом 12 Н. Определить реакцию стержня *BC,* если угол, $\alpha = 60^6$. (-6)

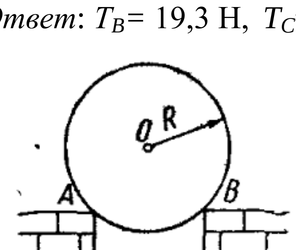
2. Цилиндр весом *G* удерживается в равновесии с помощью веревки *AB*. Нормальная реакция опорной поверхности N = 40 Н. Определить натяжение веревки *F*, если известны углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 30°$. (56,6)



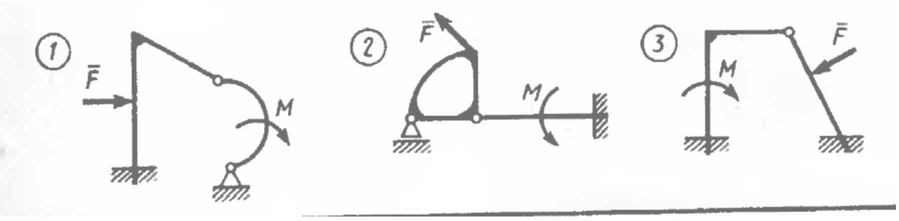
3. Груз $P = 20$ кН поднимается магазинным краном *BAC* посредством цепи, перекинутой через блок *A* и через блок *D,* который укреплен на стенетак, что угол *CAD*= 30°. Углы между стержнями крана: *ABC*= 60°, *ACB* = 30°. Определить усилия Q_1и Q_2 в стержнях *AB* и *AC.*
Ответ: $Q_1 = 0$; $Q_2 = -34{,}6$ кН.



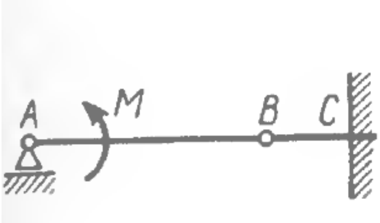
4. Однородный шар веса 10 Н удерживается в равновесии двумя тросами *AB* и *CD*,расположенными в одной вертикальной плоскости и составляющими один с другим угол 150°. Трос *AB* наклонен к горизонту под углом 45°. Определить натяжение тросов.
Ответ: $T_B = 19{,}3$ Н, $T_C = 14{,}1$ Н.



5. Укажите номер статически определимой конструкции. (2)



6. На балку *AB* действует пара сил с моментом *M* = 800 Н • м. Определить момент в заделке *C,* если *AB* = *2* м и *BC* = 0,5 м. (200)



2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений статики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям статики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа).

Тема: «Трение скольжения и трение качения. Центр параллельных сил, центр тяжести.»

2.3.1 Задание для работы

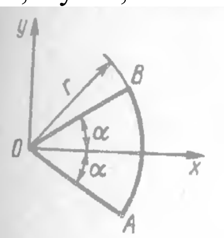
1. Понятие главного вектора и главного момента. Понятие частных случаев приведения системы сил.
2. Уравнение центральной оси, применение инвариантов системы сил.
3. Законы Кулона. Коэффициент трения скольжения. Конус трения.

Коэффициент трения качения. Опытное определение коэффициента трения скольжения и качения.

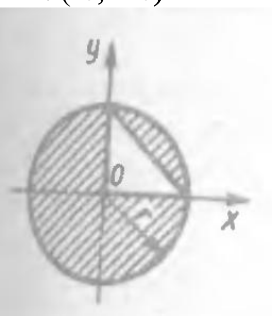
4. Центр параллельных сил. Центр тяжести однородных тел, пластин, стержней. Центр тяжести конструкции.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

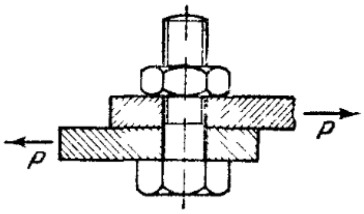
1. Определить координату x_C центра тяжести площади кругового сектора *OAB,* если радиус r=0,6 м, а угол, α= 30°. (0.382)



2. Определить координату x_C центра тяжести заштрихованной площади фигуры, если радиус r = 2 м. (-0,126)



3. Определить необходимую затяжку болта, скрепляющего две стальные полосы, разрываемые силой $P = 2$ кН. Болт поставлен с зазором и не должен работать на срез. Коэффициент трения между листами равен 0,2,
Указание. Болт не должен работать на срез, поэтому его надо затянуть с такой силой, чтобы развивающееся между листами трение могло предотвратить скольжение листов. Сила, действующая вдоль оси болта, и является искомой затяжкой.
Ответ: 10 кН.



4. Вагон, спускающийся по уклону в 0,008, достигнув некоторой определенной скорости, движется затем равномерно. Определить сопротивление R,которое испытывает вагон при этой скорости, если вес вагона равен 500 кН.
Уклоном пути называется тангенс угла наклона пути к горизонту; вследствие малости уклона синус может быть принят равным тангенсу этого угла.
Ответ: R= 4 кН.

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений статики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям статики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).

Тема: «**К**инематика точки. Способы задания движения, основные кинематические характеристики»

2.4.1 Задание для работы

1. Задача кинематики. Годограф радиус-вектора точки. Оси естественного трёхгранника.
2. Уравнения движения точки при различных способах задания её движения.
3. Варианты переходов от одного способа задания движения к другому.

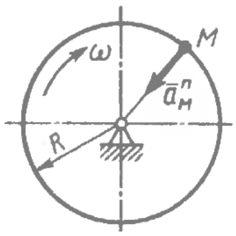
2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Задано уравнение движения точки $r=3ti + 4tj$. Определить координату y точки в момент времени, когда r=5 м. (4)
2. Заданы уравнения движения точки $x = 2t$, $y = t$. Определить время t, когда расстояние от точки до начала координат достигнет 10м. (4,47)
3. По данным уравнениям движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения x = 3t- 5, y= 4 -2t.
Ответ: Полупрямая $\boldsymbol{2x + 3y}$ **- 2 =** 0 с началом в точке $\boldsymbol{x}$ **= -**5, y = 4.
4. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.
$x = 31^2$, $y = 4t^2$.
Ответ: Полупрямая $4x$ — $3y = 0$; $s= 5t^2$.
5. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.
$x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$.
Ответ: Отрезок прямой x+y-a=0, причем $0 \leq x \leq \alpha$; $s=\alpha\sqrt{2}\, sin^2 t$

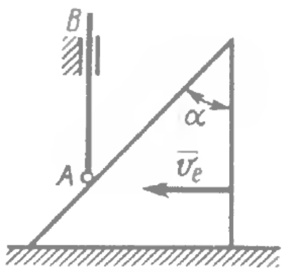
2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений кинематики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям кинематики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа).
Тема: «Простейшие движения твердого тела. Плоское движение твердого тела»
2.5.1 Задание для работы
1. Переносное, относительное и абсолютное движения.
2. Скорость точки в составном движении.
3. Ускорение точки в составном движении. Дополнительное (Кориолисово) ускорение.
4. Поступательное движение твёрдого тела. Скорости и ускорения точек твёрдого тела при поступательном движении.
5. Вращение твёрдого тела. Понятие угловой скорости и углового ускорения как векторных величин. Соотношения между линейными и угловыми кинематическими характеристиками.
6. Теорема о проекциях скоростей двух точек твёрдого тела на линию, соединяющую эти точки.
7. Понятие мгновенного центра скоростей. Соотношение между ускорениями двух точек твёрдого тела совершающего плоскопараллельное движение.
2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Проекции скорости точки во время движения определяются выражениями: v_x=0,2 t^2, v_y=3 м/с. Определить касательное ускорение в момент времени t=2,5с. (0,385)
2. Автомобиль движется по горизонтальной дороге с постоянной скоростью v=90 км/ч. Определить радиус закругления дороги в момент времени, когда нормальное ускорение центра автомобиля a_n = 2,5 м/с^2. (250)
3. Задан закон движения точки по траектории: $s = 0{,}5\ t^2$. Определить угол в градусах между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени t_1 = 3 с, когда радиус кривизны ρ = 4м. (66,0)
4. Нормальное ускорение точки M диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 6,4 м/с^2. Определить угловую скорость ω этого диска, если его радиус R = 0,4 м. (4)



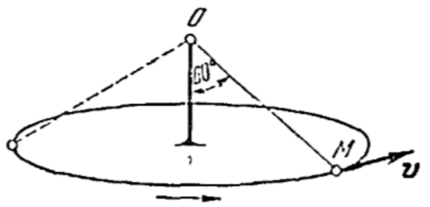
5. По грани призмы, движущейся со скоростью v_e, скользит конец стержня AB. При каком угле α в градусах абсолютная скорость точки A будет равна скорости призмы v_e? (45)



6. Поезд движется со скоростью 72 км/ч; при торможении он получает замедление, равное 0,4 м/с^2. Найти, за какое время до прихода поезда на станцию и на каком от нее расстоянии должно быть начато торможение.
Ответ: 50 с, 500 м.
2.5.3 Результаты и выводы:
В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений кинематики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям кинематики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.6 Практическое занятие №6 (2 часа).
Тема: «Определение скоростей и ускорений точек. Составное движение точки»
2.8.1 Задание для работы
1. Определение скорости при различных способах задания движения.
2. Понятие ускорения. Вычисление ускорения при различных способах задания движения.
3. Дифференцирование вектора постоянного модуля по независимому скалярному аргументу.
4. Касательное и нормальное составляющие ускорения.
5. Виды движения точки. Критерии их распознания.
2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Скорость движения точки $v = 2ti + 3j$ Определить угол в градусах между вектором скорости и осью Ox в момент времени t =4 с (20,6)
2. Самолет при посадке касается посадочной полосы с горизонтальной скоростью 180 км/ч. После пробега 1000 м самолет останавливается. Определить модуль среднего замедления самолета. (1,25)
3. Скорость автомобиля 90 км/ч. Определить путь торможения до остановки, если среднее замедление автомобиля равно 3 м/с. (104)
4. Поезд движется со скоростью 72 км/ч; при торможении он получает замедление, равное 0,4 м/с^2. Найти, за какое время до прихода поезда на станцию и на каком от нее расстоянии должно быть начато торможение.
Ответ: 50 с, 500 м.
5. Считая посадочную скорость самолета равной 400 км/ч, определить замедление его при посадке на пути l = 1200 м, считая, что замедление постоянно.
Ответ: ω= 5,15 м/с^2.
6. Поезд, имея начальную скорость 54 км/ч, прошел 600 м в первые 30 с. Считая движение поезда равнопеременным, определить скорость и ускорение поезда в конце 30-й секунды, если рассматриваемое движение поезда происходит на закруглении радиуса R=1 км.
Ответ: v= 25 м/с, ω=0,708 м/с^2.
2.6.3 Результаты и выводы:
В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений кинематики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям кинематики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.7 Практическое занятие №7 (2 часа).
Тема: «Аксиомы динамики. Дифференциальные уравнения движения точки»
2.7.1 Задание для работы
1. Законы динамики.
2. Последовательность решения задачи динамики.
3. Дифференциальные уравнения движения точки в координатной и естественной формах.
2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:
1. Деталь массой m = 0,5 кг скользит вниз по лотку. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, для того чтобы деталь двигалась с ускорением a = 2 м/с^2? Угол выразить в градусах. (11,8)
2. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой m = 3 кг в момент времени t= 6 с, если она движется по оси Ox согласно уравнению x =0,04 t^3. (4,32)
3. В шахте опускается равноускоренно лифт масел 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.
Ответ. 2548 Н.
4. Груз M массы 0,102 кг, подвешенный на нити длины 30 см в неподвижной точке O, представляет собой конический маятник, т. е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60°. Определить скорость v груза и натяжение T нити.
Ответ: v = 2,1 м/с, T = 2 Н.



5. Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти, за какое время тело пройдет путь 9,6 м, если в начальный момент его скорость равнялась 2 м/с.

Ответ: 1,61 с.

2.7.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений динамики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям динамики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.

2.8 Практическое занятие №8 (2 часа).

Тема: «Колебания. Колебательное движение точки»

2.8.1 Задание для работы

1. Свободные колебания. Статическая деформация. Частота, период, начальная фаза и амплитуда.
2. Затухающие колебания. Начальные условия. Декремент и логарифмический декремент колебаний. Условие периодичности и апериодичности движения.
3. Вынужденные и вынужденные при наличии сопротивления.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. На материальную точку массой m = 20 кг, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления $R = 0{,}2v^2$. За сколько секунд скорость точки уменьшится с 10 до 5 м/с? (10)

2. Дифференциальное уравнение колебательного движения груза массой m=0,5 кг, подвешенного к пружине, имеет вид $\ddot{y} + 60y = 0$. Определить коэффициент жесткости пружины. (30)

3. При скоростном спуске лыжник массы 90 кг скользил по склону в 45°, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег f = 0,1. Сопротивление воздуха движению лыжника пропорционально квадрату скорости лыжника и при скорости в 1 м/с равно 0,635 Н. Какую наибольшую скорость мог развить лыжник? Насколько увеличится максимальная скорость, если подобрав лучшую мазь, лыжник уменьшит коэффициент трения до 0,05?

Ответ: $v_{1\,max}$= 29,73 м/с; скорость увеличится до $v_{2\,max}$= 30,55 м/с.

4. При угле бросания а снаряд имеет горизонтальную дальность l_a. Определить горизонтальную дальность при угле бросания, равном α/2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $l_{a/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$

5. Груз Q,падая с высоты h= 1 м без начальной скорости, ударяется об упругую горизонтальную балку в ее середине; концы балки закреплены. Написать уравнение дальнейшего движения груза на балке, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза на балке, если статический прогиб балки в ее середине при указанной нагрузке равен 0,5 см; массой балки пренебречь.

Ответ: x = (—0,5 cos44,3t+ 10 sin44,3t) см.

2.8.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные теоретические основы механики, методы составления и исследования уравнений динамики; научится составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям динамики; овладеет навыками использования методов теоретической механики при решении практических задач.