ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Направление подготовки (специальность):
27. 03. 04 Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:
Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Понятие о случайной функции. Характеристики случайной функции»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Два подхода к понятию о случайной функции, примеры случайных функций. Основные виды задач в теории случайных функций. Закон распределения случайной функции.
2. Корреляционная теория случайной функции. Математическое ожидание случайной функции, свойства. Дисперсия случайной функции, свойства.
3. Корреляционная функция, свойства. Нормированная корреляционная функция.

Взаимная корреляционная функция, свойства.

2. Краткое содержание вопросов:

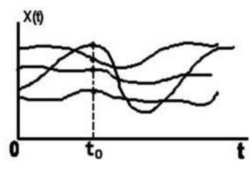
1. Два подхода к понятию о случайной функции, примеры случайных функций. Основные виды задач в теории случайных функций. Закон распределения случайной функции.

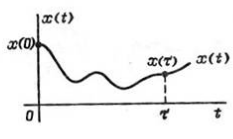
Случайным (стохастическим, вероятностным) процессом называется функция действительного переменного t, значениями которой являются соответствующие случайные величины X(t). В теории случайных процессов t трактуется как время, принимающее значения из некоторого подмножества T множества действительных чисел (tT, TR). В рамках классического математического анализа под функцией y=f(t) понимается такой тип зависимости переменных величин t и y, когда конкретному числовому значению аргумента t соответствует и притом единственное числовое значение функции y.

Для случайных процессов ситуация принципиально иная: задание конкретного аргумента t приводит к появлению случайной величины X(t) с известным законом распределения (если это дискретная случайная величина) или с заданной плотностью распределения (если это непрерывная случайная величина). Другими словами, исследуемая характеристика в каждый момент времени носит случайный характер с неслучайным распределением. Значения, которые принимает обычная функция y=f(t) в каждый момент времени, полностью определяет структуру и свойства этой функции.

Для случайных процессов дело обстоит иным образом: здесь совершенно не достаточно знать распределение случайной величины X(t) при каждом значении t, необходима информация об ожидаемых изменениях и их вероятностях, то есть информация о степени зависимости предстоящего значения случайного процесса от его предыстории.

Случайным процессом X(t) называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_o$ является случайной величиной $X(t_0)$. Случайная величина $X(t_o)$, в которую обращается с. п. при $t = t_0$, называется **сечением случайного процесса**, соответствующим данному значению аргумента t.





Реализацией случайного процесса X(t) называется неслучайная функция x(t), в которую превращается случайный процесс X(t) в результате опыта. В инженерных исследованиях решается два вида задач: задача анализа и синтеза. Задача анализа: известны характеристики входной функции и параметры системы, определить характеристики выходной функции. Задача синтеза: подобрать параметры системы так, чтобы функция на входе переходила в функцию на выходе с известными характеристиками.

В рамках общего подхода к описанию случайных процессов характеристика сечений и любых их совокупностей осуществляется с помощью многомерных распределений. В частности, любое сечение характеризуется либо одномерной плотностью вероятности, либо одномерной функцией распределения $F(t; x)=P(X(t)\le x)$.

Взаимосвязь любой пары сечений характеризуется двумерной плотностью вероятности или двумерной функцией распределения $F(t_1;\ t_2;\ x_1;\ x_2)=P(X(t_1)\le x_1;\ X(t_2)\le x_2)$, где $t_{1,2}$-два фиксированных момента времени; $x_{1,2}$- возможные значения случайных величин, соответствующих этим сечениям. Аналогично вводятся плотности и функции распределения трёх и более сечений, однако для большого числа случайных процессов оказывается достаточным ограничиться одномерными и двумерными распределениями.

Наиболее общий подход в описании случайных процессов состоит в задании всех его многомерных распределений, когда определена вероятность одновременного выполнения следующих событий:
$t_1, t_2,\ldots,t_n T,\ n N$: $X(t_i)\le x_i;\ i=1,2,\ldots,n$;
$F(t_1;t_2;\ldots;t_n;x_1;x_2;\ldots;x_n)=P(X(t_1)\le x_1;\ X(t_2)\le x_2;\ldots;\ X(t_n)\le x_n)$.

Такой способ описания случайных процессов универсален, но весьма громоздок. Для получения существенных результатов выделяют наиболее важные частные случаи, допускающие применение более совершенного аналитического аппарата.

Если аргумент t принимает все действительные значения или все значения из некоторого интервала T действительной оси, то говорят о случайном процессе **с непрерывным временем**. Если t принимает только фиксированные значения, то говорят о случайном процессе **с дискретным временем**. Если сечение случайного процесса - дискретная случайная величина, то такой процесс называется **процессом с дискретными состояниями**. Если же любое сечение - непрерывная случайная величина, то случайный процесс называется **процессом с непрерывными состояниями**. В общем случае задать случайный процесс аналитически невозможно. Исключение составляют так называемые **элементарные случайные процессы**, вид которых известен.

2. Корреляционная теория случайной функции. Математическое ожидание случайной функции, свойства. Дисперсия случайной функции, свойства.

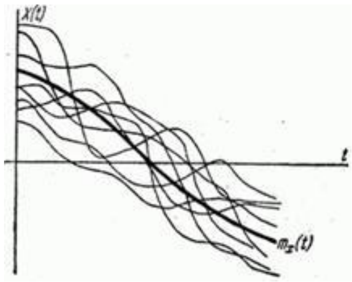
Аппарат числовых характеристик представляет собой весьма гибкий и мощный аппарат, позволяющий сравнительно просто решать многие практические задачи. Совершенно аналогичным аппаратом пользуются и в теории случайных функций. Для случайных функций также вводятся простейшие основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин, и устанавливаются правила действий с этими характеристиками. Такой аппарат оказывается достаточным для решения многих практических задач.

В отличие от числовых характеристик случайных величин, предоставляющих собой определённые числа, характеристики случайных функций представляют собой в общем случае не числа, а функции.

Математическое ожидание случайной функции определяется следующим образом. Рассмотрим сечение случайной функции $X(t)$ при фиксированном t. В этом сечении мы имеем обычную случайную величину; определим ее математическое ожидание. Очевидно, в общем случае оно зависит от t, т. е. представляет собой некоторую функцию t: $m_x(t)=M[X(t)]$.

Таким образом, математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции.

По смыслу математическое ожидание случайной функции есть некоторая средняя функция, около которой различным образом варьируются конкретные реализации случайной функции.



Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции: $D_x(t) = D[X(t)]$.

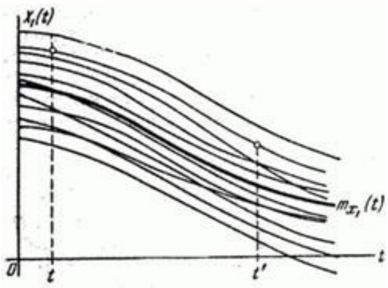
Дисперсия случайной функции при каждом t характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно среднего, иными словами, «степень случайности» случайной функции.

Очевидно, $D_x(t)$ есть неотрицательная функция. Извлекая из нее квадратный корень, получим функцию $\sigma_x(t)$ - среднее квадратическое отклонение случайной функции:

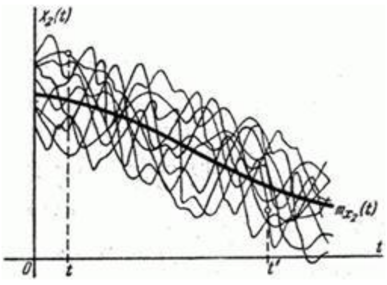
$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Математическое ожидание и дисперсия представляют собой весьма важные характеристики случайной функции; однако для описания основных особенностей случайной функции этих характеристик недостаточно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$, наглядно изображенные семействами реализаций на рис.

У случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ примерно одинаковые математические ожидания и дисперсии; однако характер этих случайных функций резко различен. Для случайной функции $X_1(t)$ характерно плавное, постепенное изменение.



Если, например, в точке t случайная функция $X_1(t)$ приняла значение, заметно превышающее среднее, то весьма вероятно, что и в точке t' она также примет значение больше среднего.



Для случайной функции $X_1(t)$ характерна ярко выраженная зависимость между ее значениями при различных t. Напротив, случайная функция $X_2(t)$ имеет резко колебательный характер с неправильными, беспорядочными колебаниями. Для такой случайной функции характерно быстрое затухание зависимости между ее значениями по мере увеличения расстояния по t между ними.

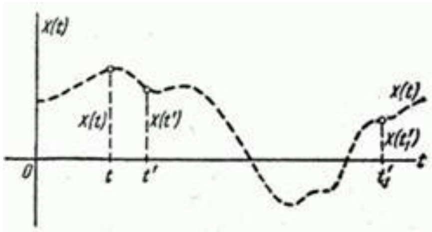
Очевидно, внутренняя структура обоих случайных процессов совершенно различна, но это различие не улавливается ни математическим ожиданием, ни дисперсией; для его описания необходимо вести специальную характеристику.

Эта характеристика называется корреляционной функцией (иначе - автокорреляционной функцией).

3. Корреляционная функция, свойства. Нормированная корреляционная функция.
Взаимная корреляционная функция, свойства.

Корреляционная функция характеризует степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к различным t.

Пусть имеется случайная функция $X(t)$; рассмотрим два ее сечения, относящихся к различным моментам: t и t', т. е. две случайные величины $X(t)$ и $X(t')$. Очевидно, что при близких значениях t и t' величины $X(t)$ и $X(t')$ связаны тесной зависимостью: если величина $X(t)$ приняла какое-то значение, то и величина $X(t')$ с большой вероятностью примет значение, близкое к нему. Очевидно также, что при увеличении интервала между сечениями t, t' зависимость величин $X(t)$ и $X(t')$ вообще должна убывать.



Степень зависимости величин $X(t)$ и $X(t')$ может быть в значительной мере охарактеризована их корреляционным моментом; очевидно, он является функцией двух аргументов t и t'. Эта функция и называется корреляционной функцией.

Таким образом, корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t,t')$, которая при каждой паре значений t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t,t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')],$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$, $\overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m_x(t')$.

Вернёмся к примерам случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Мы видим теперь, что при одинаковых математических ожиданиях и дисперсиях случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ имеют совершенно различные корреляционные функции. Корреляционная функция случайной функции $X_1(t)$ медленно убывает по мере увеличения промежутка (t,t'); напротив, корреляционная функция случайной функции $X_2(t)$ быстро убывает с увеличением этого промежутка.

Выясним, во что обращается корреляционная функция $K_x(t,t')$, когда ее аргументы совпадают. Полагая $t'=t$, имеем:

$$K_x(t,t) = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2] = D_x(t),$$

т. е. при $t'=t$ корреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции.

Таким образом, необходимость в дисперсии как отдельной характеристике случайной функции отпадает: в качестве основных характеристик случайной функции достаточно рассматривать ее математическое ожидание и корреляционную функцию.

Так как корреляционный момент двух случайных величин $X(t)$ и $X(t')$ не зависит от последовательности, в которой эти величины рассматриваются, то корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, т. е. не меняется при перемене аргументов местами:

$$K_x(t,t') = K_x(t',t).$$

На практике, если требуется построить корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, обычно поступают следующим образом: задаются рядом равноотстоящих значений аргумента и строят корреляционную матрицу полученной системы случайных величин. Эта матрица есть не что иное, как таблица значений корреляционной функции для прямоугольной сетки значений аргументов на плоскости (t,t'). Далее, путем интерполирования или аппроксимации можно построить функцию двух аргументов $K_x(t,t')$.

Вместо корреляционной функции $K_x(t,t')$ можно пользоваться нормированной корреляционной функцией:

$$r_x(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')},$$

которая представляет собой коэффициент корреляции величин $X(t)$, $X(t')$. Нормированная корреляционная функция аналогична нормированной корреляционной матрице системы случайных величин. При $t'=t$ нормированная корреляционная функция равна единице:

$$r_x(t,t) = \frac{K_x(t,t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = \frac{D_x(t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = 1.$$

Выясним, как меняются основные характеристики случайной функции при элементарных операциях над нею: при прибавлении неслучайного слагаемого и при умножении на неслучайный множитель. Эти неслучайные слагаемые и множители могут быть как постоянными величинами, так в общем случае и функциями t.

Прибавим к случайной функции $X(t)$ неслучайное слагаемое $\varphi(t)$. Получим новую случайную функцию:

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t).$$

По теореме сложения математических ожиданий:

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t),$$

т. е. при прибавлении к случайной функции неслучайного слагаемого к ее математическому ожиданию прибавляется то же неслучайное слагаемое.

Определим корреляционную функцию случайной функции $Y(t)$:

$$K_y(t,t') = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] = M[(Y(t)-m_y(t))(Y(t')-m_y(t'))] =$$
$$= M[(X(t)+\varphi(t)-m_x(t)-\varphi(t))(X(t')+\varphi(t')-m_x(t')-\varphi(t'))] =$$
$$= M[(X(t)-m_x(t))(X(t')-m_x(t'))] = K_x(t,t'),$$

т. е. от прибавления неслучайного слагаемого корреляционная функция случайной функции не меняется.

Умножим случайную функцию $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$:

$$Y(t) = \varphi(t)X(t).$$

Вынося неслучайную величину $\varphi(t)$ за знак математического ожидания, имеем:

$$m_y(t) = M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)m_x(t),$$

т. е. при умножении случайной функции на неслучайный множитель ее математическое ожидание умножается на тот же множитель.

Определяем корреляционную функцию:

$$K_y(t,t') = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] = M[(Y(t)-m_y(t))(Y(t')-m_y(t'))] =$$
$$= M[\varphi(t)\varphi(t')(X(t)-m_x(t))(X(t')-m_x(t'))] = \varphi(t)\varphi(t')K_x(t,t'),$$

т. е. при умножении случайной функции на неслучайную функцию $\varphi(t)$ ее корреляционная функция умножается на $\varphi(t)\varphi(t')$.

В частности, когда $\varphi(t) = c$ (не зависит от t), корреляционная функция умножается на c^2.

Пользуясь выведенными свойствами характеристик случайных функций, можно в ряде случаев значительно упростить операции с ними. В частности, когда требуется исследовать корреляционную функцию или дисперсию случайной функции, можно заранее перейти от нее к так называемой центрированной функции: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$

Математическое ожидание центрированной функции тождественно равно нулю, а ее корреляционная функция совпадает с корреляционной функцией случайной функции $X(t)$:

$$K_{\overset{\circ}{x}}(t,t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] = K_x(t,t').$$

При исследовании вопросов, связанных с корреляционными свойствами случайных функций, мы в дальнейшем всегда будем переходить от случайных функций к соответствующим центрированным функциям, отмечая это значком $^{\circ}$ вверху знака функции.

Иногда, кроме центрирования, применяется еще нормирование случайных функций. Нормированной называется случайная функция вида:

$$X_N(t) = \frac{\overset{\circ}{X}(t)}{\sigma_x(t)}.$$

Корреляционная функция нормированной случайной функции $X_N(t)$ равна

$$K_{x_N}(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')} = r_x(t,t'),$$

а ее дисперсия равна единице.

1. 2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Динамическая система. Оператор динамической системы. Линейные преобразования случайной функции. Стационарный случайный процесс»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Понятие динамической системы, примеры. Понятие оператора динамической системы, примеры. Виды линейных операторов, примеры.

2. Постановка задачи. Линейный оператор интегрирования. Линейный оператор дифференцирования. Сложение случайных функций.

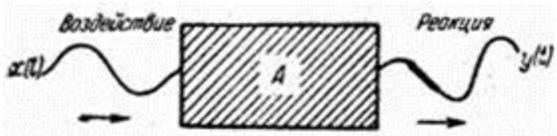
3. Понятие случайного процесса, примеры, виды. Стационарный случайный процесс: особенности и характеристики. Преобразование стационарного случайного процесса стационарной линейной системой.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Понятие динамической системы, примеры. Понятие оператора динамической системы, примеры. Виды линейных операторов, примеры.

Имеется некоторая динамическая система A; под «динамической системой» мы понимаем любой прибор, прицел, счетно-решающий механизм, систему автоматического управления и т. п. Эта система может быть механической, электрической или содержать любые другие элементы. Работу системы будем представлять себе следующим образом: на вход системы непрерывно поступают какие-то входные данные; система перерабатывает их и непрерывно выдает некоторый результат. Условимся называть поступающие на вход системы данные: «воздействием», а выдаваемый результат «реакцией» системы на это воздействие.

Рассмотрим самый простой случай: когда на вход системы A подается только одно воздействие, представляющее собой функцию времени $x(t)$: реакция системы на это воздействие есть другая функция времени $y(t)$. Схема работы системы A условно изображена на рис.



Будем говорить, что система A осуществляет над входным воздействием некоторое преобразование, в результате которого функция $x(t)$ преобразуется в другую функцию $y(t)$.

Преобразование A может быть любого вида и любой сложности. В наиболее простых случаях это, например, умножение на заданный множитель (усилители, множительные механизмы), дифференцирование или интегрирование (дифференцирующие или интегрирующие устройства). Однако на практике системы, осуществляющие в чистом виде такие простейшие преобразования, почти не встречаются; как правило, работа системы описывается дифференциальными уравнениями, и преобразование A сводится к решению дифференциального уравнения, связывающего воздействие $x(t)$ с реакцией $y(t)$.

При исследовании динамической системы в первую очередь решается основная задача: по заданному воздействию $x(t)$ определить реакцию системы $y(t)$. Однако для полного исследования системы и оценки ее технических качеств такой элементарный подход является недостаточным. В действительности воздействие $x(t)$ никогда не поступает на вход системы в чистом виде: оно всегда искажено некоторыми случайными ошибками (возмущениями), в результате которых на систему фактически воздействует не заданная функция $x(t)$, а случайная функция $X(t)$; соответственно этому система вырабатывает в качестве реакции случайную функцию $Y(t)$, также отличающуюся от теоретической реакции $y(t)$.

Естественно возникает вопрос: насколько велики будут случайные искажения реакции системы при наличии случайных возмущений на ее входе? И далее: как следует выбрать параметры системы для того, чтобы эти искажения были минимальными?

Из двух поставленных выше задач, естественно, более простой является первая - прямая - задача. Сформулируем ее следующим образом.

На вход динамической системы A поступает случайная функция $X(t)$; система подвергает ее известному преобразованию, в результате чего на выходе системы появляется, случайная функция:

$$Y(t) = A\{X(t)\}.$$

Известны характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание и корреляционная функция. Требуется найти аналогичные характеристики случайной функции $Y(t)$. Короче: по заданным характеристикам случайной функции на входе динамической системы найти характеристики случайной функции на выходе.

Поставленная задача может быть решена совершенно точно в одном частном, но весьма важном для практики случае: когда преобразование A принадлежит к классу так называемых линейных преобразований и соответственно система A принадлежит к классу линейных систем.

Понятие оператора является обобщением понятия функции. Когда мы устанавливаем функциональную связь между двумя переменными y и x и пишем:

$$y = f(x).$$

то под символом f мы понимаем правило, по которому заданному значению x приводится в соответствие вполне определенное значение y. Знак f есть символ некоторого преобразования, которому нужно подвергнуть величину x, чтобы получить y Соответственно виду этого преобразования функции могут быть линейными и нелинейными, алгебраическими, трансцендентными и т. д.

Аналогичные понятия и соответствующая символика применяются в математике и в тех случаях, когда преобразованию подвергаются не величины, а функции. Рассмотрим некоторую функцию $x(t)$ и установим определенное правило A, согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в другую функцию $y(t)$. Запишем это преобразование в следующем виде:

$$y(t) = A\{x(t)\}.$$

Правило A, согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в функцию $y(t)$, мы будем называть оператором; например, мы будем говорить: оператор дифференцирования, оператор интегрирования, оператор решения дифференциального уравнения и т. д.

Если динамическая система преобразует поступающую на ее вход функцию $x(t)$ в функцию $y(t)$:

$$y(t) = A\{x(t)\},$$

то оператор A называется оператором динамической системы.

В более общем случае на вход системы поступает не одна, а несколько функций; равным образом на выходе системы могут появляться несколько функций; в этом случае оператор системы преобразует одну совокупность функций в другую. Однако в целях простоты изложения мы рассмотрим здесь лишь наиболее элементарный случай преобразования одной функции в другую.

Преобразования или операторы, применяемые к функциям, могут быть различных типов. Наиболее важным для практики является класс так называемых линейных операторов. Оператор L называется линейным однородным, если он обладает следующими свойствами:

1) к сумме функций оператор может применяться почленно:

$$L\{x_1(t)+x_2(t)\}=L\{x_1(t)\}+L\{x_2(t)\};$$

2) постоянную величину c можно выносить за знак оператора:

$$L\{cx(t)\}=cL\{x(t)\}.$$

Из второго свойства между прочим, следует, что для линейного однородного оператора справедливо свойство

$$L\{0\}=0,$$

т. е. при нулевом входном воздействии реакция системы равна нулю.

Примеры линейных однородных операторов:

1) оператор дифференцирования:

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt};$$

2) оператор интегрирования:

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau;$$

3) оператор умножения на определенную функцию $\varphi(t)$:

$$y(t)=\varphi(t)x(t),$$

и т. д.

Кроме линейных однородных операторов, существуют еще линейные неоднородные операторы. Оператор L называется линейным неоднородным, если он состоит из линейного однородного оператора с прибавлением некоторой вполне определенной функции $\varphi(t)$:

$$L\{x(t)\}=L_0\{x(t)\}+\varphi(t),$$

где L_0 - линейный однородный оператор.

Примеры линейных неоднородных операторов:

1) $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+\varphi(t)$,

2) $y(t)=\displaystyle\int_0^t x(\tau)\varphi(\tau)d\tau+\varphi_1(t)$,

3) $y(t)=\varphi_1(t)x(t)+\varphi_2(t)$.

где $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ - вполне определённые функции, а $x(t)$ - преобразуемая оператором функция.

Оператор дифференцирования часто обозначают буквой p : $p = \frac{d}{dt}$,
помещаемой в виде множителя перед выражением, подлежащим дифференцированию. При этом запись

$y(t) = px(t)$ равносильна записи $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Двойное дифференцирование обозначается множителем p^2 :

$$p^2 x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$ и т. д.

Встречающиеся в технике динамические системы часто описываются линейными дифференциальными уравнениями. В этом случае, как нетрудно убедиться, оператор системы является линейным. Динамическая система, оператор которой является линейным, называется линейной динамической системой.

На практике линейные системы встречаются очень часто. В связи с линейностью этих систем к анализу их ошибок может быть с большой эффективностью применен аппарат теории случайных функций. Еще чаще, чем линейные системы, на практике встречаются системы не строго линейные, но в известных пределах допускающие линеаризацию.

2. Постановка задачи. Линейный оператор интегрирования. Линейный оператор дифференцирования. Сложение случайных функций.

Пусть на вход линейной системы с оператором L воздействует случайная функция $X(t)$, причем известны ее характеристики: математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция $K_x(t,t')$. Реакция системы представляет собой случайную функцию $Y(t) = L\{X(t)\}$.

Требуется найти характеристики случайной функции $Y(t)$ на выходе системы: $m_y(t)$ и $K_y(t,t')$. Короче: по характеристикам случайной функции на входе линейной системы найти характеристики случайной функции на выходе.

Покажем сначала, что можно ограничиться решением этой задачи только для однородного оператора L . Действительно, пусть оператор L неоднороден и выражается формулой $L\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + \varphi(t)$,

где L_0 - линейный однородный оператор, $\varphi(t)$ - определенная неслучайная функция. Тогда

$$m_y(t) = M\left[L_0\{X(t)\}\right] + \varphi(t),$$

т. е. функция $\varphi(t)$ просто прибавляется к математическому ожиданию случайной функции на выходе линейной системы. Что же касается корреляционной функции, то, как известно, она не меняется от прибавления к случайной функции неслучайного слагаемого. Поэтому в дальнейшем изложении под «линейными операторами» будем разуметь только линейные однородные операторы. Решим задачу об определении характеристик на выходе линейной системы сначала для некоторых частных видов линейных операторов.

Дана случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t,t')$. Случайная функция $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейным однородным оператором интегрирования:

$$Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau.$$

Требуется найти характеристики случайной функции $Y(t)$, $m_x(t)$ и $K_x(t,t')$.
Представим интеграл как предел суммы:

$$Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i X(\tau_i)\Delta\tau$$

и применим к равенству операцию математического ожидания. По теореме сложения математических ожиданий имеем:

$$m_y(t)=M[Y(t)]=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i M[X(\tau_i)]\Delta\tau=$$

$$=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i m_x(\tau_i)\Delta\tau=\int_0^t m_x(\tau)d\tau.$$

Итак,

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(\tau)d\tau.$$

т. е. математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания. Иными словами: операцию интегрирования и операцию математического ожидания можно менять местами. Это и естественно, так как операция интегрирования по своей природе не отличается от операции суммирования, которую, как мы раньше убедились, можно менять местами с операцией математического ожидания.

Найдём корреляционную функцию $K_y(t,t')$. Для этого перейдём к центрированным случайным функциям:

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t),\quad \overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\int_0^t \overset{\circ}{X}(\tau)d\tau.$$

По определению корреляционной функции,

$$K_y(t,t')=M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')],$$

где

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\int_0^t \overset{\circ}{X}(\tau)d\tau;\quad \overset{\circ}{Y}(t')=\int_0^{t'} \overset{\circ}{X}(\tau')d\tau'.$$

Нетрудно убедиться, что произведение двух интегралов в правой части формулы равно двойному интегралу.
Следовательно,

$$\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')=\int_0^t\int_0^{t'} \overset{\circ}{X}(\tau)\overset{\circ}{X}(\tau')d\tau d\tau'.$$

Применяя к равенству операцию математического оживления и меняя ее в правой части местами с операцией интегрирования, получим:

$$K_y(t,t') = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] = \int_0^t\int_0^{t'} M[\overset{\circ}{X}(\tau)\,\overset{\circ}{X}(\tau')]d\tau d\tau',$$

или окончательно:

$$K_y(t,t') = \int_0^t\int_0^{t'} K_x(\tau,\tau')d\tau d\tau'.$$

Таким образом, для того чтобы найти корреляционную функцию интеграла от случайной функции, нужно дважды проинтегрировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем - по другому.

Дана случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t,t')$. Случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ линейным однородным оператором дифференцирования:

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

Требуется найти $m_y(t)$ и $K_y(t,t')$.

Представим производную в виде предела: $Y(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$.

Применяя к равенству операцию математического ожидания, получим:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_x(t+\Delta t)-m_x(t)}{\Delta t} = \frac{dm_x(t)}{dt}.$$

Итак,

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt},$$

т. е. математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания.

Следовательно, операцию дифференцирования, как и операцию интегрирования тоже можно менять местами с операцией математического ожидания.

Для определения $K_y(t,t')$ перейдём к центрированным случайным функциям $\overset{\circ}{Y}(t)$ и $\overset{\circ}{X}(t)$;

очевидно: $\overset{\circ}{Y}(t) = \dfrac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}$.

По определению

$$K_y(t,t') = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')].$$

Подставим вместо $\overset{\circ}{Y}(t)$ и $\overset{\circ}{Y}(t')$ их выражения:

$$K_y(t,t') = M\left[\frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}\frac{d\overset{\circ}{X}(t')}{dt'}\right].$$

Мы доказали, что математическое ожидание производной случайной функции равно производной от математического ожидания, т. е. знаки дифференцирования и математического ожидания можно менять местами. Следовательно,

$$K_y(t,t') = M\left[\frac{\partial^2 \overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')}{\partial t \partial t'}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t,t').$$

Таким образом,

$$K_y(t,t') = \frac{\partial^2 K_x(t,t')}{\partial t \partial t'}.$$

Итак, чтобы найти корреляционную функцию производной, нужно дважды продифференцировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем - по другому.

Можно доказать, что такое правило является общим для всех линейных однородных операторов: **если случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t,t')$ преобразуется линейным однородным оператором L в случайную функцию,**

$$Y(t) = L\{X(t)\},$$

то для нахождения математического ожидания случайной функции $Y(t)$ нужно применить тот же оператор к математическому ожиданию случайной функции $X(t)$:

$$m_y(t) = L\{m_x(t)\},$$

а для нахождения корреляционной функции нужно дважды применить тот же оператор к корреляционной функции случайной функции $X(t)$, сначала по одному аргументу, затем - по другому:

$$K_y(t,t') = L^{(t)}L^{(t')}\{K_y(t,t')\}.$$

Во многих задачах практики нас, в конечном счёте, интересует не корреляционная функция $K_y(t,t')$ на выходе линейной системы, а дисперсия $D_y(t)$ характеризующая точность работы системы в условиях наличия случайных возмущений.

Дисперсию $D_y(t)$ можно найти, зная корреляционную функцию:

$$D_y(t) = K_y(t,t).$$

При этом нужно подчеркнуть, что, как правило, для определения дисперсии на выходе линейной системы недостаточно знать дисперсию на ее входе, а существенно важно знать корреляционную функцию.

Действительно, линейная система может совершенно по-разному реагировать на случайные возмущения, поступающие на ее вход, в зависимости от того, какова внутренняя структура этих случайных возмущений; состоят ли они, например, по преимуществу из высокочастотных или низкочастотных колебаний.

Внутренняя же структура случайного процесса описывается не его дисперсией, а корреляционной функцией.

Во многих задачах практики мы встречаемся с тем, что на вход динамической системы поступает не одна случайная функция $X(t)$, а две или более случайные функции, каждая из которых связана с действием отдельного возмущающего фактора. Возникает задача сложения случайных функций, точнее - задача определения характеристик суммы по характеристикам слагаемых.

Эта задача решается элементарно просто, если две складываемые случайные функции независимы (точнее, некоррелированные) между собой. В общем же случае для ее решения необходимо знание еще одной характеристики - так называемой взаимной корреляционной функции (иначе - корреляционной функции связи).

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t', которая при каждой паре значений t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции $X(t)$ и случайной функции $Y(t)$:

$$R_{xt}(t,t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')].$$

Взаимная корреляционная функция, так же как и обычная корреляционная функция, не изменяется при прибавлении к случайным функциям любых неслучайных слагаемых, а следовательно, и при центрировании случайных функций. Из определения взаимной корреляционной функции вытекает следующее ее свойство:

$$R_{xy}(t,t') = R_{xy}(t',t).$$

Вместо функции $R_{xy}(t,t')$ часто пользуются нормированной взаимной корреляционной функцией:

$$r_{xy}(t,t') = \frac{R_{xy}(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_y(t')}.$$

Если взаимная корреляционная функция равна нулю при всех значениях t, t', то случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются некоррелированными (несвязанными).

Зная математические ожидания и корреляционные функции двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, а также их взаимную корреляционную функцию, можно найти характеристики суммы этих двух случайных функций:

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

По теореме сложения математических ожиданий: $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)$,

т. е. при сложении двух случайных функций их математические ожидания складываются.

Для определения корреляционной функции $K_x(t,t')$ перейдём к центрированным случайным функциям $\overset{\circ}{Z}(t)$, $\overset{\circ}{X}(t)$, $\overset{\circ}{Y}(t)$. Очевидно,

$$\overset{\circ}{Z}(t) = \overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t).$$

По определению корреляционной функции

$$K_z(t,t') = M[\overset{\circ}{Z}(t)\overset{\circ}{Z}(t')] = M[(\overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t))(\overset{\circ}{X}(t') + \overset{\circ}{Y}(t'))] =$$

$$= M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] + M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] + M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] + M[\overset{\circ}{X}(t')\overset{\circ}{Y}(t)],$$

или

$$K_z(t,t') = K_x(t,t') + K_y(t,t') + R_{xy}(t,t') + R_{xy}(t',t).$$

В случае, когда случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированные, $R_{xy}(t,t')\equiv 0$, и формула принимает вид:

$$K_z(t,t') = K_x(t,t') + K_y(t,t'),$$

т. е. при сложении некоррелированных случайных функций их корреляционные функции складываются. Выведенные формулы могут быть обобщены на случай произвольного числа слагаемых.

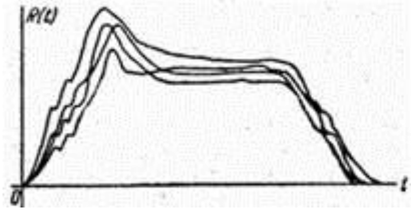
3. Понятие случайного процесса, примеры, виды. Стационарный случайный процесс: особенности и характеристики. Преобразование стационарного случайного процесса стационарной линейной системой.

На практике очень часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причём ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются стационарными. В качестве примеров стационарных случайных процессов можно привести: 1) колебания самолёта на установившемся режиме горизонтального полёта; 2) колебания напряжения в электрической осветительной сети; 3) случайные шумы в радиоприёмнике; 4) процесс качки корабля и т. п.

Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во времени неопределённо долго; при исследовании стационарного процесса в качестве начала отсчёта можно выбрать любой момент времени. Исследуя стационарный процесс на любом участке времени, мы должны получить одни и те же его характеристики. Образно выражаясь, стационарный процесс «не имеет ни начала, ни конца».

В противоположность стационарным случайным процессам можно указать другие, явно нестационарные случайные процессы, например: колебания самолета в режиме пикирования; процесс затухающих колебаний в электрической цепи; процесс горения порохового заряда в реактивной камере. Нестационарный процесс характерен тем, что он имеет определённую тенденцию развития во времени; характеристики такого процесса зависят от начала отсчёта, зависят от времени.

На рис. изображено семейство реализаций явно нестационарного случайного процесса - процесса изменения тяги двигателя реактивного снаряда во времени.



Заметим, что далеко не все нестационарные случайные процессы являются существенно нестационарными на всем протяжении своего развития. Существуют нестационарные процессы, которые (на известных отрезках времени и с известным приближением) могут быть приняты за стационарные.

Вообще, как правило, случайный процесс в любой динамической системе начинается с нестационарной стадии - с так называемого «переходного процесса». После затухания переходного процесса система обычно переходит на установившийся режим, и тогда случайные процессы, протекающие в ней, могут считаться стационарными.

Стационарные случайные процессы очень часто встречаются в физических и технических задачах. По своей природе эти процессы проще, чем нестационарные, и описываются более простыми характеристиками. Линейные преобразования стационарных случайных процессов также обычно осуществляются проще, чем нестационарных.

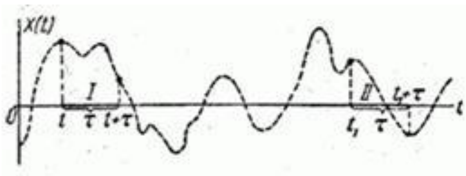
Так как изменение стационарной случайной функции должно протекать однородно по времени, то естественно потребовать, чтобы для стационарной случайной функции математическое ожидание было постоянным:

$$m_x(t) = m_x = \text{const}\ .$$

Заметим, однако, что это требование не является существенным: мы знаем, что от случайной функции $X(t)$ всегда можно перейти к центрированной случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, для которой математическое ожидание тождественно равно нулю и, следовательно, удовлетворяет условию. Таким образом, если случайный процесс нестационарен только за счёт переменного математического ожидания, это не мешает нам изучать его как стационарный процесс. Второе условие, которому, очевидно, должна удовлетворять стационарная случайная функция, - это условие постоянства дисперсии:

$$D_x(t) = D_x = \text{const}\ .$$

Установим, какому условию должна удовлетворять корреляционная функция стационарной случайной функции. Рассмотрим случайную функцию $X(t)$



Положим в выражении $K_x(t,t')$ $t' = t + \tau$ и рассмотрим $K_x(t,t+\tau)$ - корреляционный момент двух сечений случайной функции, разделённых интервалом времени τ. Очевидно, если случайный процесс $X(t)$ действительно стационарен, то этот корреляционный момент не должен зависеть от того, где именно на оси Ot мы взяли участок τ, а должен зависеть только от длины этого участка. Вообще, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна зависеть не от положения t первого аргумента на оси абсцисс, а только от промежутка τ между первым и вторым аргументами:

$$K_x(t,t+\tau) = k_x(\tau)\ .$$

Следовательно, корреляционная функция стационарного случайного процесса есть функция не двух, а всего одного аргумента. Это обстоятельство в ряде случаев сильно упрощает операции над стационарными случайными функциями.

Заметим, что условие, требующее от стационарной случайной функции постоянства дисперсии, является частным случаем.

$$D_x(t) = K_x(t,t) = k_x(0) = \text{const}\ .$$

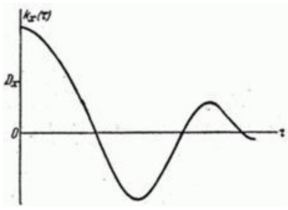
Таким образом, условие есть единственное существенное условие, которому должна удовлетворять стационарная случайная функция. Поэтому в дальнейшем мы под стационарной случайной функцией будем понимать такую случайную функцию, корреляционная функция которой зависит не от обоих своих аргументов t и t', а только от разности τ между ними. Чтобы не накладывать специальных условий на математическое ожидание, мы будем рассматривать только центрированные случайные функции.

Мы знаем, что корреляционная функция любой случайной функции обладает свойством симметрии:

$$K_x(t,t') = K_x(t',t)\ .$$

Отсюда для стационарного процесса, полагая $t' - t = \tau$, имеем: $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$,

т. е. корреляционная функция $k_x(\tau)$ есть чётная функция своего аргумента. Поэтому обычно корреляционную функцию определяют только для положительных значений аргумента.



На практике, вместо корреляционной функции $k_x(\tau)$, часто пользуются нормированной корреляционной функцией

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x},$$

где $D_x = k_x(0)$ - постоянная дисперсия стационарного процесса.

1.3 Лекция № 3 (2 часа)

Тема: «Спектральное разложение стационарной случайной функции»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Стационарный процесс с эргодическим свойством и без него, примеры. Характеристики стационарного процесса с эргодическим свойством.
2. Характеристики внутренней структуры колебательных процессов.
3. Спектральное разложение стационарной случайной функции на конечном участке времени. Спектр дисперсий.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Стационарный процесс с эргодическим свойством и без него, примеры.

Рассмотрим некоторую стационарную случайную функцию $X(t)$ и предположим, что требуется оценить ее характеристики: математическое ожидание m_x и корреляционную функцию $k_x(\tau)$.

Для этого нужно располагать известным числом реализаций случайной функции $X(t)$. Обрабатывая эти реализации, можно найти оценки для математического ожидания $\tilde{m}_x(t)$ и корреляционной функции $\tilde{K}_x(t,t')$. В связи с ограниченностью числа наблюдений функция $\tilde{m}_x(t)$ не будет строго постоянной; ее придется усреднить и заменить некоторым постоянным $\tilde{m}_x$; аналогично, усредняя значения $\tilde{K}_x(t,t')$ для разных $\tau = t' - t$, получим корреляционную функцию $\tilde{k}_x(\tau)$.

Этот метод обработки, очевидно, является довольно сложным и громоздким. Естественно возникает вопрос: нельзя ли для стационарной случайной функции этот сложный, двухступенчатый процесс обработки заменить более простым, который заранее базируется на предположении, что математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция - от начала отсчета?

Кроме того, возникает вопрос: при обработке наблюдений над стационарной случайной функцией является ли существенно необходимым располагать несколькими реализациями? Поскольку случайный процесс является стационарным и протекает однородно по времени, естественно предположить, что одна-единственная реализация достаточной продолжительности может служить достаточным опытным материалом для получения характеристик случайной функции. При более подробном рассмотрении этого вопроса оказывается, что такая возможность существует не для всех случайных процессов: не всегда одна реализация достаточной продолжительности оказывается эквивалентной множеству отдельных реализаций.

Для примера рассмотрим две стационарные случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$, представленные совокупностью своих реализаций на рис. 1 и 2.

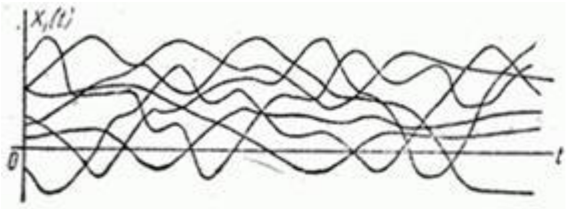


Рис. 1.

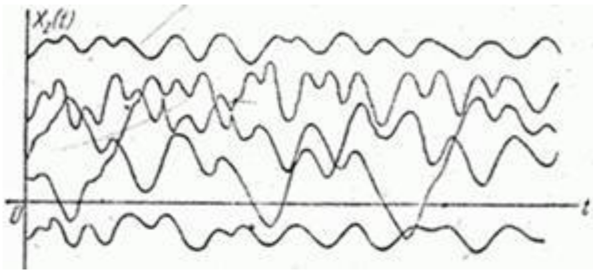


Рис.2.

Для случайной функции $X_1(t)$ характерна следующая особенность: каждая из ее реализаций обладает одними и теми же характерными признаками: средним значением, вокруг которого происходят колебания, и средним размахом этих колебаний. Выберем произвольно одну из таких реализаций и продолжим мысленно опыт, в результате которого она получена, на некоторый участок времени T .

Очевидно, что при достаточно большом T , эта реализация сможет дать нам хорошее представление о свойствах случайной функции в целом.

В частности, усредняя значения этой реализации вдоль оси абсцисс - по времени, мы должны получить приближенное значение математического ожидания случайной функции; усредняя квадраты отклонений от этого среднего, мы должны получить приближенное значение дисперсии, и т. д.

Про такую случайную функцию говорят, что она обладает эргодическим свойством. Эргодическое свойство состоит в том, что каждая отдельная реализация случайной функции является как бы «полномочным представителем» всей совокупности возможных реализаций; одна реализация достаточной продолжительности может заменить при обработке множество реализаций той же общей продолжительности.

Рассмотрим теперь случайную функцию $X_2(t)$. Выберем произвольно одну из ее реализаций, продолжим ее мысленно на достаточно большой участок времени и вычислим ее среднее значение по времени на всем участке наблюдения. Очевидно, это среднее значение для каждой реализации будет свое и может существенно отличаться от математического ожидания случайной функции, построенного как среднее из множества реализаций. Про такую случайную функцию говорят, что она не обладает эргодическим свойством.

Если случайная функция $X(t)$ обладает эргодическим свойством, то для неё среднее по времени (на достаточно большом участке наблюдения) приближённо равно среднему по множеству наблюдений.

То же будет верно и для $X^2(t)$, $X(t)\cdot X(t+\tau)$ и т. д. Следовательно, все характеристики случайной функции (математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию) можно будет приближённо определять по одной достаточно длинной реализации.

Какие же стационарные случайные функции обладают, а какие не обладают эргодическим свойством?

Характеристики стационарного процесса с эргодическим свойством.

Пусть для случайного процесса характерно то, что он как бы «разложим» на более элементарные случайные процессы; каждый из них осуществляется с некоторой вероятностью и имеет свои индивидуальные характеристики. Таким образом, разложимость, внутренняя неоднородность случайного процесса, протекающего с некоторой вероятностью по тому или другому типу, есть физическая причина неэргодичности этого процесса.

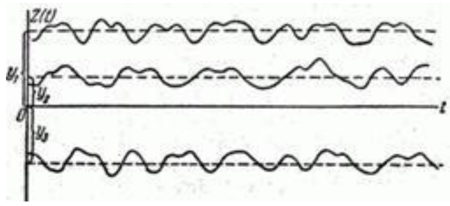
В частности, неэргодичность случайного процесса может быть связана с наличием в его составе слагаемого в виде обычной случайной величины (т. е. наличие в спектре случайного процесса, помимо непрерывной части, конечной дисперсии при частоте 0).

Действительно, рассмотрим случайную функцию $Z(t) = X(t) + Y$,

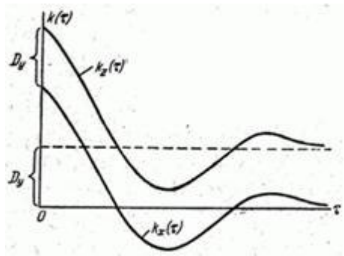
где $X(t)$ - эргодическая стационарная случайная функция с характеристиками m_x, $k_x(\tau)$; Y - случайная величина с характеристиками m_y и D_y; предположим к тому же, что $X(t)$ и Y некоррелированные. Определим характеристики случайной функции $Z(t)$. Согласно общим правилам сложения случайных функций имеем:

$m_z = m_x + m_y$, $\quad k_z(\tau) = k_x(\tau) + D_y$.

Из формул видно, что случайная функция $Z(t)$ является стационарной. Но обладает ли она эргодическим свойством? Очевидно, нет. Каждая ее реализация будет по характеру отличаться от других, будет обладать тем или иным средним по времени значением в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина Y .



Об эргодичности или неэргодичности случайного процесса может непосредственно свидетельствовать вид его корреляционной функции. Действительно, рассмотрим корреляционную функцию неэргодической случайной функции. Она отличается от корреляционной функции случайной функции $X(t)$ наличием постоянного слагаемого D_y.



В то время как корреляционная функция $k_x(\tau)$ стремится к нулю при $\tau \to \infty$ (корреляционная связь между значениями случайной функции неограниченно убывает по мере увеличения расстояния между ними), функция $k_x(\tau)$ уже не стремится к нулю при $t \to \infty$, а приближается к постоянному значению D_y.

На практике мы не имеем возможности исследовать случайный процесс и его корреляционную функцию на бесконечном участке времени; участок значений τ, с которым мы имеем дело, всегда ограничен.

Пусть корреляционная функция стационарного случайного процесса при увеличении τ не убывает, а, начиная с некоторого τ, остается приблизительно постоянной. Это обычно есть признак того, что в составе случайной функции имеется слагаемое в виде обычной случайной величины и что процесс не является эргодическим. Стремление же корреляционной функции к нулю при $t \to \infty$ говорит в пользу эргодичности процесса. Во всяком случае, оно достаточно для того, чтобы математическое ожидание функции можно было определять как среднее по времени.

2. Характеристики внутренней структуры колебательных процессов.

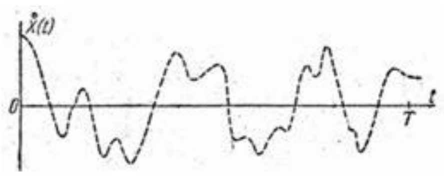
На различных примерах, приведённых ранее, мы наглядно убедились в том, что существует связь между характером корреляционной функции и внутренней структурой соответствующего ей случайного процесса. В зависимости от того, какие частоты и в каких соотношениях преобладают в составе случайной функции, ее корреляционная функция имеет тот или другой вид. Из таких соображений мы непосредственно приходим к понятию о спектральном составе случайной функции.

Понятие «спектра» встречается не только в теории случайных функций; оно широко применяется в математике, физике и технике.

Если какой-либо колебательный процесс представляется в виде суммы гармонических колебаний различных частот (так называемых «гармоник»), то спектром колебательного процесса называется функция, описывающая распределение амплитуд по различным частотам. Спектр показывает, какого рода колебания преобладают в данном процессе, какова его внутренняя структура.

Совершенно аналогичное спектральное описание можно дать и стационарному случайному процессу; вся разница в том, что для случайного процесса амплитуды колебаний будут случайными величинами. Спектр стационарной случайной функции будет описывать распределение дисперсий по различным частотам. Подойдём к понятию о спектре стационарной случайной функции из следующих соображений.

Рассмотрим стационарную случайную функцию $\overset{\circ}{X}(t)$, которую мы наблюдаем на интервале $(0, T)$.



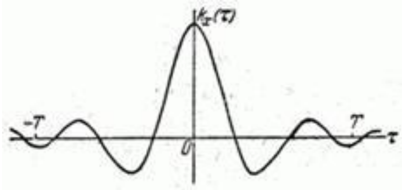
Задана корреляционная функция случайной функции $X(t)$

$$K_x(t, t+\tau) = k_x(\tau).$$

Функция $k_x(\tau)$ есть чётная функция:

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau)$$

и, следовательно, на графике изобразится симметричной кривой .



При изменении t и t' от 0 до T аргумент $\tau = t' - t$ изменяется от $-T$ до $+T$.

Мы знаем, что чётную функцию на интервале $(-T, T)$ можно разложить в ряд Фурье, пользуясь только чётными (косинусными) гармониками:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau ,$$

где

$$\omega_k = k\omega_1 ; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T} ,$$

а коэффициенты D_k определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)d\tau, \\ D_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)\cos \omega_k \tau d\tau, \quad \text{при } k \neq 0. \end{aligned}\right\}$$

Имея в виду, что функции $k_x(\tau)$ и $\cos \omega_k \tau$ чётные, можно преобразовать формулы к виду:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} k_x(\tau)d\tau, \\ D_k &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} k_x(\tau)\cos \omega_k \tau d\tau, \quad \text{при } k \neq 0. \end{aligned}\right\}$$

3. Спектральное разложение стационарной случайной функции на конечном участке времени. Спектр дисперсий.

Перейдём в выражении корреляционной функции $k_x(\tau)$ от аргумента τ снова к двум аргументам t и t'. Для этого положим

$$\cos \omega_k \tau = \cos \omega_k (t' - t) = \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + \sin \omega_k t' \sin \omega_k t$$

и подставим это выражение в формулу:

$$k_x(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} (D_k \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t' \sin \omega_k t) .$$

Мы видим, что выражение есть не что иное, как каноническое разложение корреляционной функции $K_x(t, t')$. Координатными функциями этого канонического разложения являются попеременно косинусы и синусы частот, кратных ω_1 :

$$\cos \omega_k t, \sin \omega_k t \qquad (k = 0, 1, \ldots) .$$

Мы знаем, что по каноническому разложению корреляционной функции можно построить каноническое разложение самой случайной функции с теми же координатными функциями и с дисперсиями, равными коэффициентам D_k в каноническом разложении корреляционной функции.

Следовательно, случайная функция $\overset{\circ}{X}(t)$ может быть представлена в виде канонического разложения:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

где U_k, V_k - некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, одинаковыми для каждой пары случайных величин с одним и тем же индексом k:

$$D[U_k] = D[V_k] = D_k.$$

Таким образом, мы получили на интервале $(0, T)$ каноническое разложение случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, координатными функциями которого являются функции $\cos \omega_k t$, $\sin \omega_k t$ при различных ω_k. Разложение такого рода называется спектральным разложением стационарной случайной функции. Спектральное разложение изображает стационарную случайную функцию разложенной на гармонические колебания различных частот:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots,$$

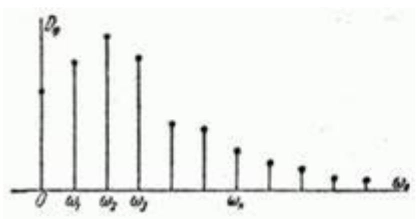
причём амплитуды этих колебаний являются случайными величинами.

Определим дисперсию случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, заданной спектральным разложением. По теореме о дисперсии линейной функции некоррелированных случайных величин

$$D_x = D[\overset{\circ}{X}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} (\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Таким образом, дисперсия стационарной случайной функции равна сумме дисперсий всех гармоник ее спектрального разложения. Формула показывает, что дисперсия функции $\overset{\circ}{X}(t)$ известным образом распределена по различным частотам: одним частотам соответствуют большие дисперсии, другим - меньшие.

Распределение дисперсий по частотам можно проиллюстрировать графически в виде так называемого спектра стационарной случайной функции (точнее - спектра дисперсий). Для этого по оси абсцисс откладываются частоты $\omega_0 = 0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots$, а по оси ординат - соответствующие дисперсии.



Очевидно, сумма всех ординат построенного таким образом спектра равна дисперсии случайной функции.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № 1 (2 часа).

Тема: «Обработка опытов. Аппроксимация функций в среде MathCAD. Характеристики случайной функции»

2.1.1 Цель работы: ознакомиться с возможностями аппроксимации опытных данных на примере метода наименьших квадратов; научиться решать задачу численной аппроксимации при работе с таблично заданными функциями. Усвоить вероятностный смысл и назначение характеристик случайной функции; изучить методы оценки характеристик по опытным данным.

2.1.2 Задачи работы:

1. Постановка задачи численной аппроксимации.
2. Аппроксимация таблично заданных функций методом наименьших квадратов.
3. Свойства и вероятностный смысл характеристик.
4. Определение характеристик случайной функции из опыта.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.1.4 Описание (ход) работы:

1. Производится *n* наблюдений (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)переменных *x* и *y.* Предполагая, что между *x* и *y* существует зависимость вида $y = f(x)$, найти значения параметров *a и b*, наилучшим образом согласованные с экспериментальными данными.

Согласно методу наименьших квадратов параметры функции следует выбирать так, чтобы сумма квадратов невязок была наименьшей.

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - y_i\right)^2$$

2. Если $f(x)$ — линейная функция, т.е. $y = ax + b$, то $S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$, а неизвестные параметры *a* и *b* определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ \sum_{i-1}^{n} x_i \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

3. Если $f(x)$ — квадратичная функция, т.е. $y = ax^2 + bx + c$, то $S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$, а неизвестные параметры *a, b, c* определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot c = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i, \\ \sum_{i-1}^{n} x_i^3 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot c = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b + n \cdot c = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

4. Линейная регрессия

Для расчета линейной регрессии в MathCAD необходимо воспользоваться следующими операторами:

- line (x,y) - вектор из двух элементов (*b,a*) коэффициентов линейной регрессии $y = b + ax$;
- intercept (x, y) - коэффициент *b* линейной регрессии;

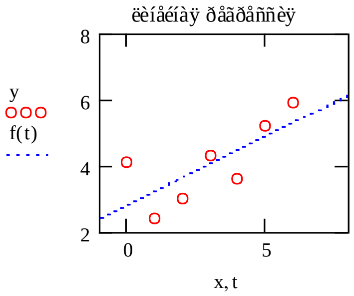
- slope (x, y) - коэффициент a линейной регрессии;
- x - вектор действительных данных аргумента;
- y - вектор действительных данных значений того же размера.

Пример 1. Линейная регрессия

$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$ $\qquad$ $y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$

$\mathrm{line}(x,y) = \begin{pmatrix} 2.829 \\ 0.414 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{intercept}(x,y) = 2.829$ $\qquad$ $\mathrm{slope}(x,y) = 0.414$

$f(t) := \mathrm{line}(x,y)_0 + \mathrm{line}(x,y)_1 \cdot t$



Пример 2. Имеются следующие данные о расходах на рекламу x (тыс. усл. ед) и сбыте продукции y (тыс. ед):

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y_i	**1,6**	**4,0**	**7,4**	**12,0**	**18,0**

Методом наименьших квадратов найти эмпирические формулы прямой $y = ax + b$ и многочлена второй степени $y = ax^2 + bx + c$, аппроксимирующие функцию, заданную таблично. Найти значение многочленов первой и второй степеней в заданных точках, абсолютную погрешность в них и среднеквадратическую погрешность.

Выяснить, какая зависимость предпочтительнее. Построить графики. Для этой же функции построить многочлен первой степени, пользуясь встроенными функциями системы MathCAD для линейной регрессии. Графически сравнить полученные результаты.

Решение:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\, y_i$	$x_i^2\, y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4,0	4	8	16	8,0	16,0
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12,0	16	64	256	48,0	196,0
5	5	18,0	25	125	625	90,0	450,0
$\sum$	**15**	**43,0**	**55**	**225**	**979**	**169,8**	**680,2**

Система нормальных уравнений имеет вид: $\begin{cases} 55a + 15b = 169{,}8, \\ 15a + 5b = 43. \end{cases}$ Её решения a=4,08, b=-3,64. Таким образом, линейная зависимость имеет вид: $y = 4{,}08x - 3{,}64$.

Система нормальных уравнений имеет вид: $\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 680{,}2, \\ 225a + 55b + 15c = 168{,}8, \\ 55a + 15b + 5c = 49{,}0. \end{cases}$ Её решения a=0,3, b=0,48, c=5,06. Таким образом, искомая квадратичная зависимость имеет вид: $y = 0{,}3x^2 + 0{,}48x + 5{,}06$.

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)$ - абсолютная погрешность для линейной зависимости

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ - среднеквадратическая погрешность для линейной зависимости

$[4{,}08 \cdot 1 - 3{,}64 - 1{,}6]^2 = [-1{,}16]^2 = 1{,}3456$ $\quad$ $[4{,}08 \cdot 2 - 3{,}64 - 4]^2 = [0{,}52]^2 = 0{,}2704$

$[4{,}08 \cdot 3 - 3{,}64 - 7{,}4]^2 = [1{,}2]^2 = 1{,}44$ $\quad$ $[4{,}08 \cdot 4 - 3{,}64 - 12]^2 = [0{,}68]^2 = 0{,}4624$

$$[4{,}08 \cdot 5 - 3{,}64 - 18]^2 = [-1{,}24]^2 = 1{,}5376$$

$$\sum_{i=1}^{5}(4{,}08x_i - 3{,}64 - y_i) = -1{,}16 + 0{,}52 + 1{,}2 + 0{,}68 - 1{,}24 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5}(4{,}08x_i - 3{,}64 - y_i)^2 = 1{,}3456 + 0{,}2704 + 1{,}44 + 0{,}4624 + 1{,}5376 = 5{,}056$$

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)$ - абсолютная погрешность для квадратичной зависимости

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ - среднеквадратическая погрешность для квадратичной зависимости

$[0{,}3 \cdot 1^2 + 0{,}48 \cdot 1 + 5{,}06 - 1{,}6]^2 = [4{,}24]^2 = 17{,}9776$ $\quad$ $[0{,}3 \cdot 2^2 + 0{,}48 \cdot 2 + 5{,}06 - 4]^2 = [3{,}22]^2 = 10{,}3684$

$[0{,}3 \cdot 3^2 + 0{,}48 \cdot 3 + 5{,}06 - 7{,}4]^2 = [1{,}8]^2 = 3{,}24$ $\quad$ $[0{,}3 \cdot 4^2 + 0{,}48 \cdot 4 + 5{,}06 - 12]^2 = [-0{,}22]^2 = 0{,}0484$

$$[0{,}3 \cdot 5^2 + 0{,}48 \cdot 5 + 5{,}06 - 18]^2 = [-3{,}04]^2 = 9{,}2416$$

$$\sum_{i=1}^{5}(0{,}3x_i^2 + 0{,}48x_i + 5{,}06 - y_i) = 4{,}24 + 3{,}22 + 1{,}8 - 0{,}22 - 3{,}04 = 6$$

$$\sum_{i=1}^{5}(0{,}3x_i^2 + 0{,}48x_i + 5{,}06 - y_i)^2 = 17{,}9776 + 10{,}3684 + 3{,}24 + 0{,}0484 + 9{,}2416 = 40{,}876$$

Как видно $S_{лин} < S_{кв}$, следовательно, линейная зависимость предпочтительнее.

$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)^T$ $\qquad$ $y := (1.6\ \ 4\ \ 7.4\ \ 12\ \ 18)^T$

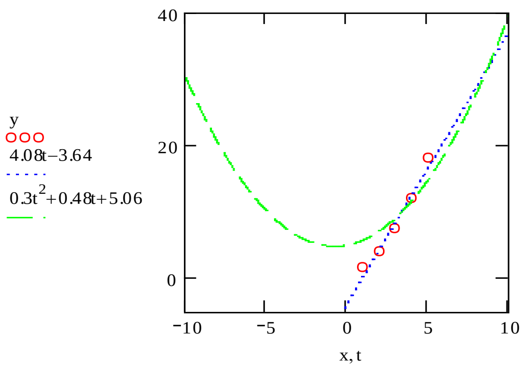


Рис. Изображение в ДСК опытных точек, линейной и квадратичной зависимостей

$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)^T \qquad y := (1.6\ \ 4\ \ 7.4\ \ 12\ \ 18)^T$

$$\mathrm{line}(x,y) = \begin{pmatrix} -3.64 \\ 4.08 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{intercept}(x,y) = -3.64 \\ \mathrm{slope}(x,y) = 4.08 \end{array}$$

$$f(t) := \mathrm{line}(x,y)_0 + \mathrm{line}(x,y)_1 \cdot t$$

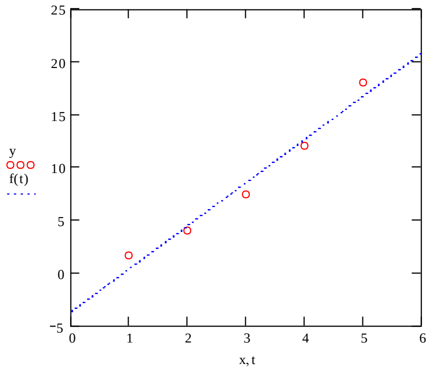
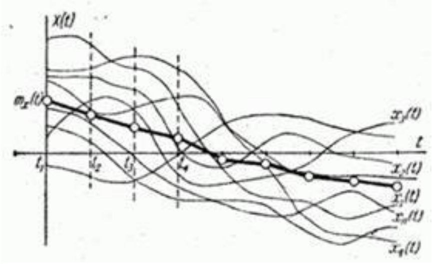


Рис. Изображение в ДСК опытных точек и графика линейной регрессии

3. Пусть над случайной функцией $X(t)$ произведено n независимых опытов (наблюдений) и в результате получено n реализаций случайной функции .



Требуется найти оценки для характеристик случайной функции: ее математического ожидания $m_x(t)$, дисперсии $D_x(t)$ и корреляционной функции $K_x(t,t')$. Для этого рассмотрим ряд сечений случайной функции для моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ и зарегистрируем значения, принятые функцией $X(t)$ в эти моменты времени. Каждому из моментов $t_1, t_2, \dots, t_m$ будет соответствовать n значений случайной функции.

Значения $t_1, t_2, \dots, t_m$ обычно задаются равноотстоящими точками: величина интервала между соседними значениями выбирается в зависимости от вида экспериментальных кривых так, чтобы по выбранным точкам можно было восстановить основной ход кривых. Зарегистрированные значения $X(t)$ заносятся в таблицу, каждая строка которой соответствует определенной реализации, а число столбцов равно числу опорных значений аргумента.

Таблица 1

t $X(t)$	t_1	t_2	$\cdots$	t_k	$\cdots$	t_l	$\cdots$	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	$\cdots$	$x_1(t_k)$	$\cdots$	$x_1(t_l)$	$\cdots$	$x_1(t_m)$
$x_1(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	$\cdots$	$x_2(t_k)$	$\cdots$	$x_2(t_l)$	$\cdots$	$x_2(t_m)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	$x_i(t_2)$	$\cdots$	$x_i(t_k)$	$\cdots$	$x_i(t_l)$	$\cdots$	$x_i(t_m)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	$\cdots$	$x_n(t_k)$	$\cdots$	$x_n(t_l)$	$\cdots$	$x_n(t_m)$

В таблице 1 в i-й строке помещены значения случайной функции, наблюденной в i-й реализации (i-м опыте) при значениях аргумента $t_1, t_2, \dots, t_m$. Символом $x_i(t_k)$ обозначено

значение, соответствующее i-й реализации в момент t_k. Полученный материал представляет собой не что иное, как результаты n опытов над системой m случайных величин
$X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m)$,

Прежде всего находятся оценки для математических ожиданий по формуле

$$\tilde{m}_k(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(t_k)}{n},$$ затем - для дисперсий $$\tilde{D}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k) \right]^2}{n-1}$$

и, наконец, для корреляционных моментов

$$\tilde{K}_x(t_k, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k) \right] \left[x_i(t_l) - \tilde{m}_x(t_l) \right]}{n-1}.$$

После того, как эти характеристики вычислены, можно, пользуясь рядом значений $\tilde{m}_x(t_1), \tilde{m}_x(t_2), \ldots, \tilde{m}_x(t_m)$, построить зависимость $\tilde{m}_x(t)$. Аналогично строится зависимость $\tilde{D}_x(t)$. Функция двух аргументов $\tilde{K}_x(t, t')$ воспроизводится по ее значениям в прямоугольной сетке точек. В случае надобности все эти функции аппроксимируются какими-либо аналитическими выражениями.

Контрольные вопросы

1. Что значит аппроксимировать табличную функцию?
2. Какая функция называется эмпирической? Назовите этапы получения эмпирической формулы. Как определить общий вид эмпирической формулы?
3. В чём заключается принцип Лежандра?
4. Можно ли утверждать, что случайной называется функция случайного аргумента?
5. Можно ли рассматривать случайную функцию как совокупность всех ее возможных сечений?
6. Чему равно математическое ожидание центрированной случайной функции?
7. Дана случайная функция, найти ее характеристики. Так формулируется задача анализа или синтеза?
8. Дайте геометрическую интерпретацию математического ожидания случайной функции при фиксированном значении аргумента.
9. Что называется дисперсией случайной функции? Каковы основные свойства дисперсии?
10. Что называется корреляционной функцией случайной функции? Почему это функция двух аргументов? Каковы ее основные свойства?
11. Случайная функция всегда является функцией времени?

2.2 Лабораторная работа № 2 (2 часа).

Тема: «Динамические системы. Характеристики стационарной случайной функции. Метод канонических разложений случайных функций»

2.2.1 Цель работы: изучить основные понятия, связанные с теорией динамических систем; рассмотреть классические модели динамических систем; усвоить вероятностный смысл, назначение и особенности характеристик стационарной случайной функции; изучить методы оценки характеристик по опытным данным; изучить теоретические основания метода канонических разложений, выявить и проанализировать особенности метода в ходе решения практических задач

2.2.2 Задачи работы:

1. Постановка задачи. Фазовый портрет динамической системы.

2. Классические динамические системы: автоколебания, аттрактор, брюсселятор

3. Линейные преобразования стационарных случайных функций.

4. Методы определения характеристик преобразованных стационарных случайных функций по характеристикам исходных стационарных случайных функций.

5. Представление случайной функции в виде суммы элементарных случайных функций.

6. Каноническое разложение случайной функции. Линейные преобразования случайных функций, заданных каноническими разложениями.

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

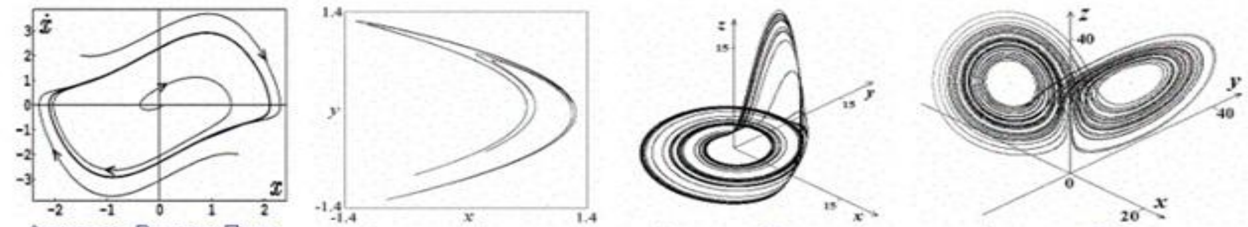
2.2.4 Описание (ход) работы:

1. 2. Динамические системы можно классифицировать в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства. Если оператор предусматривает исключительно линейные преобразования начального состояния, то он называется линейным. Линейный оператор обладает свойством суперпозиции: T[x(t)+y(t)]=Tx(t)+Ty(t). Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется нелинейной. Различают непрерывные и дискретные операторы и соответственно системы с непрерывным и дискретным временем.

Способы задания оператора T также могут различаться. Оператор T можно задать в виде дифференциального или интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т.д.

В зависимости от того, какой ряд значений могут принимать фазовые координаты, определяющие состояние системы, различают непрерывные и дискретные фазовые пространства.

Поведение динамических систем изучают в «пространстве состояний». Точка в этом пространстве однозначно задает состояние системы. В простейшем случае, например, для маятника – это плоскость (координата, скорость). Притягивающие объекты в фазовом пространстве – аттракторы – определяют свойства установившегося с течением времени колебательного процесса в системе. Аттрактор (от английского to attract - притягивать) может иметь вид простой замкнутой кривой. Это предельный цикл, являющийся образом автоколебаний.



Аттрактор Ван-дер-Поля Аттрактор Хенона Аттрактор Рёсслера Аттрактор Лоренца

Благодаря посещению различных областей в трехмерном пространстве фазовая траектория может «запутаться», что приводит к возникновению хаотических режимов. Основной атрибут хаоса – наличие очень сильной зависимости режима от начальных условий. В результате даже очень малое различие в начальных состояниях системы со временем приведет к существенному различию в поведении.

Задание

1. Дана функция $f(z)=z^2+c$, показать, что это множество не симметрично оси ординат. (Подсказка: c=-1 принадлежит множеству, c=1 не принадлежит множеству, далее исследовать орбиту нуля при обоих отображениях).

2. Дана функция $f(z)=z^2+0,1+0,1i$ найти неподвижные точки для этой функции и выяснить их характер двумя способами: 1) аналитический способ (через производную);
2) компьютерный эксперимент.

3. (Компьютерный эксперимент). Используйте компьютер для получения изображений множества Мандельброта для $f(z)=z^3+c$. Покажите, что если |c|>2, то z →∞.

4. Построить фазовые портреты динамических систем, заданные следующими операторами

$$y' = \frac{x-4y}{2y-3x}. \qquad\qquad y' = \frac{y-2x}{y}.$$

2.

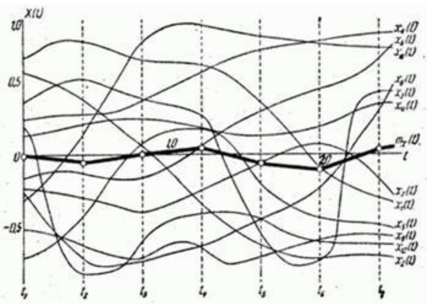
3. Случайная функция $X(t)$ называется стационарной, если все ее вероятностные характеристики не зависят от t (точнее, не меняются при любом сдвиге аргументов, от которых они зависят, по оси t). Так как изменение стационарной случайной функции должно протекать однородно по времени, то математическое ожидание должно быть постоянным.

Это требование не является существенным: мы знаем, что от случайной функции $X(t)$ всегда можно перейти к $\overset{\circ}{X}(t)$, для которой математическое ожидание тождественно равно нулю. Таким образом, если случайный процесс нестационарен только за счет переменного математического ожидания, это не мешает нам изучать его как стационарный процесс. Вообще, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна зависеть не от положения t первого аргумента на оси абсцисс, а только от промежутка τ между первым и вторым аргументами.

Поэтому в дальнейшем мы под стационарной случайной функцией будем понимать такую случайную функцию, корреляционная функция которой зависит не от обоих своих аргументов t и t', а только от разности τ между ними.

В качестве примеров рассмотрим два образца приблизительно стационарных случайных процессов и построим их характеристики.

Пример 1. Случайная функция $X(t)$ задана совокупностью 12 реализаций (рис. 1). а) Найти ее характеристики $m_x(t)$, $K_x(t,t')$, $D_x(t)$ и нормированную корреляционную функцию $r_x(t,t')$. б) Приближенно рассматривая случайную функцию $X(t)$ как стационарную, найти ее характеристики.



Решение. Так как случайная функция $X(t)$ меняется сравнительно плавно, можно брать сечения не очень часто, например через 0,4 сек. Тогда случайная функция будет сведена к системе семи случайных величин, отвечающих сечениям $t = 0;\ 0,4;\ 0,8;\ 1,2;\ 1,6;\ 2,0;\ 2,4$. Намечая эти сечения на графике и снимая с графика значения случайной функции в этих сечениях, получим таблицу (табл. 1).

Таблица 1

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4

№ реализации							
1	0,64	0,74	0,62	0,59	0,35	-0,09	0,39
2	0,54	0,37	0,06	-0,32	-0,60	-0,69	-0,67
3	0,34	0,50	0,37	0,26	-0,52	-0,72	0,42
4	0,23	0,26	0,35	0,55	0,69	0,75	0,80
5	0,12	0,20	0,24	0,18	-0,20	-0,42	-0,46
6	-0,16	-0,12	-0,15	0,05	0,29	0,43	0,63
7	-0,22	-0,29	-0,38	-0,24	-0,06	0,07	-0,16
8	-0,26	-0,69	-0,70	-0,61	-0,43	-0,22	0,29
9	-0,50	-0,60	-0,68	-0,62	-0,68	-0,56	-0,54
10	-0,30	0,13	0,75	0,84	0,78	0,73	0,71
11	-0,69	-0,40	0,08	0,16	0,12	0,18	0,33
12	0,18	-0,79	-0,56	-0,39	-0,42	-0,58	-0,53

Таблицу рекомендуется заполнять по строчкам, передвигаясь все время вдоль одной реализации. Далее находим оценки для характеристик случайных величин $X(0), X(0,4), ..., X(2,4)$. Суммируя значения по столбцам и деля сумму на число реализаций $n = 12$, найдем приближенно зависимость математического ожидания от времени:

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\tilde{m}_x(t)$	-0,007	-0,057	0,000	0,037	-0,057	-0,093	0,036

Далее находим оценки для элементов корреляционной матрицы: дисперсий и корреляционных моментов. Вычисления удобнее всего производить по следующей схеме. Для вычисления статистической дисперсии суммируются квадраты чисел, стоящих в соответствующем столбце; сумма делится на $n = 12$; из результата вычитается квадрат соответствующего математического ожидания. Для получения несмещенной оценки результат множится на поправку $\frac{n}{n-1} = \frac{12}{11}$. Аналогично оцениваются корреляционные моменты.

Для вычисления статистического момента, отвечающего двум заданным сечениям, перемножаются числа, стоящие в соответствующих столбцах; произведении складываются алгебраически; полученная сумма делится на $n = 12$; из результата вычитается произведение соответствующих математических ожиданий; для получения несмещенной оценки корреляционного момента результат множится на $\frac{n}{n-1}$.

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\tilde{D}_x(t)$	0,1632	0,2385	0,2356	0,2207	0,2407	0,2691	0,278

Извлекая из этих величин квадратные корни, найдем зависимость среднего квадратического отклонения $\tilde{\sigma}_x$ от времени:

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\tilde{\sigma}_x(t)$	0,404	0,488	0,485	0,470	0,491	0,519	0,536

Деля полученные значения на произведения соответствующих средних квадратических отклонений, получим таблицу значений нормированной корреляционной функции $\tilde{r}_x(t,t')$ (табл. 2).

Таблица 2

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4

t'							
0	1	0,700	0,405	0,241	-0,053	-0,306	-0,299
0,4		1	0,856	0,707	0,345	0,090	0,095
0,8			1	0,943	0,643	0,390	0,344
1,2				1	0,829	0,612	0,524
1,6					1	0,923	0,650
2,0						1	0,760
2,4							1

Если судить непосредственно по данным, полученным в результате обработки, то можно прийти к выводу, что случайная функция $X(t)$ стационарной не является: ее математическое ожидание не вполне постоянно; дисперсия также несколько меняется со временем; значения нормированной корреляционной функции вдоль параллелей главной диагонали также не вполне постоянны. Однако, принимая во внимание весьма ограниченное число обработанных реализаций ($n=12$) и в связи с этим наличие большого элемента случайности в полученных оценках, эти видимые отступления от стационарности вряд ли можно считать значимыми, тем более, что они не носят сколько-нибудь закономерного характера. Поэтому вполне целесообразной будет приближенная замена функции $X(t)$ стационарной. Для приведения функции к стационарной прежде всего осредним по времени оценки для математического ожидания:

$$\tilde{m}_x = \frac{\tilde{m}_x(0)+\tilde{m}_x(0,4)+...+\tilde{m}_x(2,4)}{7} \approx -0,22.$$

Аналогичным образом осредним оценки для дисперсии:

$$\tilde{D}_x = \frac{\tilde{D}_x(0)+\tilde{D}_x(0,4)+...+\tilde{D}_x(2,4)}{7} \approx 0,236.$$

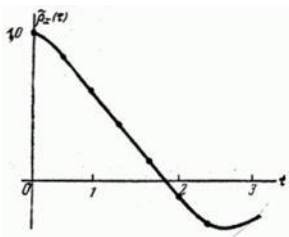
Извлекая корень, найдем осредненную оценку с. к. о.:

$$\tilde{\sigma}_x \approx 0,486.$$

Перейдем к построению нормированной корреляционной функции того стационарного процесса, которым можно заменить случайную функцию $X(t)$. Для стационарного процесса корреляционная функция (а значит, и нормированная корреляционная функция) зависит только от $\tau = t' - t$; следовательно, при постоянном τ корреляционная функция должна быть постоянной. В таблице 2 постоянному τ соответствуют: главная диагональ ($\tau = 0$) и параллели этой диагонали ($\tau = 0,4$; $\tau = 0,8$; $\tau = 1,2$ и т. д.). Осредняя оценки нормированной корреляционной функции вдоль этих параллелей главной диагонали, получим значения функции $\rho_x(\tau)$:

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\tilde{\rho}_x(\tau)$	1,00	0,84	0,60	0,38	0,13	-0,10	-0,30

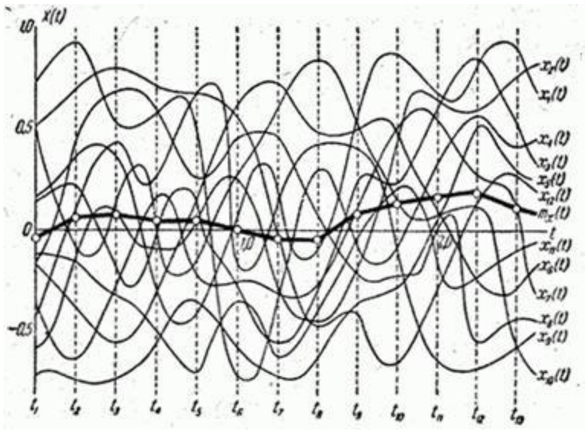
График функции $\tilde{\rho}_x(\tau)$ представлен на рис. 3



При рассмотрении рис. обращает на себя внимание наличие для некоторых τ отрицательных значений корреляционной функции. Это указывает на то, что в структуре случайной функции имеется некоторый элемент периодичности, в связи с чем на расстоянии по времени, равном примерно половине периода основных колебаний, наблюдается отрицательная корреляция между значениями случайной функции: положительным отклонениям от среднего в одном сечении соответствуют отрицательные отклонения через определенный промежуток времени, и наоборот.

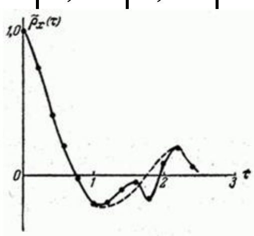
Такой характер корреляционной функции, с переходом на отрицательные значения, очень часто встречается на практике. Обычно в таких случаях по мере увеличения τ амплитуда колебаний корреляционной функции уменьшается и при дальнейшем увеличении τ корреляционная функция стремится к нулю.

Пример 2. Случайная функция $X(t)$ задана совокупностью 12 своих реализаций (рис. 4). Приближенно заменив функцию $X(t)$ стационарной, сравнить ее нормированную корреляционную функцию с функцией $\tilde{\rho}_x(\tau)$ предыдущего примера.



Решение. Так как случайная функция $X(t)$ отличается значительно менее плавным ходом по сравнению с функцией $X(t)$ предыдущего примера, промежуток между сечениями уже нельзя брать равным 0,4 сек, как в предыдущем примере, а следует взять по крайней мере вдвое меньше (например, 0,2 сек.). В результате обработки получаем оценку для нормированной корреляционной функции $\tilde{\rho}_x(\tau)$:

τ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$\tilde{\rho}_x(\tau)$	1,00	0,73	0,41	0,22	-0,01	-0,20	-0,19	-0,10	-0,06	-0,15	0,08	0,19	0,05

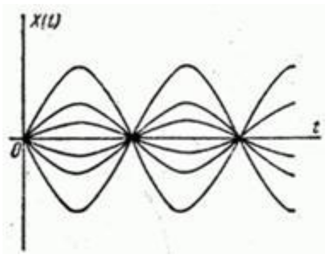


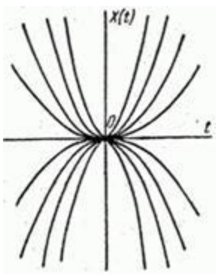
Из сравнения графиков видно, что корреляционная функция, изображенная убывает значительно быстрее. Это и естественно, так как характер изменения функции $X(t)$ в примере 1 гораздо более плавный и постепенный, чем в примере 2; в связи с этим корреляция между значениями случайной функции в примере 1 убывает медленнее.

При рассмотрении бросаются в глаза незакономерные колебания функции $\tilde{\rho}_x(\tau)$ для больших значений τ. Так как при больших значениях τ точки графика получены осреднением сравнительно очень небольшого числа данных, их нельзя считать надежными. В подобных случаях имеет смысл сгладить корреляционную функцию.

Элементарной случайной функцией называется функция вида:
$X(t) = V\varphi(t)$, где V - обычная случайная величина, $\varphi(t)$ - обычная (неслучайная) функция. Элементарная случайная функция является наиболее простым типом случайной функции. Все возможные реализации элементарной случайной функции $X(t)$ могут быть получены из графика функции $x = \varphi(t)$ простым измерением масштаба по оси ординат

При этом ось абсцисс $(x = 0)$ также представляет собой одну из возможных реализаций случайной функции $X(t)$, осуществляющуюся, когда случайная величина V принимает значение 0 (если это значение принадлежит к числу возможных значений величины V). В качестве примеров элементарных случайных функций приведем функции $X(t) = V\sin t$ и $X(t) = Vt^2$.





Элементарная случайная функция характерна тем, что в ней разделены две особенности случайной функции: случайность вся сосредоточена в коэффициенте V, а зависимость от времени - в обычной функции $\varphi(t)$.

Когда элементарная случайная функция поступает на вход линейной системы, то задача ее преобразования сводится к простой задаче преобразования одной неслучайной функции $\varphi(t)$. Отсюда возникает идея: представить случайную функцию на входе - точно или приближенно - в виде суммы элементарных случайных функций и только затем подвергать преобразованию. Такая идея разложения случайной функции на сумму элементарных случайных функций и лежит в основе **метода канонических разложений**.

Пусть имеется случайная функция: $X(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t)$. Допустим, что нам удалось - точно или приближенно - представить ее в виде суммы

$X(t) = m_x(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t)$, где V_i - случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю;

$\varphi_i(t)$ - неслучайные функции; $m_x(t)$ - математическое ожидание функции $X(t)$.

Обозначая $Y(t)$ реакцию системы на случайное воздействие $X(t)$, имеем:

$Y(t) = L\{X(t)\} = L\{m_x(t)\} + \sum\limits_{i=1}^{m} V_i L\{\varphi_i(t)\}$. Придадим выражению несколько иную форму.

$Y(t) = m_y(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} V_i \psi_i(t)$. Выражение представляет собой не что иное, как разложение случайной функции $Y(t)$ по элементарным функциям. Коэффициентами этого разложения являются те же случайные величины $V_1, V_2, \ldots, V_m$, а математическое ожидание и координатные функции получены из математического ожидания и координатных функций исходной случайной функции тем же линейным преобразованием L, какому подвергается случайная функция $X(t)$.

Если случайная функция $X(t)$, заданная разложением по элементарным функциям, подвергается линейному преобразованию Z, то коэффициенты разложения остаются неизменными, а математическое ожидание и координатные функции подвергаются тому же линейному преобразованию L.

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$, заданную разложением

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t),$$

где коэффициенты $V_1, V_2, \ldots, V_m$ представляют собой систему случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю и с корреляционной матрицей $\|K_{ij}\|$. Найдем корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $X(t)$.

$$K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\varphi_i(t')D_i + \sum_{i \neq j} \varphi_i(t)\varphi_j(t')K_{ij}$$

. Полагая в выражении $t' = t$ получим дисперсию случайной функции $X(t)$:

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(t)]^2 D_i + \sum_{i \neq j} \varphi_i(t)\varphi_j(t)K_{ij}.$$

Очевидно, эти выражения приобретают особенно простой вид, когда все коэффициенты V_i разложения некоррелированны, т. е. $K_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В этом случае разложение случайной функции называется «каноническим».

$$K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\varphi_i(t')D_i. \qquad D_x(t) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(t)]^2 D_i$$

Рассмотрим несколько подробнее применение метода канонических разложений к определению реакции динамической системы на случайное входное воздействие, когда работа системы описывается линейным дифференциальным уравнением, в общем случае - с переменными коэффициентами. Запишем это уравнение в операторной форме:

$$A_n(p,t)Y(t) = B_m(p,t)X(t).$$

Согласно вышеизложенным правилам линейных преобразований случайных функций математические ожидания воздействия и реакции должны удовлетворять тому же уравнению:

$$A_n(p,t)m_y(t) = B_m(p,t)m_x(t)$$

. Аналогично каждая из координатных функций должна удовлетворять тому же дифференциальному уравнению:

$$A_n(p,t)\psi_i(t) = B_m(p,t)\varphi_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Таким образом, задача определения реакции линейной динамической системы на случайное воздействие свелась к обычной математической задаче интегрирования $k+1$

обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих обычные, не случайные функции. Остается осветить вопрос о начальных условиях, при которых следует интегрировать уравнения.

Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда начальные условия для данной динамической системы являются неслучайными. В этом случае при $t = 0$ должны выполняться условия:

$$\left.\begin{aligned} &Y(0) = y_0, \\ &Y'(0) = y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Y^{(r)}(0) = y_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \end{aligned}\right\}$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ - неслучайные числа.

Следует заметить, что на практике весьма часто встречаются случаи, когда для моментов времени, достаточно удаленных от начала случайного процесса, начальные условия уже не оказывают влияния на его течение: вызванные ими переходные процессы успевают затухнуть. Системы, обладающие таким свойством, называются асимптотически устойчивыми. Если нас интересует реакция асимптотически устойчивой динамической системы на участках времени, достаточно удаленных от начала, то можно ограничиться исследованием решения $Y_I(t)$, полученного при нулевых начальных условиях.

Для закрепления теоретического материала предлагаются следующие задачи:

1. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс X(t) с математическим ожиданием $\boldsymbol{m_X}$ и спектральной плотностью $\boldsymbol{S_X(\omega)}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса Y(t) на выходе системы в установившемся режиме: **y″+4 y′+4 y = 3x′, m_X = 14, $S_X(\omega)$= 2(sin4ω)/ω.**

2. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс X(t) с корреляционной функцией $\boldsymbol{k_X(\tau)}$. Найти спектральную плотность $\boldsymbol{S_Y(\omega)}$ случайного процесса Y(t) на выходе системы в установившемся режиме: ***y″+6 y′+ 5y = x″+ 7x′+ 10x, $k_X(\tau)$= 18/(9+τ 2)***

3. Является ли фильтром следующее линейное преобразование: $\eta(n) = (\xi(n + 1) + \xi(n - 1))/2$, $n \in Z$? Найти спектральную плотность $s\eta(\lambda)$, если ξ — стандартный белый шум. Какое физически реализуемое преобразование дает «на выходе» ту же спектральную плотность?

2.3. Лабораторная работа № 12 (2 часа).

Тема: «Спектральный анализ методом Фурье»

2.3.1 Цель работы: изучить теоретические основания метода Фурье, выявить и проанализировать особенности метода в ходе решения практических задач

2.3.2 Задачи работы:

1. Фурье-спектр действительных данных.

2. Обратное преобразование Фурье.

3. Преобразование Фурье комплексных данных.

4. Артефакты дискретного преобразования Фурье.

2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.3.4 Описание (ход) работы:

Одним из фундаментальных положений математики, нашедшим широкое применение во многих прикладных задачах является возможность описания любой периодической функции *f*(*t*) с периодом *T* с помощью тригонометрического ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t\right),$$

Этот ряд содержит бесконечное число косинусных или синусных составляющих - гармоник, причем амплитуды этих составляющих a_k и b_k являются коэффициентами Фурье, определяемыми интегральными выражениями:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_1 t\,dt,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_1 t\,dt.$$

Помимо упомянутой формы ряд Фурье можно представить в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\omega_1 t + \varphi_k\right),$$

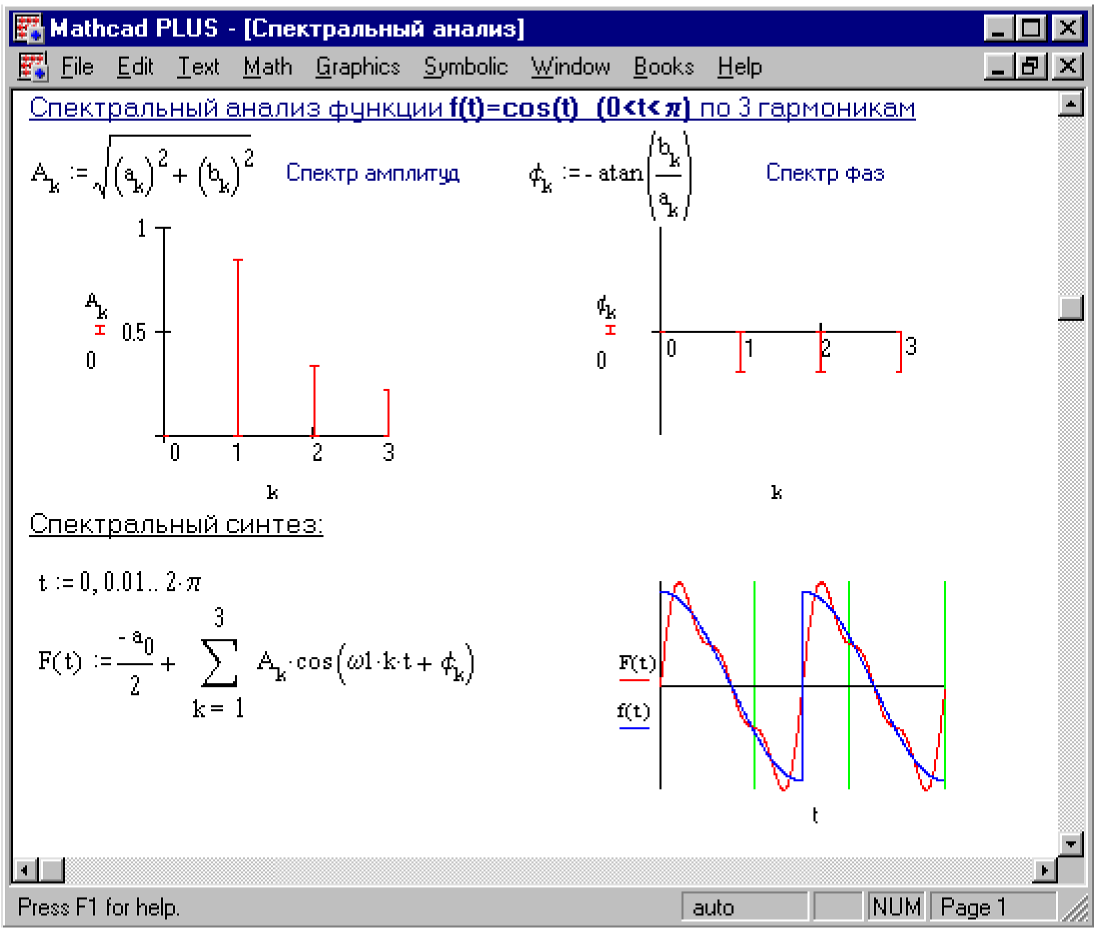
где амплитуда A_k и фаза j_k гармоник определяются выражениями:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$
$$\varphi_k = -arctg\frac{b_k}{a_k}.$$

Классический спектральный анализ

Спектром временной зависимости (функции) *f*(*t*) называется совокупность ее гармонических составляющих, образующих ряд Фурье. Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью A_k (*спектр амплитуд*) и j $_k$ (*спектр фаз*) от частоты w$_k$ = kw_1.

Спектральный анализ периодических функций заключается в нахождении амплитуды A_k и фазы j $_k$ гармоник (косинусоид) ряда Фурье (4). Задача, обратная спектральному анализу, называется *спектральным синтезом*.



Численный спектральный анализ

Численный спектральный анализ заключается в нахождении коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_k$, $b_1, b_2, ..., b_k$ (или$A_1, A_2, ..., A_k$, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$) для периодической функции $y = f(t)$, заданной на отрезке [0, T] дискретными отсчетами. Он сводится к вычислению коэффициентов Фурье по формулам численного интегрирования для метода прямоугольников

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos k\omega_1 i\Delta t,$$
$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin k\omega_1 i\Delta t,$$

Спектральный анализ на основе быстрого преобразования Фурье

Встроенные в Mathcad средства быстрого преобразования Фурье (БПФ) существенно упрощают процедуру приближенного спектрального анализа. БПФ - быстрый алгоритм переноса сведений о функции, заданной 2^m (*m* - целое число) отсчетами во временной области, в частотную область.

Если речь идет о функции $f(t)$, заданной действительными отсчетами, следует использовать функцию *fft*.

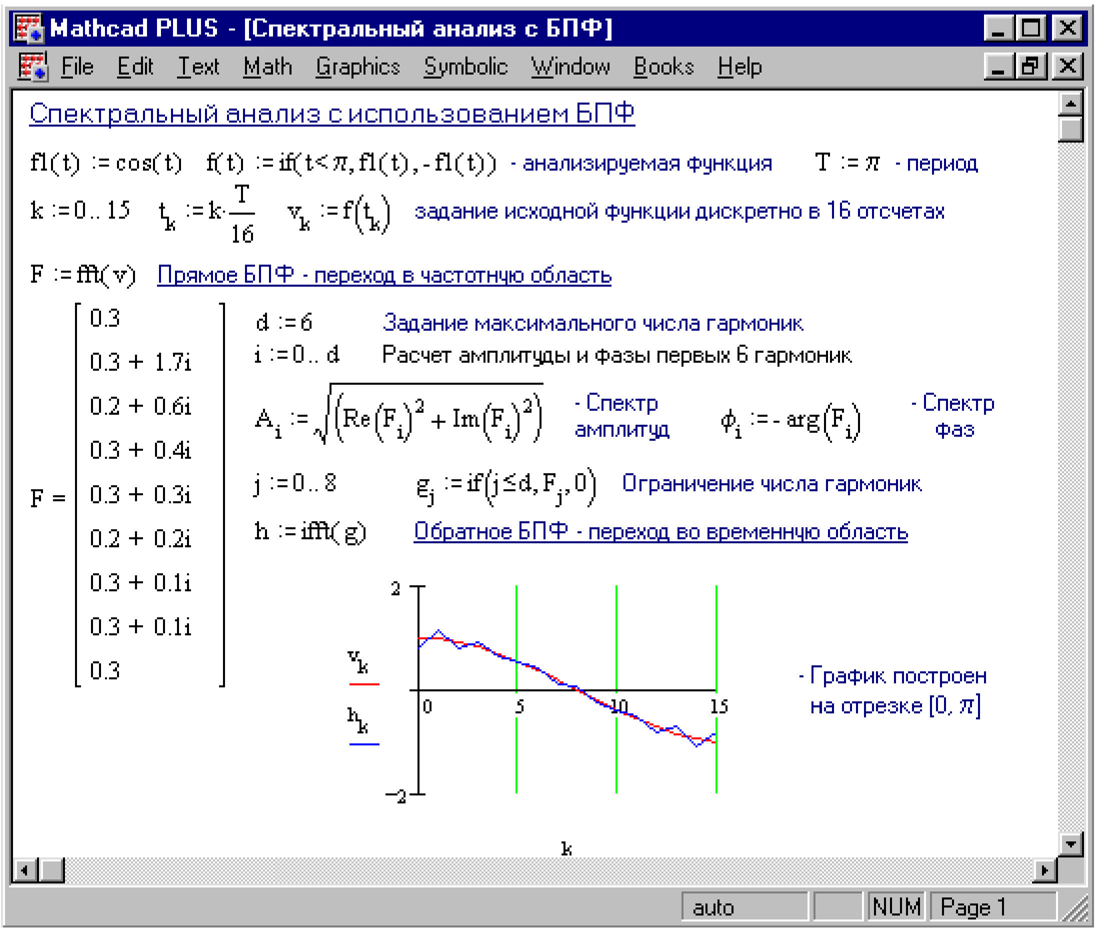
fft(*v*)	Возвращает прямое БПФ 2^m-мерного вещественнозначного вектора *v*, где *v* - вектор, элементы которого хранят отсчеты функции $f(t)$.

Результатом будет вектор *A* размерности $1 + 2^{m-1}$ с комплексными элементами - отсчетами в частотной области. Функция *ifft* реализует обратное БПФ:

ifft(*v*)	Возвращает обратное БПФ для вектора *v* с комплексными элементами.

	Вектор v имеет $1 + 2^{m-1}$ элементов.

Результатом будет вектор A размерности 2^m с действительными элементами.



Задание 1. Вычислить первые шесть пар коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $f(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Построить графики 1, 2 и 3 гармоник.

№ вар-та	$f(t)$	№ вар-та	$f(t)$	№ вар-та	$f(t)$
1	$\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 2t}$	**6**	$\cos t \cos \lvert \sin t \rvert$	**11**	$\sin\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
2	$\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 2t}$	**7**	$\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{1}{2}t\right)$	**12**	$\cos\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
3	$\dfrac{\sin 2t+\sin^2 3t}{3+\sin t+\cos 2t}$	**8**	$e^{\sin\frac{1}{3}t}$	**13**	$e^{-10(t-\pi)^2}$
4	$\dfrac{\sin 3t}{\lvert\sin t\rvert+\lvert\cos t\rvert}$	**9**	$\lvert \sin t \rvert + \lvert \sin 2t \rvert$	**14**	$e^{\cos\frac{1}{3}t}$
5	$\cos e^{\lvert\sin 3t\rvert}$	**10**	$\sin\left(\frac{1}{2}t\right)^2$	**15**	$e^{-\cos\frac{1}{2}t}$ $\cos(\sin t)$

Задание 2. Выполнить классический спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

Задание 3. Выполнить численный спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Для этого необходимо задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 32 отсчетах. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

Задание 4. Выполнить спектральный анализ и синтез функции $f(t)$ с помощью БПФ. Для этого необходимо:

- задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 128 отсчетах;
- выполнить прямое БПФ с помощью функции *fft* и отобразить графически найденные спектры амплитуд и фаз первых шести гармоник;
- выполнить обратное БПФ с помощью функции *ifft* и отобразить графически результат спектрального синтеза функции $f(t)$.