ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Направление подготовки (специальность):
27. 03. 04 Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:
Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения: **очная**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Конспект лекций……………………………………………………………….…4

1.1 Лекция № 1 Введение..4

1.2 Лекция № 2 Понятие множества. Операции над множествами............................6

1.3 Лекция № 3 Эквивалентность множеств. Мощность множества.........................8

1.4 Лекция № 4 Отношения...11

1.5 Лекция № 5 Общее понятие функции...13

1.6 Лекция № 6 Алгебраические структуры..15

1.7 Лекция № 7 Алгебраические структуры (продолжение).....................................16

1.8 Лекция № 8 Понятие метрического пространства..20

1.9 Лекция № 9 Принцип сжатых отображений и его применения..........................22

1.10 Лекция № 10 Понятие топологического пространства...23

1.11 Лекция № 11 Компактность...25

1.12 Лекция № 12 Линейные пространства..27

1.13 Лекция № 13 Нормированные пространства...30

1.14 Лекция № 14 Евклидовы пространства...31

1.15 Лекция № 15 Обзорная…………………………………………………………….34

2. Методические указания по выполнению лабораторных работ……………..…..37

2.1 Лабораторная работа № ЛР-1 Основные принципы и этапы построения математической модели...37

2.2 Лабораторная работа № ЛР-2 Аппроксимация функций в среде MathCAD.......40

2.3 Лабораторная работа № ЛР-3 Сглаживание и фильтрация опытных данных в среде MathCAD...43

2.4 Лабораторная работа № ЛР-4 Исследование свойств бинарных отношений.....46

2.5 Лабораторная работа № ЛР-5 Исследование св-в алгебраических структур.......48

2.6 Лабораторная работа № ЛР-6 Исследование свойств алгебраических структур (продолжение)...49

2.7 Лабораторная работа № ЛР-7 Исследование свойств алгебраических структур (продолжение)...50

2.8 Лабораторная работа № ЛР-8 Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов...50

2.9 Лабораторная работа № ЛР-9 Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов...54

2.10 Лабораторная работа № ЛР-10 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши...57

2.11 Лабораторная работа № ЛР-11 Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка..58
2.12 Лабораторная работа № ЛР-12 Исследование св-в линейных пространств........61
2.13 Лабораторная работа № ЛР-13 Исследование свойств нормированных пространств..62
2.14Лабораторная работа № ЛР-14 Исследование св-в евклидовых пространств.....65

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Введение»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Предмет общей топологии. Историческая справка.

2. Обзорное повторение опорных разделов курса математики: аналитическая геометрия, теория пределов, основы дифференциального исчисления.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Предмет общей топологии. Историческая справка.

Одним из самых неожиданных явлений в развитии математики XX века стал головокружительный взлет науки, известной под названием топология. **Топология (от греч.τόπος – место и λόγος – слово, учение)** – раздел геометрии, изучающий в самом общем виде явление непрерывности, в частности свойства пространства, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях, например, связность, ориентируемость. **Топологию можно подразделить на три области:**
1) комбинаторную топологию, изучающую геометрические формы посредством их разбиения на простейшие фигуры, регулярным образом примыкающие друг к другу;
2) алгебраическую топологию, занимающуюся изучением алгебраических структур, связанных с топологическими пространствами, с упором на теорию групп;
3) теоретико-множественную топологию, изучающую множества как скопления точек (в отличие от комбинаторных методов, представляющих объект как объединение более простых объектов) и описывающую множества в терминах таких топологических свойств, как открытость, замкнутость, связность и т.д.

Образцом топологического свойства объекта служит наличие дырки у бублика (причем довольно тонкая сторона этого дела – тот факт, что дырка не является частью бублика). Какую бы непрерывную деформацию ни претерпел бублик, дырка останется. Существует крылатая фраза, что тополог (математик, занимающийся топологией) – это человек, не отличающий бублик от чайной чашки. Это означает, что наиболее общие (топологические) свойства бублика и чашки одинаковы (они телесны и имеют одну дырку).
Другое топологическое свойство – наличие края. Поверхность сферы не имеет края, а пустая полусфера имеет, и никакое непрерывное преобразование не в состоянии это изменить.
Основные объекты изучения в топологии называются топологическими пространствами. Интуитивно их можно представлять себе как геометрические фигуры.

Математически это – множества (иногда – подмножества евклидова пространства), наделенные дополнительной структурой под названием топология, которая позволяет формализовать понятие непрерывности.
Два топологических пространства топологические эквиваленты, если можно непрерывным образом перейти от одного из них к другому и непрерывным же образом вернуться обратно.
Особое место среди областей топологии занимает **общая топология.**

Общая топология – это область математики, в которой изучаются общие геометрические свойства, сохраняющиеся при непрерывных и взаимно однозначных отображениях.
Аксиоматически определяемыми объектами изучения общей топологии являются пространства и их непрерывные отображения.

Под топологическим пространством понимается множество объектов произвольной природы, называемых точками, в котором выделена некоторая система подмножеств, называемых открытыми множествами пространства.

Эта система должна включать в себя всё пространство и пустое множество и содержать в себе вместе с любыми двумя множествами их пересечение и вместе с любым набором множеств множество, которое является их объединением.
Существенное влияние на развитие общей топологии оказало введённое П.С. Александровым понятие бикомпактности.

В настоящее время наиболее распространённым является следующее определение бикомпактного пространства: пространство называется бикомпактным, если из всякого открытого покрытия этого пространства можно выбрать конечное число покрывающих множеств. Кроме того общая топология посвящена изучению понятий непрерывности, а также других понятий, таких как компактность или отделимость, как таковых, без обращения к другим инструментам.

Раздел математики, который мы теперь называем топологией, берет свое начало с изучения некоторых задач геометрии. Отдельные результаты топологического характера были получены ещё в XVIII–XIX веке (теорема Эйлера о выпуклых многогранниках, классификация поверхностей и теорема Жордана о том, что лежащая в плоскости простая замкнутая линия разбивает плоскость на две части).

Однако термин «топология» впервые появился в 1847 году в работе Листинга. Листинг определяет топологию так: «Под топологией будем понимать учение о модальных отношениях пространственных образов, или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей, тел и их частей или их совокупности в пространстве, независимо от отношений мер и величин».

В начале XX века создаётся общее понятие пространства в топологии (метрическое – М. Фреше, топологическое – Ф. Хаусдорф), возникают первоначальные идеи теории размерности и доказываются простейшие теоремы о непрерывных отображениях (А. Лебег, Л. Брауэр), вводятся полиэдры (А. Пуанкаре) и определяются их так называемые числа Бетти.

Первая четверть XX века завершается расцветом общей топологии и созданием московской топологической школы; закладываются основы общей теории размерности (П.С. Урысон); аксиоматике топологических пространств придаётся её современный вид (П.С. Александров); строится теория компактных пространств (П.С. Александров, П.СУрысон) и доказывается теорема об их произведении (А.Н. Тихонов); впервые даются необходимые и достаточные условия метризуемости пространства (П.С. Александров, П.С. Урысон); вводится понятие локально конечного покрытия; вводятся вполне регулярные пространства (А.Н. Тихонов); определяется понятие нерва и тем самым основывается общая теория гомологий.

Под влиянием Э. Нётер числа Бетти осознаются как ранги групп гомологий, которые поэтому называются также группами Бетти. Л.С. Понтрягин, основываясь на своей теории характеров, доказывает законы двойственности для замкнутых множеств.

Во 2-й четверти XX века продолжается развитие общей топологии и теории гомологий: в развитие идей Тихонова А. Стоун (США) и Э. Чех вводят так называемое стоун – чеховское, или максимальное, (би) компактное расширение вполне регулярного пространства; определяются группы гомологий произвольных пространств, в группы когомологий вводится умножение и строится кольцо когомологий.

В это время в алгебраической топологии царят комбинаторные методы, основывающиеся на рассмотрении симплициальных схем; поэтому алгебраическая топология иногда и до сих пор называется комбинаторной топологией.

Вводятся пространства близости и равномерные пространства. Начинает интенсивно развиваться теория гомотопий (Х. Хопф, Понтрягин); определяются гомотопические группы (В. Гуревич, США) и для их вычисления применяются соображения гладкой топологии.

Формулируются аксиомы групп гомологий и когомологий.

Возникает теория расслоений; вводятся клеточные пространства.

Во 2-й половине XX века в СССР складывается советская школа общей топологии и теории гомологий: ведутся работы по теории размерности, проблеме метризации, теории (би) компактных расширений, общей теории непрерывных отображений (факторных, открытых, замкнутых), в частности теории абсолютов; теории так называемых кардинальнозначных инвариантов.

Усилиями ряда учёных окончательно складывается теория гомотопий.

В это время создаются крупные центры алгебраической топологии в США, Великобритании и других странах; возобновляется интерес к геометрической топологии.

Создаётся теория векторных расслоений и K-функтора, алгебраическая топология получает широкие применения в гладкой топологии и алгебраической геометрии, развивается теория (ко) бордизмов, теория сглаживания и триангулируемости.

В настоящее время топология продолжает развиваться во всех направлениях, а сфера её приложений непрерывно расширяется.

1. 2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Понятие множества. Операции над множествами»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Основные определения и понятия: множество, подмножество, универсальное множество, равные множества, конечные и бесконечные множества, примеры.

2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Основные определения и понятия: множество, подмножество, универсальное множество, равные множества, конечные и бесконечные множества, примеры.

Множество — одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и логики. Понятие множества обычно принимается за одно из исходных (аксиоматических) понятий, то есть несводимое к другим понятиям, а значит, и не имеющее определения; для его объяснения используются описательные формулировки, характеризующие множество как совокупность различных элементов, мыслимую как единое целое.

Основатель теории множеств Георг Кантор (1845 –1918) выразил это следующими словами: «Множество есть многое, мыслимое, как единое». Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его **элементами**.

Множество иногда можно задать перечислением его элементов. Например, множество стран на земном шаре задается их списком в географическом атласе. Множество учеников класса – их списком в классном журнале. Если множество задано списком, то употребляются фигурные скобки, в которые помещают названия всех элементов множества, разделенные запятыми.
Так, {1, 2, 3} обозначает множество, состоящее из чисел один, два, три и только из них.

Но не все множества можно задать списком. Если множество содержит бесконечно много элементов, то такой список составить нельзя. Множество считается заданным, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты. Такое свойство называется **характеристическим свойством множества**. Одно и то же множество может быть задано различными характеристическими свойствами.

Задание множества его характеристическим свойством применяется в геометрии. В геометрии множество точек, обладающих данным характеристическим свойством, часто называют **геометрическим местом точек с данным свойством.** Например, биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри этого угла и равноудаленных от его сторон. Множество, не имеющее ни одного элемента, называют **пустым множеством**.
Фактически во всех этих примерах речь идет об одном и том же множестве: пустое множество единственно – нет разных пустых множеств. Пустое множество обозначается так: Ø.

О некоторых множествах до сих пор неизвестно, пусты они или нет. Например, неизвестно, пусто ли множество цифр, встречающихся лишь конечное число раз в десятичном разложении числа π.

Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, атомы, числа, уравнения, точки, углы и т.д. Очень часто встречаются **числовые множества**, т.е. множества, элементами которых являются числа. Примерами числовых множеств являются:

а) множество всех натуральных чисел (N);

б) множество всех положительных рациональных чисел (R_+);

в) множество всех рациональных чисел(R);

г) множество всех целых чисел (Z);

д) множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $-4 \le x \le 8$;

е) множество всех чисел вида $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$, где *n* принимает все натуральные значения.

Подмножество в теории множеств — это понятие части множества.
Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A, то говорят, что B – **подмножество** в A, и пишут $B \subset A$. Каждое непустое множество имеет по крайней мере два подмножества: пустое множество Ø и само множество *A*. Таким образом, пустое множество является подмножеством любого множества.

Приведем примеры подмножеств:

а) числовой отрезок [–1,3] есть подмножество числового отрезка [–4; 5];

б) множество всех квадратов есть подмножество множества всех прямоугольников;

в) множество Z всех целых чисел есть подмножество множества Q всех рациональных чисел.

Универсальное множество —множество, содержащее все объекты и все множества. Универсальное множество единственно. Универсальное множество обычно обозначается *U* (от англ. universe, universalset), реже *E*.

Свойства универсального множества:

- Любой объект, какова бы ни была его природа, является элементом универсального множества $\forall a: a \in U$
- В частности, само универсальное множество содержит себя в качестве одного из многих элементов $U \in U$
- Любое множество является подмножеством универсального множества $\forall A: A \subseteq U$
- В частности, само универсальное множество является своим подмножеством $U \subseteq U$
- Объединение универсального множества с любым множеством равно универсальному множеству $\forall A: U \cup A = U$
- В частности, объединение универсального множества с самим собой равно универсальному множеству $U \cup U = U$
- Пересечение универсального множества с любым множеством равно последнему множеству. $\forall A: U \cap A = A$

Равные множества — это множества, которые включают в себя одни и те же элементы, то есть являются эквивалентными по отношению друг к другу. Множества X и Y называются **не равными** (X≠ Y), если множество X содержит в себе элементы, которые не содержит в себе множество Y. Другими словами — множество X имеет элементы, которые не принадлежат множеству Y.

Символ равенства множеств имеет следующие свойства:

- X=X; — рефлексивность;
- если X=Y, Y=X — симметричность;
- если X=Y, Y=Z, то X=Z — транзитивность.

Согласно такому определению равенства множеств следует, что все пустые множества равны между собой или, что существует только одно пустое множество.

Конечное множество — множество, количество элементов которого конечно, то есть, существует неотрицательное целое число k, равное количеству элементов этого множества. В противном случае множество называется **бесконечным.**

Например, $\{2,4,6,8,10\}$ - конечное множество из пяти элементов. Число элементов конечного множества это натуральное число и называется мощностью множества. Множество всех положительных целых чисел бесконечно: $\{1,2,3,\ldots\}$.

Два множества X и Y называются **эквивалентными**, если существует биективное отображение одного множества в другое. Если множества X и Y эквивалентны, то этот факт записывают $X \sim Y$ или $|X|=|Y|$ и говорят, что множества имеют одинаковые мощности.

Множество X называется конечным, если оно эквивалентно множеству $\{1,2,\ldots,n\}$ при некотором неотрицательном целом n. При этом число n называется количеством элементов множества X, что записывается как $|X|=n$. В частности, пустое множество является конечным множеством, количество элементов которого равно 0, то есть, $|\emptyset|=0$.

Бесконечное множество — множество, не являющееся конечным.

Множества натуральных чисел N, целых чисел Z, рациональных чисел Q, действительных чисел R, комплексных чисел C — являются бесконечными множествами.

Множество функций N→N является бесконечным.

Упорядоченное бесконечное множество может иметь «концы» (минимальный и максимальный элементы) — например, множество рациональных чисел на отрезке [0,1].

2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.

Диаграммы Эйлера-Венна заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

Основные операции над множествами:

1.Пересечение;

2.Объединение;

3.Разность.

Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих.

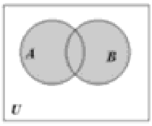


Рис. 1.

Определение. Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B (рис. 1):

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

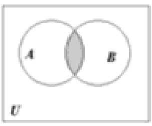


Рис. 2.

Определение. Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A, так и множеству B (рис. 2):

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

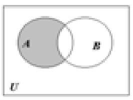


Рис. 3.

Определение. Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B (рис. 3):

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

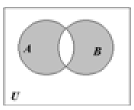


Рис. 4.

Определение. Симметрической разностью множеств A и B называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству A, либо только множеству B (рис. 4):

$A + B = \{x \mid \text{либо } x \in A, \text{ либо } x \in B\}$.

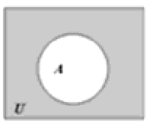


Рис. 5.

Определение. Абсолютным дополнением множества A называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству A (рис. 5):

$\overline{A} = U \setminus A$.

1. 3 Лекция №3 (2 часа).

Тема: «Эквивалентность множеств. Мощность множества»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Счетные множества. Примеры.

2. Понятие эквивалентности множеств. Примеры.

3. Несчетность множества действительных чисел.

4. Мощность множества

2. Краткое содержание вопросов:

1. Счетные множества. Примеры.

В теории множеств, счётное множество есть бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.

Определение: множество X является счётным, если существует биекция X↔N , где N обозначает множество всех натуральных чисел. Другими словами, счётное множество — это множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Множество - равномощное множеству всех натуральных чисел (1, 2,3,....,n-1), например множество целых чисел, множество чётных чисел, множество рациональных чисел. Это означает, что все элементы счётного множества можно перенумеровать, то есть обозначить натуральными числами. Говорят, также, что счётное множество имеет мощность X0, а всякое множество, равномощное с множеством всех подмножеств какого-нибудь счётного множества, имеет мощность 2X0 или мощность континуума. Бесконечное множество считается счётным, если можно установить одно однозначное соответствие между его элементами и натуральными числами. Мощность счётного множества, например, множества простых чисел, меньше мощности любого бесконечного несчётного множества.

Отношение между счётным множеством и бесконечным несчётным множеством выражается следующими теоремами:

1) мощность бесконечного множества не изменяется от прибавления к нему счётного множества;

2)мощность несчётного множества не изменяется от удаления из него счётного множества;

3) любое подмножество счётного множества счётно;

4)сумма двух счётных множеств счётна;

5) сумма конечного и счётного множества счётна;

6) если множество A счётно, то множество всех конечных последовательностей его элементов также счётно;

7) множество алгебраических чисел счётно.

2. Понятие эквивалентности множеств. Примеры.

Отношение эквивалентности «=» является отношением упорядочения, потому что оно обладает всеми свойствами отношения упорядочения, и употребляется также и самостоятельно.

Пусть x – элемент или подмножество множества X.

Отношение эквивалентности есть отношение между элементами или подмножествами множества, обладающее свойствами:

1) "xÎ M: x = x (рефлексивность);

2) "x, y, z Î M: (x = y) Ù (y = z) → x = z (транзитивность);

3) "x, y Î M: (x = y) → (y = x); (симметричность).

Эквивалентность не означает тождественность. Действительно, возьмем евклидову плоскость. В качестве элементов множества X возьмем все прямые. Отношением эквивалентности назовем параллельность прямых линий. Тогда все прямые, параллельные некоторой прямой, будут находиться в отношении эквивалентности к ней и друг к другу.

Отношение эквивалентности как отношение упорядочения создает только тривиальную дискретную топологию связанных классом эквивалентности слипшихся точек.

3. Несчетность множества действительных чисел.

Выше мы определили понятие равенства множеств. Для характеристики степени насыщенности бесконечных множеств элементами удобным является понятие эквивалентности множеств. Множество X называется бесконечным, если $\forall n \in N$ в множестве X имеются элементы, количество которых больше n. Два множества A и B называют эквивалентными, и при этом пишут $A \sim B$, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие $(\leftrightarrow)$, т. е. существует такое правило, закон, по которому $\forall a \in A$ соответствует вполне определенный элемент $b \in B$. При этом, в силу этого правила, двум разным элементам

$a_1, a_2 \in A$ соответствуют два разных элемента $b_1, b_2 \in B$ и каждый элемент $b \in B$ соответствует некоторому элементу $a \in A$.

Например, если A - множество точек на окружности радиуса r, B - множество точек на концентрической окружности радиуса $R > r$, то очевидно, что $A \sim B$ (рис. 6).

Очевидно, что если $A = B$, то $A \sim B$.

Если $X = \{x\} \sim N = \{n\}$, то множество X называется счетным. Естественно, что само множество натуральных чисел N является счетным (соответствие устанавливается по схеме $n \leftrightarrow n$). Множество всех четных натуральных чисел $N_ч = \{2n\}$ эквивалентно всему множеству N, причем соответствие устанавливается по схеме $n \leftrightarrow 2n$. Отметим, что здесь $N_ч \neq N$, $N_ч \subset N$. Таким образом, истинное подмножество (часть) множества оказалось эквивалентным всему множеству. Это свойство присуще только бесконечным множествам (его можно принять за определение бесконечного множества).

Из определения счетности множества вытекает, что его элементы можно перенумеровать с помощью натуральных чисел, поэтому счетное множество мы часто будем записывать в виде последовательности его элементов:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Счетная (теоретико-множественная) сумма. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E^1 + E^2 + \ldots$

счетных (или конечных) множеств E^k есть счетное множество. В самом деле, запишем элементы $x_j^k \in E^k \ (j = 1, 2, \ldots)$ в виде таблицы:

$$E^1 = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots\},$$

$$E^2 = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots\},$$

$$E^3 = \{x_1^3, x_2^3, x_3^3, \ldots\},$$

....

Перенумеруем их в следующем порядке:

$$x_1^1, x_3^1, x_1^2, x_3^1, x_2^2, x_1^3, x_4^1, \ldots,$$

выбрасывая, однако, на каждом этапе нумерации те элементы, которые уже были занумерованы на предыдущем этапе: ведь может случиться, что E^k и E^l имеют общие элементы. В результате, получим бесконечную последовательность элементов $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$, очевидно, исчерпывающих множество E. Это доказывает, что E - счетное множество.

Аналогично доказывается, что конечная сумма $E = E^1 + \ldots + E^N$ счетных или конечных множеств, среди которых есть хотя бы одно счетное, счетна.

Теорема 1. Множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 2. Множество всех действительных чисел несчетно. (б/д)

4. Мощность множества.

Мощность множества, кардинальное числомножества (лат. cardinalis ← cardo — главное обстоятельство, стержень, сердцевина) — характеристика множеств (в том числе бесконечных), обобщающая понятие количества (числа) элементов конечного множества.

В основе этого понятия лежат естественные представления о сравнении множеств:

1. Любые два множества, между элементами которых может быть установлено взаимно-однозначное соответствие (биекция), содержат одинаковое количество элементов (имеют одинаковую мощность).

2. Обратно: множества, равные по мощности, должны допускать такое взаимно-однозначное соответствие.
3. Часть множества не превосходит полного множества по мощности (то есть по количеству элементов).

До построения теории мощности множеств, множества различались по признакам: пустое/непустое и конечное/бесконечное, также конечные множества различались по количеству элементов. Бесконечные же множества нельзя было сравнить.
Мощность множеств позволяет сравнивать бесконечные множества.
Например, счётные множества являются самыми «маленькими» бесконечными множествами.

Мощность множества A обозначается через $|A|$. Сам Кантор использовал обозначение $\overline{\overline{A}}$. Иногда встречаются обозначения $\#A$ и $\mathrm{card}(A)$.
Формальный порядок среди кардинальных чисел вводится следующим образом: $|X|\leq|Y|$ означает, что множество X можно инъективно отобразить на Y. Согласно теореме Кантора-Бернштейна, из пары неравенств $|X|\leq|Y|$ и $|Y|\leq|X|$ следует, что $|X|=|Y|$.

1. 4 Лекция №4 (2 часа).

Тема: «Отношения»

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Кортежи. Декартовы произведения множеств.

2. Бинарные отношения: отношения порядка, равенства, эквивалентности.

3. Бинарные операции. Примеры

2. Краткое содержание вопросов:

1. Кортежи. Декартовы произведения множеств.

Пусть A и B — произвольные множества. Неупорядоченная пара на множествах A и B — это любое множество $\{a, b\}$, где $a \in A,\ b \in B$ или $a \in B,\ b \in A$.

Если $A = B$, то говорят о неупорядоченной паре на множестве A. Исходя из понятия равенства множеств, можно утверждать, что неупорядоченная пара $\{a, b\}$ равна неупорядоченной паре $\{c, d\}$ если и только если $a = c$ и $b = d$ или $a = d$ и $b = c$. Заметим, что равенство элементов множества понимается здесь (и далее в аналогичных ситуациях) как равенство индивидных констант.

В том случае, когда в неупорядоченной паре $\{a, b\}$ элементы a и b совпадают, получаем, что $\{a, b\} = \{a, a\}$. Но такая запись задаёт то же самое множество, что и $\{a\}$. Таким образом, при $a = b$ неупорядоченная пара $\{a, b\}$ "вырождается" в одноэлементное множество $\{a\}$. При $a \neq b$ неупорядоченная пара будет двухэлементным множеством.

Упорядоченная пара на множествах A и B, обозначаемая записью (a, b), определяется не только самими элементами $a \in A$ и $b \in B$, но и порядком, в котором они записаны. И в этом состоит ее существенное отличие от неупорядоченной пары. Если $A = B$, то говорят об упорядоченной паре на множестве A.

Существенная роль порядка, в котором перечисляются элементы упорядоченной пары, фиксируется определением равенства упорядоченных пар.

Определение 1. Две упорядоченные пары (a, b) и (a', b') на множествах A и B называют равными, если $a = a'$ и $b = b'$.

Замечание. Упорядоченную пару (a, b) не следует связывать с множеством $\{a, b\}$, так как упорядоченная пара характеризуется не только составом, но и порядком элементов в ней. Более того, определение этого объекта вообще не позволяет рассматривать его как множество.

Но упорядоченную пару можно определить и как множество, полагая, что упорядоченная пара (a, b) есть неупорядоченная пара $\{a, \{a, b\}\}$, включающая в себя одноэлементное множество $\{a\}$ и неупорядоченную пару $\{a, b\}$. При $a = b$ получаем $(a, a) = \{\{a\}\}$.

Простейший и важнейший пример использования упорядоченных пар дает аналитическая геометрия. Если на плоскости введена некоторая прямоугольная система координат, то каждая точка плоскости однозначно задается упорядоченной парой действительных чисел — координатами этой точки. Обобщением понятия упорядоченной пары является **упорядоченный n-набор**, или **кортеж**. В отличие от конечного множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$ кортеж $(a_1, \ldots, a_n)$ на множествах $A_1, \ldots, A_n$ характеризуется не только входящими в него элементами $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$, но и порядком, в котором они перечисляются. Как и для упорядоченных пар, роль порядка в кортеже фиксируется определением равенства кортежей.

Определение 2. Два кортежа $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ на множествах $A_1, \ldots, A_n$ равны, если $a_i = b_i,\ i = \overline{1, n}$.

Число n называется длиной кортежа (или размерностью кортежа), а элемент a_i — i-й проекцией (компонентой) кортежа. Для двух кортежей одинаковой размерности их компоненты с одинаковыми номерами называют одноименными компонентами.

Два кортежа одинаковой размерности равны тогда и только тогда, когда их одноименные компоненты совпадают.

Простейшим примером кортежа является арифметический вектор.

Определение 3. Множество всех кортежей длины n на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называют декартовым (прямым) произведением множеств $A_1, \ldots, A_n$ и обозначают $A_1 \times \ldots \times A_n$.

Таким образом, $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n)\colon\ a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$.

Если все множества $A_i,\ i = \overline{1, n}$, равны между собой, то указанное декартово произведение называют n-й декартовой степенью множества A и обозначают A^n. В частности, при $n = 2$ получаем декартов квадрат, а при $n = 3$ — декартов куб множества A.

Из определения следует, что первая декартова степень любого множества A есть само множество A, т.е. $A^1 = A$. Декартово произведение имеет следующие свойства:

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

3) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.

2. Бинарные отношения: отношения порядка, равенства, эквивалентности.

Бинарное отношение - двухместное отношение между любыми двумя множествами A и B, то есть всякое подмножество декартова произведения этих множеств: $R \subseteq A \times B$. Бинарное отношение на множестве A — любое подмножество $R \subseteq A^2 = A \times A$, такие бинарные отношения наиболее часто используются в математике, в частности, таковы равенство, неравенство, эквивалентность, отношение порядка.

Отношение порядка. Пусть дано множество $A \neq \varnothing$. Бинарное отношение R на множестве A называется **отношением частичного порядка** тогда и только тогда, когда:

- R-рефлексивно, т.е. $\forall a \in A : aRa$.
- R-антисимметрично $\forall a, b \in A : aRb \cap bRa \Rightarrow a = b$.
- R-транзитивно $\forall a, b, c \in A : aRb \cap bRc \Rightarrow aRc$.

Бинарное отношение R на множестве A называется **строгим отношением частичного порядка** тогда и только тогда, когда:

- R-рефлексивно, т.е. $\forall a \in A : aRa$-не выполняется.
- R-антисимметрично $\forall a, b \in A : aRb \cap bRa \Rightarrow a = b$.
- R-транзитивно $\forall a, b, c \in A : aRb \cap bRc \Rightarrow aRc$.

Бинарное отношение R на множестве A называется **отношением линейного порядка** тогда и только тогда, когда:

- R является отношением частичного порядка.
- $\forall a, b \in A : aRb \oplus bRa$.

Бинарное отношение R на множестве A называется **отношением полного порядка**тогда и только тогда, когда:

- R является отношением линейного порядка.
- $\forall B \in A \; \exists a \in B \; \forall b \in B : aRb$.

Отношение равенства. Равенство является интуитивно очевидным отношением: значение двух выражений одно и то же. При его формальном определении возникает разнобой.
Теория множеств, по определению, считает два объекта (то есть, два множества) равными, если они состоят из одних и тех же элементов:

$A=B \;\Leftrightarrow\; \forall x: (x\in A) \Leftrightarrow (x\in B)$

Отношение эквивалентности.

Отношение эквивалентности ($\sim$) на множестве X — это бинарное отношение, для которого выполнены следующие условия:

1. Рефлексивность: $a\sim a$ для любого a в X,
2. Симметричность: если $a\sim b$, то $b\sim a$,
3. Транзитивность: если $a\sim b$ и $b\sim c$, то $a\sim c$.

Классом эквивалентности $C(a)$ элемента a называется подмножество элементов, эквивалентных a. Из вышеприведённого определения немедленно следует, что, если $b\in C(a)$, то $C(a)=C(b)$.
Фактормножество — множество всех классов эквивалентности заданного множества X по заданному отношению $\sim$, обозначается $X/\sim$.
Для класса эквивалентности элемента a используются следующие обозначения: $[a]$, $a/\sim$, $\bar{a}$.
Множество классов эквивалентности по отношению $\sim$ является разбиением множества.

3 Бинарные операции. Примеры.

Бинарная операция (от лат. *bi* —два) — математическая операция, принимающая два аргумента и возвращающая один результат (то есть с арностью два).
Пусть A,B,C — тройка непустых множеств. **Бинарной операцией** или **двуместной операцией** в паре A,B со значениями в C называется отображение $P\to C$, где $P\subset A\times B$
Если $A=B=C$, то действие называется внутренним, если $A=C$ или $B=C$ — внешним. В частности, любое внутреннее действие является внешним.
Бинарную операцию принято обозначать знаком действия, который ставится между операндами (инфиксная форма записи). Например, для произвольной бинарной операции $\circ$ результат её применения к двум элементам x и y записывается в виде $x\circ y$.

1. 5 Лекция №5 (2 часа).

Тема: «Общее понятие функции»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Инъективные и сюръективные отношения. Примеры.
2. Взаимно-однозначное соответствие, функция. Примеры.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Инъективные и сюръективные отношения. Примеры.

Инъекция — отображение f множества X в множество Y ($f:X\to Y$), при котором разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y, то есть, если два образа при отображении совпадают, то совпадают и прообразы: $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$.
Инъекцию также называют вложением или одно - однозначным отображением (в отличие от биекции, которая взаимно-однозначна). В отличие от сюръекции, про которую говорят, что она отображает одно множество на другое, об инъекции $f:X\to Y$ аналогичная фраза формулируется как отображение X в Y.
Инъекцию можно также определить как отображение, для которого существует левое обратное, то есть, $f:X\to Y$ инъективно, если существует $g:Y\to X$, при котором $g\circ f=\mathrm{id}X$.

Понятие инъекции (наряду с сюръекцией и биекцией) введено в трудах Бурбаки и получило широкое распространение почти во всех разделах математики.
Обобщением понятия инъекции в теории категорий является понятие мономорфизма, во многих категориях эти понятия эквивалентны, однако это выполнено не всегда.
Примеры:

- f:R>0→R,f(x)=lnx — инъективно.
- f:R+→R+,f(x)=x2 — инъективно.
- f:R→R,f(x)=x2 — не является инъективным (f(−2)=F(2)=4).

Одним из прикладных примеров применения понятия инъекции является организация связи «один к одному» между сущностями в реляционной модели данных.

Сюръекция (сюръективное отображение, от фр. sur — «на», «над» лат. jactio — «бросаю») — отображение f:X→Y, при котором каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X, то есть ∀y∈Y∃x∈X:y=f(x), иными словами — функция, принимающая все возможные значения. Иногда говорят, что сюръективное отображение f:X→Y отображает X на Y (в противоположность инъективному отображению, которое отображает X в Y).
Понятие сюръекции (наряду с инъекцией и биекцией) введено в обиход в трудах Бурбаки и получило всеобщее распространение практически во всех разделах математики.

Отображение f: X→Y сюръективно тогда и только тогда, когда образ множества X при отображении f совпадает с Y: f(X)=Y. Также сюръективность функции f эквивалентна существованию правого обратного отображения, то есть такого отображения g:Y→X, что f(g(y))=y для любого y∈Y (в функциональных обозначениях — f∘g=IdY).
В топологии важное понятие расслоения определяется как произвольное непрерывное сюръективное отображение топологических пространств (расслоённого пространства в базу расслоения).

Организация связи «многие к одному» между таблицами в сущностях реляционной модели данных — также может быть рассмотрена как сюръективная функция.

2. Взаимно-однозначное соответствие, функция. Примеры.

Взаимно-однозначное соответствие - такое соответствие между элементами двух множеств, при котором каждому элементу первого множества соответствует один определённый элемент второго множества, а каждому элементу второго множества — один определённый элемент первого множества.

Взаимно-однозначное соответствие — частный вид Функции или отображения, когда данная функция и ей обратная являются однозначными. Если между двумя множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, то эти множества называются эквивалентными, или равномощными. Например, множества целых и их квадратов равномощны, так как соответствие $n \to n^2$ является взаимно-однозначным соответствием.

Отображение множества А в множество В, соответствие, в силу которого каждому элементу х множества А соответствует определённый элемент у = f (х) множества В, называют образом элемента х (элемент х называют прообразом элемента у). Иногда под отображением понимают установление такого соответствия.

Примерами отображения могут служить параллельное проектирование одной плоскости на другую, стереографическая проекция сферы на плоскость. Географическая карта может рассматриваться как результат отображения точек земной поверхности (или части её) на точки куска плоскости. Логически понятие отображения совпадает с понятиями Функция, Оператор, Преобразование. Многие свойства остаются неизменными (инвариантными) при отображении. Так, при параллельном проектировании сохраняется параллельность прямых, отношение отрезков длин параллельных прямых и т.д.

Если каждый элемент множества В является образом элемента множества А, то отображение называется отображением А на множество В. Если каждый элемент из В имеет один и только один прообраз, то отображение называется взаимно однозначным. Отображение называется непрерывным, если близкие элементы множества А переходят в близкие элементы множества В. Точнее это означает, что если элементы x_1, x_2,..., x_n,... сходятся к х, то элементы f (x_1), f (x_2),..., f (xn),... сходятся к f (х).

Каждой части Т множества А соответствует часть f (Т) множества В, состоящая из образов точек этой части; она называется образом Т. Если все точки части Q множества В являются образами точек из А, то совокупность всех точек х из А таких, что f (х) лежит в Q, называются полным прообразом Q и обозначается $f^{-1}(Q)$. Взаимно однозначное отображение имеет обратное отображение, сопоставляющее элементу *y* из B его прообраз $f^{-1}(y)$. Взаимно однозначное отображение называется топологическим, или гомеоморфным, если как оно, так и обратное ему отображение непрерывны. При гомеоморфных отображениях сохраняются лишь наиболее общие свойства фигур, как, например, связность, ориентируемость, размерность и др.

.

1.6 Лекция № 6 (2 часа)

Тема: «Алгебраические структуры»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Алгебра. Модель. Примеры.

2. Группоид. Полугруппа. Группа. Примеры.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Алгебра. Модель. Примеры.

При решении многих математических задач используются более сложные структуры, чем «множества с операциями». Например, изучая множество действительных чисел, мы имеем дело не только с операциями над числами, но и с определенными отношениями на множестве действительных чисел, такими, как, скажем, естественный числовой порядок. Важнейшая структура— упорядоченное множество — вообще определяется без каких-либо операций. Таким образом, мы приходим к необходимости изучения «множеств с операциями и отношениями», в частности «множеств с отношениями» (примерами которых служат упорядоченное множество, индуктивное упорядоченное множество, множество, на котором задано некоторое отношение предпорядка, эквивалентности и т.п.). Это приводит нас к понятиям «алгебраической системы» и «модели».

Алгебраическая система — это упорядоченная тройка $\mathcal{A} = (A, \Omega, \Pi)$,
где A — некоторое множество, называемое носителем алгебраической системы;
Ω — некоторое множество операций на A;
Π — некоторое множество отношений на A.
Упорядоченную пару (Ω, Π) называют сигнатурой алгебраической системы.
Алгебраическую систему называют конечной, если ее носитель — конечное множество.
$\Omega^{(n)}$ подмножество всех n-арных операций в Ω,
$\Pi^{(n)}$ — подмножество всех n-арных отношений.
Алгебраическая система, у которой множество Π отношений пусто $(\Pi = \varnothing)$, есть не что иное, как Ω-алгебра. Алгебраическую систему, у которой пусто множество операций $(\Omega = \varnothing)$, называют моделью.

Пример 1. Одной из основных моделей в математике является упорядоченное множество. Сигнатура этой модели состоит из единственного отношения порядка. Важным частным случаем служит индуктивное упорядоченное множество.

2. Группоид. Полугруппа. Группа. Примеры.

Множество G с одной внутренней бинарной операцией * называется **группоидом**, обозначается (G;*). Элемент eÎG называется **нейтральным** или **единичным** относительно операции *, если g*e=e*g=g для любого элемента gÎG.

Таблицей Кэли группоида (G;*), где G={g1,…,gn}, называют квадратную таблицу, у которой строки и столбцы «занумерованы» элементами g1,…,gn и на пересечении строки gi и столбца gj записан результат операции gi*gj, i,jÎ{1,…,n}.

Подмножество G¢ группоида (G;*) называется **подгруппоидом**, если оно замкнуто относительно операции *, то есть если g,g¢ÎG¢, то и g*g¢ÎG¢.

Элементы g и g¢группоида G коммутируют (или перестановочны), если g*g¢=g¢*g. Группоид (G;*) называется **коммутативным**, если операция * на G коммутативна.

В группоиде имеется не более одного единичного элемента e. Действительно, если e¢– другая единица группоида, тое¢=e¢*e=e.

Группоид (G;*) с заданной на нём ассоциативной операцией * называется **полугруппой**.
Идемпотентом полугруппыG называется ее элемент i со свойством: i*i=i. Множество всех идемпотентов полугруппы G обозначим E(G). Полугруппа G называется **унипотентной**, если ïE(G)ï=1.

Полугруппу с единичным элементом называют **моноидом** (или полугруппой с единицей). Моноидом является, например, N - множество натуральных чисел относительно умножения.
Элемент g моноида G с единицей e называется **обратимым**, если найдётся элемент g¢ÎG, для которого g*g¢=g¢*g=e, такие элементы g и g¢ называются **взаимно обратными**.Если в моноиде G для элемента g имеется обратный элемент g¢, то он единственный (обозначается g-1).

Группой называется моноид G, все элементы которого обратимы. Иначе, множество G – группа с внутренней бинарной ассоциативной операцией *, относительно которой в G имеется единица и для каждого элемента имеется обратный. Группу можно рассматривать как унипотентную полугруппу. Действительно, если в группе i*i=i, то умножив обе части на i-1, получаем i=e. Группу с коммутативной операцией называют **коммутативной** или **абелевой**.
Примеры групп:
а) множество R действительных чисел относительно сложения и множество R{0} относительно умножения;
б) множество Z целых чисел относительно сложения;
в) множество Q рациональных чисел относительно сложения и множество Q{0} относительно умножения.

1.7 Лекция № 7 (2 часа)

Тема: «Алгебраические структуры (продолжение)»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Кольцо. Примеры. Поле. Примеры.

3. Построение поля комплексных чисел

2. Краткое содержание вопросов:

1. Кольцо. Примеры. Поле. Примеры.

Кольцо (также ассоциативное кольцо) в общей алгебре — алгебраическая структура, в которой определены операции обратимого сложения и умножения, по свойствам похожие на соответствующие операции над числами. Простейшими примерами колец являются числа (целые, вещественные, комплексные), функции, определенные на заданном множестве. Во всех случаях имеется множество, похожее на множество чисел в том смысле, что его элементы можно складывать и умножать, причём эти операции ведут себя естественным образом.

Для изучения общих свойств операций умножения и сложения, их внутренней связи между собой безотносительно к природе элементов, над которым операции производятся, и было введено понятие кольца.

Кольцо — это множество R, на котором заданы две бинарные операции: $+$ и $\times$ (называемые сложение и умножение), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in R$:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность сложения;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность сложения;
3. $\exists 0 \in R \ \ (a + 0 = 0 + a = a)$ — существование нейтрального элемента относительно сложения;
4. $\forall a \in R \ \exists b \in R \, (a + b = b + a = 0)$ — существование противоположного элемента относительно сложения;
5. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ — ассоциативность умножения;
6. $\begin{cases} a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ (b + c) \times a = b \times a + c \times a \end{cases}$ — дистрибутивность.

Иными словами, кольцо — это универсальная алгебра $(R,+,\times)$, такая что алгебра $(R,+)$ — абелева группа, и операция $\times$ дистрибутивна слева и справа относительно $+$.
Кольца могут обладать следующими дополнительными свойствами:

- наличие единицы: $\exists e\in R\,\forall a\in R\,(a\times e=e\times a=a)$ (кольцо с единицей), обычно единица обозначается 1;
- коммутативность умножения: $\forall a,b\in R\,(a\times b=b\times a)$ (коммутативное кольцо);

Иногда под кольцом понимают только кольца с единицей, но изучаются также и кольца без единицы (например, кольцо чётных чисел является коммутативным ассоциативным кольцом без единицы).
Непосредственно из аксиом кольца можно вывести следующие свойства:

- нейтральный элемент относительно сложения в кольце единственен;
- для любого элемента кольца обратный к нему по сложению элемент единственен;
- нейтральный элемент относительно умножения (единица 1), если он существует, единственен;
- $a\cdot 0=0$, то есть 0 — поглощающий элемент по умножению;
- $(-b)=(-1)\cdot b$, где $(-b)$ — элемент, обратный к b по сложению;
- $(-a)\cdot b=(-ab)$;
- $(-a)\cdot(-b)=(ab)$.

Виды элементов кольца:
Пусть в кольце есть элементы, отличные от нуля (кольцо не является тривиальным). Тогда левый делитель нуля — это ненулевой элемент a кольца R, для которого существует ненулевой элемент b кольца R, такой что $ab=0$. Аналогично определяется правый делитель нуля. В коммутативных кольцах эти понятия совпадают.

Пример 1. Рассмотрим кольцо непрерывных функций на интервале $(-1,1)$. Положим $f(x)=\max(0,x)$, $g(x)=\max(0,-x)$, тогда $f\neq 0, g\neq 0, fg=0$, то есть f,g являются делителями нуля. Здесь условие $f\neq 0$ означает, что f является функцией, отличной от нуля, но не означает, что f нигде не принимает значение 0.

Нильпотентный элемент — это элемент a, такой что $a^n=0$ для некоторого $n>0$.
Пример 2. Матрица $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Нильпотентный элемент всегда является делителем нуля (если только кольцо состоит не из одного нуля), обратное в общем случае неверно.
Идемпотентный элемент e — это такой элемент, что $e\cdot e=e$. Например, идемпотентен любой оператор проектирования, в частности, следующий: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ в кольце матриц 2×2.
Если a – произвольный элемент кольца с единицей R, то левым обратным элементом к a называется a_l^{-1} · такой, что $a_l^{-1}a=1$. Правый обратный элемент определяется аналогично. Если у элемента a есть как левый, так и правый обратный элемент, то последние совпадают, и говорят, что a обладает обратным элементом, который определён однозначно и обозначается a^{-1}. Сам элемент называется обратимым элементом.
Подкольцо. Подмножество $A\subset R$ называется **подкольцом** R, если A само является кольцом относительно операций, определенных в R. При этом говорят, что R – расширение кольца A. Другими словами, непустое подмножество $A\subset R$ является подкольцом, если

- A является аддитивной подгруппой кольца R, то есть для любых $x,y\in A: x+y, -x\in A$
- A замкнуто относительно умножения, то есть для любых $x,y\in A: xy\in A$

По определению, подкольцо непусто, поскольку содержит нулевой элемент. Нуль и единица кольца являются нулем и единицей любого его подкольца.
Подкольцо наследует свойство коммутативности.
Идеалы. Определение и роль идеала кольца сходны с определением нормальной подгруппы в теории групп.

Непустое подмножество I кольца R называется **левым идеалом**, если:

- I является аддитивной подгруппой кольца, то есть сумма любых двух элементов из I принадлежит I, а также $a \in I \Rightarrow -a \in I$.
- I замкнуто относительно умножения слева на произвольный элемент кольца, то есть для любого $a \in I,\ r \in R$ верно $ra \in I$.

Из первого свойства следует и замкнутость I относительно умножения внутри себя, так что I является подкольцом.

Аналогично определяется правый идеал, замкнутый относительно умножения на элемент кольца справа.

Двусторонний идеал (или просто идеал) кольца R — любое непустое подмножество, являющееся одновременно левым, так и правым идеалом.

Идеал кольца, не совпадающий со всем кольцом, называется простым, если факторкольцо по этому идеалу не имеет делителей нуля. Идеал кольца, не совпадающий со всем кольцом и не содержащийся ни в каком большем идеале, не равном кольцу, называется максимальным.

Гомоморфизм колец (кольцевой гомоморфизм) — это отображение, сохраняющее операции сложения и умножения. А именно, гомоморфизм из кольца R в кольцо S — это функция $f : R \to S$, такая, что

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$
2. $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)\ \forall a, b \in R$.

В случае колец с единицей иногда требуют также условия $f(1) = 1$.

Гомоморфизм колец называется изоморфизмом, если существует обратный гомоморфизм колец. Любой биективный гомоморфизм колец является изоморфизмом. Автоморфизм — это гомоморфизм из кольца в себя, который является изоморфизмом.

Пример: тождественное отображение кольца на себя является автоморфизмом.

Если $f : R \to S$ — гомоморфизм колец, множество элементов R, переходящих в ноль, называется ядром f (обозначается $\ker f$). Ядро любого гомоморфизма является двусторонним идеалом. С другой стороны, образ f не всегда является идеалом, но является подкольцом S.

Факторкольцо. Определение факторкольца по идеалу аналогично определению факторгруппы. Более точно, факторкольцо кольца R по двустороннему идеалу I — это множество классов смежности аддитивной группы R по аддитивной подгруппе I со следующими операциями:

(a + I) + (b + I) = (a + b) + I,

(a + I)(b + I) = (ab) + I.

Аналогично случаю групп, существует канонический гомоморфизм $p : R \to R/I$, задаваемый как $x \mapsto x + I$. Ядром при этом является идеал I.

Аналогично теореме о гомоморфизме групп существует теорема о гомоморфизме колец: пусть $f : R \to R'$, тогда Imf изоморфен факторкольцу по ядру гомоморфизма $Imf \simeq A/Kerf$.

Особые классы колец:

- Кольцо с единицей $1 \neq 0$, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется телом.
- Коммутативное тело называется полем. Иначе говоря, поле — это коммутативное кольцо с единицей, не имеющее нетривиальных идеалов.
- Коммутативное кольцо без делителей нуля называется областью целостности (или целостным кольцом). Любое поле является областью целостности, но обратное неверно.
- Целостное кольцо R, не являющееся полем, называется евклидовым, если на кольце задана норма $N : R \to Z_+$ такая, что:
  1. $N(ab) \leq N(a)$, b — обратим;
  2. для любых $a, b \in R$ существуют $q, r \in R$ такие, что $a = qb + r$ и $r = 0$ или $N(r) < N(b)$.

- Целостное кольцо, в котором всякий идеал является главным, называется кольцом главных идеалов. Всякие евклидово кольцо и всякое поле являются кольцами главных идеалов.
- Кольцо, элементами которого являются числа, а операциями — сложение и умножение чисел, называют числовым кольцом. Например, множество чётных чисел является **числовым кольцом**, но не будет кольцом никакая система отрицательных чисел, так как их произведение положительное.

Поле в общей алгебре — алгебраическая структура, для элементов которой определены операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль), причём свойства этих операций близки к свойствам обычных числовых операций. Простейшим полем является поле рациональных чисел (дробей). Хотя названия операций поля взяты из арифметики, следует иметь в виду, что элементы поля не обязательно являются числами, и определения операций могут быть далеки от арифметических.

Алгебра над множеством F, образующая коммутативную группу по сложению $+$ над F с нейтральным элементом $\mathbf{0}$ и коммутативную группу по умножению над ненулевыми элементами $F\setminus\{\mathbf{0}\}$, при выполняющемся свойстве дистрибутивности умножения относительно сложения.

Если раскрыть указанное выше определение, то множество F с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения $+$ и умножения $*$ ($+:F\times F\to F, *:F\times F\to F$, т.е. $\forall a,b\in F (a+b)\in F, a*b\in F$) называется полем $\langle F,+,*\rangle$, если выполнены следующие аксиомы:

1. Коммутативность сложения: $\forall a,b\in F\ a+b=b+a$
2. Ассоциативность сложения: $\forall a,b,c\in F\ (a+b)+c=a+(b+c)$
3. Существование нулевого элемента: $\exists \mathbf{0}\in F:\forall a\in F\ a+\mathbf{0}=a$
4. Существование противоположного элемента: $\forall a\in F\ \exists(-a)\in F: a+(-a)=\mathbf{0}$
5. Коммутативность умножения: $\forall a,b\in F\ a*b=b*a$
6. Ассоциативность умножения: $\forall a,b,c\in F\ (a*b)*c=a*(b*c)$
7. Существование единичного элемента: $\exists e\in F:\forall a\in F\ a*e=a$
8. Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $(\forall a\in F: a\neq\mathbf{0})\exists a^{-1}\in F: a*a^{-1}=e$
9. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a,b,c\in F\ (a+b)*c=a*c+b*c$

Характеристика поля — то же, что и характеристика кольца, наименьшее положительное целое число n такое, что сумма n копий единицы равна нулю:

$$\underbrace{1+\dots+1}_{n}=n1=0.$$

Если такого числа не существует, то характеристика равна 0 по определению. Задачу определения характеристики обычно решают с задействованием понятия простого поля — поля, не содержащего собственных подполей, благодаря факту, что любое поле содержит ровно одно из простых полей.

Поля Галуа — поля, состоящие из конечного числа элементов. Названы в честь их первого исследователя Эвариста Галуа.

Свойства:

- Характеристика поля всегда 0 или простое число.
  - Поле характеристики 0 содержит подполе, изоморфное полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$.
  - Поле простой характеристики p содержит подполе, изоморфное полю вычетов $\mathbb{Z}_p$.
- Количество элементов в конечном поле всегда равно p^n — степени простого числа.
  - При этом для любого числа вида p^n существует единственное (с точностью до изоморфизма) поле из p^n элементов, обычно обозначаемое $\mathbb{F}_{p^n}$.
- В поле нет делителей нуля.
- Любая конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической. В частности, мультипликативная группа ненулевых элементов конечного поля $\mathbb{F}_q$ изоморфна $\mathbb{Z}_{q-1}$.
- С точки зрения алгебраической геометрии, поля — это точки, потому что их спектр состоит ровно из одной точки — идеала $\{0\}$. Действительно, поле не содержит других собственных идеалов: если идеалу принадлежит ненулевой элемент, то в идеале находятся и все кратные ему, то есть всё поле. Обратно, коммутативное кольцо, не являющееся полем, содержит необратимый (и ненулевой) элемент **a**. Тогда главный идеал, порождённый **a**, не совпадает со всем кольцом и содержится в некотором максимальном (а следовательно простом) идеале, а значит спектр этого кольца содержит как минимум две точки.

1.8 Лекция № 8 (2 часа)

Тема: «Понятие метрического пространства»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Определение и примеры.

2. Предельные точки. Замыкание.

3. Открытые и замкнутые множества

2. Краткое содержание вопросов:

1. Определение и примеры.

Метрическим пространством называется множество, в котором определено расстояние между любой парой элементов. Морис Фреше впервые ввёл понятие метрического пространства в связи с рассмотрением функциональных пространств.

Метрическое пространство есть пара $(X,\ d)$, где X — множество, а d — числовая функция, которая определена на декартовом произведении $X \times X$, принимает значения в множестве вещественных чисел такая, что

1. $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества).
2. $d(x,\ y) = d(y,\ x)$ (аксиома симметрии).
3. $d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$ (аксиома треугольника).

При этом

- множество X называется подлежащим множеством метрического пространства.
- элементы множества X называются точками метрического пространства.
- функция d называется метрикой.

Замечания:

1.Из аксиом следует неотрицательность функции расстояния, поскольку

$$0 = d(x,\ x) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ x) = 2 \cdot d(x,\ y).$$

2.Если неравенство треугольника представить в виде

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ для всех x, y и z,

тогда из аксиомы тождества и неравенства треугольника следует аксиома симметрии.

Обычно расстояние между точками x и y в метрическом пространстве M обозначается $d(x,\ y)$ или $\rho(x,\ y)$.

- В метрической геометрии принято обозначение $|x-y|$ и $|x-y|_M$.
- В классической геометрии приняты обозначения XY или $|XY|$ (точки обычно обозначают заглавными латинскими буквами).

Биекция между различными метрическими пространствами $(X,\ d_X)$ и $(Y,\ d_Y)$, сохраняющая расстояния, называется **изометрией.** В этом случае пространства $(X,\ d_X)$ и $(Y,\ d_Y)$ называются изометричными.

Если M подмножество множества X, то, рассматривая сужение $d_M = d_X\big|_M$ метрики d_X на множество M, можно получить метрическое пространство $(M,\ d_M)$, которое называется подпространством пространства $(X,\ d)$. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится к некоторому элементу этого пространства.

Метрика d на M называется внутренней, если любые две точки x и y в M можно соединить кривой с длиной, произвольно близкой к $d(x,\ y)$.

Любое метрическое пространство обладает естественной топологией, базой для которой служит множество открытых шаров, то есть множеств следующего типа:

$$B(x;\ r) = \{y \in M \mid d(x,\ y) < r\},$$

где x есть точка в M и r — положительное вещественное число, называемое радиусом шара. Иначе говоря, множество O является открытым, если вместе с любой своей точкой оно содержит открытый шар с центром в этой точке.

Две метрики, определяющие одну и ту же топологию, называются эквивалентными. Топологическое пространство, которое может быть получено таким образом, называется метризируемым.

Расстояние $d(x,\ S)$ от точки x до подмножества S в M определяется по формуле:

$$d(x,\ S) = \inf\{d(x,\ s) \mid s \in S\}.$$

Тогда $d(x,\ S) = 0$, только если x принадлежит замыканию S.

$$d_F(f_1,\ f_2) = \sup\{d_Y(f_1(x),\ f_2(x))\colon x \in X\}.$$

Свойства:

1.Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности точек можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (секвенциальная компактность).

2.Метрическое пространство может не иметь счётной базы, но всегда удовлетворяет первой аксиоме счётности — имеет счётную базу в каждой точке.

2. Предельные точки. Замыкание.

Предельная точка (точка накопления) множества в общей топологии — это такая точка, любая проколотая окрестность которой пересекается с этим множеством.

Точка x называется **предельной точкой подмножества** A в топологическом пространстве X, если всякая проколотая окрестность точки x имеет с A непустое пересечение.

Точка x называется **точкой полного накопления подмножества** A, если для всякой окрестности U точки x мощность пересечения U∩A равна мощности множества A.

Все точки множества A делятся на два вида: предельные и изолированные точки. Изолированной называется такая точка x, у которой есть окрестность, не имеющая с A других общих точек, кроме x. Подмножество в A, состоящее из одной этой точки, является открытым в A (в индуцированной топологии).

Совокупность всех предельных точек множества A называется его **производным множеством** и обозначается A′. Все предельные точки множества входят в его замыкание A¯. Более того, справедливо равенство: A¯=A∪A′, из которого легко получается следующий критерий замкнутости подмножеств:

Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои предельные точки.

В метрических пространствах, если x — предельная точка множества A, то существует последовательность точек из A сходящаяся к x. Топологические пространства, для которых выполняется это свойство, называются пространствами Фреше — Урысона.

Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда в нём всякое бесконечное подмножество имеет хотя бы одну точку полного накопления в X.

Топологическое пространство X счётно компактно тогда и только тогда, когда в нём всякое бесконечное подмножество имеет хотя бы одну строгую предельную точку в X. Всякий компакт счётно компактен. Для метрических пространств верно и обратное (критерий компактности метрического пространства): метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно счётно компактно.

3. Открытые и замкнутые множества.

Одна из основных задач теории точечных множеств — изучение свойств различных типов точечных множеств. Познакомимся с этой теорией на двух примерах и изучим свойства так называемых замкнутых и открытых множеств.

Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. Если множество не имеет ни одной предельной точки, то его тоже принято считать замкнутым. Кроме своих предельных точек, замкнутое множество может также содержать изолированные точки. Множество называется **открытым**, если каждая его точка является для него внутренней.

Приведем примеры замкнутых и открытых множеств.

Всякий отрезок $[a, b]$ есть замкнутое множество, а всякий интервал (a, b) — открытое множество. Несобственные полуинтервалы $(-\infty, b]$ и $[a, +\infty)$ замкнуты, а несобственные интервалы $(-\infty, b)$ и $(a, +\infty)$ открыты. Вся прямая является одновременно и замкнутым и открытым множеством. Удобно считать пустое множество тоже одновременно замкнутым и открытым. Любое конечное множество точек на прямой замкнуто, так как оно не имеет предельных точек. Множество, состоящее из точек

$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$ замкнуто; это множество имеет единственную предельную точку $\boldsymbol{x=0}$, которая принадлежит множеству.

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, как устроено произвольное замкнутое или открытое множество. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных фактов, которые мы примем без доказательства.

1. Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.
2. Сумма любого числа открытых множеств есть открытое множество.
3. Если замкнутое множество ограничено сверху, то оно содержит свою верхнюю грань. Аналогично, если замкнутое множество ограничено снизу, то оно содержит свою нижнюю грань.
4. Если множество F замкнуто, то его дополнение CF открыто и обратно.

Предложение 4 показывает, что между замкнутыми и открытыми множествами имеется весьма тесная связь: одни являются дополнениями других. В силу этого достаточно изучить одни замкнутые или одни открытые множества. Знание свойств множеств одного типа позволяет сразу выяснить свойства множеств другого типа. Замкнутые множества могут иметь весьма сложное строение.

Разнообразные типы точечных множеств постоянно встречаются в самых различных разделах математики, и знание их свойств совершенно необходимо при исследовании многих математических проблем. Особенно большое значение имеет теория точечных множеств для математического анализа и топологии.

1.9 Лекция № 9 (2 часа)

Тема: «Принцип сжатых отображений и его применения»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Принцип сжатых отображений и его простейшие применения.

2. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Принцип сжатых отображений и его простейшие применения.

Принцип сжатых отображений одно из основных положений теории метрических пространств о существовании и единственности неподвижной точки множества при некотором специальном («сжимающем») отображении его в себя. Принцип сжатых отображений применяют главным образом в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Произвольное отображение А метрического пространства М в себя, которое каждой точке x из М сопоставляет некоторую точку y = Ax из М, порождает в пространстве М уравнение: Ax = x.

Действие отображения А на точку x можно интерпретировать как перемещение её в точку y = Ax. Точка x называется неподвижной точкой отображения А, если выполняется равенство Ax = x. Таким образом вопрос о разрешимости уравнения Ax = x является вопросом о нахождении неподвижных точек отображения А.

Отображение А метрического пространства М в себя называется сжатым, если существует такое положительное число $\alpha < 1$, что для любых точек x и y из М выполняется неравенство: $d(Ax, Ay) \le \alpha d(x, y)$, где символ $d(u, \upsilon)$ означает расстояние между точками u и υ метрического пространства М.

Принцип сжатых отображений утверждает, что каждое сжатое отображение полного метрического пространства в себя имеет, и притом только одну, неподвижную точку. Кроме того, для любой начальной точки x_0 из М последовательность $\{x_n\}$, определяемая рекуррентными соотношениями

$x_n = Ax_{n-1}$, n = 1,2,..., имеет своим пределом неподвижную точку x отображения А. При этом справедлива следующая оценка погрешности:

$$d(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, Ax_0)$$

Принцип сжатых отображений позволяет единым методом доказывать важные теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных, интегральных и других уравнений. В условиях применимости принципа сжатых отображений решение может быть с наперёд заданной точностью вычислено последовательных приближений методом.

С помощью определённого выбора полного метрического пространства М и построения отображения А эти задачи сводят предварительно к уравнению Ax = x, а затем находят условия, при которых отображение А оказывается сжатым.

2. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений.

Класс дифференциальных уравнений, который сводится к квадратурам очень узкий. Поэтому часто применяют приближенные методы решения. Но для этого необходимо быть уверенным в существовании решения и его единственности.

Формулировка теоремы для уравнения $y' = f(x,y)$.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике

$$D = \{x_o - a \le x \le x_o + a,\ y_o - b \le y \le y_o + b\}$$

и имеет на нем ограниченную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, т. е. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le N$.

Тогда на отрезке $\sigma = [x_o - \delta, x_o + \delta]$, где $\delta < \min\{a, \dfrac{1}{N}, \dfrac{b}{M}\},\ M = \max|f(x,y)|$ существует и притом единственное непрерывно-дифференцируемое решение дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ (1)

На отрезке σ, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_o) = y_o$.

При этом выполняется неравенство $|y(x) - y_o| \le b$.

Кроме того, если функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные порядка, то решение имеет на σ непрерывные производные до порядка +1 включительно.

Доказательство теоремы основано на так называемом принципе сжимающих отображений в метрических пространствах.

1.10 Лекция № 10 (2 часа)

Тема: «Понятие топологического пространства»

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Определение и примеры.

2. Различные способы задания топологии в пространстве. Метризуемость.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Определение и примеры.

Топологическое пространство — множество с дополнительной структурой определённого типа, является основным объектом изучения раздела геометрии под названием топология.

Исторически понятие топологического пространства появилось как обобщение метрического пространства.

Пусть дано множество X. Система T его подмножеств называется топологией на X, если выполнены следующие условия:

1. Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T,то есть если Uα∈T∀α∈A, то ⋃α∈AUα∈T.
2. Пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T, то есть если Ui∈Ti=1,…,n, то ⋂i=1nUi∈T.
3. X,∅∈T.

Пара (X,T) называется топологическим пространством. Множества, принадлежащие T, называются открытыми множествами.

Множества, дополнительные к открытым, называются замкнутыми.

Всякое открытое множество, содержащее данную точку называется её окрестностью.
Три аксиомы, определяющие общий класс топологических пространств, часто дополняются теми или иными аксиомами отделимости, в зависимости от которых выделяют различные классы топологических пространств, например, тихоновские пространства, хаусдорфовы пространства, регулярные, вполне регулярные, нормальные пространства и другие.

Примеры топологического пространства:

- Связное двоеточие — двуточечное топологическое пространство.
- Вещественная прямая R является топологическим пространством, если, например, назвать открытыми множествами произвольные (пустые, конечные или бесконечные) объединения конечных или бесконечных интервалов. Множество всех конечных
  открытых интервалов {(a,b)|a,b∈R} является базой этой топологии. Это — стандартная топология на прямой. Вообще же на множестве вещественных чисел можно ввести очень разнообразные топологии, например, R→, прямая с «топологией стрелки», где открытые множества имеют вид (a,∞), или топология Зарисского, в которой любое замкнутое множество — это конечное множество точек.
- Вообще, евклидовы пространства Rn являются топологическими пространствами. Базой их стандартной топологии можно выбрать открытые шары или открытые кубы.
- Обобщая далее, всякое метрическое пространство является топологическим пространством, базу топологии которого составляют открытые шары. Таковы, например, изучаемые в функциональном анализе бесконечномерные пространства функций.

Понятие топологии является минимально необходимым для того, чтобы говорить о непрерывных отображениях. Интуитивно непрерывность есть отсутствие разрывов, то есть близкие точки при непрерывном отображении должны переходить в близкие. Оказывается, для определения понятия близости точек можно обойтись без понятия расстояния. Именно это и есть топологическое определение непрерывного отображения.
Отображение топологических пространств f:(X,TX)→(Y,TY) называется непрерывным, если прообраз всякого открытого множества открыт.

2. Различные способы задания топологии в пространстве. Метризуемость.

Задание топологии с помощью базы или предбазы

Не всегда удобно перечислять все открытые множества. Часто удобнее указать некоторый меньший набор открытых множеств, который порождает их все. Формализацией этого является понятие базы топологии.

Подмножество топологии B⊂T называется базой топологии, если всякое открытое множество представляется как объединение множеств из B, то есть

∀U∈T∃{Uα}α∈A⊂B:U=⋃α∈AUα.

Еще более экономный способ задания топологии состоит в задании её предбазы — множества, которое становится базой, если к нему прибавить произвольные конечные пересечения его элементов. Для того, чтобы систему множеств P можно было объявить предбазой топологии, необходимо и достаточно, чтобы она покрывала всё множество X.
Наиболее часто предбазы используются для задания топологии, индуцированной на X семейством отображений.

Индуцированная топология

Пусть f:X→Y — произвольное отображение, множества X в топологическое пространство Y. Индуцированная топология даёт естественный способ введения топологии на X. За открытые множества в X берутся всевозможные прообразы открытых множеств в Y; то есть U∈X открыто, если существует открытое V∈Yтакое что U=f−1V.

Задание топологии с помощью замкнутых множеств

Множество F⊂X называется замкнутым, если его дополнение U=X∖F — открытое множество. Задать топологию на X системой замкнутых множеств — значит предъявить систему P подмножеств X со свойствами:

1. Система P замкнута относительно операции пересечения множеств (в том числе бесконечных семейств): ∀α∈AFα∈P⇒⋂α∈AFα∈P
2. Система P замкнута относительно операции объединения множеств (в конечном количестве): F1,F2∈P⇒F1∪F2∈P
3. Множества X,∅ включены в систему P.

Если система множеств с такими свойствами задана, с помощью операции дополнения строится система Т открытых множеств, задающая топологию на X.

$T=\{X\setminus F:F\in P\}$.

Пример Пусть B — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Спектром кольца B называется множество $X=\mathrm{Spec}B$ всех его простых идеалов. На множестве X топология вводится с помощью системы замкнутых множеств: пусть a — произвольный идеал кольца B (не обязательно простой), тогда ему соответствует множество

$V(a)=\{p\in X:a\subset p\}$.

Все множества такого вида образуют систему множеств, удовлетворяющую перечисленным аксиомам, так как $\bigcap_{\alpha\in A}V(a_\alpha)=V(\sum_{\alpha\in A}a_\alpha)$, $V(a)\cup V(b)=V(a\cdot b)$, $V((0))=X$, $V((1))=\emptyset$.

Спектр кольца — фундаментальный объект алгебраической геометрии.

Метризуемое пространство - топологическоепространство, гомеоморфное некоторому метрическому пространству.
Иначе говоря, пространство, топологиякоторого порождается некоторой метрикой.
Если такая метрика существует, то она не единственна — за исключением тривиальных случаев: когда пространство пусто или состоит лишь из одной точки.
Например, топология каждого метризуемого пространства порождается некоторой ограниченной метрикой.

Необходимые условия метризуемости:

- В метризуемом пространстве выполняются сильные аксиомы отделимости: они нормальны и даже коллективно нормальны.
- Каждое метризуемое пространство паракомпактно.
- Все метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счётности.
- Для любого метризуемого пространства совпадают число Суслина, число Линделёфа, плотность, спред, экстент, вес.

Достаточное условие метризуемости:
Каждое нормальное пространство (и даже каждое регулярное пространство) со счётной базой метризуемо.

Метризационные критерии достигают простоты в ряде специальных классов пространств. Так, для метризуемости компакта X любое из следующих трёх условий необходимо и достаточно:

- X обладает счетной базой;
- X обладает точечно-счетной базой;
- в X есть счётная сеть;

1.11 Лекция № 11 (2 часа)

Тема: «Компактность»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Понятие компактности. Счетная компактность.
2. Относительно компактные множества.
3. Компактность в метрических пространствах.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Понятие компактности. Счетная компактность.

Компактность – свойство топологического пространства, состоящее в том, что каждое бесконечное его подмножество имеет предельную точку.

Компактное пространство — определённый тип топологических пространств, обобщающий свойства ограниченности и замкнутости в евклидовых пространствах на произвольные топологические пространства.

Компактное пространство — топологическое пространство, в любом покрытии которого открытыми множествами найдётся конечное подпокрытие.

Свойства, равносильные компактности:

- Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда каждое центрированное семейство замкнутых множеств, то есть семейство, в котором пересечения конечных подсемейств не пусты, имеет непустое пересечение.
- Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда каждая направленность в нём имеет предельную точку.
- Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда каждый фильтр в нём имеет предельную точку.
- Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда каждый ультрафильтр сходится по крайней мере к одной точке.
- Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда в нём всякое бесконечное подмножество имеет хотя бы одну точку полного накопления вX .

Другие общие свойства:

- Для любого непрерывного отображения образ компакта — компакт.
- Теорема Вейерштрасса. Любая непрерывная вещественная функция на компактном пространстве ограниченна и достигает своих наибольших и наименьших значений.
- Замкнутое подмножество компакта компактно.
- Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.
- Хаусдорфово пространство компактно тогда и только тогда, когда оно регулярно и H-замкнуто.
- Хаусдорфово пространство компактно тогда и только тогда, когда каждое его замкнутое подмножество H-замкнуто.
- Теорема Тихонова: произведение произвольного (необязательно конечного) множества компактных множеств (с топологией произведения) компактно.

Свойства компактных метрических пространств:

- Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность точек в нём содержит сходящуюся подпоследовательность.
- Теорема Хаусдорфа о компактности даёт необходимые и достаточные условия компактности множества в метрическом пространстве.
- Для конечномерных евклидовых пространств подпространство является компактом тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто. Про пространства, обладающие таким свойством, говорят, что они удовлетворяют свойству Гейне — Бореля.
- Лемма Лебега: для любого компактного метрического пространства и открытого покрытия {Vα}, α∈A существует положительное число r такое, что любое подмножество, диаметр которого меньше r, содержится в одном из множеств Vα. Такое число r называется числом Лебега.

Бикомпактное пространство — понятие, введённое Александровым в усиление определённого Морисом Фреше понятия компактного пространства: топологическое пространство компактно — в первоначальном смысле слова — если в каждом счётном открытом покрытии этого пространства содержится его конечное подпокрытие. Однако дальнейшее развитие математики показало, что понятие бикомпактности настолько важнее первоначального понятия компактности, что в настоящее время под компактностью понимают именно бикомпактность, а компактные в старом смысле пространства называют счётно-компактными. Оба понятия равносильны в применении к метрическим пространствам.

2. Относительно компактные множества.

Множество называется **относительно компактным** или **предкомпактным**, если его замыкание компактно. Понятие предкомпактности, введенное для подмножеств топологического пространства, применимо, в частности, к подмножествам метрического пространства. При этом очевидно, понятие счетной предкомпактности совпадает здесь с понятием предкомпактности.

Теорема1. Для того чтобы множество M , лежащее в полном метрическом пространстве R, было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным. **Теорема Арцела.** Для множеств в конкретных пространствах полезно иметь специальные критерии компактности. В конечномерных пространствах предкомпактность множеств равносильна их ограниченности. Однако для более общих метрических пространств это уже неверно.

3. Компактность в метрических пространствах.

Поскольку метрические пространства – частный случай топологических пространств, то все определения и факты, изложенные выше применительно к топологическим пространствам, остаются в силе.

В метрических пространствах компактность тесно связана с понятием полной ограниченности.

Определение 1. Пусть M – некоторое множество в метрическом пространстве R и ε – некоторое положительное число. Множество A из R называется ε – сетью для M, если для любой точки $x \in M$ найдется хотя бы одна точка $a \in A$ такая, что $\rho(x,a) \le \varepsilon$.

Множество A не обязано содержаться в M и может даже не иметь с M ни одной общей точки. Однако, имея для M некоторую ε – сеть A, можно построить 2ε – сеть $B \subset M$ (т.е. 2ε – сеть, состоящую из точек множества M).

Пример 1. Точки с целочисленными координатами образуют на плоскости $1/\sqrt{2}$ – сеть.

Пример 2. Точки с рациональными координатами образуют на плоскости ε – сеть при любом $\varepsilon > 0$.

Определение 2. Множество M из метрического пространства R называется вполне ограниченным, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε – сеть (т.е. ε – сеть, состоящая из конечного числа точек).

Пример 3. В n – мерном евклидовом пространстве полная ограниченность совпадает с обычной ограниченностью, т.е. с возможностью заключить данное множество в достаточно большой куб. Действительно, если разбить этот куб на кубики с ребром ε, то вершины этих кубиков образуют $(\sqrt{n}/2)\cdot\varepsilon$ – сеть в исходном кубе, а значит и в исходном множестве.

К**омпактность и полная ограниченность.**

Теорема 1. Если метрическое пространство R счетно-компактно, то оно вполне ограничено.

Следствие 1. Всякое счетно-компактное метрическое пространство компактно.

Мы показали, что полная ограниченность есть *необходимое* условие компактности метрического пространства. Но это условие не*достаточно.*

Пример. Совокупность рациональных точек отрезка [0,1] с обычным определением расстояния между ними есть вполне ограниченное, но не компактное пространство: последовательность точек этого пространства

$$0;\ \ 0{,}4;\ \ 0{,}41;\ \ 0{,}414;\ \ 0{,}4142;\ \ldots$$

т.е. последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}-1$, не имеет в нем предельной точки. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы метрическое пространство R было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было одновременно: вполне ограниченным, полным.

1.12 Лекция № 12 (2 часа)

Тема: «Линейные пространства»

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Определение и примеры.

2. Линейная зависимость.

3. Факторпространства.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Определение и примеры.

Линейное векторное пространство — это математическая структура, которая формируется набором элементов, называемых векторами, для которых определены операции сложения друг с другом и умножения на число — скаляр. Введённые операции подчинены восьми аксиомам. Скаляром может являться элемент вещественного, комплексного или любого другого поля чисел.

Частным случаем векторов подобного пространства являются обычные евклидовы вектора, которые используются, к примеру, для демонстрации физических сил. При этом следует отметить, что вектор как элемент векторного пространства не обязательно должен быть представлен в качестве направленного отрезка.

Обобщение понятия «вектор» до элемента векторного пространства любой природы не только не вызывает смешения терминов, но и позволяет уяснить или даже предвидеть ряд результатов, справедливых для пространств произвольной природы.

Векторные пространства являются предметом изучения линейной алгебры.

Методология данного раздела математики позволила подробно изучить такого рода структуру через призму одной из главных её характеристик — размерности векторного пространства.

Размерность представляет собой максимальное число линейно независимых элементов пространства, то есть, прибегая к геометрической частности, число направлений, невыразимых друг через друга посредством только операций сложения и умножения на скаляр.

Векторное пространство можно наделить дополнительными структурами, например, нормой или скалярным произведением. Подобные пространства естественным образом появляются в математическом анализе, преимущественно в виде бесконечномерных функциональных пространств, где в качестве векторов выступают функции. Некоторые проблемы анализа требуют выяснить, сходится ли последовательность векторов к данному вектору. Решение таких вопросов достигается при рассмотрении векторных пространств с дополнительной структурой, в большинстве случаев — подходящей топологией, что позволяет обратиться к проблемам близости и непрерывности. Такие топологические векторные пространства, в частности, банаховы и гильбертовы, допускают более глубокое изучение.

Кроме векторов, линейная алгебра изучает также тензоры более высокого ранга (скаляр считается тензором ранга 0, вектор — тензором ранга 1).

Первые труды, предвосхитившие открытие векторных пространств, относятся к XVII веку. Именно тогда своё развитие получили аналитическая геометрия, учения о матрицах, системах линейных уравнений, евклидовых векторах.

Линейное, или **векторное пространство** $V(F)$ над полем F — это упорядоченная четвёрка $(V,F,+,\cdot)$, где

V — непустое множество элементов произвольной природы, которые называются **векторами**;

F — (алгебраическое) поле, элементы которого называются **скалярами**;

$+: V\times V\to V$ — операция сложения векторов, сопоставляющая каждой паре элементов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ множества V единственный элемент множества V, обозначаемый $\mathbf{x}+\mathbf{y}$;

$\cdot: F\times V\to V$ — операция умножения векторов на скаляры, сопоставляющая каждому элементу λ поля F и каждому элементу $\mathbf{x}$ множества V единственный элемент множества V, обозначаемый $\lambda\mathbf{x}$;

причём, заданные операции удовлетворяют следующим аксиомам — аксиомам линейного (векторного) пространства:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$, для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ (*коммутативность сложения*);
2. $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$, для любых $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$ (*ассоциативность сложения*);
3. существует такой элемент $\theta\in V$, что $\mathbf{x}+\theta=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in V$ (*существование нейтрального элемента относительно сложения*), в частности V не пусто;
4. для любого $\mathbf{x}\in V$ существует такой элемент $-\mathbf{x}\in V$, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\theta$ (*существование противоположного элемента относительно сложения*).
5. $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ (*ассоциативность умножения на скаляр*);
6. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (*унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля F сохраняет вектор*).
7. $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ (*дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения скаляров*);
8. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$(*дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов*).

Таким образом, операция сложения задаёт на множестве V структуру (аддитивной) абелевой группы. Векторные пространства, заданные на одном и том же множестве элементов, но над различными полями, будут различными векторными пространствами.

В соответствии с этим, теория линейных (векторных) пространств разделяется на две различные части: теорию конечномерных пространств, в которой существенным оказывается алгебраический аспект, и теорию бесконечномерных пространств, где главным оказывается аспект анализа — вопрос о разложимости данного элемента по заданной бесконечной системе функций.

Простейшие свойства:

1. Векторное пространство является абелевой группой по сложению.
2. Нейтральный элемент $\theta \in V$ является единственным, что вытекает из групповых свойств.
3. $0 \cdot \mathbf{x} = \theta$ для любого $\mathbf{x} \in V$.
4. Для любого $\mathbf{x} \in V$ противоположный элемент $-\mathbf{x} \in V$ является единственным, что вытекает из групповых свойств.
5. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V$.
6. $(-\alpha)\mathbf{x} = \alpha(-\mathbf{x}) = -(\alpha\mathbf{x})$ для любых $\alpha \in F$ и $\mathbf{x} \in V$.
7. $\alpha \cdot \theta = \theta$ для любого $\alpha \in F$.

Примеры*:*

- Нулевое пространство, единственным элементом которого является ноль.
- Пространство всех функций $X \to F$ с конечным носителем образует векторное пространство размерности равной мощности X.
- Поле действительных чисел может быть рассмотрено как континуально-мерное векторное пространство над полем рациональных чисел.
- Любое поле является одномерным пространством над собой.

2. Линейная зависимость.

Линейная зависимость - соотношение вида $C_{11}u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n = 0$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля, а $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — те или иные математические объекты, для которых определены операции сложения и умножения на число.

В соотношение вида $C_{11}u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n = 0$ объекты $u_1, u_2, \ldots, u_n$ входят в 1-й степени, т. е. линейно; поэтому описываемая этим соотношением зависимость между ними называется линейной. Знак равенства в формуле вида $C_{11}u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n = 0$ может иметь различный смысл и в каждом конкретном случае должен быть разъяснён. Понятие линейная зависимость употребляется во многих разделах математики.

Так, можно говорить о линейной зависимости между векторами, между функциями от одного или нескольких переменных, между элементами линейного пространства и т. д. Если между объектами $u_1, u_2, \ldots, u_n$ имеется линейная зависимость, то говорят, что эти объекты линейно зависимы; в противном случае их называется линейно независимыми. Если объекты $u_1, u_2, \ldots, u_n$ линейно зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных, т. е.

$$u_1 = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{i-1}u_{i-1} + \alpha_{i+1}u_{i+1} + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Линейные формы от m переменных $u_1 = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются линейно зависимыми, если существует соотношение вида $C_{11}u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n = 0$, в котором знак равенства понимается как тождество относительно всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Для того чтобы n линейных форм от n переменных были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\,a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Факторпространства.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$. Тогда множество всех классов эквивалентности называется **фактормножеством** и обозначается $X/\sim$. Разбиение множества на классы эквивалентных элементов называется его **факторизацией**.

Факторизацию множества разумно применять для получения нормированных пространств из полунормированных, пространств со скалярным произведением из пространств с почти скалярным произведением . Для этого вводится соответственно норма класса, равная норме произвольного его элемента, и скалярное произведение классов как скалярное произведение произвольных элементов классов.

В свою очередь отношение эквивалентности вводится следующим образом (например для образования нормированного факторпространства): вводится подмножество исходного полунормированного пространства, состоящее из элементов с нулевой полунормой (кстати, оно линейно, то есть является подпространством) и считается, что два элемента эквивалентны, если разность их принадлежит этому самому подпространству.

Если для факторизации линейного пространства вводится некоторое его подпространство и считается, что если разность двух элементов исходного пространства принадлежит этому подпространству, то эти элементы эквивалентны, то фактормножество является линейным пространством и называется факторпространством.

1.13 Лекция № 13 (2 часа)

Тема: «Нормированные пространства»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Определение и примеры.

2. Подпространства нормированных пространств.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Определение и примеры.

Нормированным векторным пространством называется векторное пространство с заданной на нем **нормой**.

Более точно, для векторного пространства X задано отображение из X в R, такое что выполняются следующие свойства:

1. $\|x\|\geqslant 0, \|x\|=0 \Rightarrow x=0$ (норма нулевого вектора равна нулю)

2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ (норма произведения вектора на скаляр равна произведению модуля скаляра и нормы вектора)

3. $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ (**неравенство треугольника**: Норма суммы векторов не превосходит суммы их норм)

Как можно понять из определения, норма является естественным обобщением понятия длины вектора в евклидовом пространстве.

Полунормированным векторным пространством называется пара (V,p), где V — векторное пространство, а p — полунорма в V.

Нормированным векторным пространством называется пара $(V,\|\cdot\|)$, где V — векторное пространство, а $\|\cdot\|$ — норма в V.

Часто обозначение p и $\|\cdot\|$ опускают и пишут просто V, если из контекста ясно, какая норма или полунорма имеется в виду.

В нормированном пространстве $d(x,y)=\|x-y\|$ определяет метрику.

Свойства метрики и связь с нормой в нормированном пространстве:

1. если $d(x,y)=0$, то есть $\|x-y\|=0$, то $x=y$

2. $d(x,y)=\|x-y\|=\|y-x\|=d(y,x)$

3. $d(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$

(это обычные свойства нормы и метрики и их связь в нормированных пространствах.)

Метрика в нормированных пространствах обладает двумя дополнительными свойствами:

4. $d(x,y)=d(x+z,y+z)$ (инвариантность относительно сдвига)

5. $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\cdot d(x,y)$ (положительная однородность)

Для любого полунормированного векторного пространства мы можем задать расстояние между двумя векторами **u** и **v** как $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

Такое полунормированное пространство с определённым таким образом расстоянием называется полунормированным метрическим пространством, в котором мы можем определить такие понятия как непрерывность и сходимость.

Особый интерес представляют полные нормированные пространства, называемые банаховыми пространствами. Любое нормированное векторное пространство V

находится как плотное подпространство внутри банахова пространства, а это банахово пространство однозначно определяется пространством *V* и называется пополнением пространства *V*.

Все нормы в конечномерном векторном пространстве эквивалентны с топологической точки зрения, так как они порождают одну и ту же топологию. А так как любое евклидово пространство полно, мы можем сделать вывод, что все конечномерные векторные пространства являются банаховыми пространствами.

2. Подпространства нормированных пространств.

Непустое подмножество L' линейного пространства L называется **подпространством**, если оно является пространством по отношению к операциям сложения и умножения на число, определённых в исходном пространстве L. Другими словами, L' является подпространством L, если для любых чисел α и β:

$$x, y \in L' \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L'.$$

Любое пространство можно считать своим подпространством. Кроме того, любое пространство содержит подпространство состоящее из одного — нулевого — элемента (так называемое **нулевое подпространство**). Подпространство, отличное от всего пространства и содержащее хотя бы один ненулевой элемент, называется **собственным**.

Пересечение двух подпространств L_1 и L_2 линейного пространства L также является подпространством этого пространства.

По индукции можно доказать, что пересечение любого количества подпространств является подпространством.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольное непустое множество элементов линейного пространства L. Наименьшее подпространство пространства L, содержащее $\{x_n\}$ называется **линейной оболочкой** множества $\{x_n\}$ и обозначается $L(\{x_n\})$.

Линейным замыканием системы элементов $\{x_n\}$ или **подпространством** нормированного пространства, порождённым системой элементов $\{x_n\}$, называется наименьшее замкнутое подпространство, содержащее все элементы данной системы.

Произвольную (то есть не обязательно замкнутую) совокупность элементов, содержащую вместе с x и y произвольную их линейную комбинацию $ax + by$ будем называть **линейным многообразием**.

Система элементов нормированного пространства R называется **полной**, если её линейное замыкание есть само R.

1.14 Лекция № 14 (2 часа)

Тема: «Евклидовы пространства»

1.14.1 Вопросы лекции:

1. Определение и примеры.
2. Ортогонализация. Неравенство Бесселя.
3. Полные евклидовы пространства.
4. Характеристическое свойство евклидовых пространств

2. Краткое содержание вопросов:

1. Определение и примеры.

Евклидово пространство (также **Эвклидово пространство**) — в изначальном смысле, пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В этом случае предполагается, что пространство имеет размерность равную 3.

В современном понимании, в более общем смысле, может обозначать один из сходных и тесно связанных объектов: конечномерное вещественное векторное пространство R*n* с введённым на нём положительно определённым скалярным произведением, либо метрическое пространство, соответствующее такому векторному пространству.

n-мерное евклидово пространство обозначается E^n, также часто используется обозначение R^n (если из контекста ясно, что пространство обладает евклидовой структурой).

Для определения евклидова пространства проще всего взять в качестве основного понятие скалярного произведения. Евклидово векторное пространство определяется как конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел, на векторах которого задана вещественнозначная функция $(\cdot,\cdot)$,обладающая следующими тремя свойствами:

- Билинейность: для любых векторов u,v,w и для любых вещественных
- чисел a,b $(au+bv,w)=a(u,w)+b(v,w)$ и $(u,av+bw)=a(u,v)+b(u,w)$;
- Симметричность: для любых векторов u,v $(u,v)=(v,u)$;
- Положительная определённость: для любого u $(u,u)\geqslant 0$, причём $(u,u)=0\Rightarrow u=0$.

Аффинное пространство, соответствующее такому векторному пространству, называется евклидовым аффинным пространством, или просто евклидовым пространством.

Пример евклидова пространства — координатное пространство R^n, состоящее из всевозможных n-ок вещественных чисел $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, скалярное произведение в котором определяется формулой $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$.

Заданного на евклидовом пространстве скалярного произведения достаточно для того, чтобы ввести геометрические понятия длины и угла. Длина вектора u определяется как $\sqrt{(u,u)}$ и обозначается $|u|$. Положительная определённость скалярного произведения гарантирует, что длина ненулевого вектора ненулевая, а из билинейности следует, что $|au|=|a||u|$, то есть длины пропорциональных векторов пропорциональны.

Угол между векторами u и v определяется по формуле $\varphi=\arccos\left(\frac{(x,y)}{|x||y|}\right)$. Из теоремы косинусов следует, что для двумерного евклидова пространства (евклидовой плоскости) данное определение угла совпадает с обычным. Ортогональные вектора, как и в трёхмерном пространстве, можно определить как вектора, угол между которыми равен $\frac{\pi}{2}$.

2. Ортогонализация. Неравенство Бесселя.

Ортогонализация — это процесс построения ортонормированной системы на основе линейно независимой системы векторов.

Теорема 1 (Об ортогонализации). Рассмотрим линейно независимую систему

$f_1, \dots, f_n, \dots$ элементов сепарабельного евклидова пространства R.

В пространстве R существует ортогональная система элементов

$\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$, причём каждый элемент ϕ_n есть линейная комбинация вида

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n,\ a_nn \neq 0,$$

каждый элемент f_n представляется в виде

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + \dots + b_{nn}\phi_n,\ b_nn \neq 0,$$

при этом, каждый элемент ϕ_n определяется с точностью до множителя ± 1. (б/д)

В математике **неравенство Бесселя** — утверждение о коэффициентах элемента x в гильбертовом пространстве касательно ортонормированной последовательности.

Пусть H — гильбертово пространство, и $e_1,e_2,\dots$ — ортонормированная последовательность элементов H. Тогда для произвольного $x\in H$ выполняется неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\le\|x\|^2$$

где $<\cdot,\cdot>$ обозначает скалярное произведение в пространстве H. Неравенство Бесселя следует из следующего равенства:

$$0\le\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2=\|x\|^2-2\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2,$$

которое выполняется для произвольного $n\ge 1$.

3. Полные эвклидовы пространства.

Гильбертово пространство — обобщение евклидова пространства, допускающее бесконечную размерность. Названо в честь Давида Гильберта.

Важнейшим объектом исследования в гильбертовом пространстве являются линейные операторы. Само понятие гильбертова пространства сформировалось в работах Гильберта и Шмидта по теории интегральных уравнений, а абстрактное определение было дано в работах фон Неймана, Риса и Стоуна по теории эрмитовых операторов.

Гильбертовы пространства это полные эвклидовы пространства. Гильбертово пространство — линейное (векторное) пространство (над полем вещественных или комплексных чисел), в котором для любых двух элементов пространства x и y определено скалярное произведение (x,y) и полное относительно порождённой скалярным произведением метрики $d(x,y)=||x-y||=(x-y,x-y)\surd$.

Если условие полноты пространства не выполнено, то говорят о предгильбертовом пространстве.

Однако, большинство из известных (используемых) пространств либо являются полными, либо могут быть пополнены.

Таким образом, гильбертово пространство есть банахово пространство (полное нормированное пространство), норма которого порождена положительно определённым скалярным произведением и определяется как $||x||=(x,x)\surd$

Норма в произвольном нормированном пространстве может порождаться некоторым скалярным произведением тогда и только тогда, когда выполнено следующееравенство (тождество) параллелограмма:

$(\forall x,y\in H)\|x+y\|2+\|x-y\|2=2(\|x\|2+\|y\|2)$.

Если удовлетворяющее тождеству параллелограмма банахово пространство является вещественным, то отвечающее его норме скалярное произведение задаётся равенством

$(x,y)=\|\|\|x+y2\|\|\|2-\|\|x-y2\|\|2$.

Если это пространство является комплексным, то отвечающее его норме скалярное произведение задаётся равенством

$(x,y)=\|\|\|x+y2\|\|\|2-\|\|x-y2\|\|2+i\|\|\|x+iy2\|\|\|2-i\|\|\|x-iy2\|\|\|2$ (поляризационное тождество).

В гильбертовом пространстве важное значение имеет неравенство Коши — Буняковского:

$|(x,y)|\leqslant||x||||y||$.

Следовательно, $-1\leqslant(x,y)||x||||y||\leqslant1$.

Это позволяет интерпретировать данное отношение как косинус угла между элементами и, в частности, ввести понятие ортогональных элементов: два элемента гильбертова пространства **ортогональны**, если их скалярное произведение равно нулю $(x,y)=0$. Для обозначения ортогональности элементов используется символ $\perp$. Два подмножества M и N гильбертова пространства ортогональны $(M\perp N)$, если любые два элемента $f\in M$, $g\in N$ ортогональны.

Для попарно ортогональных векторов справедлива теорема Пифагора (обобщённая):

$||\sum ixi||2=\sum i||xi||2/$

Множество всех элементов пространства, ортогональных некоторому подмножеству A, является замкнутым линейным многообразием (подпространством) и называется ортогональным дополнением этого множества.

Подмножество элементов называется **ортонормированной системой,** если любые два элемента множества ортогональны и норма каждого элемента равна единице.

Система векторов гильбертова пространства является **полной,** если она порождает всё пространство, то есть если произвольный элемент пространства может быть сколь угодно точно приближен по норме линейными комбинациями элементов этой системы. Если в пространстве существует счётная полная система элементов, то пространство является **сепарабельным** — то есть имеется счётное всюду плотное множество, замыкание которого по метрике пространства совпадает со всем пространством.

Данная полная система {ei} является базисом, если каждый элемент пространства можно представить как линейную комбинацию элементов этой системы и притом однозначно.

Все ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве имеют одинаковую мощность, что позволяет определить размерность гильбертова пространства как размерность произвольного ортонормированного базиса (ортогональная размерность). Гильбертово пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда имеет счётную размерность.

4. Характеристическое свойство эвклидовых пространств.

Свойства:

1. теорема косинусов легко выводится с использованием скалярного произведения:

$$|BC|^2=\vec{BC}^2=(\vec{AC}-\vec{AB})^2=\langle\vec{AC}-\vec{AB},\vec{AC}-\vec{AB}\rangle=\vec{AC}^2+\vec{AB}^2-2\langle\vec{AC},\vec{AB}\rangle=|AB|^2+|AC|^2-2|AB||AC|\cos\hat{A}$$

2. Угол между векторами:

$$\alpha=\arccos\frac{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{\sqrt{\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle\langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle}}$$

3. Оценка угла между векторами:

в формуле $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ знак определяется только косинусом угла (нормы векторов всегда положительны). Поэтому скалярное произведение > 0, если угол между векторами острый, и < 0, если угол между векторами тупой.

4. Проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление, определяемое единичным вектором $\mathbf{e}$:

$a_e = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{e}|\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{e}) = |\mathbf{a}|\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{e})$, так как $|\mathbf{e}| = 1$

5. условие ортогональности (перпендикулярности) векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$

6. Площадь параллелограмма, натянутого на два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равна

$\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}$

Теорема. Для того, чтобы нормированное пространство R было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов этого пространства: f и g — выполнялось равенство

$$||f + g||^2 + ||f - g||^2 = 2\left(||f||^2 + ||g||^2\right).$$

.

Если рассматривать вектора f и g как стороны параллелограмма, то $f + g$ и $f - g$ — это диагонали параллелограмма. Тогда теорема выражает известное свойство параллелограмм: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме длин всех его сторон.

1.15 Лекция № 15 (2 часа)

Тема: «Обзорная»

1.15.1 Вопросы лекции:

1. Элементы теории множеств.

2. Отношения. Функции. Алгебраические структуры.

3. Метрические и топологические пространства.

4. Нормированные и топологические линейные пространства.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Элементы теории множеств.

Множество — одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и логики. Понятие множества обычно принимается за одно из исходных (аксиоматических) понятий, то есть несводимое к другим понятиям, а значит, и не имеющее определения; для его объяснения используются описательные формулировки, характеризующие множество как совокупность различных элементов, мыслимую как единое целое.

Основатель теории множеств Георг Кантор (1845 –1918) выразил это следующими словами: «Множество есть многое, мыслимое, как единое». Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его **элементами**.

Диаграммы Эйлера-Венна заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

Основные операции над множествами:

1.Пересечение;

2.Объединение;

3.Разность.

Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих.

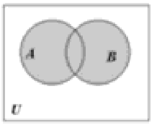


Рис. 1.

Определение. Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B (рис. 1):

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

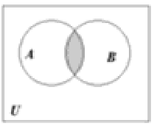


Рис. 2.

Определение. Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A, так и множеству B (рис. 2):

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

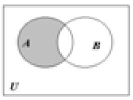


Рис. 3.

Определение. Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B (рис. 3):

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

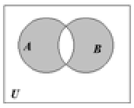


Рис. 4.

Определение. Симметрической разностью множеств A и B называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству A, либо только множеству B (рис. 4):

$A + B = \{x \mid \text{либо } x \in A, \text{ либо } x \in B\}$.

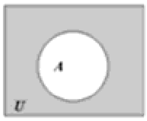


Рис. 5.

Определение. Абсолютным дополнением множества A называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству A (рис. 5):

$\overline{A} = U \setminus A$.

2. Отношения. Функции. Алгебраические структуры

Группой называется моноид G, все элементы которого обратимы. Иначе, множество G – группа с внутренней бинарной ассоциативной операцией *, относительно которой в G имеется единица и для каждого элемента имеется обратный. Группу можно рассматривать как унипотентную полугруппу. Действительно, если в группе i*i=i, то умножив обе части на i-1, получаем i=e. Группу с коммутативной операцией называют **коммутативной** или **абелевой**.

Примеры групп:

а) множество R действительных чисел относительно сложения и множество R{0} относительно умножения;

б) множество Z целых чисел относительно сложения;

в) множество Q рациональных чисел относительно сложения и множество Q{0} относительно умножения.

Кольцо — это множество R, на котором заданы две бинарные операции: $+$ и $\times$ (называемые сложение и умножение), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in R$:

7. $a + b = b + a$ — коммутативность сложения;
8. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность сложения;
9. $\exists 0 \in R \ (a + 0 = 0 + a = a)$ — существование нейтрального элемента относительно сложения;
10. $\forall a \in R \ \exists b \in R \, (a + b = b + a = 0)$ — существование противоположного элемента относительно сложения;
11. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ — ассоциативность умножения;

12. $\begin{cases} a \times (b+c) = a \times b + a \times c \\ (b+c) \times a = b \times a + c \times a \end{cases}$ — дистрибутивность.

Кольцо — это множество R, на котором заданы две бинарные операции: $+$ и $\times$ (называемые сложение и умножение), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in R$:

13. $a + b = b + a$ — коммутативность сложения;
14. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность сложения;
15. $\exists 0 \in R \ \ (a + 0 = 0 + a = a)$ — существование нейтрального элемента относительно сложения;
16. $\forall a \in R \ \exists b \in R \, (a + b = b + a = 0)$ — существование противоположного элемента относительно сложения;
17. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ — ассоциативность умножения;
18. $\begin{cases} a \times (b+c) = a \times b + a \times c \\ (b+c) \times a = b \times a + c \times a \end{cases}$ — дистрибутивность.

3. Метрические и топологические пространства.

Топологическое пространство — множество с дополнительной структурой определённого типа, является основным объектом изучения раздела геометрии под названием топология.
Исторически понятие топологического пространства появилось как обобщение метрического пространства.
Пусть дано множество X. Система T его подмножеств называется топологией на X, если выполнены следующие условия:

1. Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T,то есть если Uα∈T∀α∈A, то ⋃α∈AUα∈T.
2. Пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T, то есть если Ui∈Ti=1,…,n, то ⋂i=1nUi∈T.
3. X,∅∈T.

Метрическим пространством называется множество, в котором определено расстояние между любой парой элементов. Морис Фреше впервые ввёл понятие метрического пространства в связи с рассмотрением функциональных пространств.
Метрическое пространство есть пара $(X,\ d)$, где X — множество, а d — числовая функция, которая определена на декартовом произведении $X \times X$, принимает значения в множестве вещественных чисел такая, что

4. $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества).
5. $d(x,\ y) = d(y,\ x)$ (аксиома симметрии).
6. $d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$ (аксиома треугольника).

При этом

- множество X называется подлежащим множеством метрического пространства.
- элементы множества X называются точками метрического пространства.
- функция d называется метрикой.

4. Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейное векторное пространство — это математическая структура, которая формируется набором элементов, называемых векторами, для которых определены операции сложения друг с другом и умножения на число — скаляр. Введённые операции подчинены восьми аксиомам. Скаляром может являться элемент вещественного, комплексного или любого другого поля чисел.
Линейное, или **векторное пространство** $V(F)$ над полем F — это упорядоченная четвёрка $(V,F,+,\cdot)$, где
V — непустое множество элементов произвольной природы, которые называются **векторами**;
F — (алгебраическое) поле, элементы которого называются **скалярами**;

$+: V\times V\to V$ — операция сложения векторов, сопоставляющая каждой паре элементов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ множества V единственный элемент множества V, обозначаемый $\mathbf{x}+\mathbf{y}$;
$\cdot: F\times V\to V$ — операция умножения векторов на скаляры, сопоставляющая каждому элементу λ поля F и каждому элементу $\mathbf{x}$ множества V единственный элемент множества V, обозначаемый $\lambda\mathbf{x}$;
причём, заданные операции удовлетворяют следующим аксиомам — аксиомам линейного (векторного) пространства:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$, для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ (*коммутативность сложения*);
2. $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$, для любых $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$ (*ассоциативность сложения*);
3. существует такой элемент $\theta\in V$, что $\mathbf{x}+\theta=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in V$ (*существование нейтрального элемента относительно сложения*), в частности V не пусто;
4. для любого $\mathbf{x}\in V$ существует такой элемент $-\mathbf{x}\in V$, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\theta$ (*существование противоположного элемента относительно сложения*).
5. $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ (*ассоциативность умножения на скаляр*);
6. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (*унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля F сохраняет вектор*).
7. $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ (*дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения скаляров*);
8. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$(*дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов*).

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № 1 (2 часа).

Тема: «Основные принципы и этапы построения математической модели»

2.1.1 Цель работы: сформулировать основные принципы математического моделирования и этапы построения математической модели; получить представление о видах погрешностей в инженерных исследованиях и возможностях их оценки

2.1.2 Задачи работы:

1. Математическая модель: отличия от иных моделей, принципы математического моделирования.
2. Погрешности: виды, оценки. Устранимые и неустранимые погрешности.
3. Этапы математического моделирования.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.1.4 Описание (ход) работы:

Моде́ль (фр. *modèle*, от лат. *modulus* — «мера, аналог, образец») — это система, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе; представление некоторого реального процесса, устройства или концепции.
Модель - абстрактное представление реальности в какой-либо форме (математической, физической, символической, графической или дескриптивной), предназначенное для представления определенных аспектов этой реальности и позволяющее получить ответы на изучаемые вопросы.
Термином моделирование обозначают как построение (создание) моделей, так и их исследование.

Математическая модель — приближенное описание объекта моделирования, выраженное с помощью математической символики, которое представляет собой совокупность трех компонентов:
- система допущений (ограничений);
- математическое выражение;
-возможность верификации.

Погрешности измерений.

Абсолютная погрешность– это значение, вычисляемое как разность между значением величины, полученным в процессе измерений, и настоящим (действительным) значением данной величины.Абсолютная погрешность вычисляется по следующей формуле:

$\Delta Q_n = Q_n - Q_0$,

где AQ_n – абсолютная погрешность;

Q_n – значение некой величины, полученное в процессе измерения;

Q_0 – значение той же самой величины, принятое за базу сравнения (настоящее значение).

Относительная погрешность– это число, отражающее степень точности измерения.

Относительная погрешность вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{100\Delta Q}{Q_0},$$

где ΔQ – абсолютная погрешность;

Q_0 – настоящее (действительное) значение измеряемой величины.

Относительная погрешность выражается в процентах.

Приведенная погрешность– это значение, вычисляемое как отношение значения абсолютной погрешности к нормирующему значению.

Инструментальная погрешность– это погрешность, возникающая из-за допущенных в процессе изготовления функциональных частей средств измерения ошибок.

Методическая погрешность– это погрешность, возникающая по следующим причинам:

1) неточность построения модели физического процесса, на котором базируется средство измерения;

2) неверное применение средств измерений.

Субъективная погрешность– это погрешность возникающая из-за низкой степени квалификации оператора средства измерений, а также из-за погрешности зрительных органов человека, т. е. причиной возникновения субъективной погрешности является человеческий фактор.

Погрешности по взаимодействию изменений во времени и входной величины делятся на статические и динамические погрешности.

Неточность градуировки, конструктивные несовершенства, изменения характеристик прибора в процессе эксплуатации и т. д. являются причинами **основных погрешностей** инструмента измерения.

Систематическая погрешность – это составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. Причинами появления систематической погрешности могут являться неисправности средств измерений, несовершенство метода измерений, неправильная установка измерительных приборов, отступление от нормальных условий их работы, особенности самого оператора.

Динамическая погрешность– это погрешность, численное значение которой вычисляется как разность между погрешностью, возникающей при измерении непостоянной (переменной во времени) величины, и статической погрешностью (погрешностью значения измеряемой величины в определенный момент времени).

Случайная погрешность– это составная часть погрешности результата измерения, изменяющаяся случайно, незакономерно при проведении повторных измерений одной и той же величины. Появление случайной погрешности нельзя предвидеть и предугадать. Случайную погрешность невозможно полностью устранить, она всегда в некоторой степени искажает конечные результаты измерений. Но можно сделать результат измерения более точным за счет проведения повторных измерений. Причиной случайной погрешности может стать, например, случайное изменение внешних факторов, воздействующих на процесс измерения. Случайная погрешность при проведении многократных измерений с достаточно большой степенью точности приводит к рассеянию результатов.

Упражнения 1. Определите, какие из приведенных погрешностей являются устранимыми, а какие- неустранимыми.

2. Исключите неверное утверждение:

1) Абсолютной погрешностью Δ приближенного числа а называется абсолютная величина разности между соответствующим точным числом А и числом а.

2) Предельная абсолютная погрешность приближенного числа есть всякое число, не меньше абсолютной погрешности этого числа.

3) Относительной погрешностью δ данного приближенного числа а называют отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа $A \neq 0$.

4) Существуют следующие виды погрешностей: погрешность задачи; погрешность метода; остаточная погрешность; начальная погрешность; погрешность округления; погрешность действий; погрешность решения.

5) Конечная десятичная дробь это

$b = \beta_m \cdot 10^m + \beta_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + \beta_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} (\beta_m \neq 0)$

6) Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представлением сохраненного разряда.

7) Говорят, что n первых значащих цифр (десятичных знаков) приближенного числа являются верными, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-ой значащей цифрой, считая слева направо.

8) При округлении числа а число a_1 выбирают так, чтобы погрешность округления была минимальной.

3. Из данных приближенных чисел, абсолютная погрешность которых не превосходит ε =0,001, укажите все содержащие не менее n = 4 верных цифр:

а) 0,5431 б) 4,72 в) 11,5631 г) 1,5201 д) 1,30

4. Из данных приближенных чисел с абсолютными погрешностями, меньшими е = 0,006, укажите те, которые неверно округляют заданные числа:

а) А=2,536, а=2,54 б) А=4,7359, а=4,74 в) А=3,5276, а=3,528 г) А=3,06, а=3,1 д) А=10,5293, а=10,5

5. Укажите приближения, проведенные с точностью до е = 0,0003

а) А=5,62410, а=5,62 б) А=35,4205, а=35,42 в) А=9,24071, а=9,2407 г) А=1,2400, а=1,24

д) А=0,5326, а=0,533

6. Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа выражается в следующем (укажите верные утверждения):

а) Если положительное приближенное число а имеет n верных десятичных знаков, то относительная погрешность δ этого числа есть $\delta \leq \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, где α_m – первая значащая цифра числа а.

б) Если а имеет более двух верных знаков, то справедлива формула $\delta = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

в) Если а имеет более двух верных знаков, то справедлива формула $\delta \leq \frac{1}{2\alpha_m - 1}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

г) Если а имеет более двух верных знаков, то справедлива формула $\delta > \frac{1}{2\alpha_{m-n}}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

д) Если а имеет более двух верных знаков, то справедлива формула $\delta < \frac{1}{2\alpha_{m-1}}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

7. Среди данных этапов решения уравнения на [0;1] укажите неверные.

$x^4 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$

а) $f(0) = -2$ б) $f(1) = 13$ в) $f(0) = -3$

г) $f(0) \cdot f(-2) < 0 \Rightarrow$ уравнение имеет хотя бы 1 корень

д) $f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow$ уравнение имеет хотя бы 1 корень

е) $f'(x) = 4x^3 - 10x + 10$ ж) $f''(x) = 12x^2 - 10$ з) $f''(x) > 0$ на [0;1] $\Rightarrow$ корень $\exists!$

2.2 Лабораторная работа № 2 (2 часа).

Тема: «Аппроксимация функций в среде MathCAD»

2.2.1 Цель работы: ознакомиться с возможностями аппроксимации опытных данных на примере метода наименьших квадратов; научиться решать задачу численной аппроксимации при работе с таблично заданными функциями.

2.2.2 Задачи работы:

1. Постановка задачи численной аппроксимации.

2. Аппроксимация таблично заданных функций методом наименьших квадратов.

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.2.4 Описание (ход) работы:

1. Производится *n* наблюдений (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)переменных *x* и *y*. Предполагая, что между *x* и *y* существует зависимость вида $y = f(x)$, найти значения параметров *a и b*, наилучшим образом согласованные с экспериментальными данными.

Согласно методу наименьших квадратов параметры функции следует выбирать так, чтобы сумма квадратов невязок была наименьшей.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i \right)^2$$

2. Если $f(x)$ — линейная функция, т.е. $y = ax + b$, то $S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$, а неизвестные параметры *a* и *b* определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ \sum_{i-1}^{n} x_i \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

3. Если $f(x)$ — квадратичная функция, т.е. $y = ax^2 + bx + c$, то $S = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i \right)^2$, а неизвестные параметры *a, b, c* определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot c = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i, \\ \sum_{i-1}^{n} x_i^3 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot c = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b + n \cdot c = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

4. Линейная регрессия

Для расчета линейной регрессии в MathCAD необходимо воспользоваться следующими операторами:

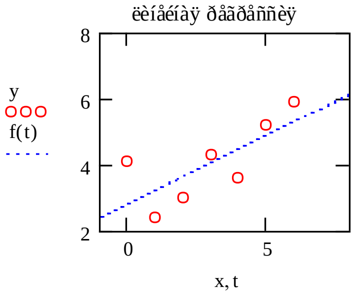
- line (x,y) - вектор из двух элементов (*b,a*) коэффициентов линейной регрессии $y = b + ax$;
- intercept (x, y) - коэффициент *b* линейной регрессии;
- slope (x, y) - коэффициент *a* линейной регрессии;
- x - вектор действительных данных аргумента;
- y - вектор действительных данных значений того же размера.

Пример 1. Линейная регрессия

$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T \qquad\qquad y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$

$\mathrm{line}(x,y) = \begin{pmatrix} 2.829 \\ 0.414 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{intercept}(x,y) = 2.829 \qquad \mathrm{slope}(x,y) = 0.414$

$f(t) := \mathrm{line}(x,y)_0 + \mathrm{line}(x,y)_1 \cdot t$



Пример 2. Имеются следующие данные о расходах на рекламу x (тыс. усл. ед) и сбыте продукции y (тыс. ед):

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y_i	**1,6**	**4,0**	**7,4**	**12,0**	**18,0**

Методом наименьших квадратов найти эмпирические формулы прямой $y = ax + b$ и многочлена второй степени $y = ax^2 + bx + c$, аппроксимирующие функцию, заданную таблично. Найти значение многочленов первой и второй степеней в заданных точках, абсолютную погрешность в них и среднеквадратическую погрешность.

Выяснить, какая зависимость предпочтительнее. Построить графики. Для этой же функции построить многочлен первой степени, пользуясь встроенными функциями системы MathCAD для линейной регрессии. Графически сравнить полученные результаты.

Решение:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\,y_i$	$x_i^2\,y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4,0	4	8	16	8,0	16,0
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12,0	16	64	256	48,0	196,0
5	5	18,0	25	125	625	90,0	450,0
$\sum$	**15**	**43,0**	**55**	**225**	**979**	**169,8**	**680,2**

Система нормальных уравнений имеет вид: $\begin{cases} 55a + 15b = 169{,}8, \\ 15a + 5b = 43. \end{cases}$ Её решения a=4,08, b=-3,64. Таким образом, линейная зависимость имеет вид: $y = 4{,}08x - 3{,}64$.

Система нормальных уравнений имеет вид: $\begin{cases} 979a+225b+55c=680{,}2, \\ 225a+55b+15c=168{,}8, \\ 55a+15b+5c=49{,}0. \end{cases}$ Её решения a=0,3, b=0,48, c=5,06. Таким образом, искомая квадратичная зависимость имеет вид: $y=0{,}3x^2+0{,}48x+5{,}06$.

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)$ - абсолютная погрешность для линейной зависимости

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ - среднеквадратическая погрешность для линейной зависимости

$[4{,}08\cdot 1-3{,}64-1{,}6]^2=[-1{,}16]^2=1{,}3456$ $\quad$ $[4{,}08\cdot 2-3{,}64-4]^2=[0{,}52]^2=0{,}2704$

$[4{,}08\cdot 3-3{,}64-7{,}4]^2=[1{,}2]^2=1{,}44$ $\quad$ $[4{,}08\cdot 4-3{,}64-12]^2=[0{,}68]^2=0{,}4624$

$$[4{,}08\cdot 5-3{,}64-18]^2=[-1{,}24]^2=1{,}5376$$

$$\sum_{i=1}^{5}(4{,}08x_i-3{,}64-y_i)=-1{,}16+0{,}52+1{,}2+0{,}68-1{,}24=0$$

$$\sum_{i=1}^{5}(4{,}08x_i-3{,}64-y_i)^2=1{,}3456+0{,}2704+1{,}44+0{,}4624+1{,}5376=5{,}056$$

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)$ - абсолютная погрешность для квадратичной зависимости

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$ - среднеквадратическая погрешность для квадратичной зависимости

$[0{,}3\cdot 1^2+0{,}48\cdot 1+5{,}06-1{,}6]^2=[4{,}24]^2=17{,}9776$ $\quad$ $[0{,}3\cdot 2^2+0{,}48\cdot 2+5{,}06-4]^2=[3{,}22]^2=10{,}3684$

$[0{,}3\cdot 3^2+0{,}48\cdot 3+5{,}06-7{,}4]^2=[1{,}8]^2=3{,}24$ $\quad$ $[0{,}3\cdot 4^2+0{,}48\cdot 4+5{,}06-12]^2=[-0{,}22]^2=0{,}0484$

$$[0{,}3\cdot 5^2+0{,}48\cdot 5+5{,}06-18]^2=[-3{,}04]^2=9{,}2416$$

$$\sum_{i=1}^{5}(0{,}3x_i^2+0{,}48x_i+5{,}06-y_i)=4{,}24+3{,}22+1{,}8-0{,}22-3{,}04=6$$

$$\sum_{i=1}^{5}(0{,}3x_i^2+0{,}48x_i+5{,}06-y_i)^2=17{,}9776+10{,}3684+3{,}24+0{,}0484+9{,}2416=40{,}876$$

Как видно $S_{лин}<S_{кв}$, следовательно, линейная зависимость предпочтительнее.

$x:=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)^T$ $\qquad$ $y:=(1.6\ \ 4\ \ 7.4\ \ 12\ \ 18)^T$

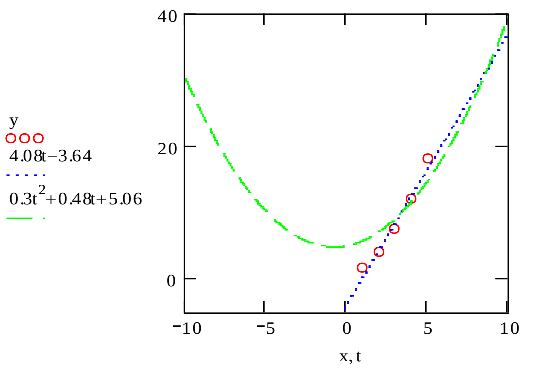


Рис. Изображение в ДСК опытных точек, линейной и квадратичной зависимостей

$x:=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)^T$ $\qquad$ $y:=(1.6\ \ 4\ \ 7.4\ \ 12\ \ 18)^T$

$\text{line}(x,y)=\begin{pmatrix}-3.64\\ 4.08\end{pmatrix}$ $\quad$ или $\quad$ $\text{intercept}(x,y)=-3.64$

$\text{slope}(x,y)=4.08$

$$f(t) := line(x, y)_0 + line(x, y)_1 \cdot t$$

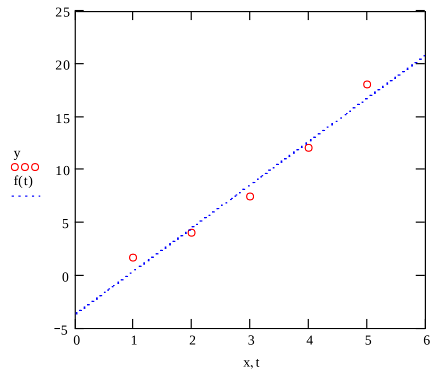


Рис. Изображение в ДСК опытных точек и графика линейной регрессии

Контрольные вопросы

1. Что значит аппроксимировать табличную функцию?
2. Какая функция называется эмпирической? Назовите этапы получения эмпирической формулы. Как определить общий вид эмпирической формулы?
3. В чём заключается принцип Лежандра?

2.3. Лабораторная работа № 3 (2 часа).

Тема: «Сглаживание и фильтрация опытных данных в среде MathCAD»

2.3.1 Цель работы: изучить возможности математического пакета MathCAD, которые могут быть использованы для обработки входных реализаций (сигналов) линейных динамических систем

2.3.2 Задачи работы:

1. Скользящее усреднение. Устранение тренда.

2. Полосовая фильтрация.

3. Спектральная фильтрация.

2.14.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.14.4 Описание (ход) работы:

В процессе сглаживания из исходного набора данных получается новый набор данных, более гладкий, чем исходной. В Mathcad имеются три встроенные функции, позволяющие произвести сглаживание некоторой выборки данных:

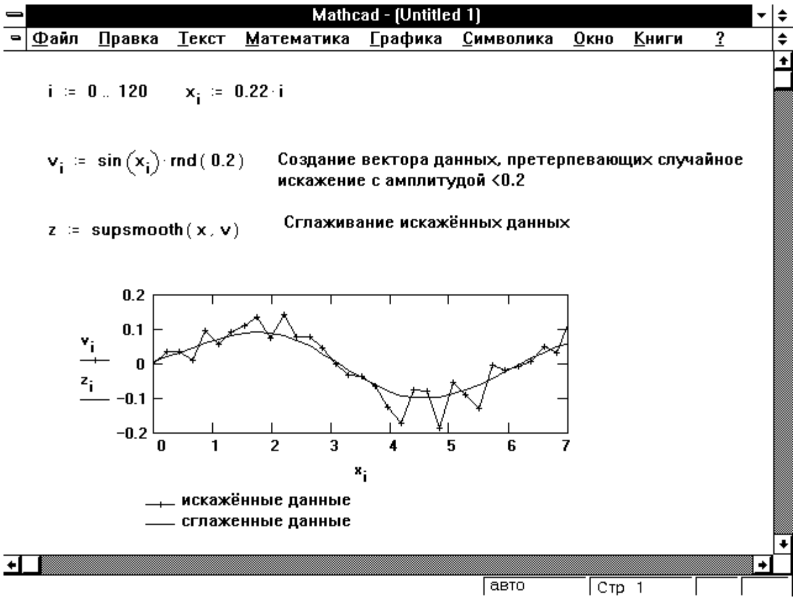
medsmooth(y,n), где у — вектор значений сигнала, n — параметр, определяющий количество¬ окон сглаживания, на которое будет разбит интервал при обработке данных (n может быть только нечетным целым числом, строго меньшим, чем количество элементов в выборке). Эта функция реализует популярный алгоритм «бегущих» медиан **(running medians).** Обязательным условием при ее применении является то, что эмпирические точки должны быть равномерно распределены на промежутке. Из всех встроенных функций сглаживания Mathcad medsmooth является наиболее надежной, однако и наименее универсальной функцией;

ksmooth(x,y,b), где х и у — векторы данных, b— ширина окна сглаживания (этот параметр по¬ величине должен равняться общей величине нескольких промежутков, разделяющих в данной выборке соседние точки). Данная встроенная функция реализует сглаживание на основании алгоритма Гаусса. Лучше всего функция ksmooth подходит для устранения шумов в стационарном сигнале, т.е. для фильтрации опытных данных;

supsmooth(x,y), где x и y — векторы данных. Осуществляет сглаживание с помощью¬ адаптивного алгоритма (в основе которого лежит метод наименьших квадратов), основанного на анализе взаимного расположения рассматриваемой точки и ближайших к ней (их количество зависит от особенностей поведения графика зависимости). Данная функция лучше всего подходит для сглаживания сложных нестационарных сигналов.

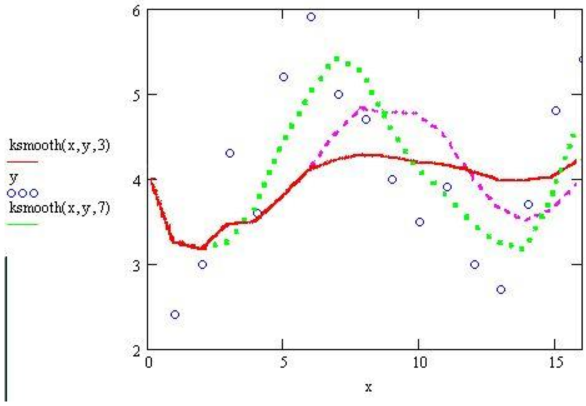
Все описанные выше функции возвращают в качестве ответа вектор из такого же количества элементов, как в исходных выборках. Поэтому если эмпирических точек было обработано немного, то при построении графика, для получения корректной кривой, стоит использовать возможности **сплайн-интерполяции** Mathcad (если же сглаживалась зависимость, образованная более чем 50–100 точками, то этого, скорее всего, делать не потребуется).

Пример 1. Сглаживание зашумленных данных с помощью supsmooth.



Скользящее усреднение*

Помимо встроенных в MathCAD, существует несколько популярных алгоритмов сглаживания. Самый простой и очень эффективный метод - это скользящее усреднение. Его суть состоит в расчете для каждого значения аргумента среднего значения по соседним w данным. Число w называют окном скользящего усреднения; чем оно больше, тем больше данных участвуют в расчете среднего, тем более сглаженная кривая получается.



Чтобы реализовать в MathCAD скользящее усреднение, достаточно очень простой программы. Она использует только значения y, оформленные в виде вектора, неявно предполагая, что они соответствуют значениям аргумента к, расположенным через одинаковые промежутки.

$$x := (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)^T$$

$$y := (4.1\ 2.4\ 3\ 4.3\ 3.6\ 5.2\ 5.9\ 5\ 4.7\ 4\ 3.5\ 3.9\ 3\ 2.7\ 3.7\ 4.8\ 5.4)^T$$

$$w := 15$$

$$N := \mathrm{rows}(y) \qquad N = 17$$

$$i := 0 .. N-1$$

$$m_i := \mathrm{if}\left(i < w, \frac{\sum_{j=0}^{i} y_j}{i+1}, \frac{\sum_{j=i-w+1}^{i} y_j}{w}\right)$$

Устранение тренда*

Еще одна типичная задача возникает, когда интерес исследований заключается не в анализе медленных (или низкочастотных) вариаций сигнала y(x) (для чего применяется сглаживание данных), а в анализе быстрых его изменений. Часто бывает, что быстрые (или высокочастотные) вариации накладываются определенным образом на медленные, которые обычно называют трендом. Часто тренд имеет заранее предсказуемый вид, например линейный.

$$x := (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)^T$$

$$y := (5.1\ 4.4\ 5.7\ 5.3\ 5.6\ 5.2\ 5.9\ 7.7\ 6.7\ 7\ 6.5\ 5.9\ 8.1\ 8.7\ 9.7\ 9.8\ 10.4)^T$$

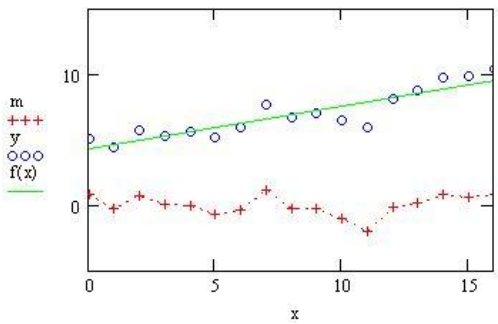
$$N := \mathrm{rows}(y) \qquad N = 17$$

$$i := 0 .. N-1$$

$$f(t) := \mathrm{line}(x, y)_0 + \mathrm{line}(x, y)_1 \cdot t$$

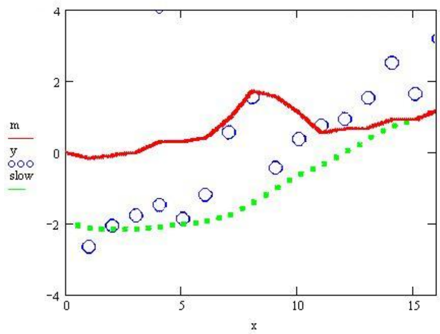
$$m_i := y_i - f(x_i)$$

На рис. показаны исходные данные (кружками), выделенный с помощью регрессии линейный тренд (сплошной прямой линией) и результат устранения тренда (пунктир, соединяющий крестики).



Полосовая фильтрация*

В предыдущих разделах была рассмотрена фильтрация быстрых вариаций сигнала (сглаживание) и его медленных вариаций (снятие тренда). Иногда требуется выделить среднемасштабную составляющую сигнала, уменьшив как более быстрые, так и более медленные его компоненты. Одна из возможностей решения этой задачи связана с применением полосовой фильтрации на основе последовательного скользящего усреднения.



Алгоритм полосовой фильтрации:

- приведение массива данных y к нулевому среднему значению путем его вычитания из каждого элемента y;
-устранение из сигнала y высокочастотной составляющей, имеющее целью получить сглаженный сигнал middle, например, с помощью скользящего усреднения с малым окном w ;
-выделение из сигнала middle низкочастотной составляющей slow, например, путем скользящего усреднения с большим окном w, либо с помощью снятия тренда.
- вычесть из сигнала middle тренд slow , тем самым выделяя среднемасштабную составляющую исходного сигнала y.

$x := (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)^T$

$y := (5.1\ 4.4\ 5\ 5.3\ 5.6\ 5.2\ 5.9\ 7.7\ 8.7\ 6.7\ 7.5\ 7.9\ 8.1\ 8.7\ 9.7\ 8.8\ 10.4)^T$

$meanY := mean(y)$

$y := y - meanY$

$N := rows(y) \qquad N = 17$

$i := 0 .. N-1$

$w := 3$

$$middle_i := if\left(i < w, \frac{\sum_{j=0}^{i} y_j}{i+1}, \frac{\sum_{j=i-w+1}^{i} y_j}{w}\right)$$

$w := 7$

$$slow_i := if\left(i < w, \frac{\sum_{j=0}^{i} middle_j}{i+1}, \frac{\sum_{j=i-w+1}^{i} middle_j}{w}\right)$$

$m := middle - slow$

2.4 Лабораторная работа № 4 (2 часа).

Тема: «Исследование свойств бинарных отношений»

2.4.1 Цель работы: повторить основные понятия теории множеств, закрепить эти понятия в практике решения задач.

2.4.2 Задачи работы:

1. Рефлексивность, симметричность и транзитивность.
2. Отношения эквивалентности, отношения порядка

2.4.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.4.4 Описание (ход) работы:

Отношение эквивалентности «=» является отношением упорядочения, потому что оно обладает всеми свойствами отношения упорядочения, и употребляется также и самостоятельно.
Пусть x – элемент или подмножество множества X.
Отношение эквивалентности есть отношение между элементами или подмножествами множества, обладающее свойствами:

1) "xÎ M: x = x (**рефлексивность**);

2) "x, y, z Î M: (x = y) Ù (y = z) → x = z (**транзитивность**);
3) "x, y Î M: (x = y) → (y = x); (**симметричность**).

Эквивалентность не означает тождественность. Действительно, возьмем евклидову плоскость. В качестве элементов множества X возьмем все прямые. Отношением эквивалентности назовем параллельность прямых линий. Тогда все прямые, параллельные некоторой прямой, будут находиться в отношении эквивалентности к ней и друг к другу.

Отношение порядка. Пусть дано множество $A \neq \varnothing$. Бинарное отношение R на множестве A называется **отношением частичного порядка** тогда и только тогда, когда:

- R-рефлексивно, т.е. $\forall a \in A : aRa$.
- R-антисимметрично $\forall a, b \in A : aRb \cap bRa \Rightarrow a = b$.
- R-транзитивно $\forall a, b, c \in A : aRb \cap bRc \Rightarrow aRc$.

Бинарное отношение R на множестве A называется **строгим отношением частичного порядка** тогда и только тогда, когда:

- R-рефлексивно, т.е. $\forall a \in A : aRa$-не выполняется.
- R-антисимметрично $\forall a, b \in A : aRb \cap bRa \Rightarrow a = b$.
- R-транзитивно $\forall a, b, c \in A : aRb \cap bRc \Rightarrow aRc$.

Бинарное отношение R на множестве A называется **отношением линейного порядка**тогда и только тогда, когда:

- R является отношением частичного порядка.
- $\forall a, b \in A : aRb \oplus bRa$.

Бинарное отношение R на множестве A называется **отношением полного порядка**тогда и только тогда, когда:

- R является отношением линейного порядка.
- $\forall B \in A \, \exists a \in B \, \forall b \in B : aRb$.

Отношение равенства. Равенство является интуитивно очевидным отношением: значение двух выражений одно и то же. При его формальном определении возникает разнобой.

Теория множеств, по определению, считает два объекта (то есть, два множества) равными, если они состоят из одних и тех же элементов:

$A=B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$

Упражнения

1. Пусть имеется множество M = {2, 4, 6} и задано отношение ρ = {(x, y) : x, y ∈ M, и x, y имеют общий делитель }:

а) записать отношение в явном виде;

б) представить ρ графическим способом;

в) определить свойства отношения ρ.

2. Пусть имеется множество M = {–1, 0, 1, 2, 3} и задано отношение ρ = {(x, y) : x, y ∈ M, x – y< 2 }:

а) записать отношение в явном виде;

б) представить ρ графическим способом;

в) определить свойства отношения ρ.

3. Пусть имеется множество M = {–3, –1, 1, 3} и задано отношение ρ = {(x, y) : x, y ∈ M, x + y < 1}. Определить, какими свойствами обладает данное отношение.

4. Пусть имеется множество X = {2, 3, 4, 5, 6} и задано отношение ρ = {(x, y) : x, y ∈ X и x < y, x и y имеют общий делитель}. Определить, какими свойствами обладает данное отношение.

5. Пусть имеется множество M = {4, 6, 8, 10} и задано отношение ρ = {(x, y) : x, y ∈ M и x и y имеют общий делитель}.}. Обладает ли данное отношение свойством эквивалентности?

6. Пусть имеется множество X = {2, 4, 6} и задано отношение ρ = {(x, y) : x, y ∈ X и x < y, x и y имеют общий делитель}.}. Обладает ли данное отношение свойством эквивалентности?

7. Обладает ли отношение ρ из упражнения 5 свойством порядка?

8. Имеется множество M = {1, 2, 3, 4} и задано отношение ρ = {(x, y) : x, y ∈ M и x + y – нечетное }. Обладает ли отношение свойством эквивалентности?

2.5 Лабораторная работа № 5 (2 часа).

Тема: «Исследование свойств алгебраических структур»

2.5.1 Цель работы: повторить основные понятия теории алгебраических структур, закрепить эти понятия в практике решения задач.

2.5.2 Задачи работы:

1. Группоид. Полугруппа.
2. Группа.

2.5.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.5.4 Описание (ход) работы:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество A, на котором задана бинарная операция $*$, называется группоидом. Таким образом, группоид есть, по существу, упорядоченная пара, первая компонента которой — множество A , а вторая компонента — бинарная операция $*$, заданная на множестве A.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 . Группой называется группоид $(G, *)$, удовлетворяющий следующим условиям: 1. Операция $*$ в G ассоциативна, т.е. $\forall$ a, b, c $\in$ G $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. В группоиде G имеется нейтральный элемент e, т.е. элемент e, удовлетворяющий условию $\forall a \in G\ a * e = e * a = a$.
3. Для всякого $a \in G$ в группоиде G имеется элемент a' , симметричный элементу a, т.е. элемент a' , удовлетворяющий условию $a * a' = a' * a = e$.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Группа $(G, *)$ называется коммутативной (абелевой), если операция $*$ в G коммутативна.

Упражнения. Покажите, что приведенные ниже структуры представляют собой группоиды на указанных множествах.
1. Числовые группоиды с операциями сложения, умножения, вычитания и деления.
а) A1 = (N, +), A2 = (Z, +), A3 = (Q, +), A4 = (R, +), A5 = (C, +); б) A6 = (N, ·), A7 = (Z, ·), A8 = (Q, ·), A9 = (R, ·), A10 = (C, ·); в) A11 = (Q+, +), A12 = (R+, +), A13 = (Q+, ·), A14 = (R+, ·); г) A15 = (Z\{0}, ·), A16 = (Q\{0}, ·), A17 = (R\{0}, ·), A18 = (C\{0}, ·); д) A19 = (Z, −), A20 = (Q, −), A21 = (R, −), A22 = (C, −); е) A23 = (Q\{0}, :), A24 = (R\{0}, :), A25 = (C\{0}, :).
2. Матричные группоиды с операциями сложения и умножения. а) A26 = (Nm×n, +), A27 = (Zm×n, +), A28 = (Qm×n, +), A29 = (Rm×n, +), A30 = (Cm×n, +); б) A31 = (Nn×n, ·), A32 = (Zn×n, ·), A33 = (Qn×n, ·), A34 = (Rn×n, ·), A35 = (Cn×n, ·); в) A36 = (GL(n, Q), ·), A37 = (GL(n, R), ·), A38 = (GL(n, C), ·), где GL(n, F) обозначает множество всех невырожденных матриц порядка n над числовым полем F.
3. Группоиды на множестве многочленов с операциями сложения и умножения. а) A39 = (Z[x], +), A40 = (Q[x], +), A41 = (R[x], +), A42 = (C[x], +); б) A43 = (Z[x], ·), A44 = (Q[x], ·), A45 = (R[x], ·), A46 = (C[x], ·).
4. Группоиды на множестве P(M) с операциями объединения, пересечения и взятия разности. A47 = (P(M), ∪), A48 = (P(M), ∩), A49 = (P(M), \).
5. Группоиды на множестве геометрических векторов с операциями сложения и векторного умножения. A55 = (V3, +), A56 = (V3, ×).
6. Группоиды на множестве функций с операциями сложения и умножения.
а) A61 = (FX, +), A62 = (C[a,b] , +), A63 = (D[a,b] , +); б) A64 = (FX, ·), A65 = (C[a,b] , ·), A66 = (D[a,b] , ·), где F_X, C[a,b] , D[a,b] — соответственно множество всех действительных функций, определенных на множестве $X \subset R$, множество функций, непрерывных на отрезке [a, b], множество функций, дифференцируемых на отрезке [a, b].
2. Среди группоидов, рассмотренных выше, группами являются следующие:
1. Числовые группоиды с операцией сложения (Z, +),(Q, +),(R, +),(C, +).
2. Числовые группоиды с операцией умножения (Q \ {0}, ·), (R \ {0}, ·), (C \ {0}, ·), (Q + , ·), (R + , ·).

3. Группоиды матриц с операцией сложения ($Zm\times n$, +), ($Qm\times n$, +), ($Rm\times n$, +), ($Cm\times n$, +).
4. Группоиды многочленов с операцией сложения (Z[x], +), (Q[x], +), (R[x], +), (C[x], +).
5. Группоиды функций с операцией сложения (F_X, +), (C[a,b] , +), (D[a,b] , +).
6. Группоид геометрических векторов (V_3, +) с операцией сложения.

2.6 Лабораторная работа № 6 (2 часа).

Тема: «Исследование свойств алгебраических структур (продолжение)»

2.6.1 Цель работы: повторить основные понятия теории алгебраических структур, закрепить эти понятия в практике решения задач.

2.6.2 Задачи работы:

1. Полукольцо, кольцо.
2. Кольцо, порожденное полукольцом.

2.6.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.6.4 Описание (ход) работы:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кольцом называется алгебра (K, +, ·) с двумя бинарными операциями + и ·, которая удовлетворяет следующим условиям
1. (K, +) — абелева группа, т.е. а) операция + в K ассоциативна, т.е. ∀ a, b, c ∈ K (a + b) + c = a + (b + c); б) в множестве K имеется нулевой элемент 0 относительно операции +, т.е. элемент 0, удовлетворяющий условию ∀ a ∈ K a + 0 = 0 + a = a; в) для всякого a ∈ K в множестве K имеется противоположный ему элемент −a, т.е. элемент −a, удовлетворяющий условию a + (−a) = (−a) + a = 0; г) операция + в K коммутативна, т.е. ∀ a, b ∈ K a + b = b + a.
2. Операция · в K ассоциативна, т.е. ∀ a, b, c ∈ K (ab)c = a(bc).
3. Операция · в K дистрибутивна относительно операции +, т.е. ∀ a, b, c ∈ K ((a + b)c = ac + bc ∧ c(a + b) = ca + cb).
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 . Кольцо (K, +, ·) называется коммутативным, если операция умножения в нем коммутативна, т.е. ∀ a, b ∈ K ab = ba.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 . Подкольцом кольца (K, +, ·) называется подмножество H множества K, которое замкнуто относительно операций + и ·, определенных в K, и само является кольцом относительно этих операций.

Упражнения. 1. Покажите, что приведенные ниже структуры представляют собой кольцо на указанном множестве.
1. Числовые кольца (Z, +, ·), (Q, +, ·), (R, +, ·), (C, +, ·).
2. Кольца матриц ($Zn\times n$, +, ·), ($Qn\times n$, +, ·), ($Rn\times n$, +, ·), ($Cn\times n$, +, ·).
3. Кольца многочленов (Z[x], +, ·), (Q[x], +, ·), (R[x], +, ·), (C[x], +, ·).
4. Кольца функций (F_X, +, ·), (C[a,b] , +, ·), (D[a,b] , +, ·).
В качестве примера коммутативных колец отметим все числовые кольца, кольца многочленов, кольца функций, рассмотренные выше.

2. Убедитесь, что кольцо матриц порядка $n > 2$ с элементами из любого числового кольца не коммутативно.

3. Покажите, что приведенные ниже структуры представляют собой подкольцо на указанном множестве.
Z — подкольцо кольца (Q, +, ·), Q — подкольцо кольца (R, +, ·), $Rn\times n$ — подкольцо кольца ($Cn\times n$, +, ·), Z[x] — подкольцо кольца (R[x], +, ·), D[a,b] — подкольцо кольца (C[a,b] , +, ·).

2.7 Лабораторная работа № 7 (2 часа).

Тема: «Исследование свойств алгебраических структур (продолжение)»

2.7.1 Цель работы: повторить основные понятия теории алгебраических структур, закрепить эти понятия в практике решения задач.

2.7.2 Задачи работы:

1. Поле.
2. Поле комплексных чисел.

2.7.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.7.4 Описание (ход) работы:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полем называется коммутативное кольцо с единицей, в котором всякий элемент, отличный от нуля имеет обратный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подполем поля (F, +, ·) называется подмножество S множества F, которое замкнуто относительно операций + и ·, определенных в F, и само является полем относительно этих операций.

Упражнения. 1. Покажите, что приведенные ниже структуры представляют собой поле на указанном множестве.

Числовые поля (Q, +, ·), (R, +, ·), (C, +, ·).

2. Убедитесь, что кольцо (Z, +, ·) не является полем.

3. Убедитесь, что кольцо (K, +, ·) является полем тогда и только тогда, когда множество K \ {0} есть коммутативная группа относительно операции умножения.

4. Покажите, что приведенные ниже структуры представляют собой подполе на указанном множестве.

Q — подполе поля (R, +, ·); R — подполе поля (C, +, ·).

5. Докажите, что во всяком поле (F, +, ·) само множество F является подполем поля (F, +, ·).

2.8 Лабораторная работа № 8 (2 часа).

Тема: «Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов»

2.8.1 Цель работы: повторить основные понятия, связанные с алгеброй линейных пространств и численных методов решения алгебраических уравнений, закрепить эти понятия в практике решения задач.

2.8.2 Задачи работы:

1. Численные методы решения алгебраических уравнений.
2. Исследование сходимости итерационного процесса.

2.8.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.8.4 Описание (ход) работы:

Задание. Исследование функции $y = f(x)$ и решение уравнения $f(x) = 0$ с точностью ε .Алгоритм приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ состоит из двух этапов:

1. Нахождение промежутка, содержащего корень уравнения (или начальных приближений для корня), для которых выполняются достаточные условия сходимости одного из итерационных методов.
2. Получение приближенного решения с заданной точностью итерационным методом.

Первый этап.

Корнем уравнения $f(x)=0$, называется такое значение $x=\bar{x}$, аргумента функции $f(x)$, при котором это уравнение обращается в тождество: $f(\bar{x})=0$. Корень уравнения $f(x)=0$, геометрически представляет собой абсциссу точки пересечения, касания или другой общей точки графика функции $f(x)$ и оси OX.

Определить корень уравнения – значит найти такой конечный промежуток, внутри которого имеется единственный корень данного уравнения. Отделение корней уравнения $f(x)=0$, можно выполнить графически, построив график функции $f(x)=0$, по которому можно судить о том, в каких промежутках находятся точки пересечения его с осью OX. В некоторых случаях целесообразно представить уравнение $f(x)=0$ в эквивалентном виде: $f_1(x)=f_2(x)$, с таким расчётом, чтобы графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, строились по возможности проще. Корень уравнения $f_1(x)=f_2(x)$, представляет собой абсциссу точки пересечения графиков $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$.

Теорема: (критерии отделения корней).

1) Функция $f(x)$ - непрерывна на отрезке $[a,b]$.
2) $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow f(x)=0$ на отрезке $[a,b]$ имеет хотя бы один корень.
3) $f(x)$ - строго монотонная функция $\Rightarrow \exists!\ \bar{x}\in[a,b]:\ f(\bar{x})=0$.

Второй этап.

На втором этапе могут быть использованы следующие итерационные методы.

<table>
<tr><td colspan="2">1. Метод половинного аргумента</td></tr>
<tr><td>2. Метод хорд
$x_0=a,\quad x_{k+1}=\dfrac{b\cdot f(x_k)-x_k f(b)}{f(x_k)-f(b)}, k=0,1,2,...$
(для случая $f(b)\cdot f'(a)>0$);
$x_0=b,\ x_{k+1}=\dfrac{a\cdot f(x_k)-x_k f(a)}{f(x_k)-f(a)}, k=0,1,2,...$
(для случая $f(a)\cdot f'(b)>0$);
$\lvert x-x_k\rvert\le\dfrac{\lvert f(x_k)\rvert}{\mu}$, где $\mu=\min\limits_{a\le x\le b}\lvert f'(x)\rvert$</td><td>3. Метод касательных
$x_0=a,\quad x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,...$
(для случая $f(a)\cdot f''(a)>0$),
$\lvert x-x_k\rvert\le\dfrac{\lvert f(x_k)\rvert}{\mu}$, где $\mu=\min\limits_{a\le x\le b}\lvert f'(x)\rvert$</td></tr>
<tr><td>4. Метод простой итерации
$x_0\in[a,b]$
$x_{k+1}=\varphi(x_k)$
$\lvert x-x_k\rvert<\dfrac{\varphi'(x)}{1-\varphi'(x)}\cdot\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$</td><td>5. Комбинированный метод
$x_0=a,\ x_1=b,\ x_{2k}=x_{2k-2}-\dfrac{f(x_{2k-2})}{f'(x_{2k-2})},$
$x_{2k+1}=\dfrac{x_{2k-2}f(x_{2k-1})-x_{2k-1}f(x_{2k-2})}{f(x_{2k-1})-f(x_{2k-2})}.$</td></tr>
</table>

Полученное приближенное решение можно сравнить с приближенным решением, определяемым посредством встроенной функции MathCad **root.**

$t:=$<начальное приближение>**,** $r:=root(f(t),t)$ (возвращает значение *t*, лежащее между *a* и *b*, при котором выражение $f(t)$ равно нулю. Эта функция должна определятся приблизительным значением для t).

При этом надо иметь в виду, что условием окончания итерационного цикла в MathCAD является выполнение неравенства $f(t_k)<TOL$, где TOL – системная переменная, имеющая по

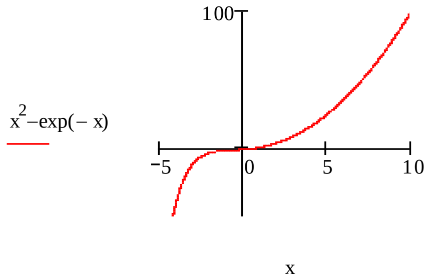
умолчанию значение 10^{-3}. Изменения значения переменной TOL, пользователь может повысить точность получаемого решения в MathCAD.

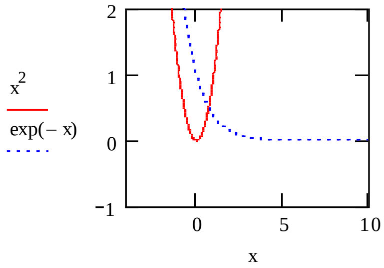
Пример 1. Исследовать функции $f(x) = x^2 - e^{-x}$ и решить уравнение $x^2 - e^{-x} = 0$ итерационными методами (половинного аргумента, хорд, касательных, простой итерации), в среде **MathCAD** с точностью 10^{-2}, а также посредством встроенной функции **root**.

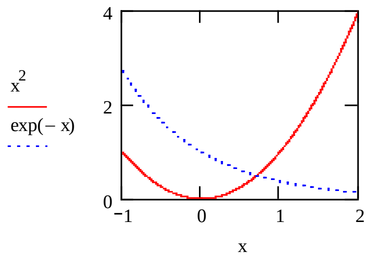
Решение:

1. Отделение корня уравнения.

Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, т.к. график функции один раз пересекает ось абсцисс. Найдём интервал изоляции действительного корня уравнения. Представим данное уравнение в виде $x^2 = e^{-x}$ и построим графики функций $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = e^{-x}$. Графики функций на интервале $[0{,}4;0{,}8]$ пересекаются в одной точке.







2. Метод половинного аргумента.

Воспользуемся методом половинного деления для нахождения корня $\bar{x} \in [0{,}4;0{,}8]$.

$f(x) = x^2 - e^{-x}$

1) $f(x)$ - непрерывна;

2) $f(0.4) = -0.51032$, $f(0.8) = 0.190671$, $f(0{,}4) \cdot f(0{,}8) < 0$, функция *f(x)* на отрезке $[0{,}4;0{,}8]$ имеет хотя бы один корень;

3) $\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 2 \cdot x + \exp(-x)$ >0 - функция *f(x)* монотонно возрастает на отрезке $[0{,}4;0{,}8]$, следовательно, существует единственный корень $\bar{x} \in [0{,}4;0{,}8]$, такой что $f(\bar{x}) = 0$.

4) $\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow 2 - \exp(-x)$ >0 - кривая вогнута.

a	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*b-a*	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0,4	0,8	-0,51032	0,190671	0,4	0,6	-0,189
0,6	0,8	-0,189	0,190671	0,2	0,7	-0,006585
0,7	0,8	-0,006585	0,190671	0,1	0,75	0,09
0,7	0,75	-0,006585	0,09	0,05	0,725	0,041
0,7	0,725	-0,006585	0,041	0,025	0,7125	0,017
0,7	0,7125	-0,006585	0,017	0,0125	0,70625	0,005298
0,7	0,70625	-0,006585	0,005298	0,00625	0,703125	0,0006511

$|x - 0{,}703125| < \frac{b-a}{2} = \frac{0{,}00625}{2} = 0{,}003125$; 0,003125<0,01.

С помощью метода половинного деления получили искомый корень уравнения $\bar{x} \cong 0{,}70$ с точностью до 0,01.

3. Применение функции root.

Используя встроенную функцию **root,** получим следующие результаты:

$f(t) := t^2 - \exp(-t)$
$t1 := 0.4$
$r1 := \mathrm{root}(f(t1), t1)$
$r1 = 0.703372$
$t2 := 0.70337$
$r2 := \mathrm{root}(f(t2), t2)$
$r2 = 0.703467$
$t3 := 0.70346$
$r3 := \mathrm{root}(f(t3), t3)$
$r3 = 0.703467$

Очевидно, что практически на втором приближении получен более точный результат ($\varepsilon = 10^{-6}$) с помощью встроенной функцией **root.**

Задания к лабораторной работе

Исследовать функцию $f(x)$ и решить уравнение $f(x) = 0$ итерационными методами (половинного аргумента, хорд, касательных, простой итерации), в среде **MathCAD** с точностью 10^{-2}, а также посредством встроенной функции **root**.

№ в-та	$f(x)$	№ в-та	$f(x)$	№ в-та	$f(x)$
1	$\ln x - \frac{1}{x^2}$	11	$\ln x - \frac{7}{2 \cdot x + 6}$	21	$\ln x - 2\cos x$
2	$2 \cdot \ln x - \frac{x}{2} + 1$	12	$e^{-x} - (x-1)^2$	22	$\sqrt{2 - x^2} - e^x$
3	$\frac{1-x}{x} - 3\cos(4x)$	13	$e^x + x^2 - 2$	23	$e^{-(x+1)} + x^2 + 2x - 1$
4	$ctgx - x^2$	14	$e^x - 2 \cdot (x-1)^2$	24	$e^{-x} - 2 + x^2$
5	$tg\frac{x}{4} - x - 2$	15	$e^x + 2 \cdot x^2 - 3$	25	$xe^x - x - 1$
6	$\sqrt{x} - 3\sin x$	16	$e^{-x} - \sqrt{x - 1}$	26	$(\cos x)^2 - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}$
7	$\sqrt{x} - \cos\frac{x}{2}$	17	$2 \cdot \sin(3 \cdot x) - 1{,}5 \cdot x$	27	$\sin(x + 2) - x^2 + 2x - 1$
8	$2 \cdot \ln x - \frac{1}{x}$	18	$0{,}1 \cdot e^{-x} - \frac{x}{2}$	28	$x - e^{-x^2}$
9	$x - 3 \cdot \cos^2 x$	19	$\ln(1{,}2x) - 1{,}5 \cdot x + 2$	29	$x\ln x - x^2 + 3x - 1$
10	$tg(7.5 \cdot x) - 2 \cdot (x+1)$	20	$tg(2{,}5 \cdot x) - 5 \cdot x$	30	$e^{-x} - 5x^2 + 10x$

Контрольные вопросы

1. В чём заключается этап отделения корней при исследовании численных методов решения уравнения?
2. Каким образом графическое отделение корней уточняется с помощью вычислений?
3. Какие свойства функции одной переменной при этом используются?
4. Какое условие является критерием достижения заданной точности ε при решении уравнения $f(x) = 0$ методом половинного аргумента на отрезке $[a, b]$?
5. Как определить, какой конец отрезка $[a, b]$ взять за начальное значение корня при применении к уравнению: а) методом хорд; б) методом касательных?

2.9 Лабораторная работа № 9 (2 часа).

Тема: «Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов»

2.9.1 Цель работы: повторить основные понятия, связанные с алгеброй линейных пространств и численных методов решения систем алгебраических уравнений, закрепить эти понятия в практике решения задач.

2.9.2 Задачи работы:

1. Численные методы решения систем алгебраических уравнений.
2. Исследование сходимости итерационного процесса в методе Зейделя.

2.9.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.9.4 Описание (ход) работы:

Прикладные задачи часто сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений. Точные (прямые) методы даёт точное решение за конечное число операций, если они выполнялись без погрешности. К точным методам относится метод Жордана-Гаусса с выбором разрешающего элемента и метод Гаусса.

Альтернативой прямым методам являются итерационные методы, основанные на многократном уточнении $x^{\langle 0\rangle}$ - приближённо заданного решения задачи. Верхним индексом в скобках обозначается номер итерации (совокупности повторяющихся действий).

Суть простейшего итерационного процесса – метода простых итераций, состоит в выполнении следующих процедур.

1) Исходная задача

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

преобразуется к равносильному виду

$$\begin{cases} x_1 = 0\cdot x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + 0\cdot x_n + \beta_n. \end{cases}$$

2) Вектор β принимается в качестве начального приближения $x^{\langle 0\rangle} = \beta$ и далее многократно выполняются действия по уточнению решения согласно рекуррентному соотношению

$$x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

3) В качестве условия окончания итерационного процесса можно взять условие,

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \le \varepsilon\ ,$$

где ε - заданная погрешность приближённого решения $x \approx x^{(k)}$.

До расчёта можно получить число итераций k, требуемых для достижения заданной точности:

$$k+1 \ge \frac{\lg\varepsilon + \lg(1-\|\alpha\|) - \lg\|\beta\|}{\lg\|\alpha\|}\ .$$

Для обеспечения условий сходимости нужно получить систему вида $x = \alpha x + \beta$ из системы $Ax = b$ так, чтобы коэффициенты при неизвестных в правой части системы были существенно меньше единицы. Этого можно достичь, если исходную систему вида $x = \alpha x + \beta$ с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютные величины коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов при неизвестных в соответствующих уравнениях (такую систему называют системой с преобладающими диагональными коэффициентами). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным единице, будет получена система вида $x = \alpha x + \beta$, у которой все $|\alpha_{ij}| < 1$.

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций и в некоторых случаях приводит к более быстрой сходимости.

Итерации по методу Зейделя отличаются от простых итераций тем, что при нахождении i-й компоненты $(k+1)$-го приближения сразу используются уже найденные компоненты $(k+1)$-го приближения с меньшими номерами $1, 2, ..., i-1$.

Расчёты в MathCAD осуществляются по формуле $x^{\langle k+1 \rangle} := \left[(E - L)^{-1} \cdot U \cdot x^{\langle k \rangle} \right] + (E - L)^{-1} \cdot \beta$, где E - единичная матрица n-го порядка, $L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 1. Найдите методом простых итераций в среде MathCAD приближённое решение линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение:

1) Установите режим автоматических вычислений.

2) Преобразуйте исходную систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$.

Так как $|2| < |2| + |10|$, $|1| < |10| + |1|$, $|1| < |2| + |10|$, переставим уравнения местами так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Получаем $|10| > |1| + |1|$, $|10| > |2| + |1|$, $|10| > |2| + |2|$. Выразим из первого уравнения x_1, из второго x_2, из третьего x_3:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}1 \cdot x_2 - 0{,}1 \cdot x_3 + 1{,}2\ , \\ x_2 = -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}1 \cdot x_3 + 1{,}3\ , \\ x_3 = -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 + 1{,}4\ . \end{cases}$$

3) Введите матрицы α и β.

$$\beta := \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix} \qquad \alpha := \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Проверьте достаточное условие сходимости.

$\mathrm{norm1}(\alpha) = 0.4$

Заметим, $\|\alpha\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4\} = 0{,}4 < 1$, следовательно, условие сходимости выполнено.

5) Определите нулевое (начальное) приближение решения и количество итераций.

$x^{\langle 0 \rangle} := \beta$, $\quad k := 1..5$

6) Введите формулу вычисления последовательных приближений решения и вычислите их.

$$x^{\langle k \rangle} := \beta + \alpha \cdot x^{\langle k-1 \rangle}.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.93 & 1.018 & 0.995 & 1.002 & 1 \\ 1.3 & 0.92 & 1.024 & 0.993 & 1.002 & 0.999 \\ 1.4 & 0.9 & 1.03 & 0.992 & 1.002 & 0.999 \end{pmatrix}$$

7) Расчёт закончен, поскольку условие окончания выполнено.

$$\varepsilon := \left| x^{\langle 5 \rangle} - x^{\langle 4 \rangle} \right|, \quad \varepsilon = 4.393 \times 10^{-3}.$$

Задания к лабораторной работе

Систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

решить различными способами:

1) методом простой итерации в среде MathCAD с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$;
2) методом Зейделя в среде MathCAD с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Матрица системы определяется формулой

$A = D + k \cdot C$, где $D = \begin{pmatrix} 1{,}342 & 0{,}432 & -0{,}599 & 0{,}202 \\ 0{,}202 & 1{,}342 & 0{,}432 & -0{,}599 \\ -0{,}599 & 0{,}202 & 1{,}342 & 0{,}432 \\ 0{,}432 & -0{,}599 & 0{,}202 & 1{,}342 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1{,}941 \\ -0{,}230 \\ -1{,}941 \\ 0{,}230 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}$, где k - номер варианта задания.

Контрольные вопросы

1. К какому типу методов — прямым или итерационным — относится метод Гаусса?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
3. Как организуется контроль над вычислениями в прямом и обратном ходе?
4. Как строится итерационная последовательность для нахождения решения системы линейных уравнений с неизвестными?
5. Как формулируются достаточные условия сходимости итерационного процесса? Как эти условия связаны выбором метрики пространства?
6. В чем отличие итерационного процесса метода Зейделя от аналогичного процесса метода простой итерации?
7. Какие преимущества дает применение метода ортогонализации для решения системы линейных уравнений?

2.10. Лабораторная работа № 10 (2 часа).

Тема: «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши»

2.10.1 Цель работы: повторить обзорно основные понятия теории ДУ первого порядка, закрепить эти понятия в практике решения задач.

2.10.2 Задачи работы:

1. Методы решения уравнений первого порядка.

2. Реализация принципа сжатых отображений.

2.10.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.10.4 Описание (ход) работы:

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Определение. Решение вида y = φ(x, C_0) называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида y = φ(x, C_0), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при x = x_0 значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. Интегральной кривой называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Определение. Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши (см. Теорема Коши.) не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^{C} \neq 0$.

Упражнения

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

$y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

$y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

$xy' + y = 2y^2\ln x, \quad y(1) = 1/2.$

$\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$

2.11. Лабораторная работа № 11 (2 часа).

Тема: «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка»

2.11.1 Цель работы: повторить обзорно основные понятия теории ДУ первого порядка, закрепить эти понятия в практике решения задач

2.11.2 Задачи работы:

1. Метод Эйлера.

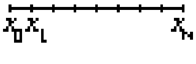
2. Одна из модификаций метода Рунге-Кутта.

2.11.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.11.4 Описание (ход) работы:

Численное решение на отрезке [a, b] задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0$ состоит в построении таблицы приближенных значений $y_0, y_1, ..., y_i, ... y_N$ решения $y(x)$ в узлах сетки $a=x_0 < x_1 < ... < x_i < ...< x_N=b$, $y(x_i)= y_i$. Если

$x_i = a+ i\,h$, $h=(b-a)/ N$, то сетка 

называется равномерной.

Численный метод решения задачи Коши называется одношаговым, если для вычисления решения в точке $x_0 + h$ используется информация о решении только в точке x_0.

Простейший одношаговый метод численного решения задачи Коши - метод Эйлера. В методе Эйлера величины y_i вычисляются по формуле

$y_i+1 = y_i + h\ f(x_i , y_i)$, $i = 0, 1, ...$

ПРИМЕР 1. Решение задачи Коши методом Эйлера.

Найдем методом Эйлера на отрезке [0, 1] с шагом h=0.2 приближенное решение задачи Коши y'=sinx-cosy, y(0)=1. Изобразим приближенное решение графически.

Расчетные формулы метода Эйлера для решения этой задачи имеют вид $x_0=0$, $y_0= 1$, $x_i+1 = x_i + 0.2$, $y_i+1 = y_i + 0.2(\sin x_i - \cos y_i)$, i =0, 1, 2, 3, 4.

Определим правую часть уравнения $f(x, y) := \sin(x) - \cos(y)$

Знак присваивания можно ввести щелчком по соответствующей позиции в панели Evaluation.

Определим диапазон изменения номера точки i=0,1, ..., 4

$i := 0 .. 4$

Для того чтобы ввести символ диапазона изменения индекса <..>, щелкните по соответствующей позиции в панели Matrix или введите с клавиатуры символ <;> ("точка с запятой") Определим начальное условие - решение в начальной точке $x_0 := 0 \quad y_0 := 1$

Для того чтобы ввести нижний индекс переменной, щелкните по соответствующей позиции в панели Matrix или в панели Calculator

Определим шаг формулы Эйлера - шаг интегрирования $h := 0.2$

Определим по формулам Эйлера значения приближенного решения в узлах сетки

$x_{i+1} := x_i + h \quad y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

Выведем в рабочий документ вычисленные значения решения

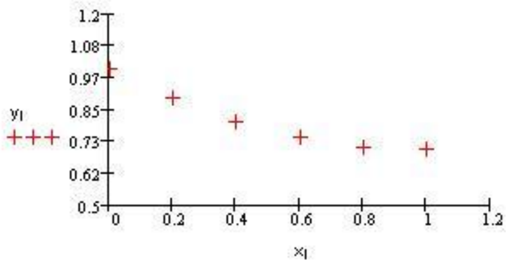
Для того чтобы вывести значение переменной в рабочий документ, введите имя переменной, знак равенства и щелкните по рабочему документу вне выделяющей рамки

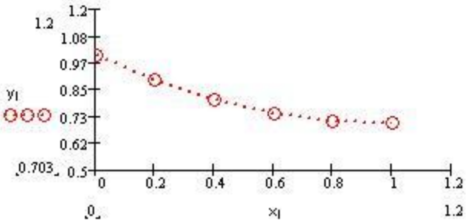
$i := 0 .. 5$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.892 \\ 0.806 \\ 0.746 \\ 0.711 \\ 0.703 \end{pmatrix}$$

Построим график найденного решения y(x)

Для того, чтобы построить график приближенного решения, щелкните в панели Graph по пиктограмме декартова графика, введите в помеченной позиции возле оси абсцисс обозначение компонент вектора, содержащего значения узлов сетки, а в позиции возле оси ординат - обозначение компонент вектора, содержащего значения приближенного решения в узлах сетки; затем щелкните по свободному месту в рабочем документе вне поля графиков.





Метод Эйлера допускает простую геометрическую интерпретацию. Пусть известна точка (x_i,y_i) интегральной кривой уравнения $y'=f(x,y)$. Касательная к интегральной кривой уравнения, проходящая через эту точку, определяется уравнением $y=y_i+f(x_i,y_i)(x-x_i)$.

Следовательно, вычисленная методом Эйлера точка ($x_{i+}1$, $y_{i+}1$), где $x_{i+}1=x_i+h$, $y_{i+}1=y_i$ + h $f(x_i , y_i)$, лежит на этой касательной.

ПРИМЕР 2. Геометрическая интерпретация метода Эйлера.

Найдем приближенное решение задачи Коши $y'=y$, $y(0)=1$ в точке $x=1$ методом Эйлера.

Изобразим на графике точное решение y = exp(x), касательную к нему и вычисленное приближенное решение.

Изобразим приближенное решение графически, построим график точного решения y=exp(x) и построим касательную к графику решения в точке (0,y(0)).

Формула Эйлера при h=1, y(0)=1, f(x,y)=y имеет вид: y=y(0)+hf(0)

Уравнение касательной к графику решения в точке (0, y(0)), y(0)=1, f(x,y)=y имеет вид: y=y(0)+f(0,y(0))(x-0)

Определим правую часть уравнения и начальную точку.

$f(x,y) := y \quad x_0 := 0 \quad y_0 := 1$

Вычислим приближенное решение по формуле Эйлера:

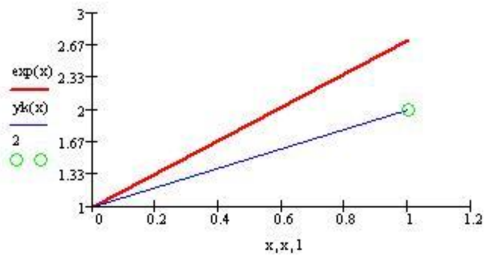
$x_1 := 1 \quad y_1 := y_0 + f(x_0,y_0)\cdot(x_1 - x_0)$

Уравнение касательной к графику решения имеет вид:

$yk(x) := y_0 + f(x_0,y_0)\cdot(x - x_0)$

Построим график точного решения y=exp(x), касательную к графику решения в точке (0, y(0))=(0, 1), а также изобразим приближенное решение y=2 в точке x=1

Для того, чтобы построить график приближенного решения, щелкните в панели Graph по пиктограмме декартова графика, введите в помеченной позиции возле оси абсцисс обозначение компонент вектора, содержащего значения узлов сетки, а в позиции возле оси ординат - обозначение компонент вектора, содержащего значения приближенного решения в узлах сетки; затем щелкните по свободному месту в рабочем документе вне поля графиков.



Видно, что приближенное значение, вычисленное по формуле Эйлера на одном шаге, лежит на касательной к графику решения. Видно также, что погрешность приближенного решения растет с увеличением шага.

Задания к лабораторной работе

Решить заданное дифференциальное уравнение методом Эйлера с шагом h=0.2 и h=0.1, построить графики решения, сравнить полученные результаты. Найти точное решение уравнения, построить график.

№ в-та	Уравнение	Начальные условия a	№ в-та	Уравнение	Начальные условия a
1	$y' = y + 6x$	$y(0) = 0$	6	$y' = y + 6x$	$y(1) = 0$
2	$y' = 2y + x$	$y(0) = 0$	7	$y' = 2y + x$	$y(1) = 0$
3	$y' = 2y + 2x$	$y(0) = 1$	8	$y' = 2y + 2x$	$y(1) = 0$
4	$y' = 2y + 3x$	$y(0) = 1$	9	$y' = 2y + 3x$	$y(1) = 0$
5	$y' = 2y + 4x$	$y(0) = 1$	10	$y' = 2y + 4x$	$y(1) = 0$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Как определить порядок дифференциального уравнения?

3. Какие типы дифференциальных уравнений первого порядка вы знаете?
4. Сформулируйте теорему Коши.
5. Что позволяет найти задача Коши?
6.Как называется график решения дифференциального уравнения?
7. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
8. Запишите условие, при котором ДУ является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах

2.12. Лабораторная работа № 12 (2 часа).

Тема: «Исследование свойств линейных пространств»

2.12.1 Цель работы: повторить обзорно основные понятия теории линейных пространств и линейных операторов, закрепить эти понятия в практике решения задач

2.12.2 Задачи работы:

1. Способы задания метрики.
2. Вопросы сходимости.
3. Отличительные особенности.

2.12.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.12.4 Описание (ход) работы:

Пусть М —множество элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на действительное число:

- паре элементов множества $x \in M,\ y \in M$ отвечает элемент $x + y \in M$, называемый суммой x и y;
- паре $x, \alpha,\ x \in M,\ \alpha \in R$, α — любое действительное число, отвечает элемент $\alpha x \in M$, называемый произведением числа α и элемента x.

Будем называть множество М **линейным пространством,** если для всех его элементов определены операции сложения и умножения на действительное число и для любых элементов $x, y, z \in M$ и произвольных чисел α, β справедливо:

1. $x + y = y + x$, сложение коммутативно;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,сложение ассоциативно;
3. существует единственный нулевой элемент $\Theta \in M$ такой, что $x + \Theta = x, \quad \forall x \in M$;
4. для каждого элемента существует единственный противоположный элемент -x такой, что $x + (-x) = \Theta, \quad \forall x \in M$,
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, умножение на число ассоциативно;
6. $1 \cdot x = x,\ \forall x \in M$;
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, умножение на число дистрибутивно относительно сложения элементов;
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$, умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел.

Равенства 1—8 называют аксиомами линейного пространства.

Линейное пространство часто называют векторным пространством, а его элементы — векторами.

Упражнение 1. Покажите, что пространство арифметических векторов R^n является линейным пространством.

Упражнение 2. Рассмотрим множество М арифметических векторов из R^n, компоненты которых — целые числа. Покажите, что это множество не является линейным пространством.

Упражнение 3. Рассмотрим множество M^n многочленов с действительными коэффициентами относительно одного переменного, n-й степени, n>1, с определенными для многочленов операциями сложения и умножения на число.

$M^n = \{P_n | P_n(t) = a_n t^n + a_n\text{-}1t^n\text{-}1 + \ldots + a_1 t + a_0, a_n \neq 0\}$

Покажите, что это множество не является линейным пространством.

Некоторые свойства линейных пространств

1. В произвольном линейном пространстве нулевой элемент — единственный.
2. В произвольном линейном пространстве нулевой элемент равен произведению произвольного элемента на действительное число 0.
3. В произвольном линейном пространстве каждому элементу отвечает единственный противоположный элемент.
4. В произвольном линейном пространстве противоположный элемент произвольного элемента x равен произведению x на действительное число -1.
5. В произвольном линейном пространстве для любых двух произвольных элементов x и y существует и единственна разность: $x\text{-}y = x+(-1)\cdot y$.

Упражнение 4. Докажите свойства 3-5 линейных пространств самостоятельно.

2.13. Лабораторная работа № 13 (2 часа).

Тема: «Исследование свойств нормированных пространств»

2.13.1 Цель работы: повторить обзорно основные понятия теории нормированных пространств и линейных операторов, закрепить эти понятия в практике решения задач

2.13.2 Задачи работы:

1. Способы задания метрики.
2. Вопросы сходимости.
3. Отличительные особенности.

2.13.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.13.4 Описание (ход) работы:

Линейное пространство E называется евклидовым, если каждой паре векторов x, y из этого пространства поставлено в соответствие действительное число $x \cdot y$, называемое скалярным произведением, и при этом для любых $x,\ y,\ z$ из E и любого действительного числа α справедливы следующие равенства:

1. $x \cdot y = y \cdot x$;
2. $(\alpha x) \cdot y = \alpha\ (x \cdot y)$;
3. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
4. $x \cdot x > 0$ при $x \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$, $\mathbf{0}$ -- нулевой вектор.

Число $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ называется длиной вектора x; число $|x - y| = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$ -- расстоянием между векторами $x,\ y$; угол $\varphi \in [0,\ \pi]$, косинус которого $\cos\varphi = \dfrac{x \cdot y}{|x|\,|y|}$, -- углом между векторами x, y, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Векторы x, y из евклидова пространства E называются ортогональными, если $x \cdot y = 0$. Система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ евклидова пространства называется ортонормированной, если векторы системы попарно ортогональны и имеют единичную длину.

Базис конечномерного евклидова пространства называется ортонормированным базисом, если образующие его векторы попарно ортогональны и имеют единичную длину. Поскольку доказано, что в любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, будем рассматривать в n-мерном евклидовом пространстве E_n только ортонормированные базисы.

Простейший пример евклидова пространства дает нам пространство $\mathbb{R}^n$ -- пространство столбцов, в котором скалярное произведение введено формулой

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Тогда для любых $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ справедливы формулы:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

Все евклидовы пространства размерности n устроены так же, как пространство $\mathbb{R}^n$.

Величины $x \cdot y$, $|x|$ и $\cos\varphi$ характеризуют взаимное расположение векторов и не зависят от выбранного ортонормированного базиса.

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$ -- два ортонормированных базиса в n-мерном евклидовом пространстве, то матрица перехода от одного из этих базисов к другому -- ортогональная матрица.

Пример 1. Нахождение координат вектора в новом базисе.

Докажем, что векторы $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, , $f_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве L_4 и найдем координаты вектора $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Пример 2. Исследование на линейную зависимость систем векторов. Выделение линейно независимой подсистемы векторов.

Исследуем на линейную зависимость системы векторов

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

Выделим в линейно зависимой системе линейно независимую подсистему. Найдем линейные выражения всех векторов линейно зависимой системы через векторы линейно независимой подсистемы.

Пример 3. Скалярное произведение векторов, норма вектора, угол между векторами.

Докажем, что векторы

$$g_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

образуют ортонормированный базис E_4. Вычислим $x \cdot y$, $|x|$, $|y|$, $\cos\varphi$ для векторов $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Найдем их координаты в базисе g_1, g_2, g_3, g_4 и вычислим в новом базисе $x \cdot y$, $|x|$, $|y|$, $\cos\varphi$. Докажем, что матрица перехода к базису g_1, g_2, g_3, g_4 – ортогональная матрица.

Покажем решение примера в пакете Mathcad/

ORIGIN := 1

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g1} = \mathbf{U}^{\langle 1\rangle} \quad \mathbf{g2} = \mathbf{U}^{\langle 2\rangle} \quad \mathbf{g3} = \mathbf{U}^{\langle 3\rangle} \quad \mathbf{g4} = \mathbf{U}^{\langle 4\rangle}$$

Столбцы матрицы U единичной длины и попарно ортогональны.

$$\mathbf{U}^{\langle 1\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 1\rangle} = 1 \quad \mathbf{U}^{\langle 2\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 2\rangle} = 1 \quad \mathbf{U}^{\langle 3\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 3\rangle} = 1 \quad \mathbf{U}^{\langle 4\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 4\rangle} = 1$$

$$\mathbf{U}^{\langle 1\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 2\rangle} = 0 \quad \mathbf{U}^{\langle 1\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 3\rangle} = 0 \quad \mathbf{U}^{\langle 1\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 4\rangle} = 0$$

$$\mathbf{U}^{\langle 2\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 3\rangle} = 0 \quad \mathbf{U}^{\langle 2\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 4\rangle} = 0 \quad \mathbf{U}^{\langle 3\rangle}\cdot\mathbf{U}^{\langle 4\rangle} = 0$$

Транспонированная матрица U

$$\mathbf{U}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 8 \qquad \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = 2.646 \qquad \sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} = 3.162 \qquad \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\cdot\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}} = 0.956$$

Координаты векторов x и y в базисе g1,g2,g3,g4

$$xg := U^T \cdot x \qquad xg = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad yg := U^T \cdot y \qquad yg = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$xg \cdot yg = 8 \qquad \sqrt{xg \cdot xg} = 2.646 \qquad \sqrt{yg \cdot yg} = 3.162 \qquad \frac{xg \cdot yg}{\sqrt{xg \cdot xg} \cdot \sqrt{yg \cdot yg}} = 0.956$$

2.14. Лабораторная работа № 14 (2 часа).

Тема: «Исследование свойств евклидовых пространств»

2.14.1 Цель работы: повторить обзорно основные понятия теории эвклидовых пространств и линейных операторов, закрепить эти понятия в практике решения задач

2.14.2 Задачи работы:

1. Способы задания метрики.

2. Вопросы сходимости.

3. Отличительные особенности

2.14.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.14.4 Описание (ход) работы:

Линейное пространство E называется евклидовым, если каждой паре векторов x, y из этого пространства поставлено в соответствие действительное число $x \cdot y$, называемое скалярным произведением, и при этом для любых x, y, z из E и любого действительного числа α справедливы следующие равенства:

1. $x \cdot y = y \cdot x$;
2. $(\alpha x) \cdot y = \alpha (x \cdot y)$;
3. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
4. $x \cdot x > 0$ при $x \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$, $\mathbf{0}$ -- нулевой вектор.

Число $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ называется длиной вектора x; число $|x - y| = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$ -- расстоянием между векторами x, y; угол $\varphi \in [0, \pi]$, косинус которого $\cos\varphi = \dfrac{x \cdot y}{|x||y|}$, -- углом между векторами x, y, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Векторы x, y из евклидова пространства E называются ортогональными, если $x \cdot y = 0$. Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства называется ортонормированной, если векторы системы попарно ортогональны и имеют единичную длину.

Базис конечномерного евклидова пространства называется ортонормированным базисом, если образующие его векторы попарно ортогональны и имеют единичную длину. Поскольку доказано, что в любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, будем рассматривать в n-мерном евклидовом пространстве E_n только ортонормированные базисы.

Простейший пример евклидова пространства дает нам пространство $\mathbb{R}^n$ -- пространство столбцов, в котором скалярное произведение введено

формулой $$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$.

Тогда для любых $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ справедливы формулы:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

Все евклидовы пространства размерности n устроены так же, как пространство $\mathbb{R}^n$.

Величины $x \cdot y$, $|x|$ и $\cos\varphi$ характеризуют взаимное расположение векторов и не зависят от выбранного ортонормированного базиса.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ -- два ортонормированных базиса в n-мерном евклидовом пространстве, то матрица перехода от одного из этих базисов к другому -- ортогональная матрица.

Пример 1. Нахождение координат вектора в новом базисе.

Докажем, что векторы $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, , $f_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве L_4 и найдем координаты вектора $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Пример 2. Исследование на линейную зависимость систем векторов. Выделение линейно независимой подсистемы векторов.

Исследуем на линейную зависимость системы векторов

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Выделим в линейно зависимой системе линейно независимую подсистему. Найдем линейные выражения всех векторов линейно зависимой системы через векторы линейно независимой подсистемы.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f1 = C^{\langle 1 \rangle} \\ f2 = C^{\langle 2 \rangle} \\ f3 = C^{\langle 3 \rangle} \\ f4 = C^{\langle 4 \rangle} \end{matrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} g1 = D^{\langle 1 \rangle} \\ g2 = D^{\langle 2 \rangle} \\ g3 = D^{\langle 3 \rangle} \\ g4 = D^{\langle 4 \rangle} \end{matrix}$$

$\text{rank}(C) = 3$ Векторы-столбцы матрицы C линейно зависимы.

$\text{rank}(D) = 4$ Векторы-столбцы матрицы D линейно независимы.

$$\text{rref}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Первые три столбца матрицы
C
линейно независимы

Выражение векторов линейно-зависимой системы f1, f2, f3, f4 через векторы линейно независимой подсистемы f1, f2, f3.

Проверка

$$f1 = f1$$
$$f2 = f2$$
$$f3 = f3$$
$$f4 = f1 - f2 + f3$$

$$f4 := C^{\langle 1\rangle} - C^{\langle 2\rangle} + C^{\langle 3\rangle}$$

$$f4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$