**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Техносферная и информационная безопасность**»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.05 Начертательная геометрия

Направление подготовки (специальность) 27.03.04 Управление в технических системах

Профиль подготовки (специализация) Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Квалификация выпускника бакалавр

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. **Конспект лекций ……………………………………………………………………**
1.1 Лекция № 1 Проекции центральные, параллельные, метод Монжа ……………………
1.2 Лекция № 2 Точка в системе двух и трех плоскостей проекций ……………………...
1.3 Лекция № 3 Точка в четвертях и октантах пространства………………………………
1.4 Лекция № 3 Проекции отрезка прямой линии. Точка на прямой…………………………
1.5 Лекция № 5 Способы задания плоскостей. Следы плоскости……………………………
1.6 Лекция № 6 Прямая и точка в плоскости………………………………………………
1.7 Лекция № 7 Взаимное положение плоскостей и их пересечение с прямыми и другими плоскостями………………………………………………………………………………
1.8 Лекция № 8 Способы перемены плоскостей проекций …………………………………
1.9 Лекция № 9 Основы способа вращения ………………………………………...........
2. Методические указания по проведению лабораторных работ………………….
2.1 Лабораторная работа №1 Проекции центральные, параллельные, метод Монжа …
2.2 Лабораторная работа № 2 Точка в системе двух и трех плоскостей проекций ………
2.3 Лабораторная работа № 3 Точка в четвертях и октантах пространства.………………
2.4 Лабораторная работа № 4 Проекции отрезка прямой линии. Точка на прямой………
2.5 Лабораторная работа № 5 Способы задания плоскостей. Следы плоскости……………
2.6 Лабораторная работа № 6 Прямая и точка в плоскости. ………………………………
2.7 Лабораторная работа № 7 Взаимное положение плоскостей и их пересечение с прямыми и другими плоскостями. ……………………………………………………………
2.8 Лабораторная работа № 8 Способы перемены плоскостей проекций…………………
2.9 Лабораторная работа № 9 Основы способа вращения…………………………………
2.10 Лабораторная работа № 10 Построение проекций многогранников…………………
2.11Лабораторная работа № 11 Пересечение одной многогранной поверхности другою…
2.12Лабораторная работа № 12 Общие сведения о кривых поверхностях………………
2.13 Лабораторная работа № 13 Поверхности вращения ……………………………………
2.14 Лабораторная работа № 14 Общие приемы построения линии пересечения…………
2.15 Лабораторная работа № 15 Пересечение поверхности прямой и плоскостью………
2.16 Лабораторная работа № 16 Общий способ построения линии пересечения поверхностей……………………………………………………………………………………
2.13 Лабораторная работа № 17 Применение вспомогательных секущих плоскостей, параллельных плоскостям проекций…………………………………………………………
3. Методические указания по проведению семинарских занятий……………………

4. **Методические указания по проведению практических занятий……………………**

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Методы проецирования. Метод Монжа»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Введение
2. Методы проецирования
3. Метод параллельного прямоугольного проецирования
4. Прямоугольное проецирование. Метод Монжа.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Введение

В число дисциплин, составляющих основу инженерного образования, входит *начертательная геометрия*. Это первый в образовательном процессе предмет представляющий цикл общепрофессиональных дисциплин.

Основная задача дисциплины – *изображение пространственных фигур (объемных тел) на плоскости, а также развитие пространственного воображения.*

В процессе изучения решаются два типа задач:

- *позиционные* – задачи на построение различных элементов фигур;
- *метрические* – задачи, связанные с определением истинных размеров изображаемых на эпюре фигур и тел.

При решении последних возникают значительные трудности из-за неудобного расположения фигур в пространстве. В связи с этим рассматриваются вопросы преобразования комплексного чертежа.

Начертательная геометрия базируется на знаниях, полученных при изучении школьных дисциплин: *черчение и геометрия*.

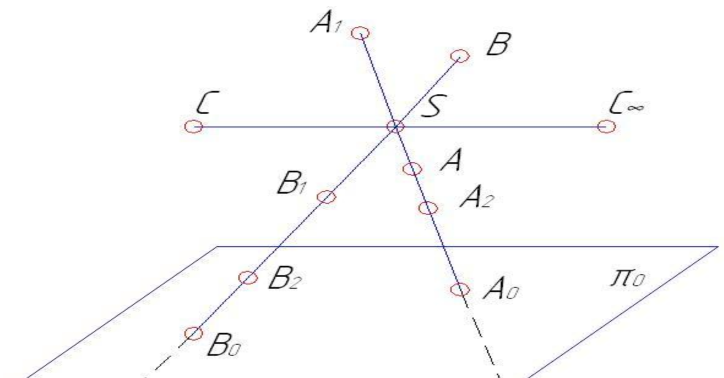
Умения и навыки, приобретенные в процессе изучения начертательной геометрии, используются в последующем при изучении дисциплин, связанных с построением чертежей.

2. Методы проецирования

В основе правил построения изображений, рассматриваемых в начертательной геометрии и применяемых в черчении, лежит *метод проекций* (от латинского *projection* – бросание вперед, вдаль). Изучать этот метод следует с наиболее простого – построения проекции точки, так как любой объект представляет совокупность точек, а проекцией фигуры называется совокупность проекций всех ее точек.

Центральное проецирование.

При центральном проецировании задают произвольную *плоскость проекций* и *центр проекции*. Центр проекции – это точка не лежащая в плоскости проекции.



π_0 – плоскость проекций; S – центр проекций.

Для проецирования произвольной точки через нее и центр проекций проводят прямую. *Точка пересечения этой прямой с плоскостью проекций и является центральной проекцией заданной точки на выбранной плоскости проекций*.

На рисунке центральной проекцией точки **A** является точка $\mathbf{A_0}$ – точка пересечения прямой **AS** с плоскостью $\boldsymbol{\pi_0}$. Таким же образом построены центральные проекции $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, **B**, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$. Они получаются при пересечении проецирующих прямых (проецирующих лучей) с плоскостью проекций.

В случае параллельности проецирующего луча плоскости проекций точка **C** будет иметь центральную проекцию, но удаленную бесконечно далеко.

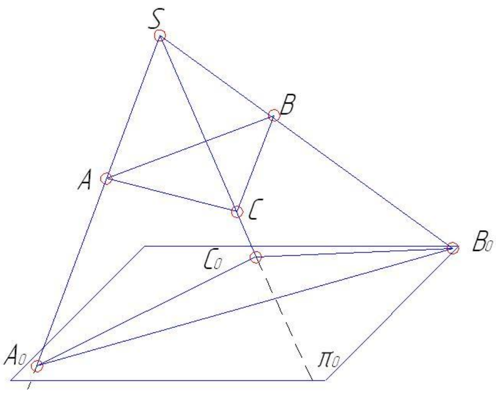
Как видно из рисунка центральные проекции точек лежащих на одной проецирующей прямой совпадают. Поэтому одна центральная проекция точки не позволяет однозначно определить положение точки в пространстве.

Таким образом, для однозначного определения положения точки в пространстве необходимы дополнительные условия, например, можно задать второй центр проекций.

Так как любая линия или поверхность состоит из множества точек, то центральная проекция этой линии или поверхности может быть построена как множество центральных проекций всех ее точек. При этом

проецирующие прямые образуют проецирующую поверхность или могут оказаться в одной плоскости, которая называется проецирующей.

Для построения проекций линий, поверхностей или тел часто достаточно построить проекции лишь некоторых характерных точек. Например, для построения проекции треугольника достаточно построить проекции его вершин.



Свойства центрального проецирования:

1. При центральном проецировании: а) точка проецируется в точку;

б) прямая, не проходящая через центр проекций, проецируется в прямую (проецирующая прямая - в точку); в) плоская (двумерная) фигура, не принадлежащая проецирующей

плоскости, проецируется в виде двумерной фигуры (фигуры, принадлежащие проецирующей плоскости, проецируются вместе с ней в виде прямой); г) трехмерная фигура отображается двумерной.

2. *Центральные проекции фигур сохраняют взаимную принадлежность и непрерывность.*

3. *При заданном центре проецирования проекции фигуры на параллельных плоскостях подобны.*

Параллельное проецирование

Параллельное проецирование – частный случай центрального проецирования, если условиться, что центр проекций находится бесконечно далеко от плоскости проекций. При параллельном проецировании проецирующие прямые параллельны. Причем, если эти прямые не перпендикулярны плоскости проекций, то проекции называют косоугольными.

Параллельной проекцией точки называется точка пересечения поецирующей прямой, проведенной параллельно заданному направлению, с плоскостью проекций.

Параллельная проекция линии получается как совокупность проекций составляющих ее параллельных проекций точек. При этом проецирующие прямые в своей совокупности образуют цилиндрическую поверхность. Поэтому параллельные проекции фигур называют цилиндрическими.

При параллельном проецировании все свойства центрального проецирования сохраняются, а также возникают следующие новые свойства:

1. *Параллельные проекции взаимно параллельных прямых параллельны, а отношение длин отрезков этих прямых равно отношению их проекций.*
2. *Для прямой линии проецирующей поверхностью является плоскость;*
3. *Каждая точка и линия в пространстве имеют единственную свою проекцию;*
4. *Каждая параллельная проекция точки может быть проекцией множества точек;*
5. *Каждая параллельная проекция линии может быть проекцией множества линий;*
6. *Для проецирования прямой необходимо и достаточно иметь проекции двух ее точек;*
7. *Если точка принадлежит прямой, то проекции точки принадлежит проекции этой прямой;*
8. *Если прямая параллельна проецирующей прямой, то проекцией этой прямой является точка;*
9. *Отрезок прямой линии, параллельной плоскости проекций проецируется на эту плоскость в натуральную величину.*

3 Метод параллельного прямоугольного проецирования

Прямоугольное или ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования, при котором проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций. Соответственно, прямоугольной или ортогональной проекцией точки называют точку пересечения ортогональной проецирующей прямой с плоскостью проекций.

Кроме свойств параллельных косоугольных проекций ортогональные проекции имеют следующее свойство:

- *прямоугольные проекции двух взаимно перпендикулярных прямых, одна из которых параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, взаимно перпендикулярны*

4 Прямоугольное проецирование. Метод Монжа.

Прямоугольное или ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования, при котором проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций. Соответственно, прямоугольной или ортогональной проекцией точки называют точку пересечения ортогональной проецирующей прямой с плоскостью проекций.

Кроме свойств параллельных косоугольных проекций ортогональные проекции имеют следующее свойство:

- *прямоугольные проекции двух взаимно перпендикулярных прямых, одна из которых параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, взаимно перпендикулярны*

В силу своих преимуществ (простота геометрических построений, сохранение на проекциях при определенных условиях формы и размеров проецируемой фигуры) прямоугольное проецирование применяется для разработки чертежей.

Накопленные сведения и приемы изображения на плоскости пространственных форм впервые систематизировал и развил французский ученый конца XVIII – начала XIX века Гаспар Монж (1746-1818 гг).

Гаспар Монж – крупный французский ученый, инженер, общественный и государственный деятель в период революции 1789-1794 гг. и правления Наполеона I, участник работы по введению метрической системы мер и весов.

Изложенный Монжем метод заключается в ортогональном проецировании на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, обеспечивая выразительность и точность изображений объемных форм на плоскости. Это основной метод составления технических чертежей.

Причем использование указанного метода позволяет обеспечить обратимость чертежа, т. е. возможность установления истинного положения точки в пространстве по ее ортогональным проекциям.

1. 2 Лекция № 2 (2 часа)

Тема: «Точка в системе двух и трех плоскостей проекций»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Общие сведения
2. Проецирование точки на две плоскости проекций
3. Проецирование точки на три плоскости проекций

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

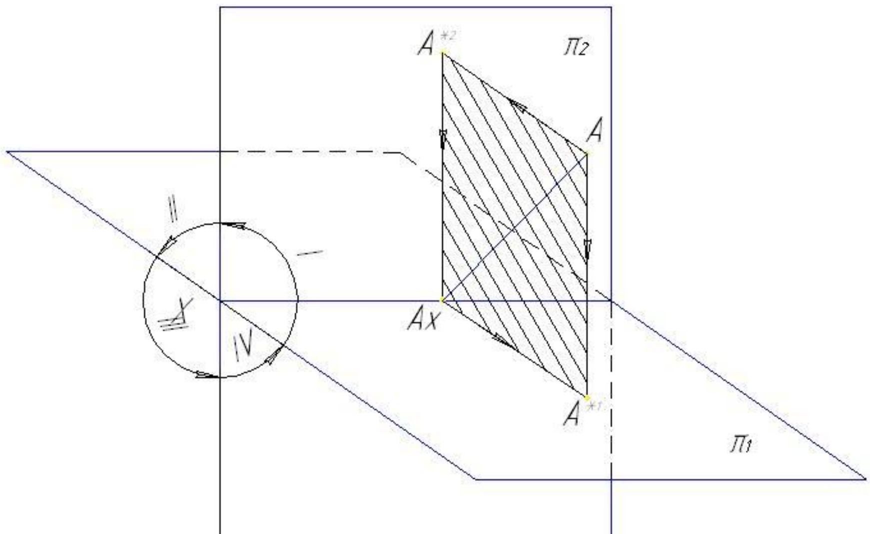
1. Общие сведения

В силу своих преимуществ (простота геометрических построений, сохранение на проекциях при определенных условиях формы и размеров проецируемой фигуры) прямоугольное проецирование применяется для разработки чертежей.

В основе правил построения изображений, рассматриваемых в начертательной геометрии и применяемых в черчении, лежит *метод проекций* (от латинского *projection* – бросание вперед, вдаль). Изучать этот метод следует с наиболее простого – построения проекции точки, так как любой объект представляет совокупность точек, а проекцией фигуры называется совокупность проекций всех ее точек.

2. Проецирование точки на две плоскости проекций

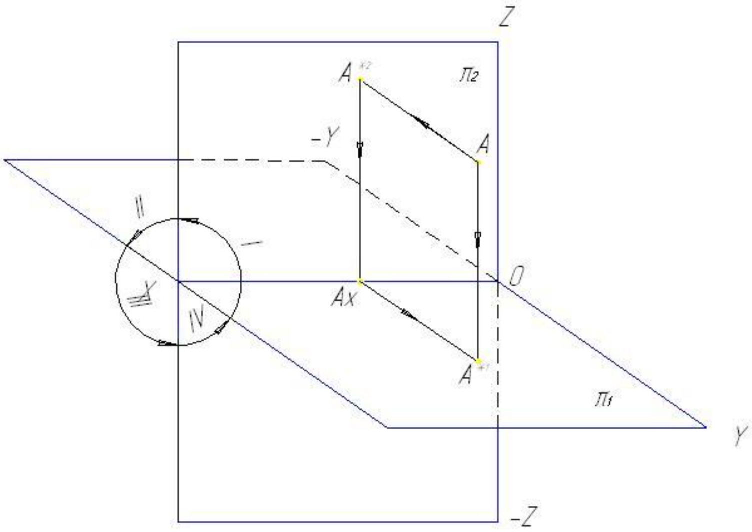
Для удобства проецирования в качестве двух плоскостей проекций выбирают две взаимно перпендикулярные плоскости. Одну из них располагают горизонтально (*горизонтальная плоскость проекций* π_1), другую
– вертикально (*фронтальная плоскость проекций* π_2). Линия пересечения этих плоскостей называется *осью проекций* и обозначается буквой **X** или комбинацией букв π_2/π_1.



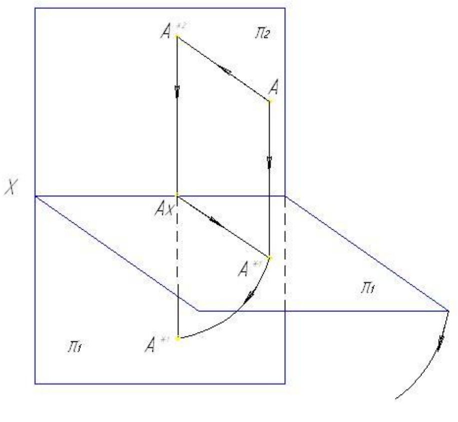
Пересекаясь, плоскости проекций образуют *четыре двугранных угла или четыре четверти*: **I, II, III, IV**.

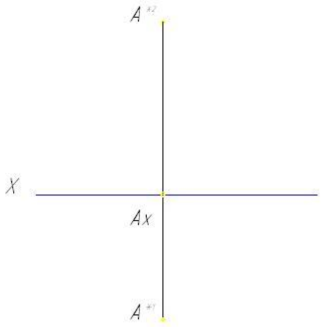
Определим проекции точки **A**. Для этого из точки **A** проведем перпендикуляры к плоскостям $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$. В точках пересечения перпендикуляров и плоскостей получим горизонтальную проекцию точки $\mathbf{A}^{/}$ и фронтальную проекцию точки $\mathbf{A}^{//}$. Проецирующие прямые $\mathbf{AA}^{/}$ и $\mathbf{AA}^{//}$ определяют плоскость, перпендикулярную к плоскостям проекций и к оси проекций. Эта плоскость в пересечении с плоскостями $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$ образует две взаимно перпендикулярные прямые $\mathbf{A}^{/}\mathbf{Ax}$ и $\mathbf{A}^{//}\mathbf{Ax}$, которые пересекаются в точке **Ax** на оси проекций. *Следовательно, проекции точки расположены на прямых, перпендикулярных к оси проекций и пересекающих эту ось в одной и той же точке*. Отрезки $\mathbf{AA}^{/}$ и $\mathbf{AA}^{//}$ определяют расстояние от точки **A** соответственно до горизонтальной и фронтальной плоскости проекций. Совместив горизонтальную плоскость проекций с фронтальной (повернув ее на угол 90^0 вниз вокруг оси проекций), получим чертеж, который носит название «эпюр Монже».

Эпюр обеспечивает точность и удобоизмеримость изображений, хотя и утрачивается пространственная картина расположения форм. Кроме того, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее пространственное положение.



В зависимости от расположения точки в той или иной четверти знаки перед ее координатами будут отличаться.





Четверть	X	Y	Z
I	±	+	+
II	±	-	+
III	±	-	-
IV	±	+	-

3. Проецирование точки на три плоскости проекций

Для полного выявления наружных и внутренних форм сложных деталей необходимо три и более изображений. В этих случаях вводят три и более плоскостей.

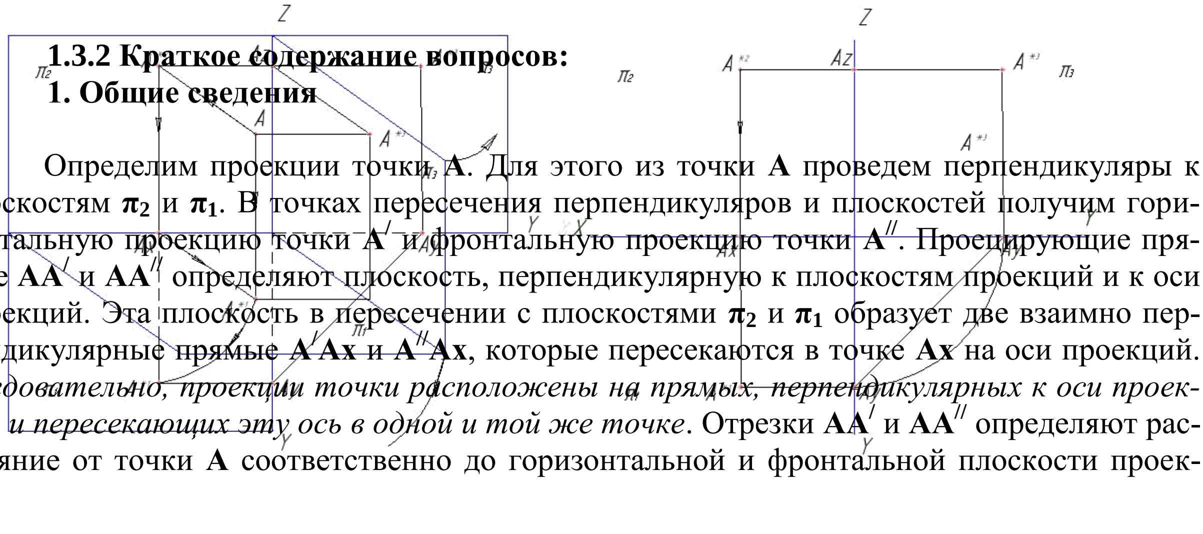
Рассмотрим введение в систему плоскостей $\boldsymbol{\pi_2\pi_1}$ еще одной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_3}$, которую принято называть *профильной*. Профильная плоскость перпендикулярна плоскостям $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$. Линия пересечения профильной и горизонтальной плоскости образуют ось проекций **y**, профильной и фронтальной плоскости – ось проекций **z**. Схема совмещения плоскостей показана на рисунке.

Следует отметить, что горизонтальная и фронтальная проекции точки расположены на одной вертикали, а фронтальная и профильная проекции – на одной горизонтали. Профильная проекция точки стоится по горизонтальной и фронтальной. Расстояния от точки до плоскостей проекций определяется соответствующими отрезками на чертеже: до горизонтальной плоскости – отрезком **A**$^{//}$**Ax** или **A**$^{///}$**Ay**; до фронтальной плоскости проекций
– отрезком **A**$^{/}$**Ax** или **A**$^{///}$**Az**; до профильной плоскости проекций – отрезком **A**$^{//}$**Az** или **A**$^{/}$**Ay**.

1.3 Лекция №3 (2 часа)
Тема «Точка в четвертях и октантах пространства»

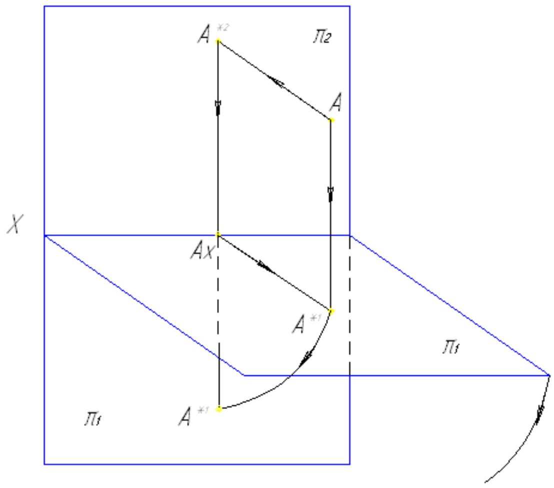
1.3.1 Вопросы лекции:

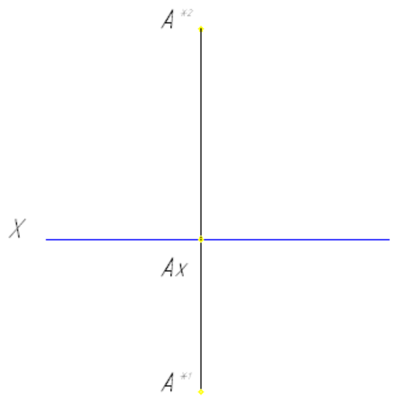
1. Общие сведения
2. Точка в системе трех плоскостей проекций
3. Нумерация октантов



1.3.2 Краткое содержание вопросов:
1. Общие сведения

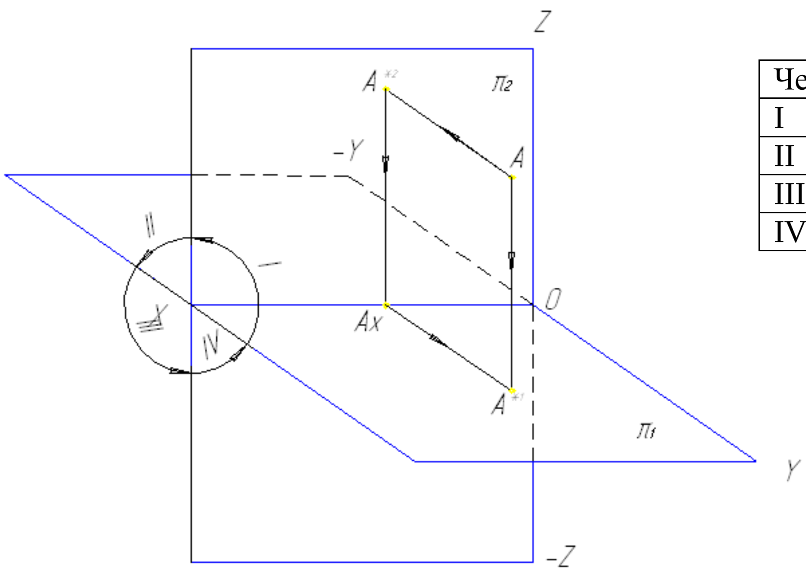
Определим проекции точки **A**. Для этого из точки **A** проведем перпендикуляры к плоскостям $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$. В точках пересечения перпендикуляров и плоскостей получим горизонтальную проекцию точки **A**$^{/}$ и фронтальную проекцию точки **A**$^{//}$. Проецирующие прямые **AA**$^{/}$ и **AA**$^{//}$ определяют плоскость, перпендикулярную к плоскостям проекций и к оси проекций. Эта плоскость в пересечении с плоскостями $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$ образует две взаимно перпендикулярные прямые **A**$^{/}$**Ax** и **A**$^{//}$**Ax**, которые пересекаются в точке **Ax** на оси проекций. *Следовательно, проекции точки расположены на прямых, перпендикулярных к оси проекций и пересекающих эту ось в одной и той же точке*. Отрезки **AA**$^{/}$ и **AA**$^{//}$ определяют расстояние от точки **A** соответственно до горизонтальной и фронтальной плоскости проекций. Совместив горизонтальную плоскость проекций с фронтальной (повернув ее на угол 90^0 вниз вокруг оси проекций), получим чертеж, который носит название «эпюр Монже».





Эпюр обеспечивает точность и удобоизмеримость изображений, хотя и утрачивается пространственная картина расположения форм. Кроме того, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее пространственное положение.

В зависимости от расположения точки в той или иной четверти знаки перед ее координатами будут отличаться.

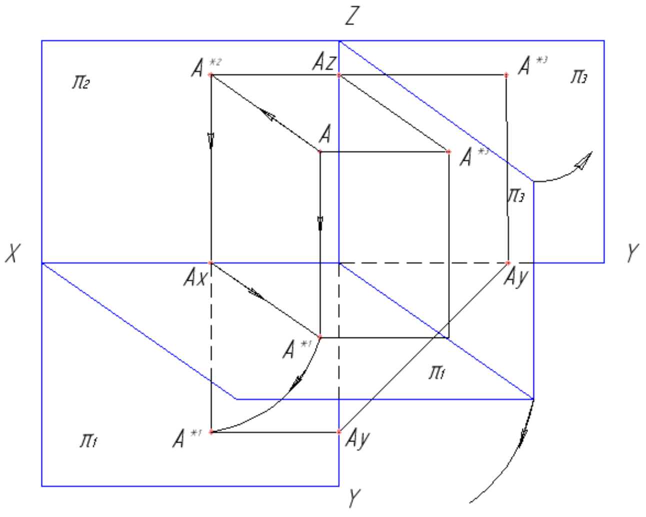


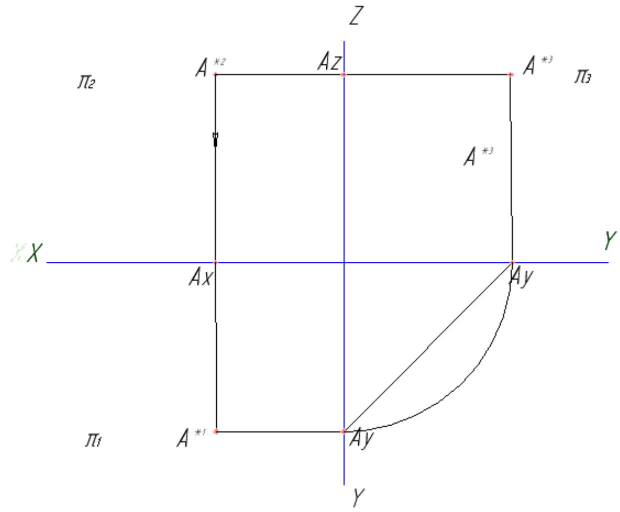
Четверть	X	Y	Z
I	±	+	+
II	±	-	+
III	±	-	-
IV	±	+	-

2. Точка в системе трех плоскостей проекций

Для полного выявления наружных и внутренних форм сложных деталей необходимо три и более изображений. В этих случаях вводят три и более плоскостей.

Рассмотрим введение в систему плоскостей $\boldsymbol{\pi_2\pi_1}$ еще одной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_3}$, которую принято называть *профильной*. Профильная плоскость перпендикулярна плоскостям $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$. Линия пересечения профильной и горизонтальной плоскости образуют ось проекций **y**, профильной и фронтальной плоскости – ось проекций **z**. Схема совмещения плоскостей показана на рисунке.



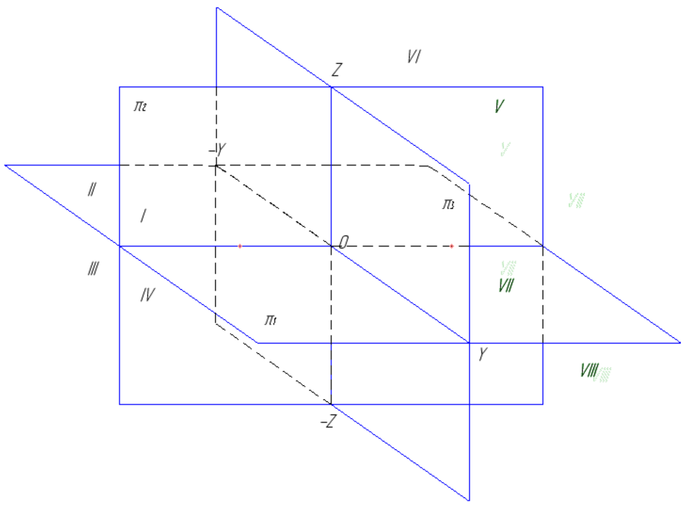


Следует отметить, что горизонтальная и фронтальная проекции точки расположены на одной вертикали, а фронтальная и профильная проекции – на одной горизонтали. Профильная проекция точки стоится по горизонтальной и фронтальной. Расстояния от точки до плоскостей проекций определяется соответствующими отрезками на чертеже: до горизонтальной плоскости – отрезком $\mathbf{A''Ax}$ или $\mathbf{A'''Ay}$; до фронтальной плоскости проекций – отрезком $\mathbf{A'Ax}$ или $\mathbf{A'''Az}$; до профильной плоскости проекций – отрезком $\mathbf{A''Az}$ или $\mathbf{A'Ay}$.

3. Нумерация октантов

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций пересекаясь образуют восемь трехгранных углов – *восемь октантов*. Нумерация октантов представлена на рисунке. Знаки при координатах точки в октантах имеют следующие значения:

Октант	Знаки координат		
	X	Y	Z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-



1.4 Лекция №4 (2 часа)

Тема: «Проекции отрезка прямой линии. Точка на прямой»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Проецирование отрезка и его деление в данном отношении
2. Положение прямой относительно плоскостей проекций

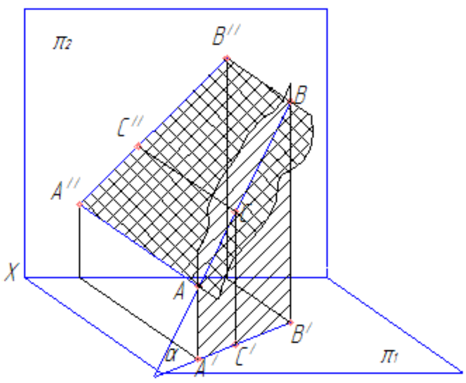
1.4.2 Краткое содержание вопросов:

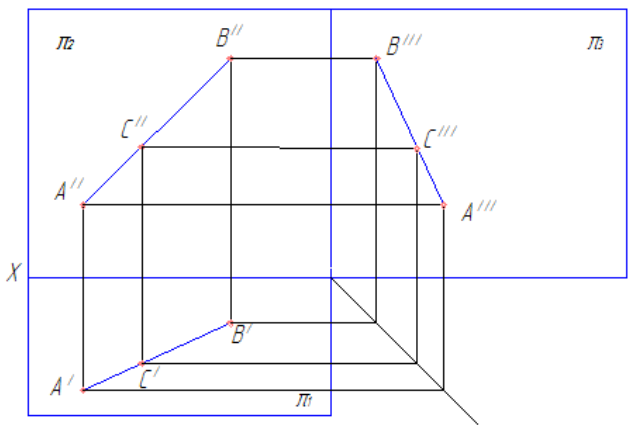
1. Проецирование отрезка и его деление в данном отношении

Предположим, что даны точки **A** и **B** в пространстве, через которые проходит прямая и притом только одна. Найдем проекции этих точек на горизонтальную (**$A^{/}$**, **$B^{/}$**) и фронтальную (**$A^{//}$**, **$B^{//}$**) плоскости проекций.

Соединив соответствующие проекции прямой линией, получим горизонтальную и фронтальную проекции прямой **AB**.

С другой стороны, прямая **AB** имеет множество точек, через которые проходит множество проецирующих прямых. Эти прямые образуют проецирующие плоскости, перпендикулярные горизонтальной и фронтальной плоскости. Линией пересечения двух плоскостей является прямая линия, которая и будет проекцией прямой **AB**.





Определим длину проекций отрезка прямой:

$$|A^{/}\,B^{/}|=|AB|*\cos\alpha;\ |A^{//}\,B^{//}|=|AB|*\cos\beta;\ |A^{///}\,B^{///}|=|AB|*\cos\gamma,$$

где **α** – угол между прямой и горизонтальной плоскостью проекций;

β - угол между прямой и фронтальной плоскостью проекций;

γ - угол между прямой и профильной плоскостью проекций.

Из формул видно, что при **$\alpha=0$** отрезок проецируется в натуральную величину; при **$\alpha=90^0$** отрезок проецируется в точку. В остальных случаях длина проекции меньше длины самого отрезка.

*Если какая-либо точка принадлежит прямой, то ее проекция принадлежит проекции этой прямой. В нашем случае это точка **C**. Причем, если точка на отрезке делит его длину в данном отношении, то проекция точки делит длину одноименной проекции отрезка в том же отношении:*

$$AC/CB=A^{/}C^{/}/C^{/}B^{/}=A^{//}C^{//}/C^{//}B^{//}.$$

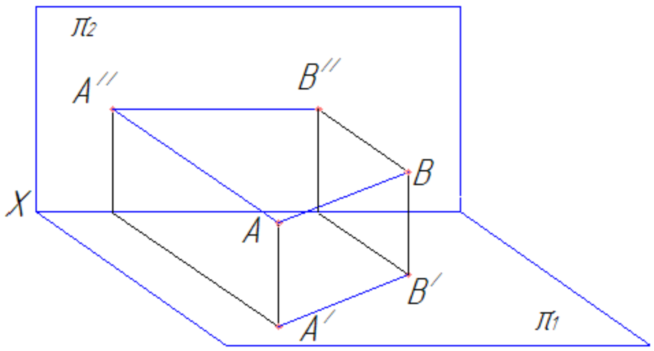
2. Положение прямой относительно плоскостей проекций.

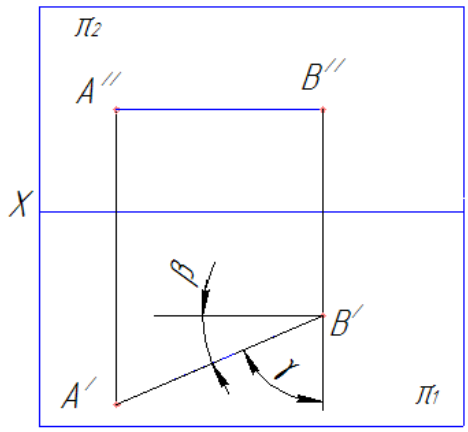
Относительно плоскостей проекций прямая может занимать следующие положения:

1) *прямая не параллельна ни одной из плоскостей проекций – <u>прямая общего положения</u>;*

2) *прямая параллельна одной из плоскостей проекций (прямая может принадлежать этой плоскости) – <u>прямая частного положения</u>;*
3) *прямая параллельна двум плоскостям проекций, т. е. перпендикулярна третьей – <u>прямая частного положения</u>.*

Если прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, ее называют *горизонтальной прямой*.

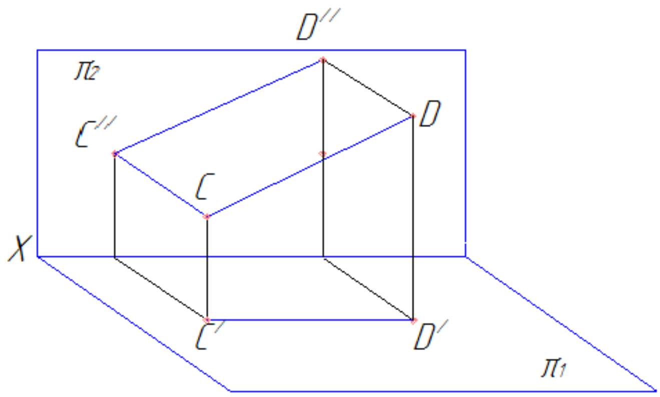


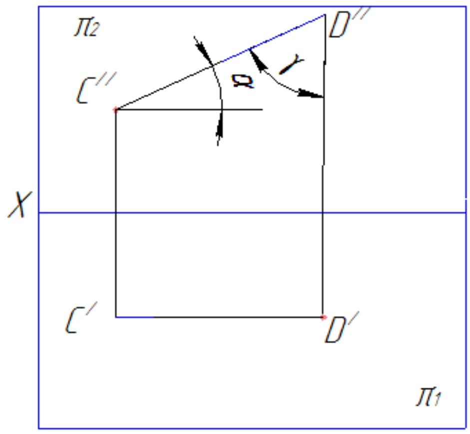


Ее фронтальная $\mathbf{A}^{//}\mathbf{B}^{//}$ проекция параллельна оси **X**; длина горизонтальной проекции отрезка $\mathbf{A}^{/}\mathbf{B}^{/}$ равна длине самого отрезка **АВ** (*натуральная величина*); угол **β** наклона горизонтальной проекции к оси **X** равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций; угол **γ** наклона горизонтальной проекции к оси **Y** равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций

Если прямая параллельная фронтальной плоскости проекций, ее называют *фронтальной прямой*.

Ее горизонтальная проекция параллельна оси **X**; длина фронтальной проекции отрезка

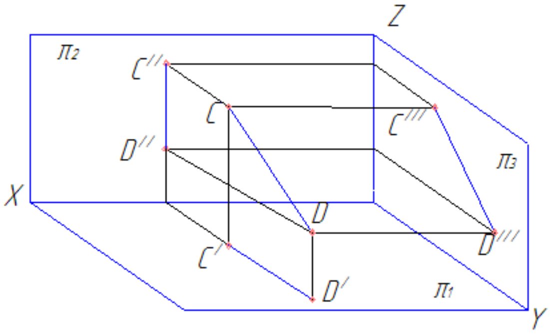


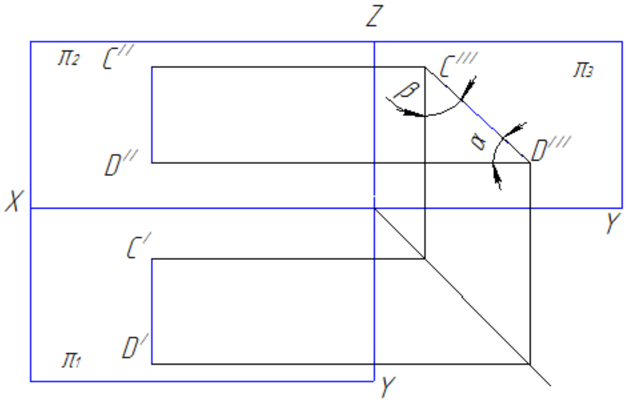


$\mathbf{C}^{//}$ $\mathbf{Д}^{//}$ равна длине самого отрезка **СД**; угол наклона **α** наклона фронтальной проекции к оси **X** равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций; угол **γ** наклона горизонтальной проекции к оси **Z** равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций

Если прямая параллельная профильной плоскости проекций, ее называют *профильной прямой*.

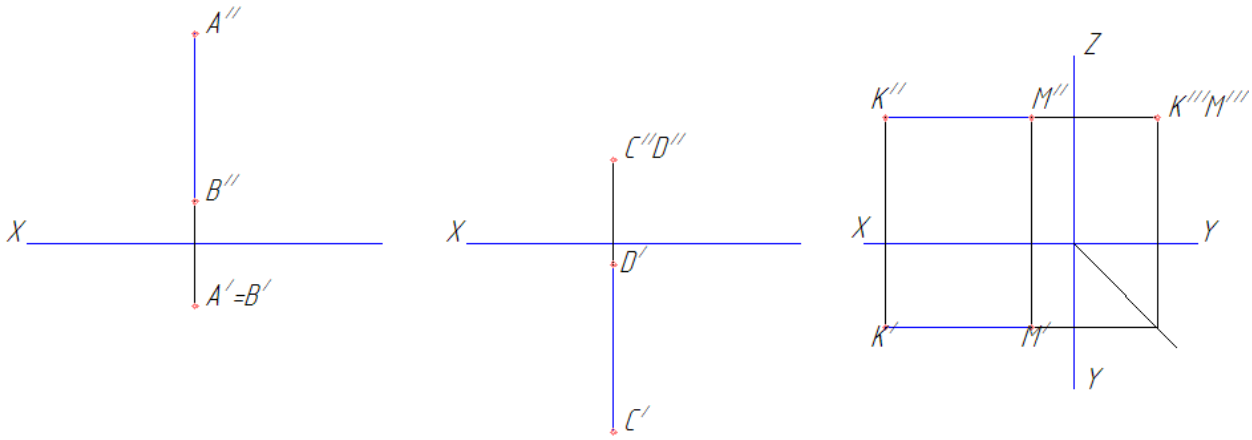
Ее горизонтальная и фронтальная проекции параллельны оси **Z**; длина профильной





проекции отрезка $\mathbf{K}^{///}\mathbf{M}^{///}$ равна длине самого отрезка **KM**; углы наклона **α** и **β**, образованные профильной проекцией с осями координат **Y** и **Z**, равны углам наклона прямой к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно.

Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций называется *горизонтально-проецирующей* (а); перпендикулярная фронтальной плоскости проекций – *фронтально-проецирующей* (б); профильной плоскости проекций – *профильно-проецирующей* (в).



а б в

Фронтальная проекция прямой, *параллельной фронтальной и профильной плоскости*, перпендикулярна оси **X** ($\mathbf{A}^{//}\mathbf{B}^{//}$ на рис. а). Горизонтальные проекции всех точек прямой совпадают.

Горизонтальная проекция прямой, *параллельной горизонтальной и профильной плоскости*, перпендикулярна оси **X** ($\mathbf{C}^{/}\mathbf{D}^{/}$ на рис. б). Фронтальные проекции всех точек прямой совпадают.

Горизонтальная и фронтальная проекция прямой, *параллельной фронтальной и горизонтальной плоскостям*, параллельны оси **X** (рис. в). Профильные проекции всех точек прямой совпадают.

Если две проекции точки принадлежат одноименным с ними проекциям прямой в системе плоскостей $\pi_1\pi_2$, то точка принадлежит прямой. Данное утверждение всегда справедливо для всех прямых, кроме профильной.

1.5 Лекция №5 (2 часа)

Тема «Способы задания плоскостей. Следы плоскости»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Способы задания плоскостей
2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Прямая и точка в плоскости
3. Взаимное положение плоскостей. Параллельность плоскостей
4. Пересечение плоскостей общего и частного положений
5. Пересечение прямой линии с плоскостью частного и общего положений

1.3.2 Краткое содержание вопросов:

1. Способы задания плоскостей

На чертеже плоскость может быть задана: *проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой; проекциями прямой и точки; проекциями двух пересекающихся прямых, проекциями двух параллельных прямых*.

Более наглядно *плоскость может быть задана прямыми, по которым она пересекает плоскости проекций*. Такие прямые называют следами плоскости. *След плоскости* – это линия, по которой пересекаются плоскости. Любая прямая, лежащая в плоскости и не параллельная плоскости проекций, пересекает последнюю. Очевидно, что след прямой будет располагаться на следе плоскости. След плоскости – это линия. Для построения прямой линии достаточно иметь две точки, принадлежащие прямой. Поэтому для определения следов плоскости необходимо определить следы двух прямых, лежащих в этой плоскости.

2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Точка и прямая в плоскости

Относительно плоскостей проекций плоскость может занимать следующие положения:

- *не перпендикулярна плоскостям проекций (плоскость общего положения);*
- *перпендикулярна одной плоскости проекций (плоскость частного положения);*
- *перпендикулярна двум плоскостям проекций (плоскость частного положения).*

Что значит: прямая принадлежит плоскости? Это значит, что прямая проходит через две точки, лежащие в плоскости или через одну точку параллельно прямой, лежащей в этой плоскости. То есть, если взять плоскость, заданную треугольником АВС, отметить на стороне ВС точку 1 и провести через точки 1 и А прямую линию, то прямая А1 будет принадлежать плоскости АВС. Или, если через точку В провести прямую параллельную стороне АС, то прямая В1 будет принадлежать плоскости АВС.

3. Взаимное положение плоскостей. Параллельность плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающим прямым другой плоскости, то плоскости параллельны. Если необходимо через точку **F** провести плоскость параллельную некоторой плоскости, заданной пересекающимися прямыми **a** и **b**, необходимо через нее провести пересекающиеся прямые **c** и **d**, параллельные данным. *При задании плоскостей следами условие их параллельности звучит следующим образом: если два пересекающихся между собой следа одной плоскости параллельны одноименным с ними следам другой плоскости, то плоскости параллельны между собой.*

4. Пересечение плоскостей частного и общего положений

Две плоскости в пространстве могут быть параллельными и пересекающимися.

Если плоскости пересекаются, то линией их пересечения является прямая. Как известно, прямую линию можно построить по двум точкам. Поэтому, для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно определить две точки, принадлежащие как одной, так и второй плоскости.

Допустим необходимо через точку **А** провести плоскость параллельную заданной. В этом случае выдержать два условия: точка **А** принадлежит плоскости; плоскости между собой параллельны. Параллельность плоскостей устанавливается параллельностью одноименных следов. А для осуществления первого условия необходимо через точку **А** провести прямую частного положения (например горизонталь **AN**) параллельно следу плоскости. След этой горизонтали определит фронтальный след плоскости, который проводится параллельно фронтальному следу заданной плоскости. Остается определить горизонтальный след.

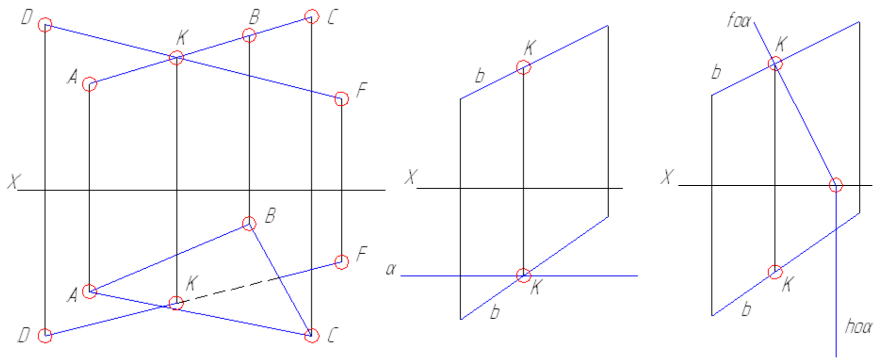
5. Пересечение прямой линии с плоскостью частного и общего положения.

Как известно, любая плоскость частного положения является проецирующей. Это значит, что все точки, лежащие в плоскости проецируются на ее соответствующую проекцию плоскости (прямую линию). То же относится и к точке пересечения прямой с плоскостью: Для определения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения необходимо:

1) через данную прямую провести вспомогательную плоскость частного положения таким образом, чтобы один из следов плоскости проходил через одноименную проекцию прямой;

2) построить линию пересечения данной и вспомогательной плоскостей;

3) на полученной линии определить точку пересечения прямой с плоскостью.



1.6 Лекция №6 (2 часа)
Тема «Прямая и точка в плоскости»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Взаимное положение прямых в пространстве
2. Следы прямой линии
3. Метод прямоугольного треугольника

1.6.2 Краткое содержание вопросов:

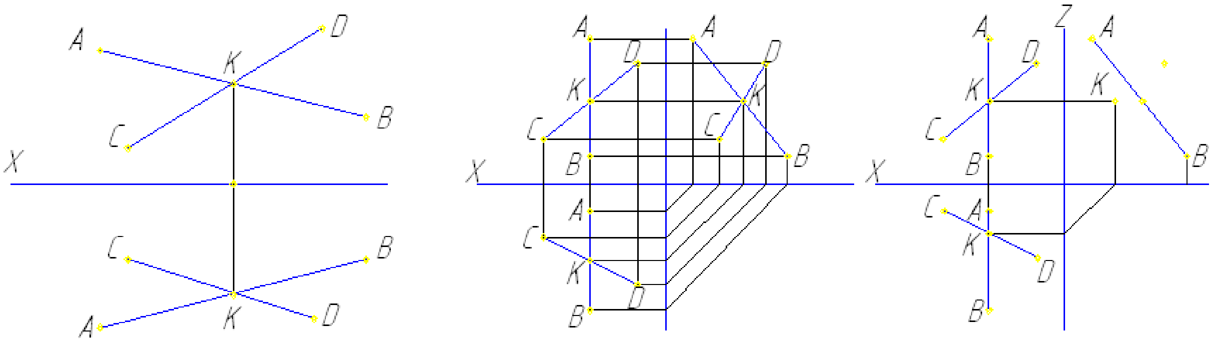
1. Взаимное положение прямых в пространстве.

Прямые в пространстве могут быть *пересекающимися, параллельными и скрещивающимися.*

- пересекающиеся прямые:

если прямые пересекаются, то они имеют общую точку (точку пересечения), точку, принадлежащую как одной, так и второй прямой. Как известно из материала прошлой лекции, если точка принадлежит прямой, то проекции этой точки принадлежат одноименным проекциям прямой. Следовательно, *у пересекающихся прямых проекции их точки пересечения будут являться точками пересечения одноименных проекций*. Или: *если две прямые пере-*

секаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой, а проекции точек пересечения лежат на одной линии связи.



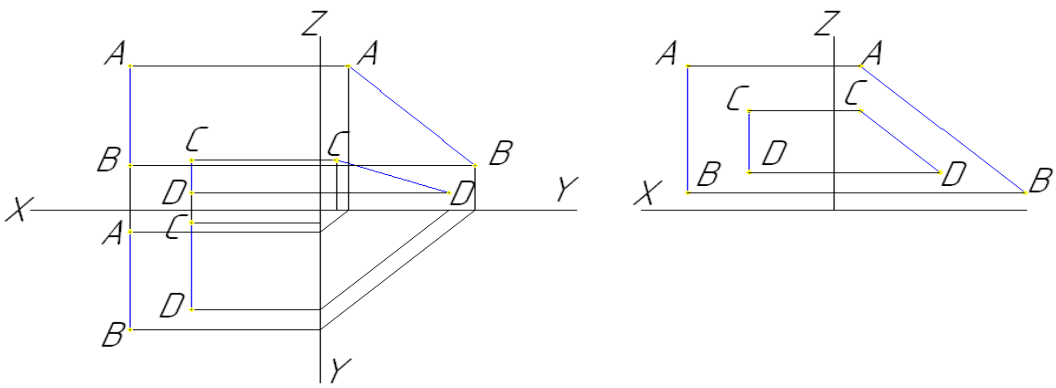
Для прямых, кроме профильных, в системе $\pi_1\pi_2$, справедливо и обратное утверждение:
если в системе $\pi_1\pi_2$ точки пересечения одноименных проекций прямых, кроме профильных, лежат на одной линии связи, то прямые пересекаются.

- параллельные прямые:
если в пространстве прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой.

Для прямых общего положения условие параллельности следующее:
если одноименные проекции прямых общего положения параллельны в системе двух плоскостей проекций, то прямые параллельны.

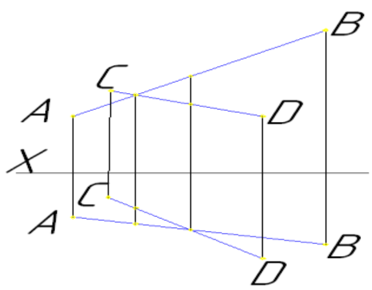
Для прямых частного положения:
если одноименные проекции прямых параллельны одной из осей проекций, то прямые параллельны при условии параллельности одноименных проекций на той плоскости проекций, которой параллельны прямые.

-

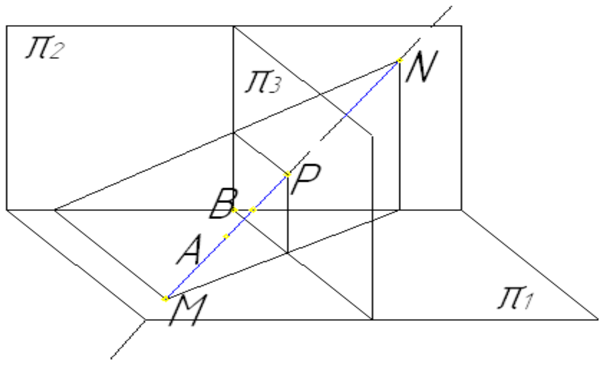


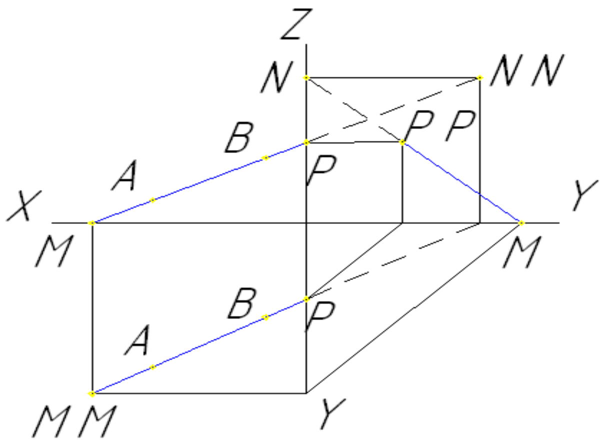
скрещивающиеся прямые:
скрещивающиеся прямые – прямые, не имеющие общих точек.

Точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи.



2. Следы прямой линии





На рисунке показана прямая **AB**, которая в точках **M** и **N** и **P** пересекает горизонтальную, фронтальную и профильную плоскости проекций:
Точка **M** называется горизонтальным следом прямой;
Точка **N** называется фронтальным следом прямой;
Точка **P** называется профильным следом прямой.

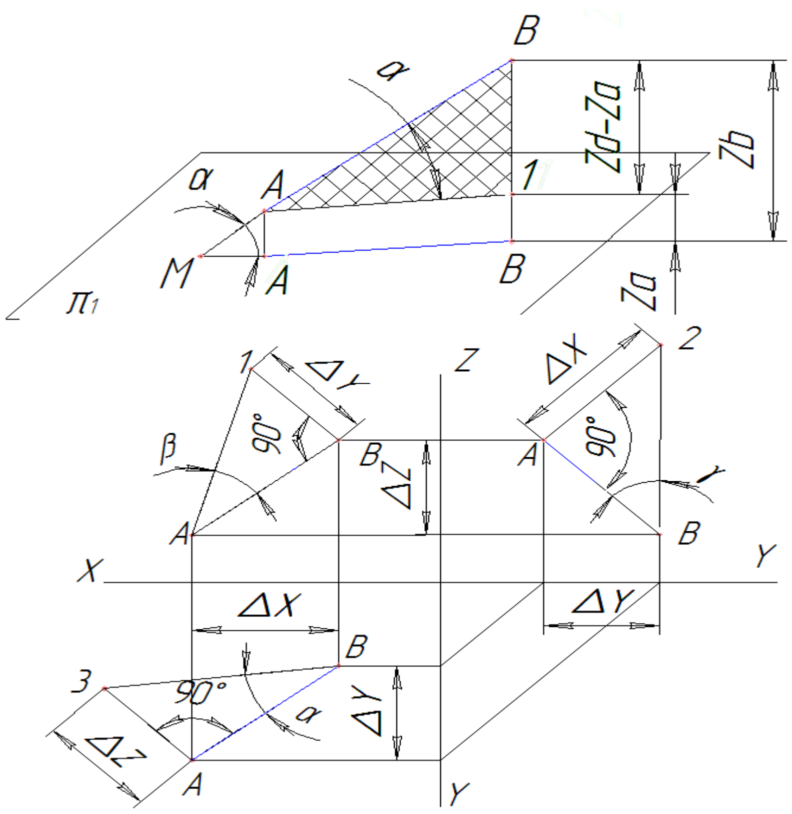
Чтобы найти горизонтальный след прямой необходимо продолжить фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью ***X*** *(**M**$^{//}$ - фронтальная проекция горизонтального следа), через точку **M**$^{//}$ провести перпендикуляр к оси **X** до пересечения с продолжением горизонтальной проекции прямой (**M**$^{/}$ - горизонтальная проекция горизонтального следа, совпадает с самим горизонтальным следом **M**).*

*Чтобы найти фронтальный след прямой необходимо продолжить горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью **X** (**N**$^{/}$ - горизонтальная проекция фронтального следа), через точку **N**$^{/}$ провести перпендикуляр к оси **X** до пересечения с продолжением фронтальной проекции прямой (**N**$^{//}$ - фронтальная проекция фронтального следа, совпадает с самим фронтальным следом **N**).*

Если прямая параллельна плоскости, то она не имеет следа с этой плоскостью. Кроме того, по проекциям и следам прямой можно определить октанты, через которые она проходит.

3. Метод прямоугольного треугольника

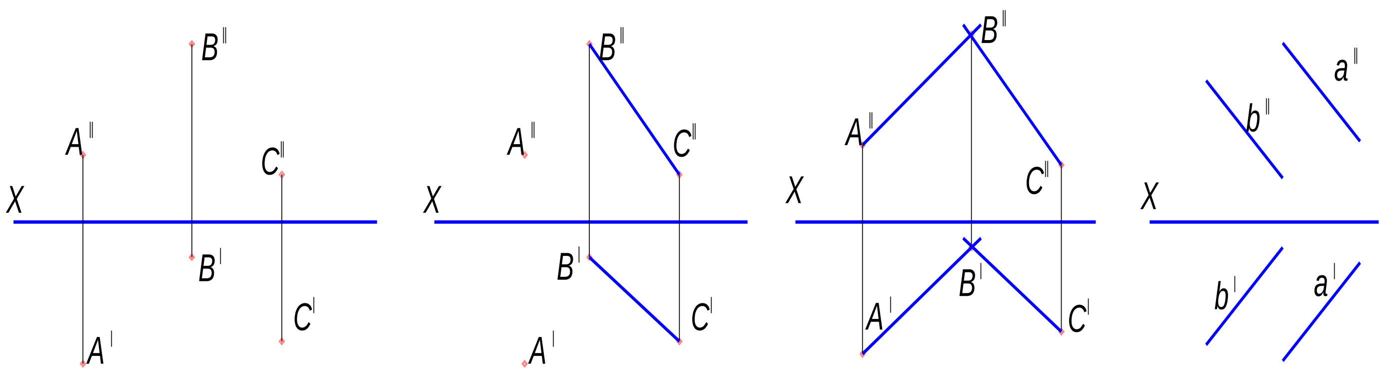
Рассмотрим рисунок:



Натуральная величина (истинный размер) отрезка **AB** прямой общего положения является гипотенузой прямоугольного треугольника **AB1**. Катет **A1** параллелен горизонтальной плоскости и равен по длине горизонтальной проекции **A**$^{/}$**B**$^{/}$**.** Величина второго катета **B1** равна разности расстояний точек **A** и **B** до плоскости π_1. Таким образом можно определить натуральную величину отрезка на эпюре.

Для построения натуральной величины отрезка прямой необходимо:
- *к горизонтальной проекции отрезка под прямым углом отложить разность аппликат концов отрезка и построить гипотенузу треугольника.*
- *к фронтальной проекции отрезка под прямым углом отложить разность ординат концов отрезка и построить гипотенузу треугольника.*
- *к профильной проекции отрезка под прямым углом отложить разность абсцисс концов отрезка и построить гипотенузу треугольника.*

При этом угол между гипотенузой и горизонтальной проекцией отрезка – $\boldsymbol{\alpha}$; между гипотенузой и фронтальной проекцией – $\boldsymbol{\beta}$; между гипотенузой и профильной проекцией – $\boldsymbol{\gamma}$.

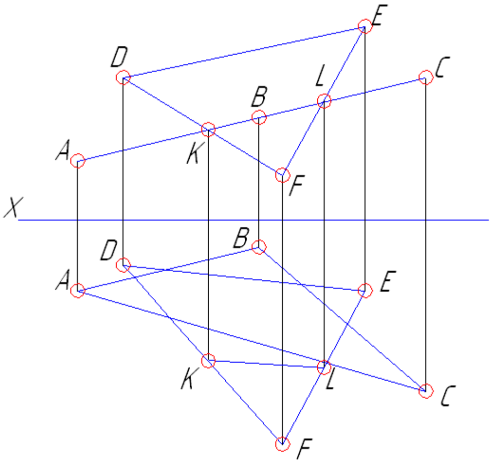


1.7 Лекция №7 (2 часа)

Тема «Взаимное положение плоскостей и их пересечение с прямыми и другими плоскостями»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Пересечение плоскостей частного и общего положений
2. Параллельность плоскостей
3. Пересечение прямой линии с плоскостью частного и общего положения
4. Построение линии пересечения двух плоскостей по точкам пересечения прямых линий с плоскостью



1.7.2 Краткое содержание вопросов:

1. Пересечение плос- костей частного и общего положений.

Две плоскости в пространстве могут быть параллельными и пересекающимися.

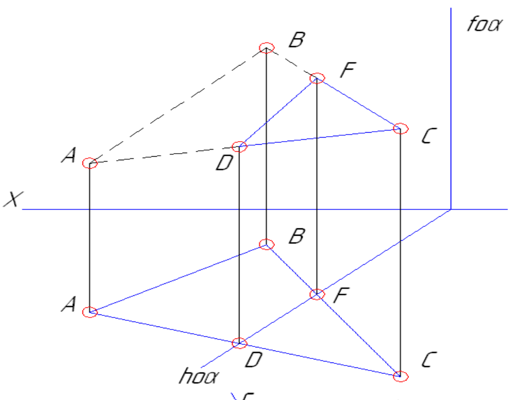
Если плоско- сти пересекаются, то ли- нией их пересечения является прямая. Как из- вестно, прямую ли- нию можно построить по двум точкам. Поэтому, для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно определить две точки, принадлежащие как одной, так и второй плоскости.

При определения общих точек плоскостей общего положения выполняют некоторые дополнительные построения. Если же хотя бы одна из плоскостей – плоскость частного положения, то задача упрощается. Поэтому рассмотрим сначала случай пересечения плоскостей, одна из которых – проецирующая.

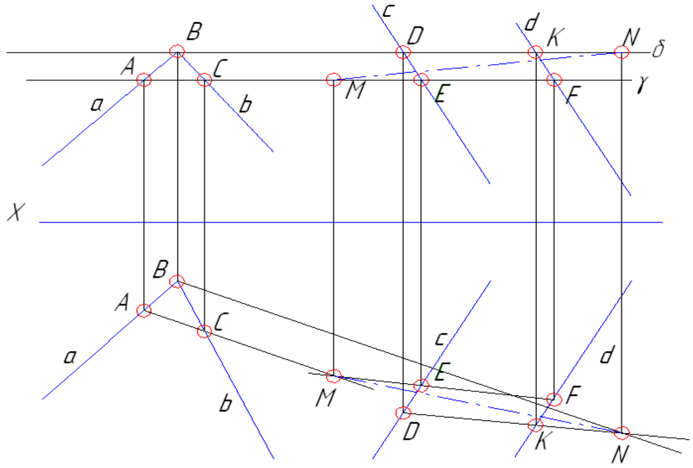
Пусть даны две плоскости, заданные треугольником:

плоскость **DEF** – плоскость общего положения; плоскость **ABC** – фронтально-проецирующая плоскость. Так как плоскость **ABC** проецирующая, то линия пересечения плоскостей проецируется на фронтальную проекцию плоскости **ABC** (отрезок $\mathbf{K^{//}L^{//}}$). Точка **К** и **L** принадлежит обеим плоскостям и лежит на прямой **DF**, поэтому проведя линии связи определим горизонтальные проекции линии пересечения плоскостей – $\mathbf{K^{/}L^{/}}$.

Аналогичные построения проводят и при пересечении плоскости общего положения горизонтально-проецирующей плоскостью:



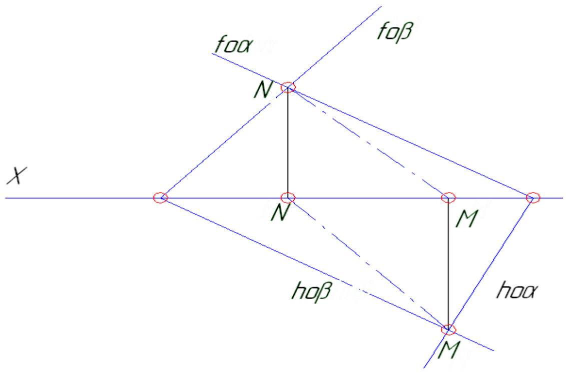
Для опреде- ления линии пересече- ния двух плоскостей общего положения необходимо вводить дополни- тельные плоскости частного положения. Пусть за- даны плос- кости общего положе- ния **α** и **β**: плоскость **α** – двумя



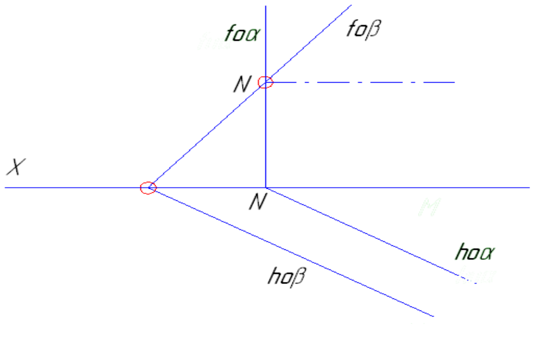
пересекающимися прямыми **a** и **b**; плоскость **β** – двумя параллельными прямыми **c** и **d**. Введем две вспомогательные плоскости частного положения (например горизонтальные **γ** и **δ**). Определим горизонтальные проекции точек пересечения плоскостей **δ** и **γ** с плоскостями **α** и **β** **(A$^{/}$, B$^{/}$, C$^{/}$ и D$^{/}$, E$^{/}$, К$^{/}$, F$^{/}$).** Прямые **AC** и **EF** являются линиями пересечения плоскостей **α**, **β** и **γ**. Поэтому точка пересечения этих прямых **M** будет принадлежать одновременно трем плоскостям **α**, **β** и **γ,** а следовательно являться общей точкой плоскостей **α**, **β**. Прямые **B** и **DK** являются линиями пересечения плоскостей **α**, **β** и **δ**. Поэтому точка пересечения этих прямых **N** будет принадлежать одновременно трем плоскостям **α**, **β** и **δ,** а следовательно являться общей точкой плоскостей **α**, **β**.

Таким образом получили две точки, принадлежащие одновременно плоскостям **α** и **β**. Соединив их получим линию пересечения плоскостей.

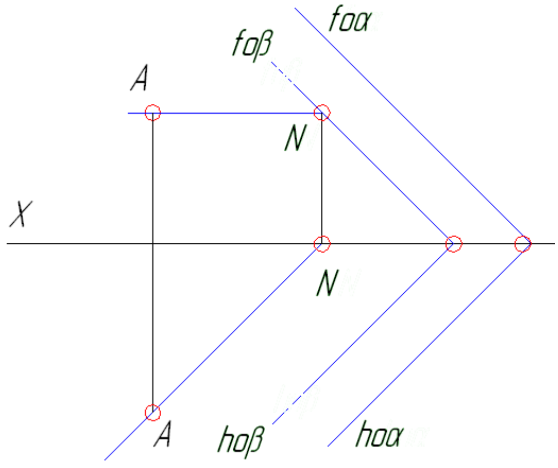
Если плоскости заданы следами, то линия пересечения этих плоскостей будет проходить через точки пересечения одноименных следов:



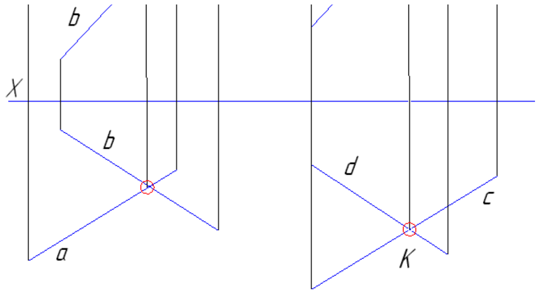
В случае параллельности одноименных следов в одной плоскости достаточно иметь одну точку пересечения следов в другой плоскости:



2. Параллельность плоскостей



Если две пересека- *ющиеся прямые*
одной плоскости соот- *ветственно парал-*
лельны двум пересекаю- *щим прямым дру-*
гой плоскости, то плос- *кости параллель-*
ны. Если необходимо че- рез точку **F** прове-
сти плоскость парал- лельную некото-
рой плоскости, задан- ной пересекающи-
мися прямыми **a** и **b**, необходимо через
нее провести пересека- ющиеся прямые **c**
и **d**, параллельные дан- ным.

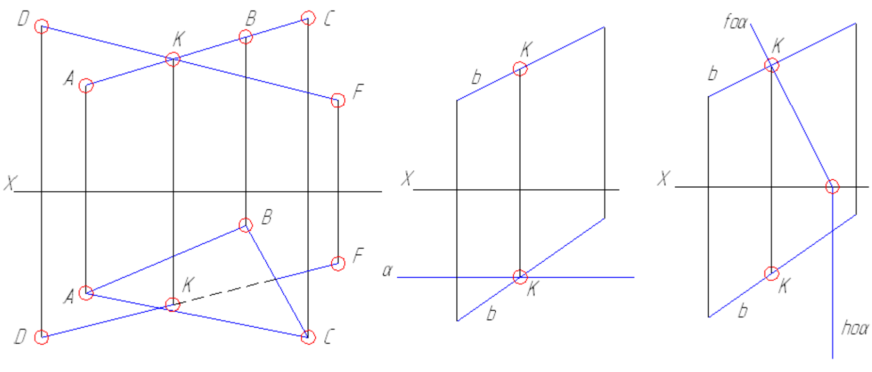


При задании плоскостей следами условие их параллельности звучит следующим образом: если два пересекающихся между собой следа одной плоскости параллельны одноименным с ними следам другой плоскости, то плоскости параллельны между собой.

Допустим необходимо через точку **A** провести плоскость параллельную заданной. В этом случае выдержать два условия: точка **A** принадлежит плоскости; плоскости между собой параллельны. Параллельность плоскостей устанавливается параллельностью одноименных следов. А для осуществления первого условия необходимо через точку **A** провести прямую частного положения (например горизонталь **AN**) параллельно следу плоскости. След этой горизонтали определит фронтальный след плоскости, который проводится параллельно фронтальному следу заданной плоскости. Остается определить горизонтальный след.

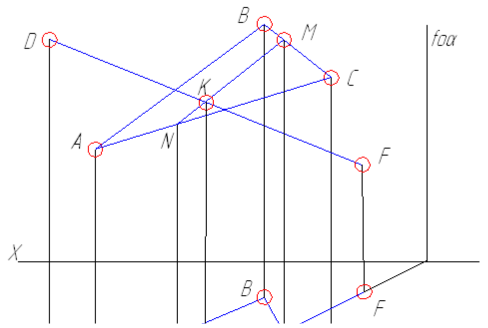
3. Пересечение прямой линии с плоскостью частного и общего положения.

Как известно, любая плоскость частного положения является проецирующей. Это значит, что все точки,
лежащие в плос-
кости проеци- руются
на ее соответ- ствую
ющую проек- цию
плоскости (пря- (пря-

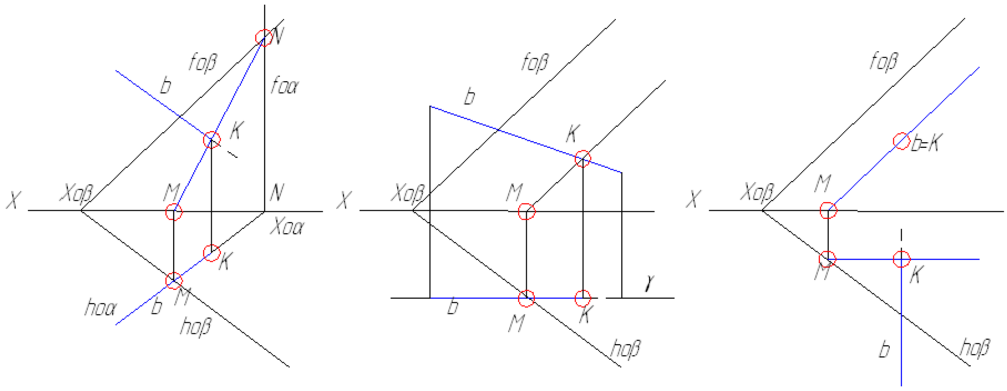


мую линию). То же относится и к точке пересечения прямой с плоскостью:

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения необходимо:
1) через данную прямую провести вспомогательную плоскость частного положения таким образом, чтобы один из следов плоскости проходил через одноименную проекцию прямой;
2) построить линию пересечения данной и вспомогательной плоскостей;
3) на полученной линии определить точку пересечения прямой с плоскостью.



При задании плоскости следами:



4. Построение линии пересечения двух плоскостей по точкам пересечения прямых линий с плоскостью.

Ранее мы рассматривали способ определения линии пересечения двух плоскостей при помощи введения вспомогательных плоскостей частного положения. *Другой способ определения линии пересечения плоскостей заключается в нахождении точек пересечения двух прямых, принадлежащих одной из плоскостей, с другой плоскостью*. Почему двух? Потому, что для построения прямой линии нужно иметь две точки, а линия пересечения плоскостей является прямой линией.

Определим точки пересечения прямых EF *и* DF*, принадлежащих плоскости треугольника* DEF*, с плоскостью треугольника* ABC*. Как известно, определить точку пересечения прямой с плоскостью общего положения можно используя вспомогательные плоскости частного положения. Представим себе проекцию* $E^{||}F^{||}$ *фронтальным следом фронтально-проецирующей плоскости. Тогда фронтальной проекцией линии пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника* ABC *будет являться линия* $3^{//}\,4^{//}$**.** *Определим горизонтальную проекцию этой линии* $3^{/}\,4^{/}$**.** *Так как прямая* EF *принадлежит фронтально-проецирующей плоскости, то точка пересечения этой прямой с линией* $3\ 4$ *и будет являться точкой (*K*) пересечения прямой* EF *с плоскостью треугольника* ABC*. Для этого сначала определим горизонтальную проекцию точки (*$K^{/}$*), а затем ее фронтальную проекцию* $K^{//}$**.**

Аналогичные действия совершаем с прямой DF*: Представим себе проекцию* $D^{||}F^{||}$ *фронтальным следом фронтально-проецирующей плоскости. Тогда фронтальной проекцией линии пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника* ABC *будет являться линия* $1^{//}\,2^{//}$**.** *Определим горизонтальную проекцию этой линии* $1^{/}\,2^{/}$**.** *Так как прямая* DF *принадлежит фронтально-проецирующей плоскости, то точка пересечения этой прямой с линией* $1\ 2$ *и будет являться точкой (*L*) пересечения прямой* DF *с плоскостью треугольника* ABC*. Для этого сначала определим горизонтальную проекцию точки (*$L^{/}$*), а затем ее фронтальную проекцию* $L^{//}$**.**

1.8 Лекция №8 (2 часа)

Тема «Способы перемены плоскостей проекций»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Общая характеристика способов преобразования чертежа
2. Способ замены плоскостей проекций

1.8.2 Краткое содержание вопросов:

1. Общая характеристика способов преобразования чертежа

В случаях частного положения прямых линий и плоскостей относительно плоскостей проекций значительно упрощается решение многих задач начертательной геометрии и черчения. Например, в случае частного положения прямой линии легко без дополнительных построений определить натуральную величину отрезка этой прямой линии или угол наклона прямой к плоскостям проекций и т.д. При частном положении плоскости относительно плоскостей проекций легко построить следы этой плоскости, определить наклон ее к плоскостям проекций и т.п.

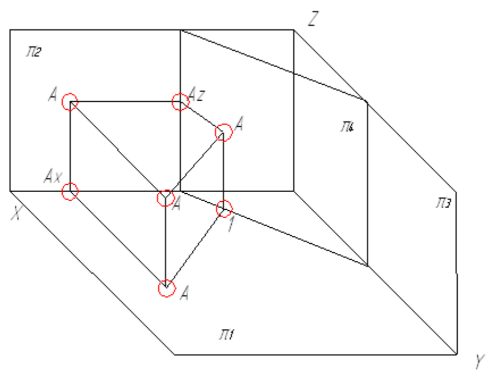
Зная способы преобразования чертежа мы можем любую прямую или плоскость обращать в частное положение. Причем такое преобразование возможно двумя путями:

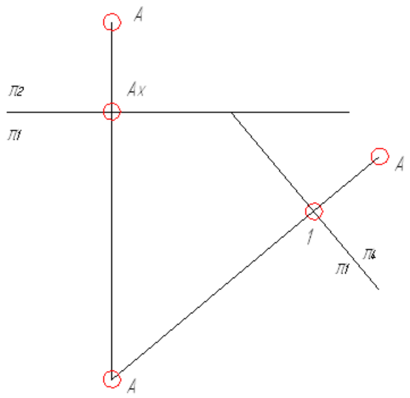
1) не изменяя положения точки, прямой или плоскости в пространстве заменяют заданную систему плоскостей проекций на новую, таким образом, чтобы прямая или плоскость в этой новой системе оказались в частном положении (способ перемены плоскостей проекций);

2) изменяя положение точки, прямой или плоскости в пространстве добиваются их частного положения относительно данной системы плоскостей проекций (способ вращения (совмещения).

2. Способ замены плоскостей проекций

Пространственное положение точки, прямой или плоскости остается неизменным, в систему плоскостей $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2}$ вводятся дополнительные плоскости, которые перпендикулярны или $\boldsymbol{\pi_1}$, или $\boldsymbol{\pi_2}$, или перпендикулярны между собой. Эти дополнительные плоскости проекций принимаются за новые плоскости проекций.





Пусть имеем точку **A** в системе плоскостей π_1, π_2. Введем плоскость π_4, которая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций и определим проекцию точки **A** на эту плоскость: прямая AA^{IV} перпендикулярна плоскости π_4, $A^{IV}1 = A^{//}Ax$. Теперь определим положение точки **A** на эпюре.

В рассмотренном случае мы ввели дополнительную плоскость один раз. В зависимости от задачи, перемену плоскостей проекций можно производить несколько раз.

В курсе начертательной геометрии выделяют четыре основные задачи преобразования:
1) определение натуральной величины отрезка прямой общего положения;
2) приведение отрезка прямой общего положения в проецирующее положение;
3) приведение плоской фигуры общего положения в проецирующее положение;
4) определение натуральной величины плоской фигуры .

1.9 Лекция №9 (2 часа)
Тема «Основы способа вращения»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Способ вращения
2. Вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

1.9.2 Краткое содержание вопросов:

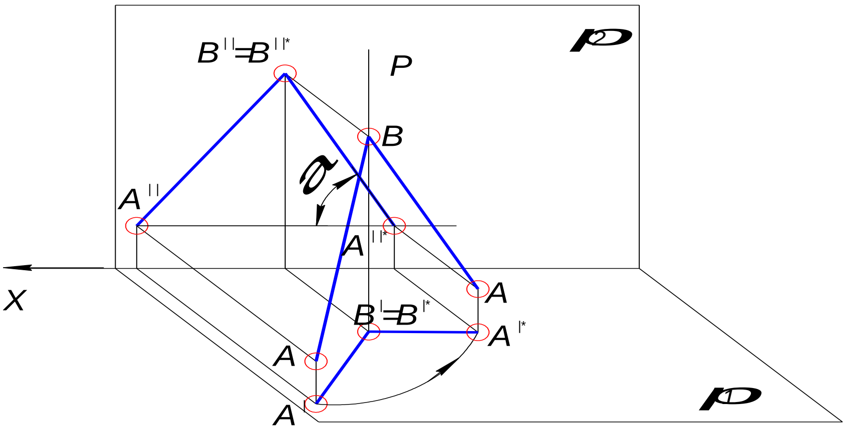
1. Способ вращения

При использовании способа вращения необходимо знать:
1) ось вращения – прямая, перпендикулярная или параллельная плоскости проекций, относительно которой рассматривается вращение точки, прямой, плоскости или фигуры;
2) плоскость вращения – плоскость, в которой перемещается любая точка при вращении. Плоскость вращения всегда перпендикулярна оси вращения;
3) центр вращения – точка пересечения оси вращения с плоскостью вращения;
4) радиус вращения – радиус окружности вращения любой точки при вращении.

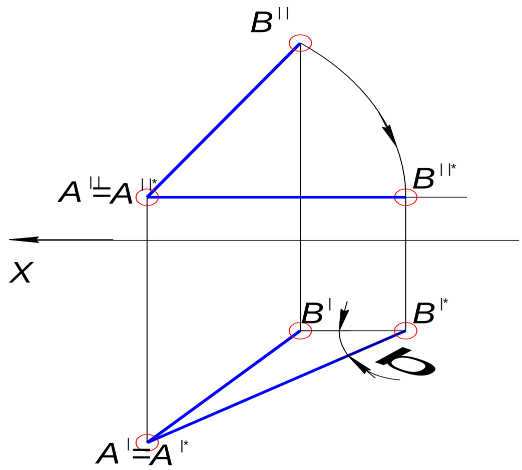
2. Вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.

Пусть необходимо определить натуральную величину отрезка прямой общего положения **AB**.

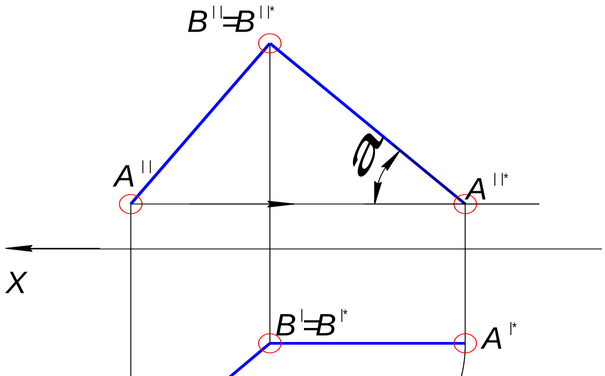
Как известно, определить натуральную величину определить просто, если отрезок является отрезком прямой частного положения. Для приведения прямой общего положения в частное положение воспользуемся методом вращения.



Проведем ось вращения (**PB**) через точку **B**, перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций. Будем вращать точку **A** отрезка относительно оси вращения против хода часовой стрелки по радиусу вращения **A'B'** до положения, при котором отрезок **AB** будет параллелен фронтальной плоскости проекций (горизонтальная проекция отрезка **A'*B'*** параллельна оси **X**). Построим фронтальную проекцию отрезка, которая и будет являться натуральной величиной отрезка **AB**, так как после вращения прямая параллельна π_2 и проецируется на эту плоскость без искажений. Причем не искажается и угол наклона к плоскости π_1.



Теперь изобразим построения на эпюре.

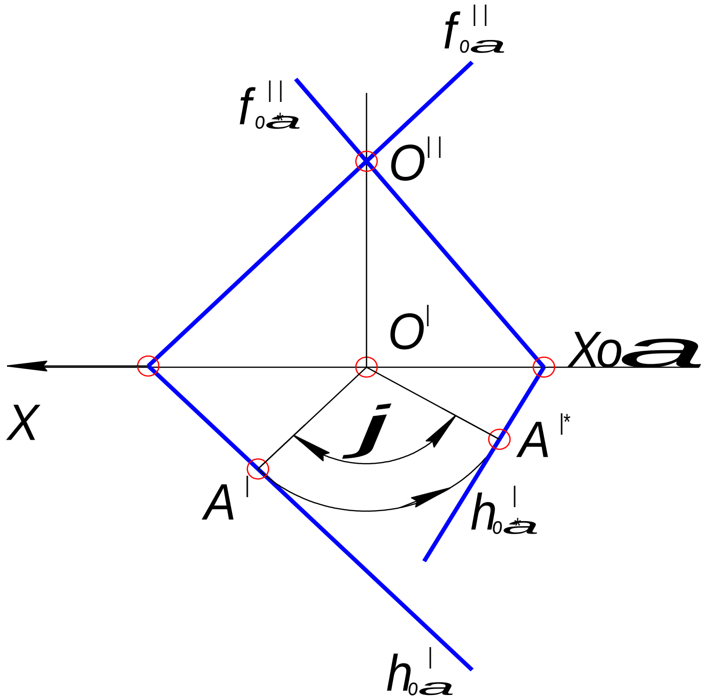


Аналогичные построения проводят и при вращении вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций.

Таким образом, $A^{/}B^{/*}$ - натуральная величина отрезка **AB**, **β** – угол наклона прямой к плоскости π_2.

Ось вращения может и не проходить через точку отрезка. В этом случае обе точки отрезка вращают на одинаковый угол относительно центра вращения.

Допустим, необходимо повернуть на угол **φ** плоскость **α** относительно оси, лежащей в плоскости π_2 и перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций. Для этого через горизонтальную проекцию оси ($O^{/}$) проведем перпендикуляр к горизонтальному следу плоскости ($A^{/}$). Повернем точку $A^{/}$ на угол **φ** против часовой стрелки. К отрезку $A^{/*}O^{/}$ перпендикулярно проведем горизонтальный след плоскости после вращения. Так как точка $O^{//}$ фронтального следа плоскости принадлежит оси вращения, положение этой точки не изменится после вращения.



2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа №1 (4 часа)

Тема «Методы проецирования, метод Монжа»

2.1.1 Цель работы: Научиться проецировать точки на три плоскости проекций

2.1.2 Задачи работы:

1. Определение плоскостей проекций
2. Построение наглядного изображения
3. Построение комплексного чертежа
4. Определение положения точек относительно плоскостей проекций

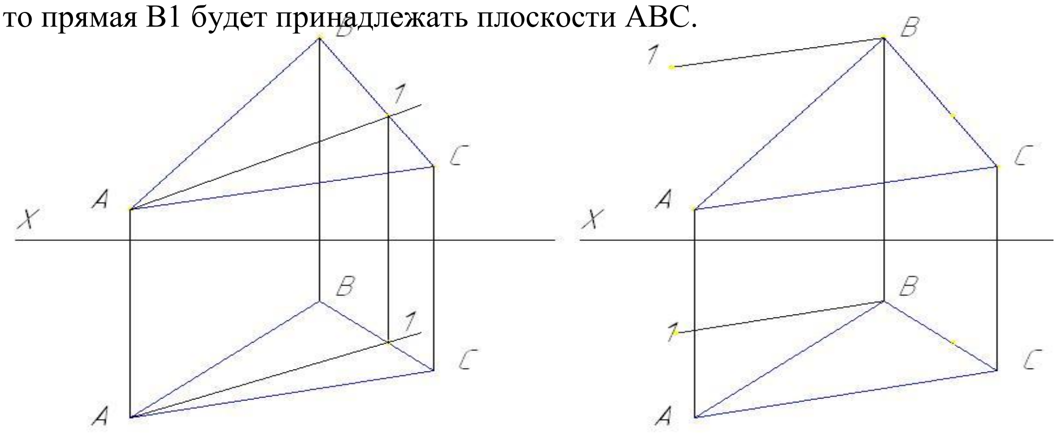
2.1.3 Перечень приборов и материалов, используемых в работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.1.4. Описание (ход) работы

1. Определение плоскостей проекций

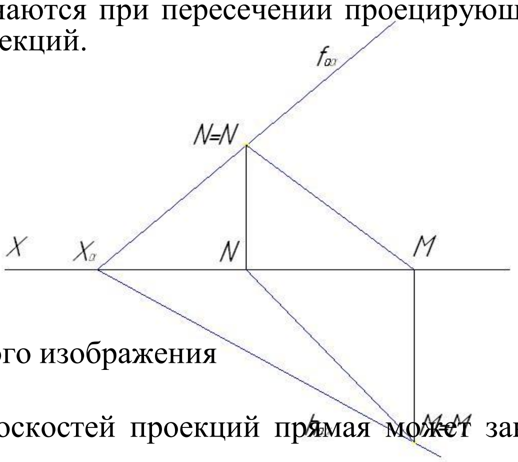
Что значит: прямая принадлежит плоскости? Это значит, что прямая проходит через две точки, лежащие в плоскости или через одну точку параллельно прямой, лежащей в этой плоскости. То есть, если взять плоскость, заданную треугольником АВС, отметить на стороне ВС точку 1 и провести через точки 1 и А прямую линию, то прямая А1 будет принадлежать плоскости АВС. Или, если через точку В провести прямую параллельную стороне АС, то прямая В1 будет принадлежать плоскости АВС.



Для случая задания плоскости следами можно сказать следующее:

- если прямая принадлежит плоскости, то следы этой прямой принадлежат одноименным следам плоскости (см. рисунок): прямая **MN** принадлежит плоскости **α**.

На рисунке центральной проекцией точки **A** является точка $\mathbf{A_0}$ – точка пересечения прямой **AS** с плоскостью $\boldsymbol{\pi_0}$. Таким же образом построены центральные проекции $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, **B**, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$. Они получаются при пересечении проецирующих прямых (проецирующих лучей) с плоскостью проекций.



1. Построение наглядного изображения

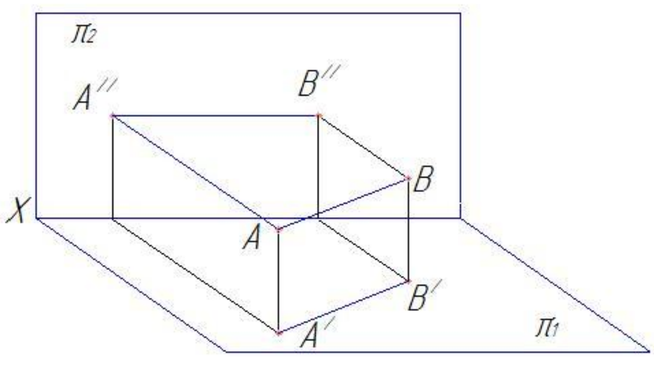
Относительно плоскостей проекций прямая может занимать следующие положения:

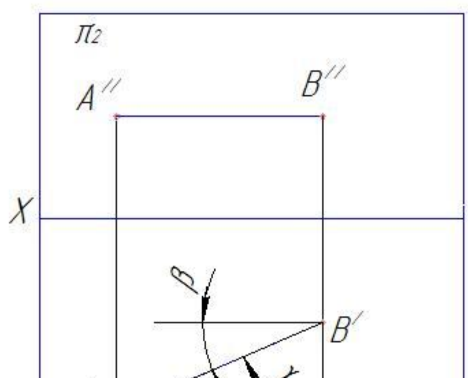
1 *прямая не параллельна ни одной из плоскостей проекций – прямая общего положения;*

2 *прямая параллельна одной из плоскостей проекций (прямая может принадлежать этой плоскости) – прямая частного положения;*

3 *прямая параллельна двум плоскостям проекций, т. е. перпендикулярна третьей – прямая частного положения.*

Если прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, ее называют *горизонтальной прямой*.



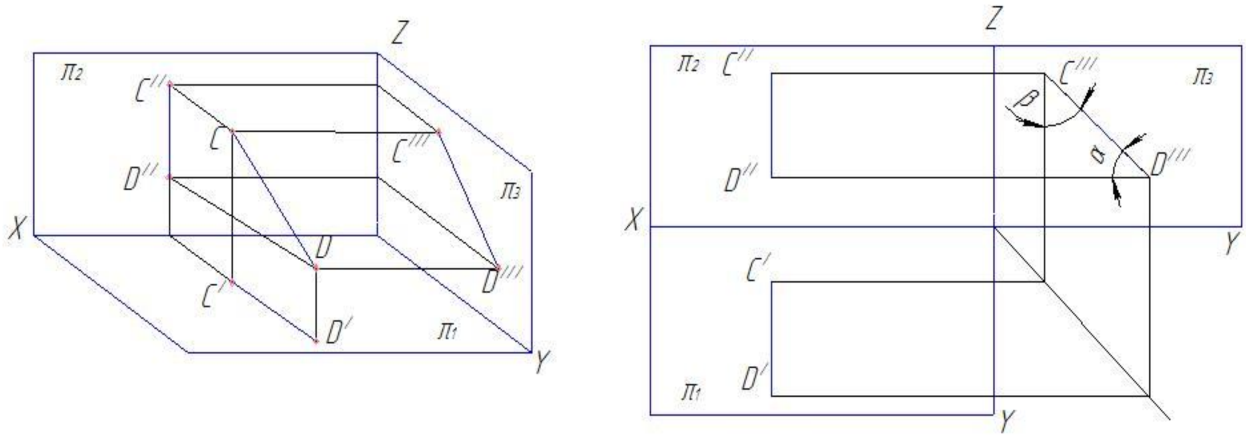


Ее фронтальная $\mathbf{A}^{//}\mathbf{B}^{//}$ проекция параллельна оси **X**; длина горизонтальной проекции отрезка $\mathbf{A}^{/}\mathbf{B}^{/}$ равна длине самого отрезка **AB** (*натуральная величина*); угол **β** наклона горизонтальной проекции к оси **X** равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций; угол **γ** наклона горизонтальной проекции к оси **Y** равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций

Если прямая параллельная фронтальной плоскости проекций, ее называют *фронтальной прямой*.

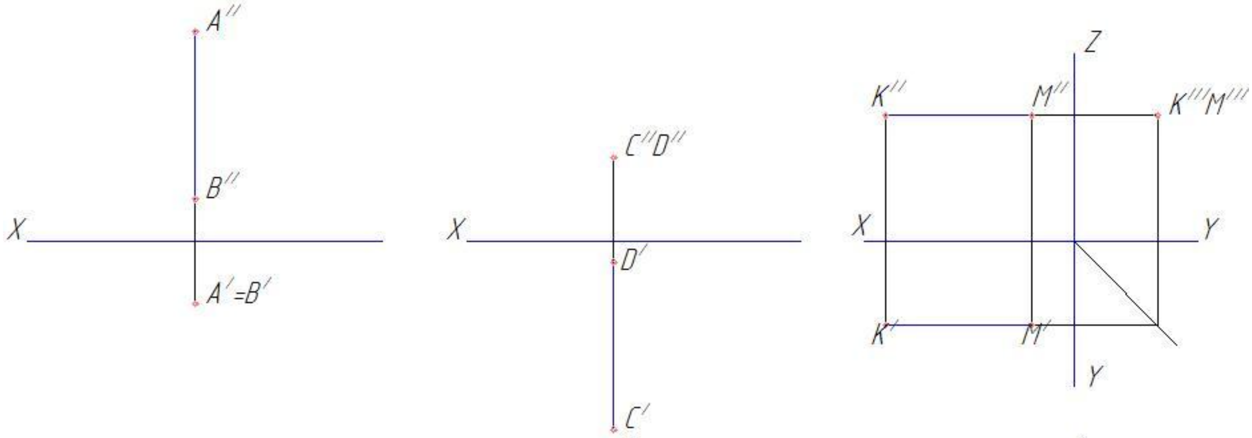
4. Построение комплексного чертежа

Если прямая параллельная профильной плоскости проекций, ее называют *профильной прямой*.



Ее горизонтальная и фронтальная проекции параллельны оси **Z**; длина профильной проекции отрезка $\mathbf{K}^{///}\mathbf{M}^{///}$ равна длине самого отрезка **KM**; углы наклона **α** и **β**, образованные профильной проекцией с осями координат **Y** и **Z**, равны углам наклона прямой к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно.

Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций называется *горизонтально-проецирующей* (а); перпендикулярная фронтальной плоскости проекций – *фронтально-проецирующей* (б); профильной плоскости проекций – *профильно-проецирующей* (в).

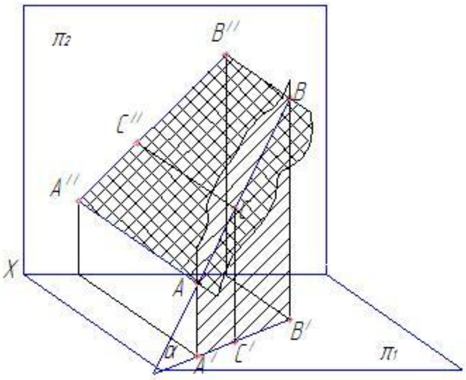


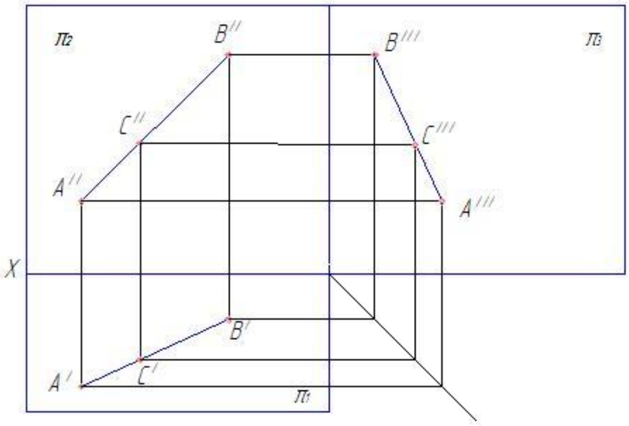
а б в

4. Определение положения точек относительно плоскостей проекций

Определим длину проекций отрезка прямой:

$$|A' B'|=|AB|*\cos \alpha; \ |A'' B''|=|AB|*\cos \beta; \ |A''' B'''|=|AB|*\cos \gamma,$$





где **α** – угол между прямой и горизонтальной плоскостью проекций; **β** - угол между прямой и фронтальной плоскостью проекций; **γ** - угол между прямой и профильной плоскостью проекций.

Из формул видно, что при **α=0** отрезок проецируется в натуральную величину; при **α=90⁰** отрезок проецируется в точку. В остальных случаях длина проекции меньше длины самого отрезка.

*Если какая-либо точка принадлежит прямой, то ее проекция принадлежит проекции этой прямой. В нашем случае это точка **C**. Причем, если точка на отрезке делит его длину в данном отношении, то проекция точки делит длину одноименной проекции отрезка в том же отношении:*

$AC/CB=A'C'/C'B'=A''C''/C''B''$

2.2 Лабораторная работа № 2 (4 часа).

Тема: «Точка в системе двух и трех плоскостей проекций»

2.2.1 Цель работы: Научиться проецировать точки на две и на три плоскости проекций

2.2.2 Задачи работы:

1. Проецирование точки на две плоскости проекций
2. Проецирование точки на три плоскости проекций

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

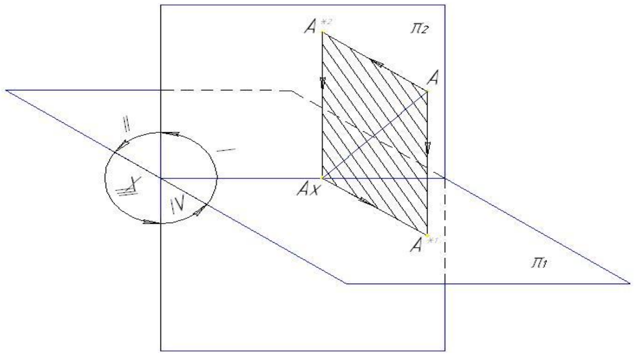
1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.2.4 Описание (ход) работы:

2. Проецирование точки на две плоскости проекций

Для удобства проецирования в качестве двух плоскостей проекций выбирают две взаимно перпендикулярные плоскости. Одну из них располагают горизонтально (*горизонтальная плоскость проекций* π_1), другую

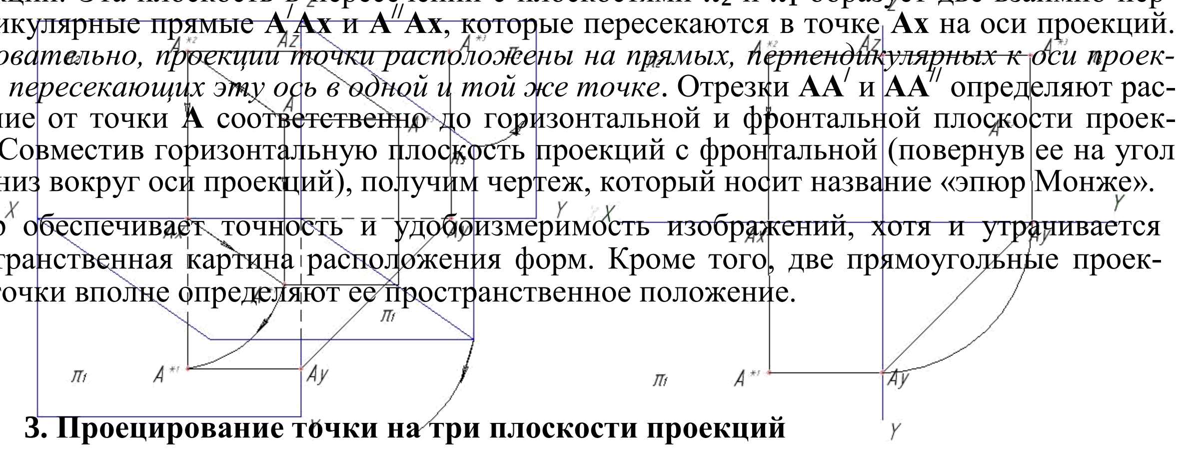
– вертикально (*фронтальная плоскость проекций* π_2). Линия пересечения этих плоскостей называется *осью проекций* и обозначается буквой **X** или комбинацией букв π_2/π_1.



Пересекаясь, плоскости проекций образуют *четыре двугранных угла или четыре четверти*: **I, II, III, IV**.

Определим проекции точки **A**. Для этого из точки **A** проведем перпендикуляры к плоскостям π_2 и π_1. В точках пересечения перпендикуляров и плоскостей получим горизонтальную проекцию точки **A′** и фронтальную проекцию точки **A″**. Проецирующие прямые **AA′** и **AA″** определяют плоскость, перпендикулярную к плоскостям проекций и к оси проекций. Эта плоскость в пересечении с плоскостями π_2 и π_1 образует две взаимно перпендикулярные прямые **A′Ax** и **A″Ax**, которые пересекаются в точке **Ax** на оси проекций. *Следовательно, проекции точки расположены на прямых, перпендикулярных к оси проекций и пересекающих эту ось в одной и той же точке*. Отрезки **AA′** и **AA″** определяют расстояние от точки **A** соответственно до горизонтальной и фронтальной плоскости проекций. Совместив горизонтальную плоскость проекций с фронтальной (повернув ее на угол 90^0 вниз вокруг оси проекций), получим чертеж, который носит название «эпюр Монже».

Эпюр обеспечивает точность и удобоизмеримость изображений, хотя и утрачивается пространственная картина расположения форм. Кроме того, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее пространственное положение.



3. Проецирование точки на три плоскости проекций

Для полного выявления наружных и внутренних форм сложных деталей необходимо три и более изображений. В этих случаях вводят три и более плоскостей.

Рассмотрим введение в систему плоскостей $\pi_2\pi_1$ еще одной плоскости проекций π_3, которую принято называть *профильной*. Профильная плоскость перпендикулярна плоскостям π_2 и π_1. Линия пересечения профильной и горизонтальной плоскости образуют ось проекций **y**, профильной и фронтальной плоскости – ось проекций **z**. Схема совмещения плоскостей показана на рисунке.

Следует отметить, что горизонтальная и фронтальная проекции точки расположены на одной вертикали, а фронтальная и профильная проекции – на одной горизонтали. Профильная проекция точки стоится по горизонтальной и фронтальной. Расстояния от точки до плоскостей проекций определяется соответствующими отрезками на чертеже: до горизонтальной плоскости – отрезком $\mathbf{A^{//}Ax}$ или $\mathbf{A^{///}Ay}$; до фронтальной плоскости проекций
– отрезком $\mathbf{A^{/}Ax}$ или $\mathbf{A^{///}Az}$; до профильной плоскости проекций – отрезком
$\mathbf{A^{//}Az}$ или $\mathbf{A^{/}Ay}$.

2.3 Лабораторная работа № 3 (2 часа)

Тема: «Точка в четвертях и октантах пространства»

2.3.1 Цель работы: Изучить нумерацию октантов

2.3.2 Задачи работы:

1. Точка в системе трех плоскостей проекций
2. Нумерация октантов

2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

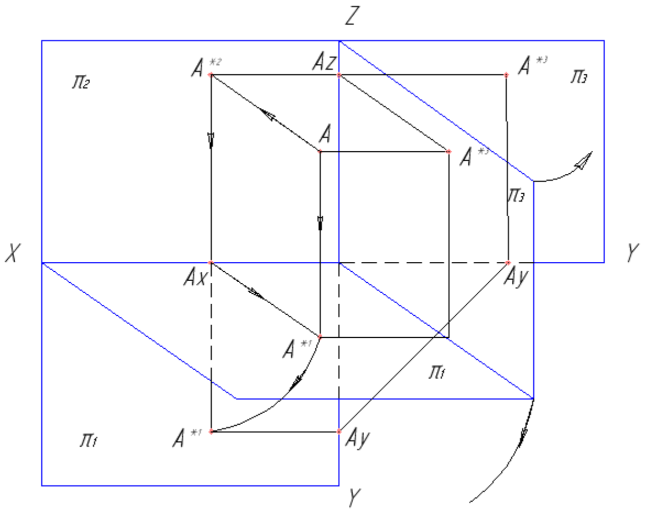
1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

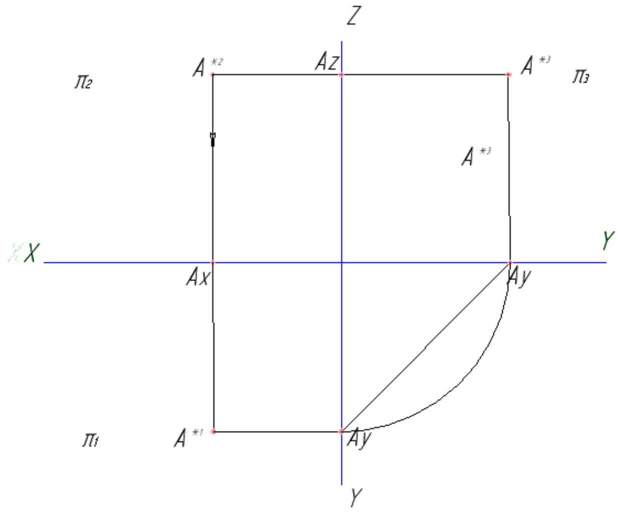
2.3.4 Описание (ход) работы:

1. Точка в системе трех плоскостей проекций

Для полного выявления наружных и внутренних форм сложных деталей необходимо три и более изображений. В этих случаях вводят три и более плоскостей.

Рассмотрим введение в систему плоскостей $\boldsymbol{\pi_2\pi_1}$ еще одной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_3}$, которую принято называть *профильной*. Профильная плоскость перпендикулярна плоскостям $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$. Линия пересечения профильной и горизонтальной плоскости образуют ось проекций **y**, профильной и фронтальной плоскости – ось проекций **z**. Схема совмещения плоскостей показана на рисунке.





Следует отметить, что горизонтальная и фронтальная проекции точки расположены на одной вертикали, а фронтальная и профильная проекции – на одной горизонтали. Профильная проекция точки стоится по горизонтальной и фронтальной. Расстояния от точки до плоскостей проекций определяется соответствующими отрезками на чертеже: до горизонтальной плоскости – отрезком $\mathbf{A^{//}Ax}$ или $\mathbf{A^{///}Ay}$; до фронтальной плоскости проекций – отрезком $\mathbf{A^{/}Ax}$ или $\mathbf{A^{///}Az}$; до профильной плоскости проекций – отрезком $\mathbf{A^{//}Az}$ или $\mathbf{A^{/}Ay}$.

3. Нумерация октантов

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций пересекаясь образуют восемь трехгранных углов – *восемь октантов*. Нумерация октантов представлена на рисунке. Знаки при координатах точки в октантах имеют следующие значения:

Октант	Знаки координат		
	X	Y	Z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

2.4 Лабораторная работа № 4 (4 часа).

Тема: «Проекции отрезка прямой линии. Точка на прямой»

2.4.1 Цель работы: Изучить различные положения прямых и точек в плоскости

2.4.2 Задачи работы:

1. Проецирование отрезка и его деление в данном отношении
2. Положение прямой относительно плоскостей проекций

2.4.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

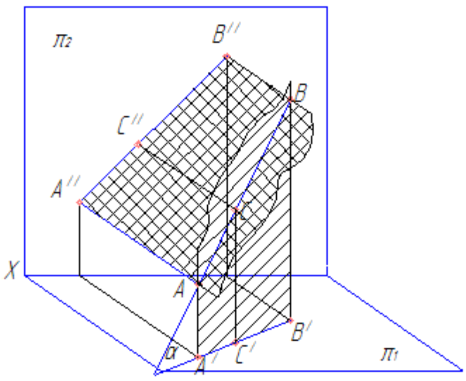
2.4.4 Описание (ход) работы:

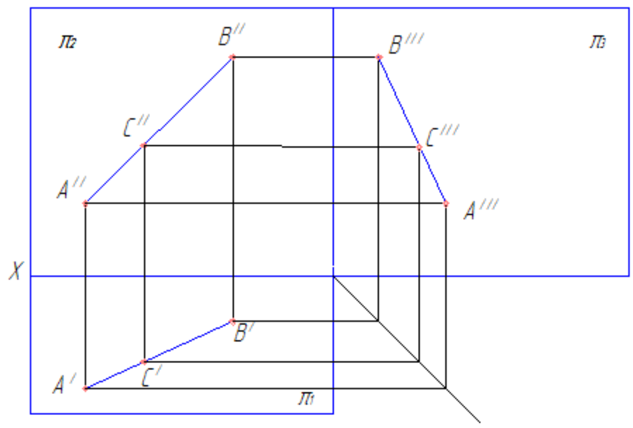
1. Проецирование отрезка и его деление в данном отношении

Предположим, что даны точки **A** и **B** в пространстве, через которые проходит прямая и притом только одна. Найдем проекции этих точек на горизонтальную ($\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$) и фронтальную ($\mathbf{A''}$, $\mathbf{B''}$) плоскости проекций.

Соединив соответствующие проекции прямой линией, получим горизонтальную и фронтальную проекции прямой **AB**.

С другой стороны, прямая **AB** имеет множество точек, через которые проходит множество проецирующих прямых. Эти прямые образуют проецирующие плоскости, перпендикулярные горизонтальной и фронтальной плоскости. Линией пересечения двух плоскостей является прямая линия, которая и будет проекцией прямой **AB**.





Определим длину проекций отрезка прямой:

$$|\mathbf{A' B'}|=|\mathbf{AB}|*\cos\alpha;\ |\mathbf{A'' B''}|=|\mathbf{AB}|*\cos\beta;\ |\mathbf{A''' B'''}|=|\mathbf{AB}|*\cos\gamma,$$

где **α** – угол между прямой и горизонтальной плоскостью проекций;

β - угол между прямой и фронтальной плоскостью проекций;

γ - угол между прямой и профильной плоскостью проекций.

Из формул видно, что при $\boldsymbol{\alpha=0}$ отрезок проецируется в натуральную величину; при $\boldsymbol{\alpha=90^0}$ отрезок проецируется в точку. В остальных случаях длина проекции меньше длины самого отрезка.

Если какая-либо точка принадлежит прямой, то ее проекция принадлежит проекции этой прямой. В нашем случае это точка ***C****. Причем, если точка на отрезке делит его длину в данном отношении, то проекция точки делит длину одноименной проекции отрезка в том же отношении:*

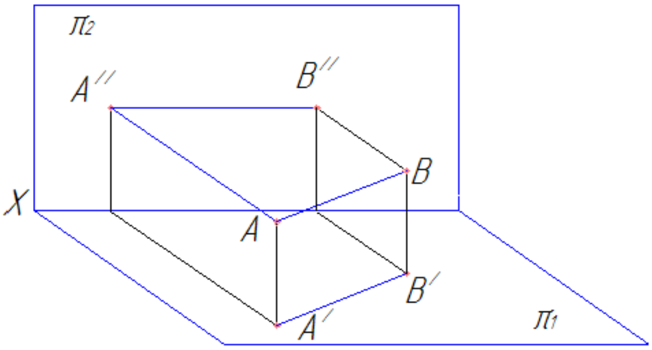
$$\mathbf{AC/CB=A'C'/C'B'=A''C''/C''B''}.$$

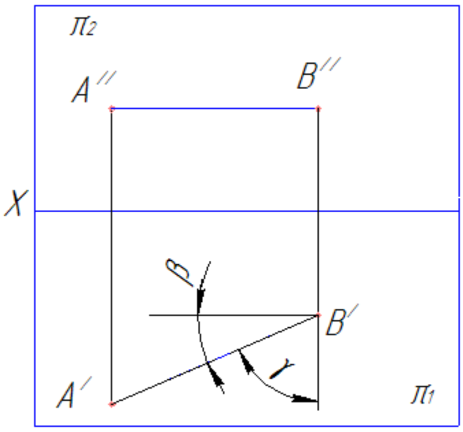
2. Положение прямой относительно плоскостей проекций.

Относительно плоскостей проекций прямая может занимать следующие положения:

4) *прямая не параллельна ни одной из плоскостей проекций – <u>прямая общего положения</u>;*
5) *прямая параллельна одной из плоскостей проекций (прямая может принадлежать этой плоскости) – <u>прямая частного положения</u>;*
6) *прямая параллельна двум плоскостям проекций, т. е. перпендикулярна третьей – <u>прямая частного положения</u>.*

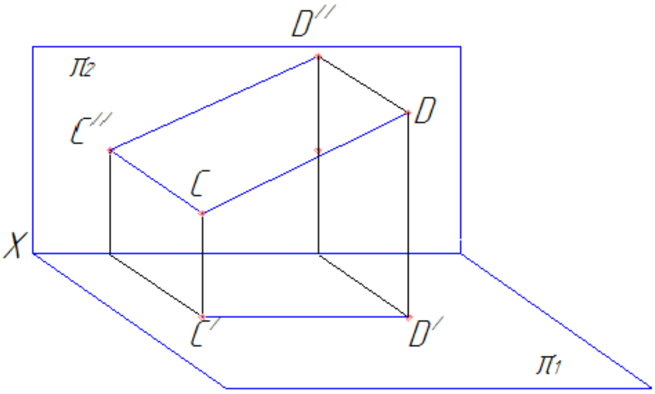
Если прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, ее называют *горизонтальной прямой*.

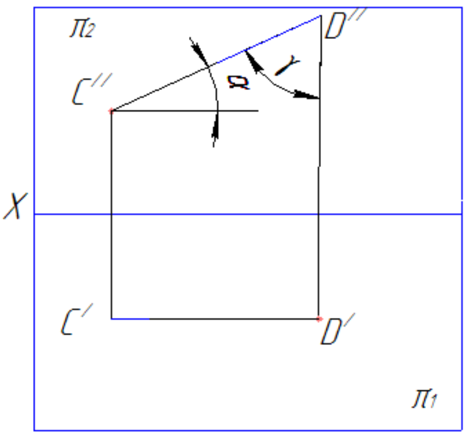




Ее фронтальная **A**$^{//}$**B**$^{//}$ проекция параллельна оси **X**; длина горизонтальной проекции отрезка **A**$^{/}$**B**$^{/}$ равна длине самого отрезка **AB** (*натуральная величина*); угол **β** наклона горизонтальной проекции к оси **X** равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций; угол **γ** наклона горизонтальной проекции к оси **Y** равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций

Если прямая параллельная фронтальной плоскости проекций, ее называют *фронтальной прямой*.





2.5 Лабораторная работа № 5 (4 часа).

Тема: «Способы задания плоскостей. Следы плоскости»

2.5.1 Цель работы: Изучить различные положения прямых и точек

в плоскости

2.5.2 Задачи работы:

1. Способы задания плоскостей
2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Прямая и точка в плоскости
3. Взаимное положение плоскостей. Параллельность плоскостей

2.5.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.5.4 Описание (ход) работы:

1. Способы задания плоскостей

На чертеже плоскость может быть задана: *проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой; проекциями прямой и точки; проекциями двух пересекающихся прямых, проекциями двух параллельных прямых*.

Более наглядно *плоскость может быть задана прямыми, по которым она пересекает плоскости проекций*. Такие прямые называют следами плоскости. *След плоскости* – это линия, по которой пересекаются плоскости. Любая прямая, лежащая в плоскости и не параллельная плоскости проекций, пересекает последнюю. Очевидно, что след прямой будет располагаться на следе плоскости. След плоскости – это линия. Для построения прямой линии достаточно иметь две точки, принадлежащие прямой. Поэтому для определения следов плоскости необходимо определить следы двух прямых, лежащих в этой плоскости.

2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Точка и прямая в плоскости

Относительно плоскостей проекций плоскость может занимать следующие положения:

- *не перпендикулярна плоскостям проекций (плоскость общего положения);*
- *перпендикулярна одной плоскости проекций (плоскость частного положения);*
- *перпендикулярна двум плоскостям проекций (плоскость частного положения).*

Что значит: прямая принадлежит плоскости? Это значит, что прямая проходит через две точки, лежащие в плоскости или через одну точку параллельно прямой, лежащей в этой плоскости. То есть, если взять плоскость, заданную треугольником АВС, отметить на стороне ВС точку 1 и провести через точки 1 и А прямую линию, то прямая А1 будет принадлежать плоскости АВС. Или, если через точку В провести прямую параллельную стороне АС, то прямая В1 будет принадлежать плоскости АВС.

3. Взаимное положение плоскостей. Параллельность плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающим прямым другой плоскости, то плоскости параллельны. Если необходимо через точку **F** провести плоскость параллельную некоторой плоскости, заданной пересекающимися прямыми **a** и **b**, необходимо через нее провести пересекающиеся прямые **c** и **d**, параллельные данным. *При задании плоскостей следами условие их параллельности звучит следующим образом: если два пересекающихся между собой следа одной плоскости параллельны одноименным с ними следам другой плоскости, то плоскости параллельны между собой.*

2.6 Лабораторная работа № 6 (4 часа).

Тема: «Прямая и точка в плоскости»

2.2.1 Цель работы: Изучить различные положения прямых и точек в плоскости

2.2.2 Задачи работы:

1. Определение плоскостей проекций
2. Определить положение отрезка относительно плоскостей проекций

2.6.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.6.4 Описание (ход) работы:

1. Определение плоскостей проекций

Предположим, что даны точки **A** и **B** в пространстве, через которые проходит прямая и притом только одна. Найдем проекции этих точек на горизонтальную ($\mathbf{A}^{/}$, $\mathbf{B}^{/}$) и фронтальную ($\mathbf{A}^{//}$, $\mathbf{B}^{//}$) плоскости проекций.

Соединив соответствующие проекции прямой линией, получим горизонтальную и фронтальную проекции прямой **AB**.

С другой стороны, прямая **AB** имеет множество точек, через которые проходит множество проецирующих прямых. Эти прямые образуют проецирующие плоскости, перпендикулярные горизонтальной и фронтальной плоскости. Линией пересечения двух плоскостей является прямая линия, которая и будет проекцией прямой **AB**.

Относительно плоскостей проекций прямая может занимать следующие положения:

4 *прямая не параллельна ни одной из плоскостей проекций – прямая общего положения;*

5 *прямая параллельна одной из плоскостей проекций (прямая может принадлежать этой плоскости) – прямая частного положения;*

6 *прямая параллельна двум плоскостям проекций, т. е. перпендикулярна третьей – прямая частного положения.*

Если прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, ее называют *горизонтальной*.

Ее фронтальная $\mathbf{A}^{//}\mathbf{B}^{//}$ проекция параллельна оси **X**; длина горизонтальной проекции отрезка $\mathbf{A}^{/}\mathbf{B}^{/}$ равна длине самого отрезка **AB** (*натуральная величина*); угол $\boldsymbol{\beta}$ наклона горизонтальной проекции к оси **X** равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций; угол $\boldsymbol{\gamma}$ наклона горизонтальной проекции к оси **Y** равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций

Если прямая параллельная фронтальной плоскости проекций, ее называют *фронтальной прямой*.

Ее горизонтальная проекция параллельна оси **X**; длина фронтальной проекции отрезка $\mathbf{C}^{//}$ $\mathbf{Д}^{//}$ равна длине самого отрезка **СД**; угол наклона $\boldsymbol{\alpha}$ наклона фронтальной проекции к оси **X** равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций; угол $\boldsymbol{\gamma}$ наклона горизонтальной проекции к оси **Z** равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций

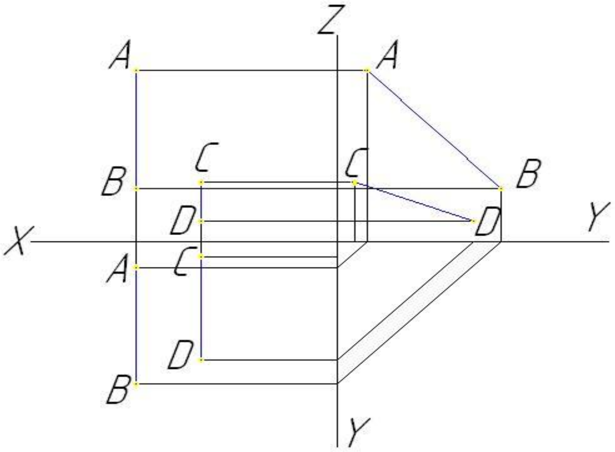
Если прямая параллельная профильной плоскости проекций, ее называют *профильной прямой*.

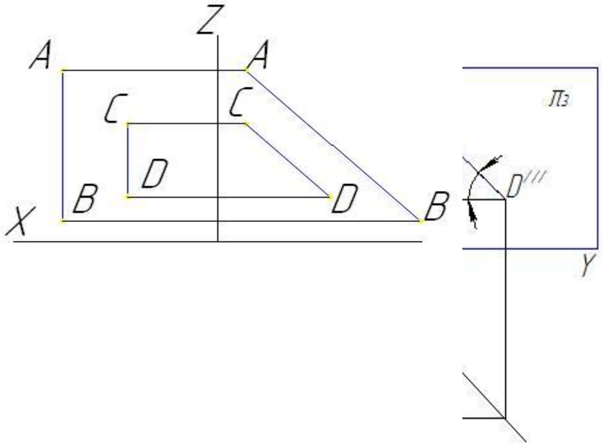
Ее горизонтальная и фронтальная проекции параллельны оси **Z**; длина профильной проекции отрезка $\mathbf{K}^{///}\mathbf{M}^{///}$ равна длине самого отрезка **КМ**; углы наклона $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, образованные профильной проекцией с осями координат **Y** и **Z**, равны углам наклона прямой к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно.

Прямые в пространстве могут быть *пересекающимися, параллельными и скрещивающимися.*

- пересекающиеся прямые:

если прямые пересекаются, то они имеют общую точку (точку пересечения), точку, принадлежащую как одной, так и второй прямой. Как известно из материала прошлой лекции, если точка принадлежит прямой, то проекции этой точки принадлежат одноименным проекциям прямой. Следовательно, *у пересекающихся прямых проекции их точки пересечения будут являться точками пересечения одноименных проекций*. Или: *если две прямые пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой, а проекции точек пересечения лежат на одной линии связи*.





Для прямых, кроме профильных, в системе $\pi_1\pi_2$, справедливо и обратное утверждение:

если в системе $\pi_1\pi_2$ точки пересечения одноименных проекций прямых, кроме профильных, лежат на одной линии связи, то прямые пересекаются.

- параллельные прямые:

если в пространстве прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой.

Для прямых общего положения условие параллельности следующее:

если одноименные проекции прямых общего положения параллельны в системе двух плоскостей проекций, то прямые параллельны.

Для прямых частного положения:

если одноименные проекции прямых параллельны одной из осей проекций, то прямые параллельны при условии параллельности одноименных проекций на той плоскости проекций, которой параллельны прямые.

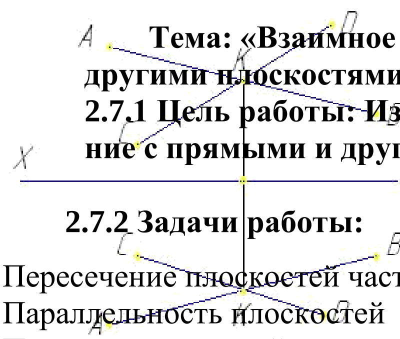
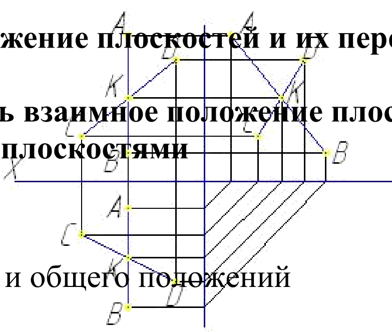
2.7 Лабораторная работа № 7 (4 часа).

Тема: «Взаимное положение плоскостей и их пересечение с прямыми и другими плоскостями»

2.7.1 Цель работы: Изучить взаимное положение плоскостей и их пересечение с прямыми и другими плоскостями

2.7.2 Задачи работы:

1. Пересечение плоскостей частного и общего положений
2. Параллельность плоскостей
3. Пересечение прямой линии с плоскостью частного и общего положения


4. Построение линии пересечения двух плоскостей по точкам пересечения прямых линий с плоскостью

2.7.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.7.4 Описание (ход) работы:

1. Пересечение плоскостей частного и общего положений.

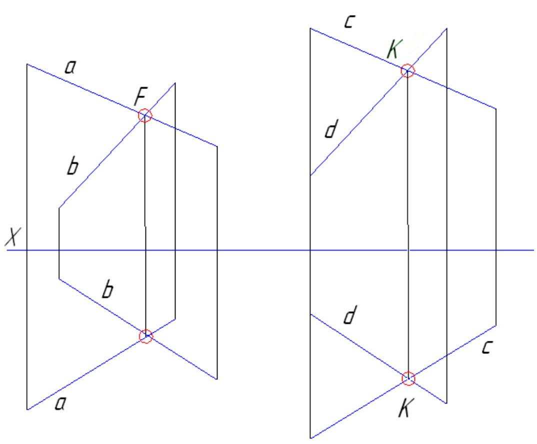
Две плоскости в пространстве могут быть параллельными и пересекающимися.

Если плоскости пересекаются, то линией их пересечения является прямая. Как известно, прямую линию можно построить по двум точкам. Поэтому, для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно определить две точки, принадлежащие как одной, так и второй плоскости.

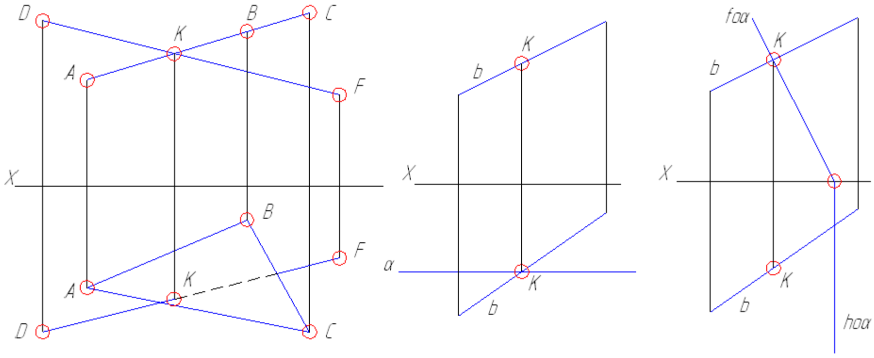
При определения общих точек плоскостей общего положения выполняют некоторые дополнительные построения. Если же хотя бы одна из плоскостей – плоскость частного положения, то задача упрощается. Поэтому рассмотрим сначала случай пересечения плоскостей, одна из которых – проецирующая.

2. Параллельность плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающим прямым другой плоскости, то плоскости параллельны. Если необходимо через точку **F** провести плоскость параллельную некоторой плоскости, заданной пересекающимися прямыми **a** и **b**, необходимо через нее провести пересекающиеся прямые **c** и **d**, параллельные данным.



При задании плоскостей следами условие их параллельности звучит следующим образом: если два пересекающихся между собой следа одной плоскости параллельны одноименным с ними следам другой плоскости, то плоскости параллельны между собой.



Допустим необходимо через точку **А** провести плоскость параллельную заданной. В этом случае выдержать два условия: точка **А** принадлежит плоскости; плоскости между собой параллельны. Параллельность плоскостей устанавливается параллельностью одноименных следов. А для осуществления первого условия необходимо через точку **А** провести прямую частного положения (например горизонталь **AN**) параллельно следу плоскости. След этой горизонтали определит фронтальный след плоскости, который проводится параллельно фронтальному следу заданной плоскости. Остается определить горизонтальный след.

3. Пересечение прямой линии с плоскостью частного и общего положения.

Как известно, любая плоскость частного положения является проецирующей. Это значит, что все точки, лежащие в плоскости проецируются на ее соответствующую проекцию плоскости (прямую линию). То же относится и к точке пересечения прямой с плоскостью:

4. Построение линии пересечения двух плоскостей по точкам пересечения прямых линий с плоскостью.

Ранее мы рассматривали способ определения линии пересечения двух плоскостей при помощи введения вспомогательных плоскостей частного положения. *Другой способ определения линии пересечения плоскостей заключается в нахождении точек пересечения двух прямых, принадлежащих одной из плоскостей, с другой плоскостью*. Почему двух? Потому, что для построения прямой линии нужно иметь две точки, а линия пересечения плоскостей является прямой линией.

Определим точки пересечения прямых ***EF*** *и* ***DF****, принадлежащих плоскости треугольника* ***DEF****, с плоскостью треугольника* ***ABC****. Как известно, определить точку пересечения прямой с плоскостью общего положения можно используя вспомогательные плоскости частного положения. Представим себе проекцию* $E^{||}F^{||}$ *фронтальным следом фронтально-проецирующей плоскости. Тогда фронтальной проекцией линии пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника* ***ABC*** *будет являться линия* $3^{//}\ 4^{//}$. *Определим горизонтальную проекцию этой линии* $3^{/}\ 4^{/}$. *Так как прямая* ***EF*** *принадлежит фронталь-*

но-проецирующей плоскости, то точка пересечения этой прямой с линией ***3 4*** *и будет являться точкой (****К****) пересечения прямой* ***EF*** *с плоскостью треугольника* ***ABC****. Для этого сначала определим горизонтальную проекцию точки (*$\boldsymbol{K'}$*), а затем ее фронтальную проекцию* $\boldsymbol{K''}$.

Аналогичные действия совершаем с прямой ***DF****: Представим себе проекцию* $\boldsymbol{D''F''}$ *фронтальным следом фронтально-проецирующей плоскости. Тогда фронтальной проекцией линии пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника* ***ABC*** *будет являться линия* $\boldsymbol{1'' \; 2''}$. *Определим горизонтальную проекцию этой линии* $\boldsymbol{1' \; 2'}$. *Так как прямая* ***DF*** *принадлежит фронтально-проецирующей плоскости, то точка пересечения этой прямой с линией* ***1 2*** *и будет являться точкой (****L****) пересечения прямой* ***DF*** *с плоскостью треугольника* ***ABC****. Для этого сначала определим горизонтальную проекцию точки (*$\boldsymbol{L'}$*), а затем ее фронтальную проекцию* $\boldsymbol{L''}$.

2.8 Лабораторная работа № 8 (4 часа).

Тема: «Способы перемены плоскостей проекций»

2.8.1 Цель работы: Научиться применять различные способы преобразования чертежа

2.8.2 Задачи работы:

Рассмотреть различные способы преобразования чертежа

2.8.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

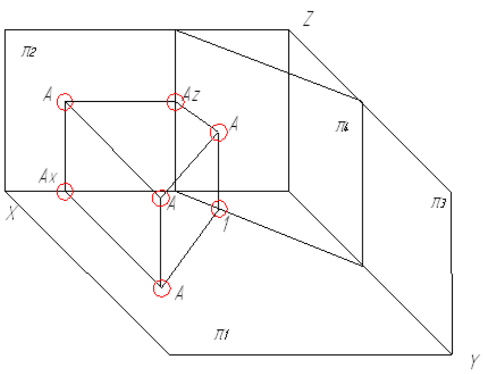
2.8.4 Описание (ход) работы:

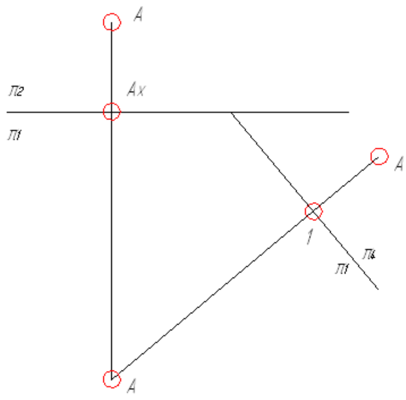
В случаях частного положения прямых линий и плоскостей относительно плоскостей проекций значительно упрощается решение многих задач начертательной геометрии и черчения. Например, в случае частного положения прямой линии легко без дополнительных построений определить натуральную величину отрезка этой прямой линии или угол наклона прямой к плоскостям проекций и т.д. При частном положении плоскости относительно плоскостей проекций легко построить следы этой плоскости, определить наклон ее к плоскостям проекций и т.п.

Зная способы преобразования чертежа мы можем любую прямую или плоскость обращать в частное положение. Причем такое преобразование возможно двумя путями:
1) не изменяя положения точки, прямой или плоскости в пространстве заменяют заданную систему плоскостей проекций на новую, таким образом, чтобы прямая или плоскость в этой новой системе оказались в частном положении (способ перемены плоскостей проекций);
2) изменяя положение точки, прямой или плоскости в пространстве добиваются их частного положения относительно данной системы плоскостей проекций (способ вращения (совмещения).

Способ замены плоскостей проекций

Пространственное положение точки, прямой или плоскости остается неизменным, в систему плоскостей $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2}$ вводятся дополнительные плоскости, которые перпендикулярны или $\boldsymbol{\pi_1}$, или $\boldsymbol{\pi_2}$, или перпендикулярны между собой. Эти дополнительные плоскости проекций принимаются за новые плоскости проекций.





Пусть имеем точку **A** в системе плоскостей **π_1, π_2**. Введем плоскость **π_4**, которая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций и определим проекцию точки **A** на эту плоскость: прямая **AA^{IV}** перпендикулярна плоскости **π_4**, **$A^{IV}1= A^{//}Ax$**. Теперь определим положение точки **A** на эпюре.

В рассмотренном случае мы ввели дополнительную плоскость один раз. В зависимости от задачи, перемену плоскостей проекций можно производить несколько раз.

В курсе начертательной геометрии выделяют четыре основные задачи преобразования:

1) определение натуральной величины отрезка прямой общего положения;
2) приведение отрезка прямой общего положения в проецирующее положение;
3) приведение плоской фигуры общего положения в проецирующее положение;
4) определение натуральной величины плоской фигуры .

2.9 Лабораторная работа № 9 (4 часа).

Тема: «Основы способа вращения»

2.9.1 Цель работы: Научиться применять различные способы вращения

2.9.2 Задачи работы:

1. Рассмотреть различные способы вращения
2. Вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

2.9.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.9.4 Описание (ход) работы:

1. Способ вращения

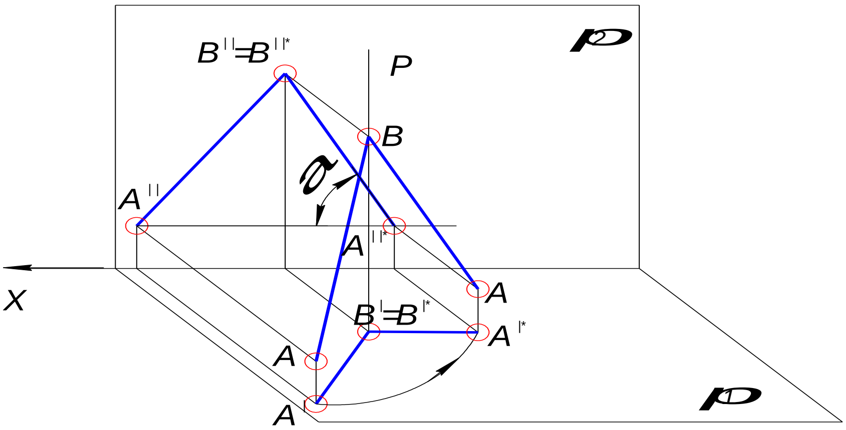
При использовании способа вращения необходимо знать:

5) ось вращения – прямая, перпендикулярная или параллельная плоскости проекций, относительно которой рассматривается вращение точки, прямой, плоскости или фигуры;
6) плоскость вращения – плоскость, в которой перемещается любая точка при вращении. Плоскость вращения всегда перпендикулярна оси вращения;
7) центр вращения – точка пересечения оси вращения с плоскостью вращения;
8) радиус вращения – радиус окружности вращения любой точки при вращении.

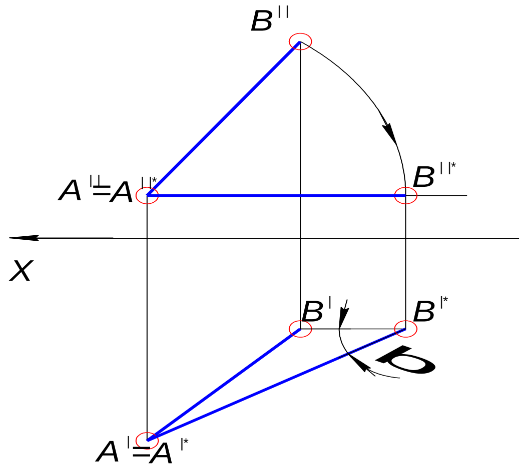
2. Вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.

Пусть необходимо определить натуральную величину отрезка прямой общего положения **AB**.

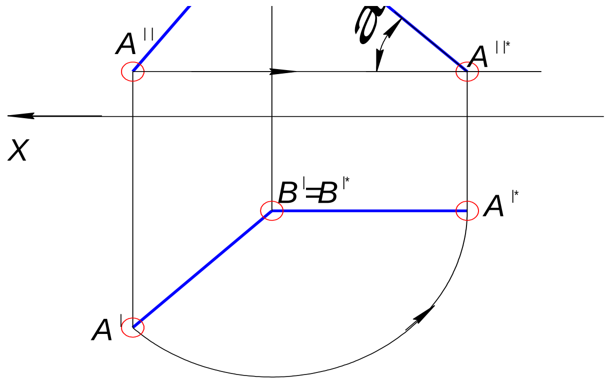
Как известно, определить натуральную величину определить просто, если отрезок является отрезком прямой частного положения. Для приведения прямой общего положения в частное положение воспользуемся методом вращения.



Проведем ось вращения (**PB**) через точку **B**, перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций. Будем вращать точку **A** отрезка относительно оси вращения против хода часовой стрелки по радиусу вращения **A**$^{/}$**B**$^{/}$ до положения, при котором отрезок **AB** будет параллелен фронтальной плоскости проекций (горизонтальная проекция отрезка **A**$^{/*}$**B**$^{/*}$ параллельна оси **X**). Построим фронтальную проекцию отрезка, которая и будет являться натуральной величиной отрезка **AB**, так как после вращения прямая параллельна $\boldsymbol{\pi_2}$ и проецируется на эту плоскость без искажений. Причем не искажается и угол наклона к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$



Теперь изобразим построения на эпюре.



2.10 Лабораторная работа № 10 (4 часа).

Тема: «Построение проекций многогранников»

2.10.1 Цель работы: Научиться строить проекции многогранников

2.10.2 Задачи работы:

1. Построение проекций вершин
2. Построение проекции гранной поверхности

2.10.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.10.4 Описание (ход) работы

1. Построение проекций вершин

Построение проекции многогранника на некоторой плоскости сводится к построению проекций точек. Например, проецируя пирамиду SABC на пл.π_2 (рис. 256, слева), мы строим проекции вершин S, A, B и C и, как следствие, проекции основания ABC, граней SAB, SBC, SAC, ребер SA, SB и др.

Также, проецируя трехгранный угол [1]) с вершиной S (рис. 256, справа), мы, помимо вершины S, берем на ребрах угла по одной точке (K, M, N) и проецируем их

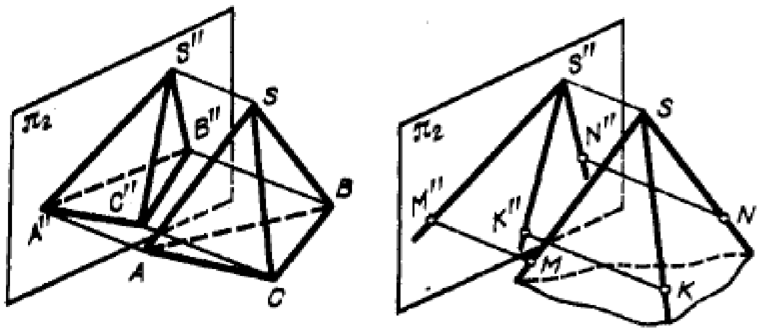


Рис. 256

на пл. π_2; в результате получаем проекции ребер и граней (плоских углов) трехгранного угла и в целом самый угол.

На рис. 257 изображены многогранное тело $ACBB_1D$... (т. е. часть пространства, ограниченного со всех сторон плоскими фигурами — многоугольниками) и его проекция на пл. π_1 — фигура $A'C'F'_1E'_1D'_1D'E'F'$. Каждая точка, расположенная внутри очерка этой фигуры (т. е. линии, ограничивающей ее), является проекцией по крайней мере двух точек поверхности этого тела. Например, точка с двойным обозначением M' и N' служит проекцией точек M и N, лежащих на общей для них проецирующей прямой.

Точка, лежащая на самом очерке проекции, является проекцией или одной точки (например, A' есть проекция точки A), или нескольких, а иногда и множества точек (например, B' является проекцией не только точки B, но и множества точек грани ABC, расположенных на проецирующей прямой B B').

Проецирующие прямые, проходящие через все точки очерка проекции, в своей совокупности образуют *проецирующую поверхность*, внутри которой, касаясь ее, заключено данное тело. Для тела, изображенного на рис. 257, проецирующая поверхность состоит из плоскостей α_1, α_2, α_3 и т. д. Линия касания проецирующей поверхности и тела называется *контуром тела* по отношению к выбранной плоскости проекций. На рис. 257 таким контуром служит ломаная $ACF_1E_1D_1DEFA$ [1]).

[1]) В данном случае выпуклый, т. е. такой, который весь расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней, неограниченно продолженной.

2. Построение проекции гранной поверхности

Проецирующей поверхностью при параллельном проецировании являетсπ_1 как это указывалось в § 1, поверхность цилиндрическая. Если контур тела по отношению к плоскости проекций содержит прямолинейные отрезки, то проецирующая поверхность для каждого такого участка обращается в плоскую.

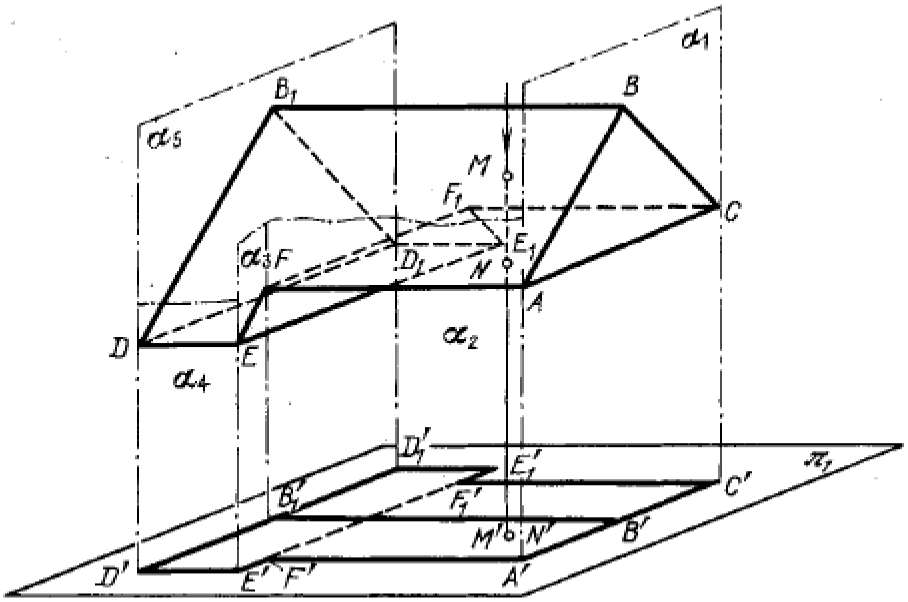


Рис. 257

Проведенная на проекции прямая $B'B'_1$ является проекцией ребра BB_1 видимого по отношению к пл. π_1. Показ на проекции тела всех видимых его ребер является обязательным.

Проекция отрезка FF_1 получается внутри очерка проекции; она показана штриховой линией, так как, по условиям видимости, точки отрезка FF_1 при проецировании на пл. π_1 невидимы.

Построение проекции *гранной поверхности* также сводится к построению проекций некоторых точек и прямых линий этой поверхности. Проекция поверхности, ограничивающей какое-либо тело, имеет *очерк*, общий с очерком проекции этого тела. В случае изображения бесконечно простирающейся поверхности отделяют линиями некоторую ее часть и тем устанавливают условный контур по отношению к плоскости проекций.

2.11 Лабораторная работа № 11 (4 часа).

Тема: «Пересечение одной многогранной поверхности другою»

2.11.1 Цель работы: Научиться строить сечения многогранных поверхностей

2.11.2 Задачи работы:

- построить сечение призмы плоскостями общего и частного положения.
- построить пирамиды плоскостями общего и частного положения.

2.5.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

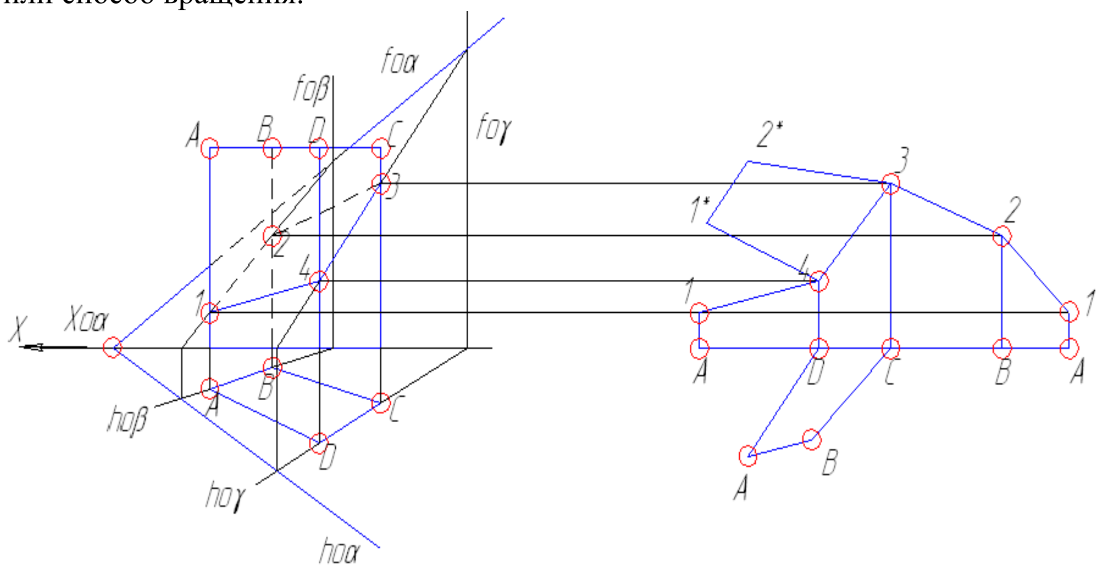
2.5.4 Описание (ход) работы:

1. Пересечение призмы плоскостью и прямой линией.

Призматической называется поверхность, у которой прямолинейная образующая перемещается параллельно самой себе по ломаной направляющей.

При пересечении призмы плоскостью в сечении получается плоская фигура, ограниченная линиями пересечения секущей плоскости с гранями призмы. Для построения этой фигуры требуется определить точки, в которых ребра призмы пересекают секущую плоскость, или найти отрезки прямых, по которым грани призмы пересекаются плоскостью. В первом случае имеем дело с пересечением прямой линии с плоскостью, во втором – с пересечением плоскостей.

Если секущая плоскость – плоскость общего положения, то проекции фигуры, полученной в сечении не являются ее натуральной величиной и для определения натурального размера этой фигуры необходимо использовать способ замены плоскостей проекций или способ вращения.



Рассмотрим случай пересечения прямой четырехгранной призмы плоскостью общего положения.

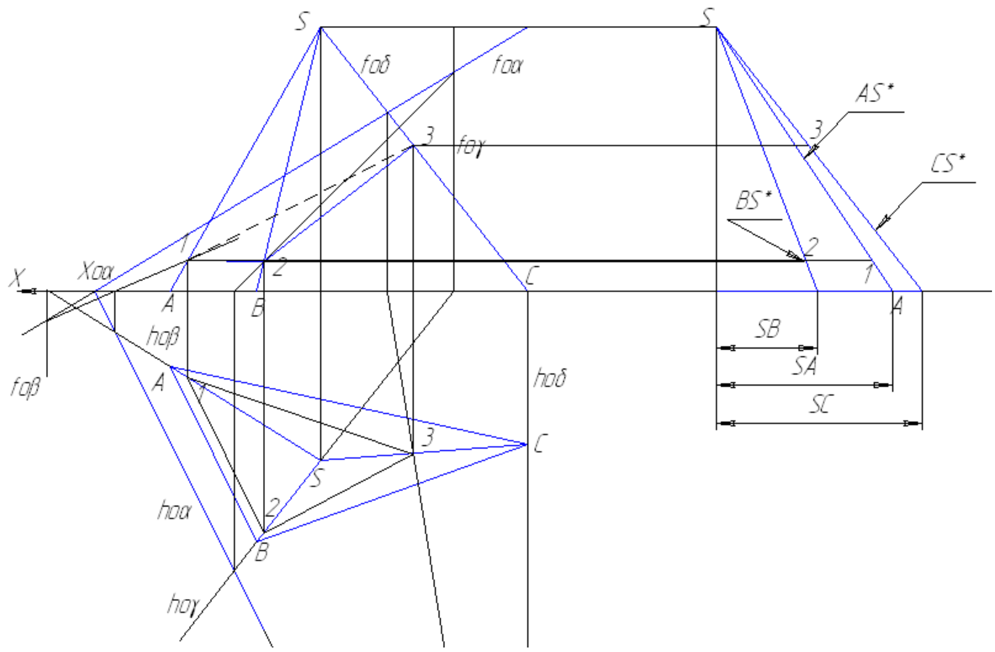
Так как призма прямая (ее грани перпендикулярны основанию), а основание параллельно горизонтальной плоскости проекций (лежит в ней), то горизонтальная проекция сечения будет совпадать с горизонтальной проекцией основания. Чтобы определить отрезки линий пересечения граней призмы с плоскостью зададим плоскости граней следами (плоскости **β** и **γ**) и определим линии пересечения плоскостей граней с секущей плоскость. Определим фронтальную проекцию сечения (**1**// **2**// **3**// **4**//). Методом конкурирующих точек определим видимые и невидимые линии границ сечения. Способом замены плоскостей проекций или вращением вокруг линий уровня определим натуральный размер сечения призмы плоскостью общего положения.

Выполним развертку оставшейся части призмы. Так как основание призмы параллельно горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция основания и является натуральной величиной. Так как призма прямая, то фронтальные проекции ребер также являются натуральными величинами. Поэтому, чтобы построить развертку призмы проведем горизонтальную линию и от ее произвольной точки отложим в правую сторону последовательно длины ребер основания (длины горизонтальных проекций). Получим развернутое основание призмы **ADCBA**. Затем переносим горизонтальную проекцию на развертку (**ABCD**). После сносим длины фронтальных проекций оставшихся частей ребер призмы (**14321**). После определения натурального размера сечения, изображаем его на развертке.

2. Пересечение пирамиды плоскостью и прямой линией

Пирамидальной называется поверхность, у которой прямолинейная образующая перемещается по ломаной направляющей, проходя все время через одну и ту же точку.

При пересечении пирамиды плоскостью общего положения необходимо определить течки пересечения ребер пирамиды с плоскостью. Соединив последовательно эти точки получим сечение пирамиды плоскостью. Методом конкурирующих точек определим видимые и невидимые линии сечения.



Чтобы построить развертку оставшейся части пирамиды необходимо определить натуральные величины ребер методом прямоугольного треугольника или вращением. Натуральную величину сечения определить можно также вращением вокруг главных линий.

2.12 Лабораторная работа №12 (4 часа).

Тема: «Кривые поверхности»

2.12.1 Цель работы: Научиться изображать на чертежах кривые поверхности

2.12.2 Задачи работы:

1. Изучить общие сведения о кривых поверхностях и их изображении на чертежах
2. Линейчатые развертываемые поверхности
3. Линейчатые неразвертываемые поверхности
4. Нелинейчатые поверхности

2.12.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.12.4 Описание (ход) работы:

1.Общие сведения о кривых поверхностях и их изображении на чертежах

В начертательной геометрии поверхность рассматривают как множество последовательных положений движущейся линии или другой поверхности в пространстве. Линию, перемещающуюся в пространстве и образующую поверхность, называют образующей. Образующие могут быть прямыми и кривыми. Кривые образующие могут быть постоянными и переменными, например закономерно изменяющимися.

Одна и та же поверхность в ряде случаев может рассматриваться как образованная движениями различных образующих. Например, круговой цилиндр может быть образован: во-первых, вращением прямой относительно неподвижной оси, параллельной образующей; во-вторых, движением окружности, центр которой перемещается по прямой, перпендикулярной плоскости окружности; в-третьих, прямолинейным движением сферы.

При изображении поверхности на чертеже показывают лишь некоторые из множества возможных положений образующей. На рис. 8.1 показана поверхность образующей *AB*. При своем движении образующая остается параллельной направлению *MN* и одновременно пересекает некоторую кривую линию *CDE*. Таким образом, движение образующей *AB* направляется в пространстве линией *CDE*.

Линию или линии, пересечение с которыми является обязательным условием движения образующей при образовании поверхности, называют направляющей или направляющими.

На рис. 8.2 показана поверхность, образованная движением прямой *AB* по двум направляющим – прямой О1 <⅞ *(ABE OiO2)* и пространственной кривой *FGL,* не пересекающей прямую О1*0*2.

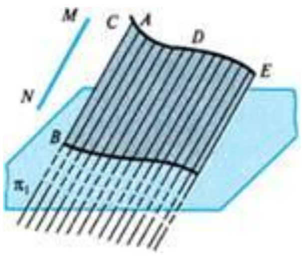


Рис. 8.1

Иногда в качестве направляющей используют линию, по которой движется некоторая характерная для образующей точка, но не лежащая на ней, например центр окружности.

Из различных форм образующих, направляющих, а также закономерностей образования конкретной поверхности выбирают те, которые являются наиболее простыми и удобными для изображения на чертеже поверхности и решения задач, связанных с нею.

Иногда для задания поверхности используют понятие "определитель поверхности", под которым подразумевают совокупность независимых условий, однозначно задающих поверхность. В числе условий, входящих в состав определителя, различают геометрическую часть (точки, линии, поверхности) и закон (алгоритм) образования поверхности геометрической частью определителя.

Рассмотрим краткую классификацию кривых поверхностей, принятую в начертательной геометрии.

2.Линейчатые развертываемые поверхности. Поверхность, которая может быть образована прямой линией, называют линейчатой поверхностью. Если линейчатая поверхность может быть развернута так, что всеми своими точками она совместится с плоскостью без каких-либо повреждений поверхности (разрывов или складок), то ее называют развертываемой. К развертываемым поверхностям относятся только такие линейчатые поверхности, у которых смежные прямолинейные образующие параллельны или пересекаются между собой, или являются касательными к некоторой пространственной кривой. Все остальные линейчатые и все нелинейчатые поверхности относятся к неразвертываемым поверхностям.

Развертываемые поверхности – цилиндрические, конические, с ребром возврата или торсовые. У цилиндрической поверхности образующие всегда параллельны, направляющая – одна кривая линия. Изображение на чертеже ранее показанной в пространстве цилиндрической поверхности (см. рис. 8.1) представлено на рис. 8.3. Частные случаи – прямой круговой цилиндр, наклонный круговой цилиндр (см. рис. 9.17, направляющая-окружность, плоскость которой расположена под углом к оси цилиндра и с центром на его оси). У конических поверхностей все прямолинейные образующие имеют общую неподвижную точку – вершину, направляющая – одна любая кривая линия. Пример изображения конической

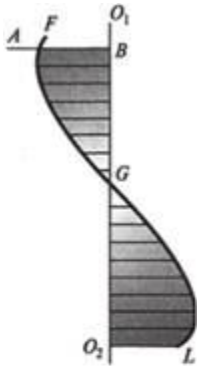


Рис. 8.2

поверхности на чертеже – рис. 8.4, проекции вершины *G", G'*, направляющей *C'D"E"*, *C'D'E'*. Частные случаи – прямой круговой конус, наклонный круговой конус – см. рис. 10.10, справа. У поверхностей с ребром возврата или торсовых прямолинейные образующие касательны к одной криволинейной направляющей.

3.Линейчатые неразвертываемые поверхности: цилиндроид, коноид, гиперболический параболоид (косая плоскость). Поверхность, называемая цилиндроидом, образуется при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости ("плоскости параллелизма") и пересекающей две кривые линии (две направляющие). Поверхность, называемая коноидом, образуется при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой плоскости ("плоскости параллелизма") и пересекающей две направляющие, одна из которых кривая, а другая – прямая линия (рис. 8.5, см. также рис. 8.2). Плоскостью параллелизма на рис. 8.5 является плоскость $\pi 1$;

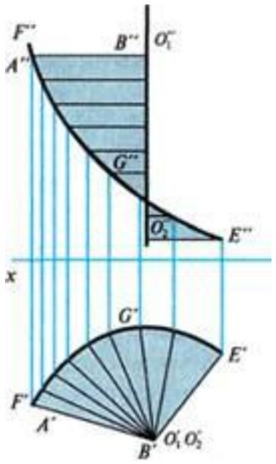


Рис. 8.3

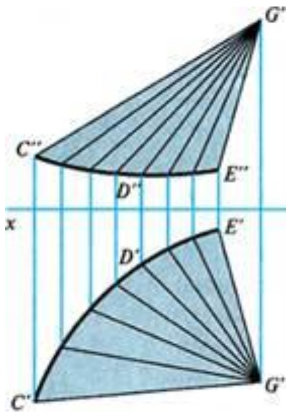


Рис. 8.4

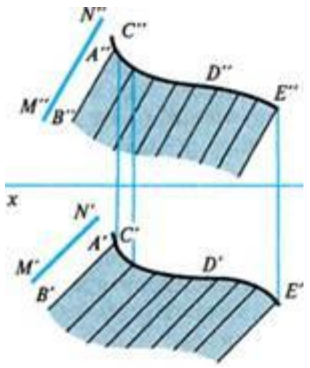


Рис. 8.5

направляющие – кривая с проекциями *E''G''F''*, *E'G'F'*, прямая с проекциями *O'',0'', O',0*. В частном случае, если криволинейная направляющая – цилиндрическая винтовая линия с осью, совпадающей с прямолинейной направляющей, образуемая поверхность – винтовой коноид, рассматриваемый ниже. Чертеж гиперболического параболоида, называемого косой плоскостью, приведен на рис. 8.6. Образование этой поверхности можно рассматривать как результат перемещения прямолинейной образующей по двум направляющим – скрещивающимся прямым параллельно некоторой плоскости параллелизма. На рис. 8.6 плоскость параллелизма – плоскость проекции яь направляющие – прямые с проекциями *M''N''*, *M'N'* и *F''G''*, *F'G'*.

4. Нелинейчатые поверхности. Их подразделяют на поверхности с постоянной образующей и с переменной образующей.
Поверхности с постоянной образующей в свою очередь подразделяют на поверхности вращения с криволинейной образующей, например сфера, тор, эллипсоид вращения и др., и на циклические поверхности, например поверхности изогнутых труб постоянного сечения, пружин.
Поверхности с переменной образующей подразделяют на поверхности второго порядка, циклические с переменной образующей, каркасные. Чертеж поверхности второго порядка – эллипсоида приведен на рис. 8.7. Образующая эллипсоида – деформирующийся эллипс. Две направляющие – два пересекающихся эллипса, плоскости которых ортогональны и одна ось – общая. Образующая пересекает направляющие в крайних точках своих осей. Плоскость образующего эллипса при перемещении остается параллельной плоскости, образованной двумя пересекающимися осями направляющих эллипсов.
Циклические поверхности с переменной образующей имеют образующую – окружность переменного радиуса, направляющую – кривую, по которой перемещается центр образующей, плоскость образующей перпендикулярна направляющей. Каркасную поверхность задают не движущейся образующей, а некоторым количеством линий на поверхности. Обычно такие линии – плоские кривые,

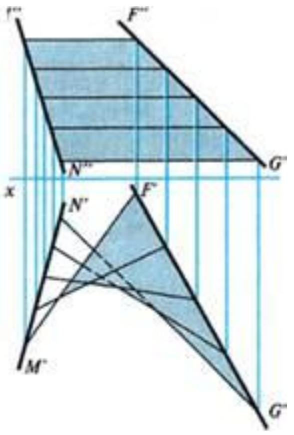


Рис. 8.6

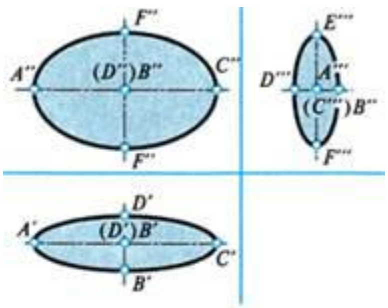


Рис. 8.7

плоскости которых параллельны между собой. Две группы таких линий пересекают друг друга и образуют линейчатый каркас поверхности. Точки пересечения линий образуют точечный каркас поверхности. Точечный каркас поверхности может быть задан и координатами точек поверхности. Каркасные поверхности широко используют при конструировании корпусов судов, самолетов, автомобилей, баллонов электронно-лучевых трубок.

2.13 Лабораторная работа №13 (4 часа).

Тема: «Поверхности вращения»

2.13.1 Цель работы: Понятие о поверхности вращения.

2.12.2 Задачи работы:

1. Понятие о поверхности вращения.
2. Поверхности вращения, образованные прямой линией.
3. Поверхности вращения, образованные окружностью.
4. Поверхности вращения, образованные кривыми второго порядка.

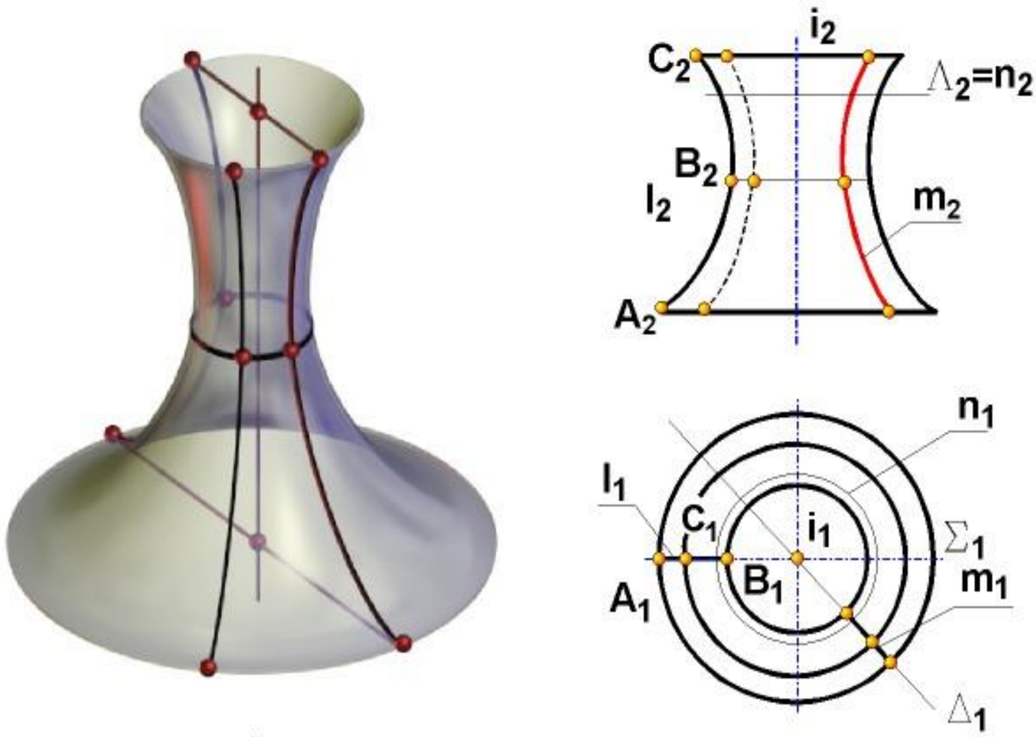
2.13.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.13.4 Описание (ход) работы

1. Понятие о поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная в процессе вращения некоторой линии вокруг неподвижной оси. Линия, которая вращается, называется ***образующей*** поверхности. Образующая линия может быть прямой, плоской или пространственной кривой. Каждая точка образующей линии поверхности (например, точка ***B***) при своём вращении будет описывать окружность с центром на оси ***i***, которая располагается в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис.10.1). Такие окружности называются ***параллелями***. Наибольшая параллель называется ***экватором***, наименьшая – ***горлом***.



а б

Рис.10.1

Линия поверхности вращения, лежащая в плоскости, проходящей через ось вращения, называется ***меридианом.*** Все меридианы поверхности вращения равны между собой. Меридиан, лежащий в плоскости уровня, называется ***главным***. Множество всех параллелей или меридианов представляет собой каркас поверхности вращения. Через каждую точку поверхности проходит одна параллель и один меридиан.

При изображении поверхности вращения на комплексном чертеже обычно поверхность располагают так, чтобы её ось $\boldsymbol{i}$ была бы проецирующей прямой. На рис.10.1(а) приведена поверхность вращения, образованная при вращении кривой $\boldsymbol{l}$. В качестве оси вращения используется горизонтально проецирующая прямая $\boldsymbol{i}$. Комплексный чертеж поверхности приведён на рис.10.1(б). Экватор поверхности вращения описывает точка $\boldsymbol{A}$ образующей, а горло – точка $\boldsymbol{B}$. Меридиан $\boldsymbol{m}$ лежит в плоскости $\boldsymbol{\Delta}$, а главный меридиан – в плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$. В данном случае очерком поверхности вращения на горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ является проекция экватора, а на фронтальной плоскости $\boldsymbol{\Pi_2}$ – проекция главного меридиана.

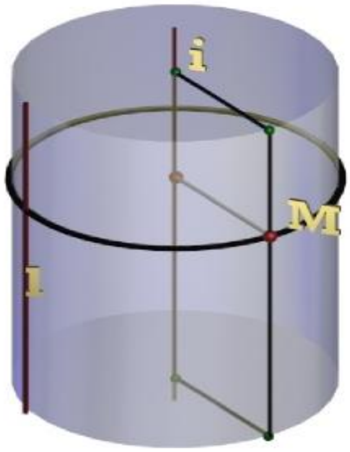
Геометрическая часть определителя поверхности вращения $\boldsymbol{\Phi}$ состоит из образующей линии и оси вращения: $\boldsymbol{\Phi(l,i)}$, где $\boldsymbol{l}$ – образующая линия поверхности, $\boldsymbol{i}$ – ось вращения. Алгоритмическая часть определителя поверхности вращения состоит из операции вращения образующей вокруг оси и построения каркаса параллелей необходимой плотности.

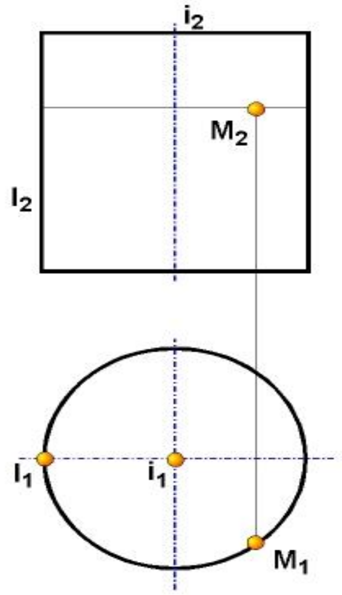
Для построения точки, лежащей на поверхности вращения, необходимо провести вспомогательную линию на поверхности (обычно параллель или меридиан), и расположить проекции точки на одноименных проекциях вспомогательной линии.

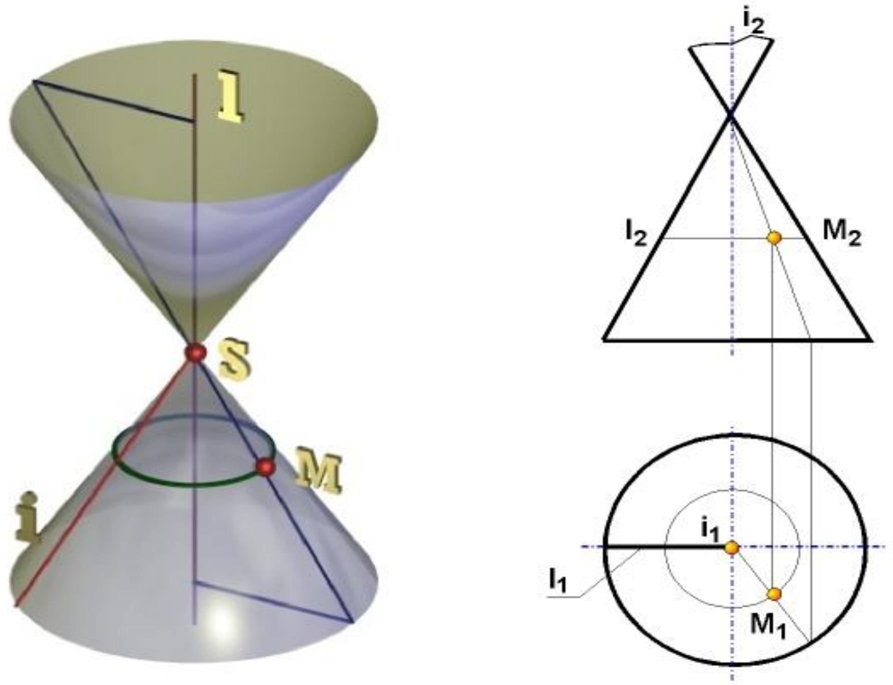
Поверхности вращения получили самое широкое применение в деталях различных механизмов и машин. Основными причинами этого является, с одной стороны, распространённость вращательного движения, а с другой стороны – простота обработки поверхностей вращения.

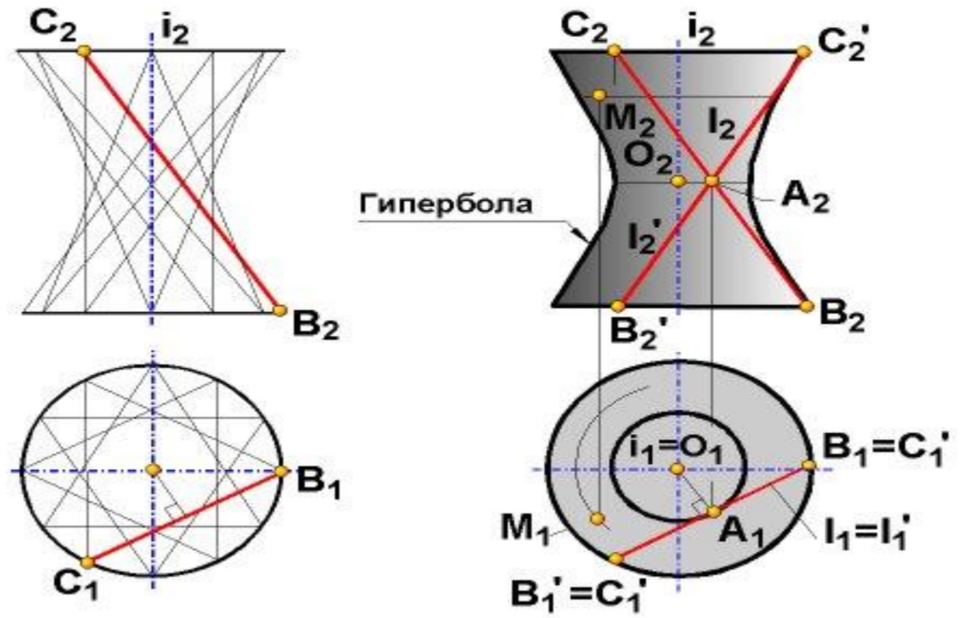
2. Поверхности вращения, образованные прямой линией

Вращением прямой линии можно получить следующие виды поверхностей вращения:
цилиндр вращения, если образующая параллельна оси вращения (рис.10.2);
конус вращения, если образующая пересекается с осью вращения (рис.10.3);
однополостный гиперболоид вращения, если образующая скрещивается с осью вращения (рис.10.4).









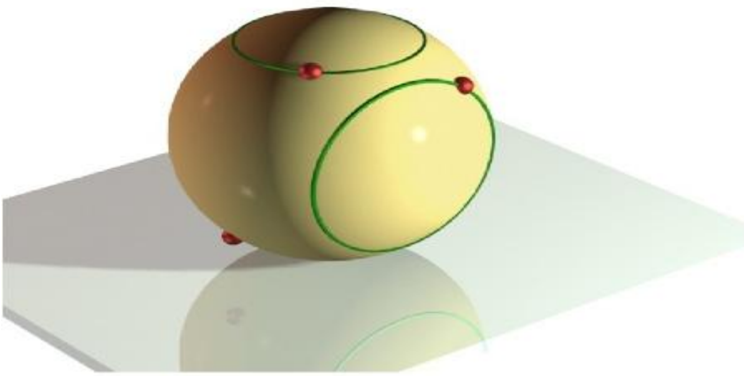
Поверхность имеет две образующие линии ***l***(***BC***) и ***l'***(***B'C'***), наклоненные в разные стороны. Эти образующие пересекаются между собой. Точка их пересечения лежит на наименьшей параллели (в данном случае в точке ***A***). Отрезок ***OA*** является кратчайшим расстоянием между образующей и осью. Таким образом, на поверхности однополостного гиперболоида располагаются два семейства прямолинейных образующих. Все образующие одного семейства - скрещивающиеся прямые. Каждая образующая одного семейства пересекает все образующие другого. Через каждую точку поверхности проходят две образующие разных семейств. Меридианом поверхности является гипербола.

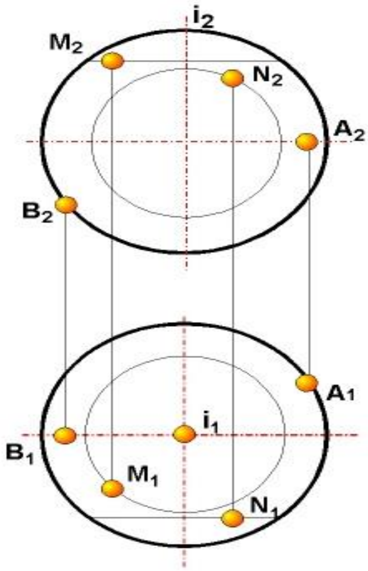
Рассмотренные поверхности вращения можно отнести и к классу линейчатых поверхно-

стей, так как они образованы в процессе движения прямой линии. Кроме того, поверхности являются поверхностями второго порядка: максимальное число точек пересечения каждой из этих поверхностей с прямой общего положения равно двум.
Построение точки на таких поверхностях можно выполнить при помощи параллели или при помощи прямолинейной образующей.

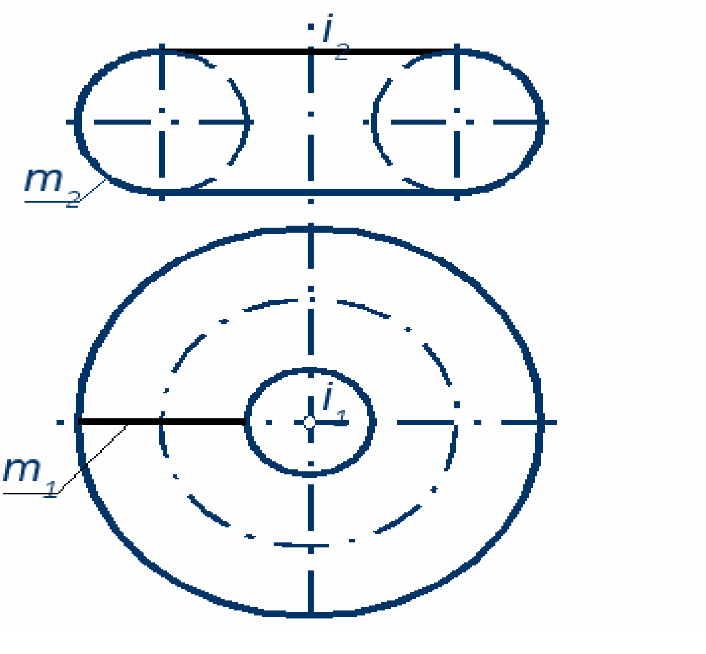
3. Поверхности вращения, образованные окружностью

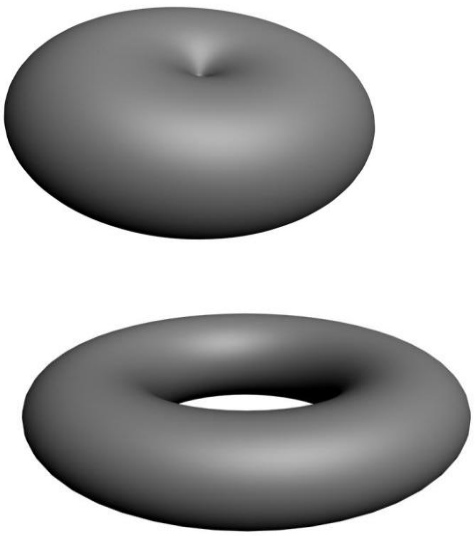
Вращением окружности можно получить следующие виды поверхностей вращения: сферу, если окружность вращается вокруг её диаметра (рис.10.5);





тор, если окружность вращается вокруг оси, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через её центр. При этом ось вращения может пересекать окружность, касаться ее и располагаться вне окружности. В первых двух случаях тор называется ***закрытым*** (рис.10.6), в последнем - ***открытым*** или ***кольцом*** (рис.10.7).





На рис.10.8 приведён комплексный

чертёж открытого тора, заданного образующей окружностью $\boldsymbol{m}$ и осью вращения $\boldsymbol{i}$. Очерком поверхности на плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ является проекции экватора и горла, а на плоскости $\boldsymbol{\Pi_2}$ – проекция главного меридиана (две образующие окружности.

Тор является поверхностью четвертого порядка, поэтому пересекается произвольной прямой в четырех точках.

4. Поверхности вращения, образованные кривыми второго порядка
Вращением кривых второго порядка вокруг их осей можно получить:
эллипсоид вращения – при вращении эллипса вокруг большой или малой оси;
параболоид вращения - при вращении параболы;
однополостный гиперболоид вращения - при вращении гиперболы вокруг ее мнимой оси (эта же поверхность образуется также вращением прямой);
двуполостный гиперболоид вращения - при вращении гиперболы вокруг ее действительной оси.

2.14 Лабораторная работа №14 (4 часа).

Тема: Общие приемы построения линии пересечения
2.14.1 Цель работы: Изучить точки пересечения прямой с плоскостью
2.14.2 Задачи работы:

1.Рассмотреть точки пересечения прямой с плоскостью

2.14.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.14.4 Описание (ход) работы:

1. Точка пересечения прямой с плоскостью

Для нахождения кривой линии, получаемой при пересечении линейчатой поверхности плоскостью, следует в общем случае строить точки пересечения образующих поверхности с секущей плоскостью, т. е. находить точку пересечения прямой с плоскостью. Искомая кривая (*линия среза*) проходит через эти точки. Пример дан на рис. 358: коническая поверхность, заданная точкой S и кривой ACE, пересечена фронтально-проецирующей пл. α; горизонтальная проекция линии пересечения проведена через горизонтальные проекции точек пересечения ряда образующих пл. α.

В этом примере построение упрощается благодаря тому, что секущая пл. α частного положения. Но указанный прием — получение точек пересечения ряда прямолинейных образующих поверхности в заданной секущей плоскостью для проведения через них искомой линии пересечения — годится при любом положении плоскости.

Если же кривая поверхность нелинейчатая, то для построения линии пересечения такой поверхности плоскостью в общем случае следует применять вспомогательные плоскости. Точки искомой линии определяются в пересечении линий, по которым вспомогательные секущие плоскости пересекают данные поверхность и плоскость. Вспомним рис.

166, на котором был показан случай применения вспомогательных плоскостей для построения линии пересечения двух плоскостей.

При подборе вспомогательных плоскостей, как и во всех случаях, когда они применяются (см., например, с. 64), надо стремиться к упрощению построений.

На рис. 359 изображено тело вращения, срезанное плоскостью, заданной трапецией ABCD. Здесь для построения точек кривых линий, получаемых на поверхности тела вращения, применены вспомогательные секущие плоскости. Рассмотрим для примера одну из них, пл. α. Пересекая поверхность тела вращения, эта плоскость дает окружность (параллель) радиуса 0"1", а пересекая пл. ABCD — горизонталь $A''_1D''_1$. В пересечении параллели поверхности вращения с горизонталью $A''_1D''_1$ получаются точки M" и N", принадлежащие одновременно и поверхности вращения, и плоскости ABCD, т. е. принадлежащие искомой линии пересечения. Повторяя этот прием, мы получим ряд точек, определяющих криволинейную часть линии среза. Плоские грани данного тела вращения срезаны пл. ABCD по прямым, выраженным отрезками AD и BC.

В рассмотренном примере построение упрощается в связи с тем, что ось тела вращения перпендикулярна к пл. π_1 и параллели проецируются на эту плоскость в виде окружностей. Плоскость симметрии β позволяла контролировать правильность взаимного расположения точек кривых A'M'B' и D'N'C', так как, например, должно получаться M'2' = N'2'.

Пользуясь способом перемены плоскостей проекций или вращения, можно получить удобные для построений положения фигуры, если они были заданы в общих положениях в системе π_1, π_2. Но все это не касается изложенного приема, основанного на введении вспомогательных плоскостей. Этот прием применим независимо от положения пересекающихся поверхности и плоскости.

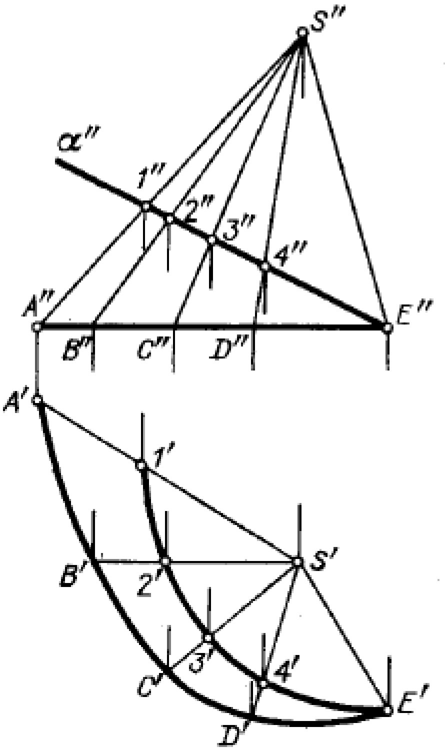


Рис. 358

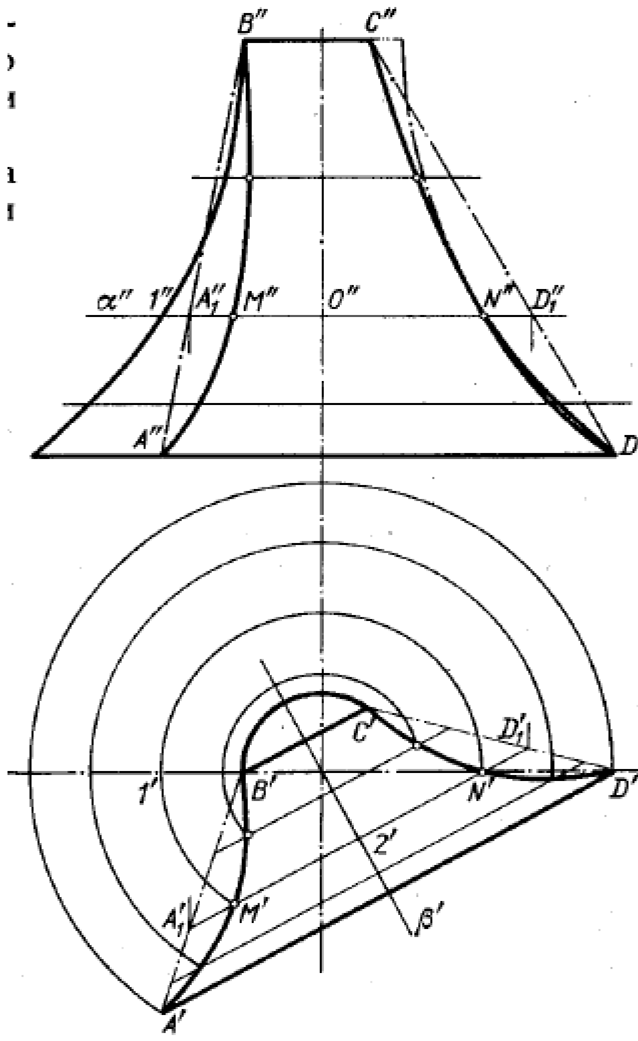


Рис. 359

В ряде случаев кривая, которая должна получиться при пересечении поверхности

плоскостью, известна и ее проекции могут быть построены на основании их геометрических свойств. Вспомним хотя бы спираль Архимеда (с. 159, рис. 340), получаемую при пересечении косого геликоида плоскостью, перпендикулярной к его оси. Очевидно, целесообразнее строить эту спираль так, как показано на рис. 340, а не искать точки для нее путем проецирования.

2.15 Лабораторная работа №15 (4 часа).

Тема: «Пересечение поверхности прямой и плоскостью»

2.15.1 Цель работы: Изучить точки пересечения прямой с плоскостью
2.14.2 Задачи работы:

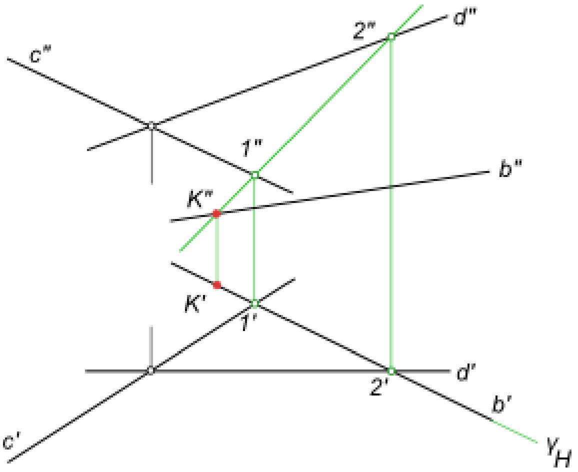
1.Рассмотреть точки пересечения прямой с плоскостью

2.14.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:
1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.15.4 Описание (ход) работы:

Задача на **пересечение прямой с плоскостью** - это одна из основных задач, с ее применением сталкиваются при рассмотрении сечения тел плоскостями и пересечения поверхностей.

Нахождение точки встречи прямой с плоскостью, заданной пересекающимися прямыми



Пересечение прямой с плоскостью

Плоскость и пересекающая ее прямая занимают общее положение.

$K=(\gamma \cap \alpha) \cap b$

$(\gamma \cap \alpha) = l$ - прямая, пересекающаяся с прямой b.

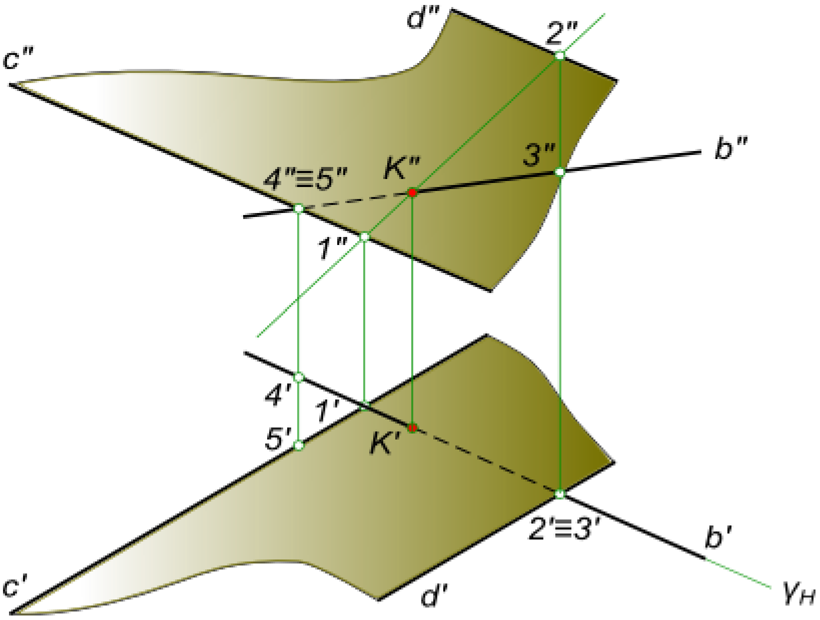
На **пересечение прямой с плоскостью** составляем алгоритм нахождения их точки встречи :

1) проводим через b\` горизонтальный след γ_H - горизонтально-проецирующей плоскости γ;

2) определяем фронтальную проекцию линии пересечения l, вспомогательной секущей плоскости γ с данной плоскостью α, используя для этого точки *1*\` и *2*\` (принадлежащие данной прямой), в которых горизонтальный след γ_H пересекает прямые c\` и $d$\`;

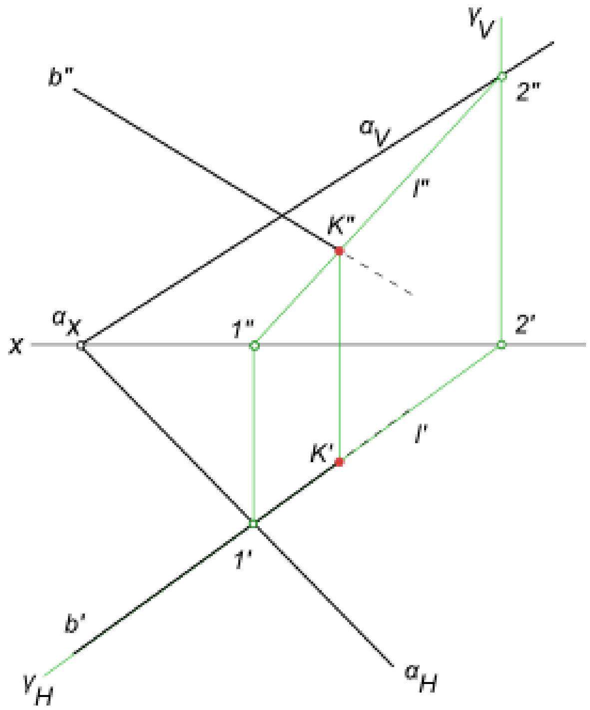
3) определяем точку K"=l"∩b". Зная K", находим K\` на пересечении b\` с линией проекционной связи.

Нахождение точки встречи прямой с плоскостью, заданной параллельными прямыми



Пересечение прямой с плоскостью

Задача по нахождению точки встречи прямой с плоскостью заданной следами.

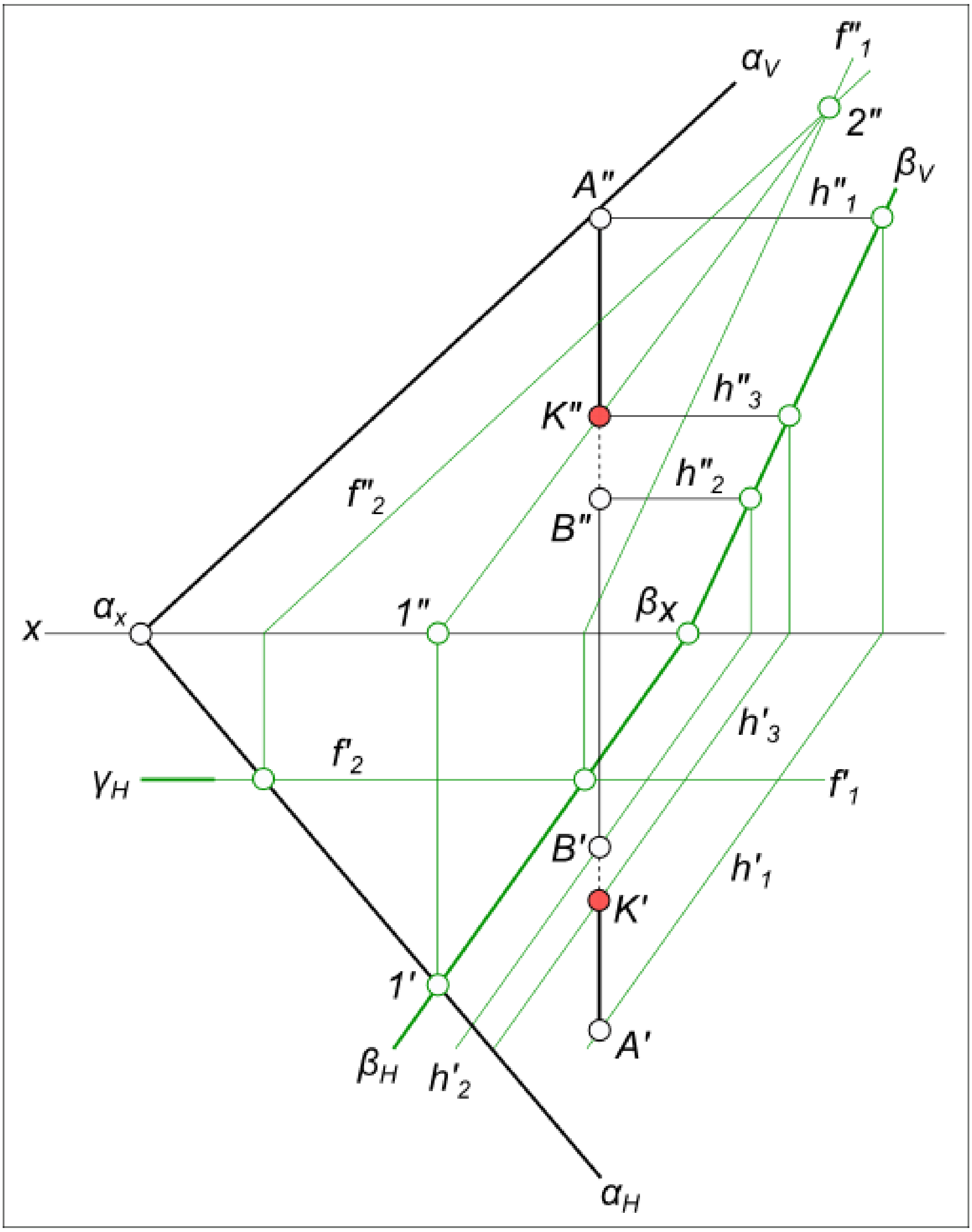


Пересечение прямой с плоскостью

Алгоритм решения не меняется, если плоскость будет задана параллельными прямыми или прямыми, по которым она пересекает плоскости проекций (следы плоскости).

При решении задач на **пересечение прямой с плоскостью** в качестве вспомогательных плоскостей применяют проецирующие плоскости. Но в случае, например, профильной прямой они бесполезны и тогда надо применить плоскость общего положения.

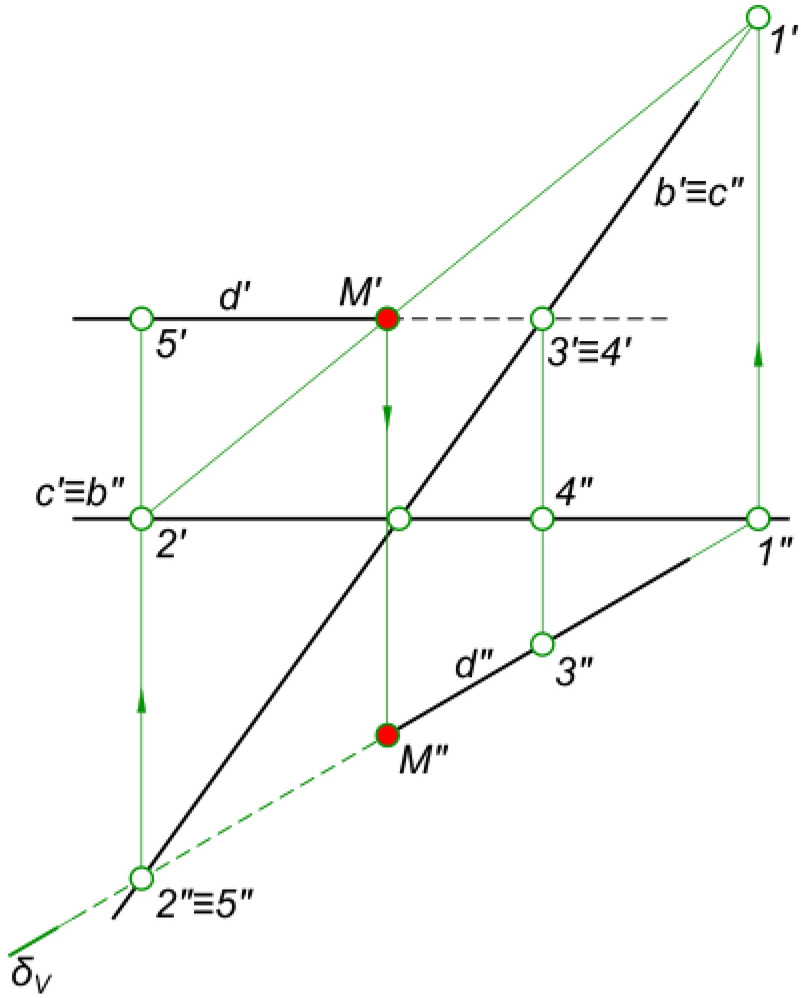
Найти точку встречи профильной прямой *AB* с плоскостью α заданной следами



Пересечение прямой с плоскостью

Алгоритм выполнения геометрических построений:
1) Заключаем отрезок *AB* во вспомогательную секущую плоскость общего положения β;
2) Определяем проекции линии пересечения *1-2*, вспомогательной секущей плоскости *β* с данной плоскостью *α*;
3) Определяем проекцию *K''* точки *K* на пересечении *1''-2''* с прямой *A''B''*. Проекция *K`* точки *K* может быть найдена: - на пересечении *A`B`* с *1`-2`*; - или как принадлежащая плоскостям *α* и *β*.

Найти точку встречи прямой *d* с плоскостью α(b, c), определить видимость



Пересечение прямой с плоскостью

Алгоритм выполнения геометрических построений:
1) Заключаем прямую *d* во вспомогательную секущую фронтально проецирующую плоскость δ;
2) Определяем проекции линии пересечения *1-2*, вспомогательной секущей плоскости *δ* с данной плоскостью *α*;
3) Определяем проекцию *K*` точки *K* на пересечении *1`-2`* с прямой *d*`. Проекцию *K"* точки *K* находим в пересечении *d"* с линией проекционной связи.

Данный способ решения задачи - найти точку встречи профильной прямой с плоскостью заданной следами применен в статье:

2.16 Лабораторная работа №16 (4 часа).

Тема: Общий способ построения линии пересечения поверхностей
2.16.1 Цель работы: Изучить способы построения линии пересечения поверхностей
2.16.2 Задачи работы:

1.Рассмотреть способы построения линии пересечения поверхностей

2.16.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.14.4 Описание (ход) работы:

Общим способом построения линии пересечения одной поверхности другою *является нахождение точек этой линии при помощи некоторых секущих поверхностей* [1]). На рис. 393 слева показано, что поверхности I и II пересечены некоторой поверхностью III; эта вспомогательная поверхность пересекает поверхность I по линии AB, а поверхность II — по линии CD. Точка K, в которой пересекаются линии AB и CD, общая для поверхностей I и II, следовательно, принадлежит линии их пересечения. Повторяя такой прием, получаем ряд точек искомой линии. Мы уже пользовались этим способом, когда рассматривали (см. § 24) построение линии

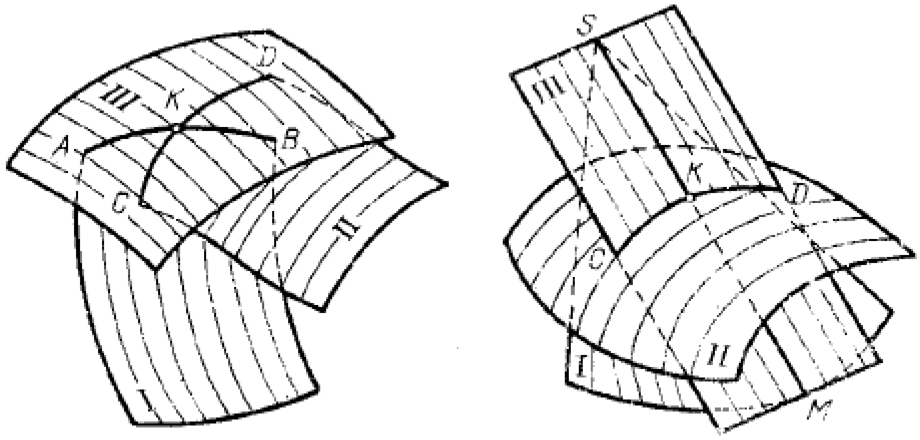


Рис. 393

пересечения одной плоскости другою плоскостью. Тогда дело сводилось (рис. 166) к использованию двух вспомогательных плоскостей. Каждая из них позволяла найти одну точку, общую для плоскостей, линию пересечения которых надо было найти.

Применяя указанный общий способ для построения линии пересечения двух кривых поверхностей, мы можем:

1) пересекать поверхности вспомогательными *плоскостями;*

2) пересекать поверхности вспомогательными *кривыми поверхностями* (например, сферами).

В некоторых случаях при решении задач комбинируют применение вспомогательных плоскостей и кривых поверхностей. Следует по возможности подбирать такие вспомогательные поверхности, которые в пересечении с данными поверхностями дают простые для построения линии (например, прямые или окружности).

[1]) Для линий пересечения применяется также название «линии перехода», особенно в тех случаях, когда при переходе от одной поверхности к другой нет ярко выраженного пересечения. Для вспомогательных секущих поверхностей встречается название «посредники».

В общем случае вспомогательные секущие плоскости применяют и для построения линии пересечения кривой поверхности гранной.

Изложенный общий способ построения линии пересечения одной поверхности другою не исключает применения другого способа, если хотя бы одна из этих поверхностей линейчатая: найти точку, в которой прямолинейная образующая одной поверхности пересекает другую поверхность, и, повторяя этот прием для ряда образующих, через найденные точки провести искомую линию. На рис. 393 справа показано, что через образующую SM поверхности I проведена плоскость III, которая пересекает вторую поверхность (II) по кривой CD; образующая SM пересекает эту кривую в точке К, через которую пройдет искомая линия пересечения поверхностей I и II.

Это относится и к случаю пересечения кривой поверхности гранной: здесь роль образующих играют ребра гранной поверхности.

Итак, *для построения точек линии, получающейся на одной поверхности при пересечении ее другой поверхностью, пользуются вспомогательными секущими плоскостями частного и общего положения, кривыми поверхностями, прямолинейными образующими кривых линейчатых поверхностей и ребрами гранных поверхностей. При этом прибегают к способам преобразования чертежа, если это упрощает и уточняет построения.*

В примерах, приведенных в последующем изложении, преимущественно рассмотрены геометрические тела, т. е. ограниченные части пространства вместе с их границами — поверхностями. Из двух поверхностей только одна пересекает другую. Поэтому одна из поверхностей сохраняется, а на другой, пересекаемой, возникают отверстия. Здесь может быть: 1) *проницание*, причем получаются или две отдельные линии (см., например, рис. 412, где конус с горизонтальной осью входит в другой конус), или одна линия с узловой точкой (рис. 427); 2) *врезка*, когда получается одна линия (см., например, рис. 396, 426).

На литых деталях обычно бывают плавные переходы, т. е. переход от одной поверхности к другой по некоторой промежуточной, например тору. Тогда для обозначения перехода строится линия пересечения геометрических форм, лежащих в основе форм технических (см., например, рис. 399, 430)[1]).

Проекции линии пересечения получаются в пределах общей части проекций обеих поверхностей.

При построении точек линии пересечения сначала следует найти те точки, которые обычно называют *характерными* [2]). Это точки, проекции которых отделяют видимую часть проекции линии пересечения от невидимой, это. проекции точек линии пересечения, наивысших и наинизших по отношению к пл. π_1 ближайших и наиболее удаленных по отношению к зрителю, крайних слева и справа на проекциях линии пересечения.

2.17 Лабораторная работа №17 (4 часа).

Тема: Применение вспомогательных секущих плоскостей, параллельных плоскостям проекций

2.17.1 Цель работы: Изучить применение вспомогательных секущих плоскостей, параллельных плоскостям проекций

2.17.2 Задачи работы:

1.Рассмотреть применение вспомогательных секущих плоскостей, параллельных плоскостям проекций

2.17.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Методические указания.
2. Тематические плакаты.
3. Чертежные инструменты.
4. Стол чертежный.

2.17.4 Описание (ход) работы:

Рассмотрим примеры, когда применение только плоскостей, параллельных плоскостям проекций, вполне решает вопрос о нахождении точек для искомой кривой. Это бывает в тех случаях, когда такие плоскости рассекают поверхности, участвующие в построении, по прямым или по окружностям.

На рис. 398 усеченный конус, ось которого перпендикулярна к пл. π_3, пронизывает полушарие, на поверхности которого образуется замкнутая кривая.

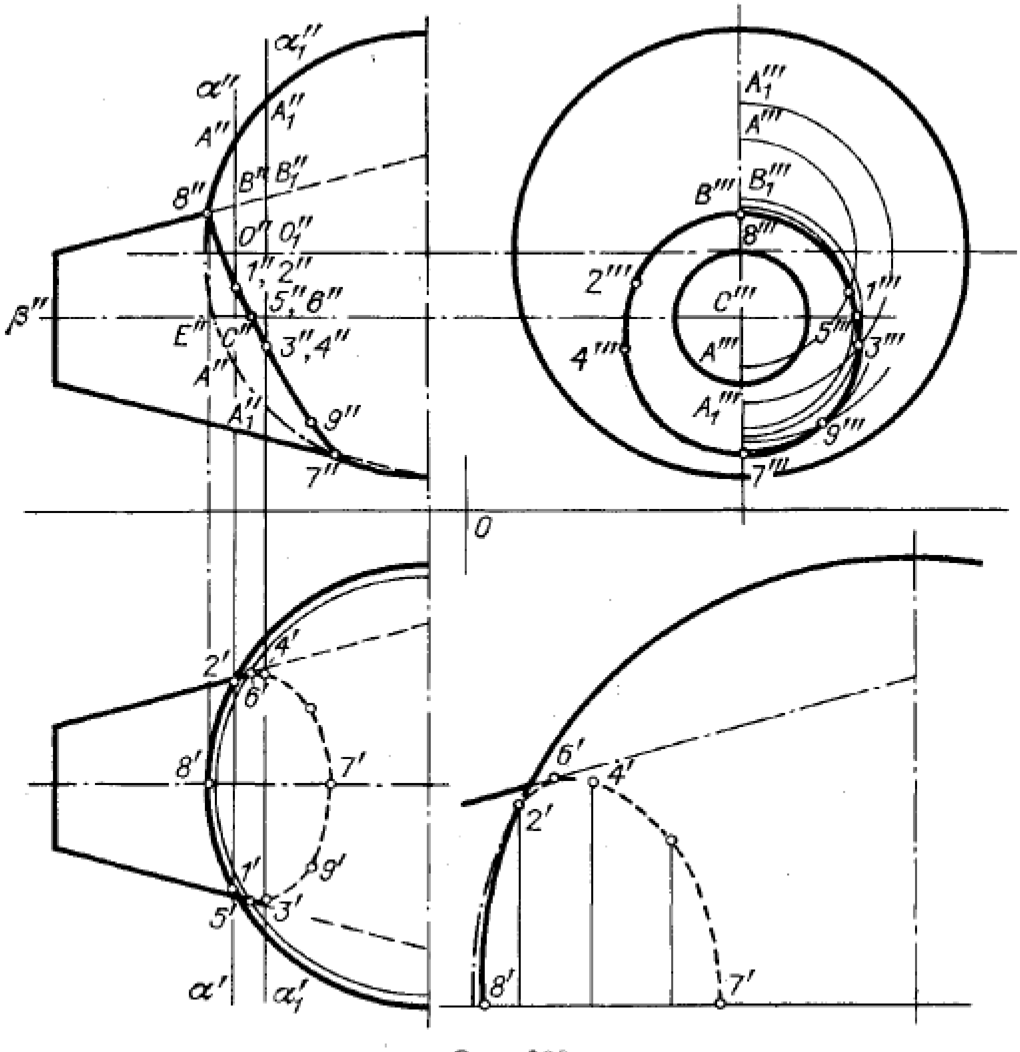


Рис. 398

В этом случае точки линии пересечения найдены при помощи плоскостей, параллельных пл. π_3 и перпендикулярных к оси конуса. Плоскости α и α_1 рассекают поверхность полушария по окружностям радиусов O"A" и $0'_1A'_1$, а поверхность конуса — по окружности радиусов C'''B''' и C'''B_1'''. Построив на пл. π_3 указанные окружности, находим профильные проекции точек искомой линии. Так, в пересечении окружностей, полученных при помощи пл. α, отмечаем точки I''' и 2'''; фронтальные и горизонтальные проекции этих точек лежат на следах α'' и α'. Таким же образом найдены точки 3', 3'' и 4', 4'' при помощи пл. α_1.

Так как ось конуса параллельна пл. π_1 то, проведя через нее пл. β, параллельную пл. π_1, мы рассечем поверхность конуса по образующим, а поверхность полу

шария по окружности; построив проекцию последней на пл. π_1 найдем в пересечении с проекциями соответствующих образующих конуса точки 5' и 6'.

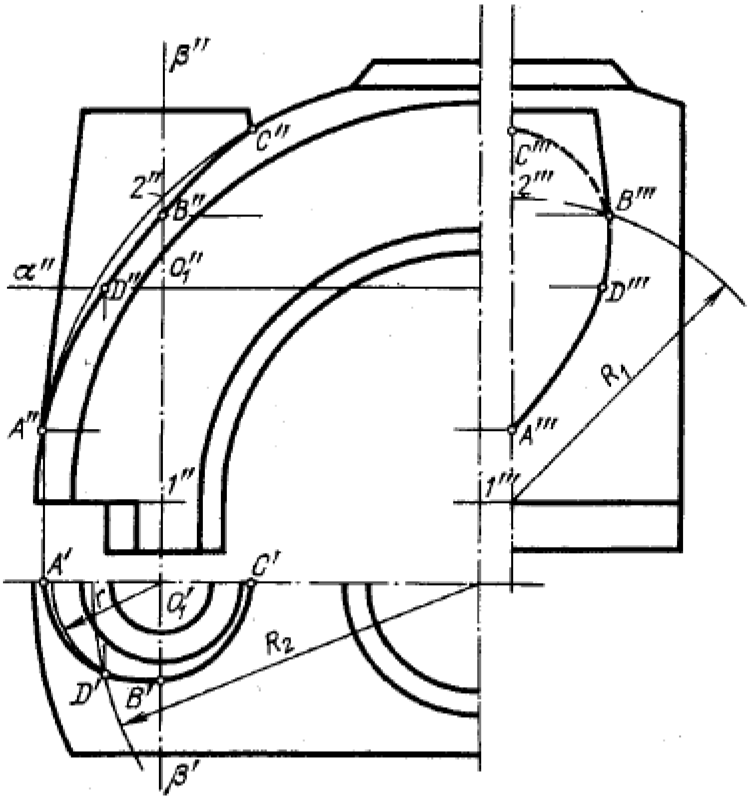


Рис. 399

В данном примере положение точек 7', 7'' и 8', 8'' очевидно. Эти точки, а также точки 5', 5'' и 6', 6'' относятся к числу характерных; в увеличенном виде показано построение точки 6, в которой проекции образующей конуса и кривой пересечения касаются одна другой.

На рис. 399 дан другой пример, когда точки линии пересечения двух поверхностей найдены при помощи секущих плоскостей, параллельных пл. π_1 и в одном случае (точка B) пл. π_3. Здесь уместнее говорить о линии перехода (см. сноску на с. 194), так как изображенная деталь [1]) (крышка подшипника) получается литьем и там, где коническая поверхность сливается со сферической, не получается ярко выраженной линии пересечения. Но на рис. 399 выполнено построение именно линии пересечения, так как рассматриваются геометрические формы, лежащие в основе форм технических.

Ход построения ясен из чертежа. Для построения проекций точки B, которая имеет значение для определения перехода между проекциями образующей конуса и линии пересечения на пл. π_3 (точка B'''), взята профильная плоскость, проходящая через ось конуса. Сферическая поверхность пересекается по окружности радиуса R_1 = 1"2". Сначала найдена проекция B''', затем B" и B'. Точка B, так же как и точки A и C, является характерной [2]).

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ПРОВЕДЕНИЮ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

(Программой не предусмотрены)

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

(Программой не предусмотрены)