

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ
ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.ДВ.04.02 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ
ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

Направление подготовки (специальность):

27.03.04 Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:

Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Конспект лекций	3
1.1 Лекция № 1 Основы планирования эксперимента. Пассивный и активный эксперимент. Факторы, общая характеристика, функция отклика. Планы факторного эксперимента. Полный факторный эксперимент.....	3
1.2 Лекция № 2 Техника экспериментальных измерений. Основные положения теории погрешностей. Адекватность моделей. Методы оптимизации параметров процессов управления в технических системах.....	13
2. Методические указания по проведению практических занятий	27
2.1 Практическое занятие № ПЗ-1 Математическое моделирование в инженерных исследованиях Основные этапы экспериментального исследования. Классификации методов исследования.....	27
2.2 Практическое занятие № ПЗ-2 Факторы, методы отбора, общая характеристика, функция отклика. Планы факторного эксперимента.....	28
2.3 Практическое занятие № ПЗ-3 Теоретические основы стохастического описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах.....	28
2.4 Практическое занятие № ПЗ-4 Техника экспериментальных измерений. Основные положения теории погрешностей	33

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Основы планирования эксперимента. Пассивный и активный эксперимент. Факторы, общая характеристика, функция отклика. Планы факторного эксперимента. Полный факторный эксперимент»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Основы планирования эксперимента. Пассивный и активный эксперимент
2. Факторы, общая характеристика, функция отклика
3. Оптимизация как цель математического моделирования. Планы факторного эксперимента

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основы планирования эксперимента. Пассивный и активный эксперимент

Эксперимент – одна из сфер человеческой практики, в которой подвергается проверке истинность выдвигаемых гипотез или выявляются закономерности объективного мира.

Цель планирования эксперимента – получение максимума информации о свойствах исследуемого объекта при минимуме опытов.

Такой подход обусловлен высокой стоимостью экспериментов, как физических, так и вычислительных, и вместе с тем необходимостью построения адекватной модели. Планируют как **активный**, так и **пассивный** эксперимент.

К основным преимуществам активного эксперимента можно отнести следующие:

- планирование эксперимента дает четкую последовательную логическую схему построения всего процесса исследования, т. е. известно что, когда и как надо делать;
- внедрение активного планирования позволяет повысить эффективность исследований, извлечь наибольшее количество сведений об изучаемых процессах при ограниченных затратах, сократить объём экспериментальных исследований, повысить надежность и чёткость интерпретации полученных результатов;
- обработка результатов эксперимента осуществляется стандартными приёмами, позволяющими формализовать процесс построения модели и сопоставить материалы различных исследований.

Таким образом, при оптимизации исследуемых процессов активный эксперимент наиболее эффективен при исследовании в лабораторных условиях, т. е. на этапе оптимального проектирования.

В то же время, в процессе производства технологический процесс постоянно подвергается воздействию случайных неконтролируемых возмущений, что приводит к смещению найденного в лабораторных условиях оптимума относительно технологических факторов. Чтобы иметь возможность оценить это смещение и вести процесс при наиболее благоприятных условиях, необходимо после проведения лабораторных исследований продолжить изучение технологического процесса в реальных производственных условиях. Наилучшие результаты при исследовании технологического процесса в производственных условиях, т. е. на этапе оптимального управления, дает пассивный эксперимент.

Пассивный эксперимент сводится к сбору и обработке данных, полученных в результате пассивного наблюдения за технологическим процессом в производственных условиях. Для анализа и обработки этих данных в настоящее время применяется достаточно большое число методов. К ним относятся, в первую очередь, регрессионный и корреляционный анализы, а также факторный анализ, метод главных компонент, временные ряды (дрейф параметров во времени) и др.

В результате проведения регрессионного и корреляционного анализа исследуемого процесса в производственных условиях, можно определить уравнение регрессии и найти с помощью коэффициента корреляции степень взаимосвязи изучаемых переменных величин. Однако сами по себе уравнения регрессии и коэффициент корреляции мало что говорят о возможной причинной связи между рассматриваемыми переменными. Для установления этой связи можно использовать факторный анализ, который является довольно гибким количественным методом статистического анализа. Он в большей мере, чем другие методы, может применяться для проверки сложных гипотез и позволяет получить информацию о числе факторов в исследуемой системе, их природе и зависимости, а также степени этой зависимости. Так, по наблюдениям за вариациями 30...40 различных переменных можно с помощью факторного анализа получить конкретную информацию о том, что только пять факторов коррелируют между собой и каждый из них в той или иной степени влияет на изменения соответствующих исходных переменных. Этим путем можно проверить гипотезу, выдвинутую по результатам наблюдений, полученным при анализе другими методами.

Наиболее существенным недостатком факторного анализа является отсутствие однозначного математического решения проблемы факторных нагрузок, т. е. вклада отдельных факторов в изменения значений функции отклика.

Преимущество пассивного эксперимента состоит в том, что при его применении нет необходимости тратить время и средства на постановку опытов. Полученные результаты можно затем использовать для управления процессом. Однако пассивный эксперимент имеет существенные недостатки, ограничивающие его применение для оптимизации технологических процессов.

Грамотно организованный пассивный эксперимент и анализ его результатов могут дать богатую информацию о реальном процессе и позволят не только скорректировать результаты предварительно проведенного активного эксперимента, но в ряде случаев даже определить модель исследуемого процесса. Однако это требует глубокого познания механизма явлений изучаемого процесса, и чем он сложнее, тем очевиднее необходимость высокого уровня предварительных теоретических знаний экспериментатора об исследуемом процессе.

Планируемый активный эксперимент при прочих равных условиях точнее и информативнее, а иногда и дешевле пассивного. Это следует учитывать при выборе вида эксперимента. В вычислительном эксперименте, в отличие от физического, нет никаких ограничений на выбор управляемых факторов и характер их изменения. Поэтому вычислительные эксперименты обычно всегда реализуются как активные. В дальнейшем будут рассматриваться в основном вопросы, связанные с планированием активных экспериментов.

При планировании активных экспериментов используются следующие принципы: -отказ от полного перебора всех возможных состояний объекта;

- постепенное усложнение структуры математической модели;
- сопоставление результатов эксперимента с величиной случайных помех;
- рандомизация опытов;
- оптимальное планирование эксперимента.

2. Факторы, общая характеристика, функция отклика

В качестве целевой функции принимают тот параметр, который наиболее универсально характеризует объект и является обобщенной характеристикой цели исследования. Одним из основных требований, предъявляемых к параметру оптимизации, является универсальность и полнота характеристики, им определяемой. Кроме того, параметр оптимизации должен выражаться в численном виде и быть статистически однозначным, т.е. определенной совокупности значений факторов соответствует единственный параметр оптимизации. Обратное утверждение не имеет смысла, поскольку одному значению параметра оптимизации может соответствовать множество сочетаний значений факторов. Если параметр оптимизации невозможно измерить по причине отсутствия технических средств, то используют принцип ранжирования, в соответствии с которым целевой функции присваивают ранги (баллы), используя специальную шкалу баллов.

Желательно, чтобы параметр оптимизации имел строгий физический смысл и был прост в определении.

Факторами называют параметры, с помощью которых можно воздействовать на состояние объекта. Они обладают следующими основными свойствами:

- факторы должны быть измеряемыми и управляемыми, т.е. должна иметься возможность установить фактор на определенном уровне и измерить его с достаточной степенью точности;
- факторы должны иметь непосредственное однозначное воздействие на объект.

Кроме указанных, существуют требования, предъявляемые к совокупности факторов, определяющих объект исследования:

- факторы должны быть совместимы, т.е. должна иметь место техническая возможность устанавливать любые значения каждого из факторов вне зависимости от других (кроме того, при этом должно соблюдаться условие безопасности эксперимента);
- факторы должны быть независимы, т.е. изменение величины одного фактора не должно быть причиной изменения другого.

При изменении значений факторов изменяется величина целевой функции. Уравнение, связывающее целевую функцию с факторами, называется функцией отклика $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функция отклика, описывающая поведение объекта и взаимосвязь между целевой функцией и факторами в некотором диапазоне их изменения, называется интерполяционной моделью.

Геометрическая интерпретация функции отклика называется поверхностью отклика. Такая поверхность имеет место в случае двухфакторной задачи. Во всех остальных случаях под поверхностью отклика понимается некая гиперповерхность, т.е. гипотетическая многомерная поверхность, дать графическую иллюстрацию которой не представляется возможным, вследствие отсутствия соответствующих навыков.

Для описания поверхности отклика может быть применена та или иная математическая зависимость. Такая зависимость, используемая для решения задач по

методу планирования эксперимента (т.е. задач интерполяции и оптимизации), должна отвечать следующим требованиям:

- достаточно точно описывать объект (поверхность отклика);
- должна указывать направление движения к оптимуму

Решить экспериментальную задачу можно несколькими методами: путем перебора в экспериментах всех возможных состояний (совокупности факторов); путем случайного перебора возможных сочетаний значений всех факторов; можно использовать некую программу поиска решения задачи.

Детальное представление о свойствах поверхности отклика может быть получено лишь при условии использования густой дискретной сетки значений факторов, покрывающей все факторное пространство. В узлах этой многомерной сетки находятся точки плана, в которых проводятся опыты. В этом случае в принципе можно получить факторную модель, которая будет практически почти полностью соответствовать исходной теоретической модели. Однако в большинстве случаев при решении практических задач, для которых используется факторная модель, такого детального описания не требуется. Выбор структуры факторной модели основан на постулировании определенной степени гладкости поверхности отклика.

Поэтому с целью уменьшения количества опытов принимают небольшое число точек плана, для которых осуществляется реализация эксперимента. В отсутствие априорной информации о свойствах функции отклика нет смысла сразу строить сложную математическую модель объекта.

Если проверка этой модели на адекватность не дает удовлетворительного результата, ее постепенно усложняют путем изменения структуры (например, повышая степень полинома, принятого в качестве факторной модели, или вводя в модель дополнительные факторы и т.п.).

При этом используются результаты опытов, выполненных при построении простой модели, и проводится некоторое количество дополнительных опытов. При большом уровне случайной помехи получается большой разброс значений функции отклика Y в опытах, проведенных в одной и той же точке плана.

В этом случае оказывается, что чем выше уровень помехи, тем с большей вероятностью простая модель окажется работоспособной, чем меньше уровень помехи, тем точнее должна быть факторная модель. Кроме случайной помехи при проведении эксперимента может иметь место систематическая помеха.

Наличие этой помехи практически никак не обнаруживается и результат ее воздействия на функцию не поддается контролю. Однако если путем соответствующей организации проведения опытов искусственно создать случайную ситуацию, то систематическую помеху можно перевести в разряд случайных. Такой принцип организации эксперимента называют *рандомизацией* систематически действующих помех. Наличие помех приводит к ошибкам эксперимента.

Ошибки подразделяют на *систематические* и *случайные*, соответственно наименования вызывающих их факторов – помех. В вычислительных активных экспериментах ошибки характерны только для определяемых значений функций отклика. Если исходить из целей построения факторных моделей на основе теоретических моделей, полагая, что теоретические модели дают точное описание физических свойств

технического объекта, а регрессионная модель является ее аппроксимацией, то значения функций отклика будут содержать только случайную ошибку.

В этом случае необходимости в рандомизации опытов не возникает. Рандомизацию опытов осуществляют только в физических экспериментах. Следует отметить, что в этих экспериментах систематическую ошибку может порождать, наряду с отмеченными в предыдущем параграфе факторами, также неточное задание значений управляемых факторов, обусловленное некачественной калибровкой приборов для их измерения (инструментальная ошибка), конструктивными или технологическими факторами.

К факторам в активном эксперименте предъявляются определенные требования. Они должны быть:

- 1) **управляемыми** (установка заданных значений и поддержание постоянными в процессе опыта);
- 2) **совместными** (их взаимное влияние не должно нарушать процесс функционирования объекта);
- 3) **независимыми** (уровень любого фактора должен устанавливаться независимо от уровней остальных);
- 4) **однозначными** (одни факторы не должны быть функцией других);
- 5) **непосредственно влияющими на выходные параметры.**

В вычислительном эксперименте реализация трех первых требований не создает никаких затруднений, а в физическом эксперименте могут возникнуть сложности и далее невозможность их осуществления, что приведет к необходимости замены активного эксперимента пассивным.

Функции отклика должны быть:

- 1) **численно измеряемыми;**
- 2) **иметь четкий физический смысл;**
- 3) **однозначными** (характеризовать только одно свойство объекта);
- 4) **информативными** (полностью характеризовать определенное свойство объекта);
- 5) **статистически эффективными** (измеряться с достаточной точностью с целью сокращения дублирования опытов).

3. Оптимизация как цель математического моделирования. Планы факторного эксперимента

Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. Среди множества возможных вариантов приходится отыскивать «наилучшие» в некотором смысле, то есть при ограничениях, налагаемых на природные, экономические и технологические возможности. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза систем математические методы и современную вычислительную технику. Такие методы объединяются под общим названием — математическое программирование.

Математическое программирование — область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, называют *целевой, показателем эффективности* или *критерием оптимальности*. Экономические возможности формализуются в виде *системы ограничений*. Все это составляет математическую модель. *Математическая модель задачи*

— это отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д. Модель задачи математического программирования включает:

1) совокупность неизвестных величин, действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют *планом задачи* (вектором управления, решением, управлением, стратегией, поведением и др.);

2) целевую функцию (функцию цели, показатель эффективности, критерий оптимальности, функционал задачи и др.). Целевая функция позволяет выбирать наилучший вариант - из множества возможных. Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное значение. Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень обслуживания или дефицитности, число комплектов, отходы и т. д.;

Эти условия следуют из ограниченности ресурсов, которыми располагает общество в любой момент времени, из необходимости удовлетворения насущных потребностей, из условий производственных и технологических процессов. Ограниченными являются не только материальные, финансовые и трудовые ресурсы.

Таковыми могут быть возможности технического, технологического и вообще научного потенциала. Нередко потребности превышают возможности их удовлетворения. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует *область допустимых решений*.

План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется *допустимым*. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, называется *оптимальным*. Оптимальное решение, вообще говоря, не обязательно единственно, возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесчисленное множество оптимальных решений.

Математическая теория планирования эксперимента позволяет повысить эффективность экспериментальных исследований. Основы этой теории заложил английский статистик Р. Фишер.

Он впервые показал целесообразность одновременного варьирования многими переменными в противовес широко распространённому однофакторному эксперименту. Планирование эксперимента — это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи.

При этом существенно следующее:

- 1) одновременное варьирование всеми переменными, определяющими изучаемый процесс, по специальным правилам, алгоритмам;
- 2) стремление к минимизации общего числа опытов.

В данном случае используется кибернетическое представление о модели объекта в виде «черного ящика». Пусть в процессе исследования какого-либо объекта («черного ящика») некоторое качество его или целевая функция Y зависит от нескольких величин $Y = F\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (1)

Переменные x_i представляющие варьируемые переменные, называют факторами, а Y — выход, функция отклика, целевая функция. Выходов Y может быть несколько.

В планировании могут участвовать только независимые факторы, которые можно устанавливать и поддерживать на фиксированных уровнях в течение опыта.

При этом каждый фактор x_i может принимать в опыте одно из нескольких допустимых значений. Эти значения называют уровнями, фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний объекта и один опыт в эксперименте.

Все возможные наборы уровней факторов определяет общее число возможных различных опытов.

В качестве модели рассматривается представление (1) в виде степенного ряда

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + \dots B_n X_n + B_{12} X_1 X_2 + \dots B_{n-1,n} X_{n-1} X_n + \\ + B_{11} X_1^2 + \dots B_{nn} X_n^2 + \dots \quad (2)$$

На практике ограничиваются конечным числом членов разложения, т.е. неизвестная функция аппроксимируется усеченным полиномом некоторой степени. Каждый фактор имеет свой допустимый диапазон изменения, т.е. известны граничные значения $X_{i\min}$, $X_{i\max}$. Каждому фактору соответствует своя координатная ось, а образованное таким образом пространство называют факторным пространством. Назначая граничные значения, задаем область определения функции Y в факторном пространстве. На рисунке представлена область экспериментирования функции двух переменных.

Поскольку факторы в общем случае размерные величины, их кодируют, чтобы иметь дело с безразмерными факторами. Операция кодирования представляет собой линейное преобразование факторного пространства, что ведет к переносу начала координат факторного пространства в точку с координатами

$$X_{i\text{cp}} = \frac{X_{i\min} + X_{i\max}}{2}.$$

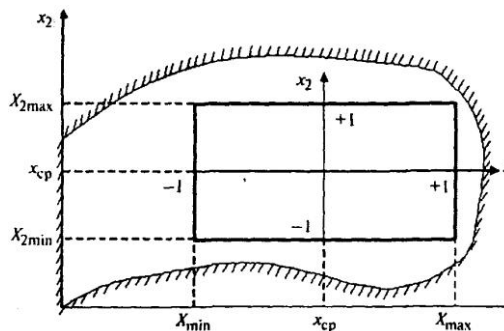


Рис. Область экспериментирования функции двух переменных

Тогда для каждого фактора $X_{i\min}$ будет соответствовать -1, а $X_{i\max}$ +1. Кодированные значения факторов x_i определяются следующим соотношением:

$$x_i = \frac{x_i - x_{i\text{cp}}}{x_{i\text{cp}} - x_{i\min}} = \frac{x_i - x_{i\text{cp}}}{x_{i\max} - x_{i\text{cp}}}. \quad (2)$$

Теперь уравнение (2) можно переписать через кодированные факторы в виде

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{n-1,n} x_{n-1} x_n + \\ + b_{11} x_1^2 + \dots + b_{nn} x_n^2 + \dots \quad (3)$$

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots$$

или

$$\quad (4)$$

Уравнение (4) можно переписать в еще более компактной форме, если ввести фиктивный фактор x_0 , тождественно равный единице, и обозначить все двойные, тройные взаимодействия, а также квадраты факторов символом X_i , а соответствующие коэффициенты символом b_i

$$Y = \sum_{i=0}^m b_i x_i. \quad (5)$$

Пример. Пусть имеем два фактора X_1 и X_2 . Тогда в соответствии с уравнением (4)

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2$$

или

в

соответствии

(5.5)

$$Y = p^0 x^0 + p^1 x^1 + p^2 x^2 + p^3 x^3 + p^4 x^4 + p^5 x^5$$

и

т.д.

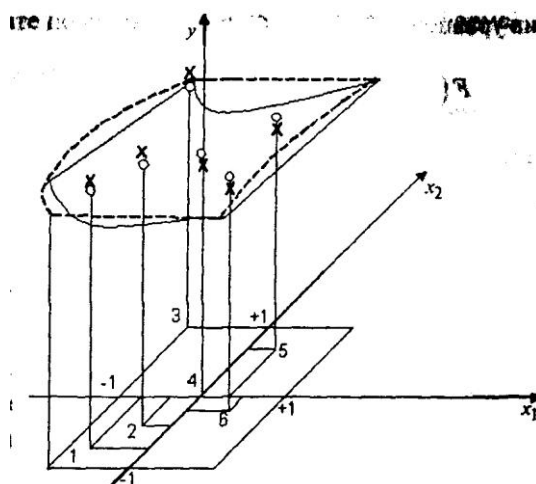


Рис. 2. Поверхность отклика в двухфакторном пространстве

В соответствии с (5) задача нахождения Y заключается в том, чтобы на основе эксперимента при вариации x_i определить неизвестные коэффициенты b_i .

Выражения (1) и (5) называют функцией отклика, представляющую в факторном пространстве в общем случае поверхность отклика. На рис. 2 показана поверхность отклика в двухфакторном пространстве. Близость аппроксимирующей поверхности к истинной поверхности можно оценить тем или иным критерием. В качестве такой меры близости удобно выбрать квадратичную форму вида

$$\sum_u^N (Y_u - Y_u^*)^2 = \min, \quad (6)$$

где N — число экспериментальных значений функции отклика, число опытов в эксперименте; u — номер опыта; Y — значения функций отклика, предсказанная аппроксимирующим выражением; Y_u — значения истинной поверхности отклика.

Рассмотрим пример для случая одного фактора:

$$Y^* = b_0 + b_1 x. \quad (7)$$

Подставив уравнение (5.7) в (5.6), получим:

$$F(b_0, b_1) = \sum_u^N (Y_u - b_0 - b_1 x_u)^2 = \min.$$

Чтобы найти экстремум, приравняем нулю частные производные:

$$\frac{\partial F(b_0, b_1)}{\partial b_0} = -2 \sum_{u=1}^N (Y_u - b_0 - b_1 x_u) = 0;$$

$$\frac{\partial F(b_0, b_1)}{\partial b_1} = -2 \sum_{u=1}^N (Y_u - b_0 - b_1 x_u) x_u = 0$$

или

$$Nb_0 + b_1 \sum_{u=1}^N x_u = \sum_{u=1}^N Y_u;$$

$$b_0 \sum_{u=1}^N x_u + b_1 \sum_{u=1}^N x_u^2 = \sum_{u=1}^N x_u Y_u.$$

Решая эту систему, получаем искомые значения b_0 и b_1 . Выражения для вычисления b_0 и b_1 , получаются громоздкими, а при большем числе факторов задача вычисления коэффициентов еще больше усложняется.

В связи с этим используют матричную форму записи уравнений и решений относительно коэффициентов b . Если было проведено N опытов, в каждом из которых задавалось определенное сочетание факторов (в n -м опыте — $x_{0u}, x_{1u}, \dots, x_{mu}$), то все возможные сочетания факторов можно представить матрицей X , все результаты — матрицей Y , а все искомые коэффициенты — матрицей B :

$$X = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{m1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0u} & x_{1u} & \dots & x_{mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{mN} \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_u \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_u \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix},$$

В результате получим уравнение в матричной форме

$$Y = XB \quad (1)$$

решение можно получить в виде $B = X^{-1}Y$.

В такой форме надо обращать матрицу, что непросто.

Чтобы упростить решение, запишем (1) в эквивалентной форме $X^T Y = X^T X B$,

где X^T — транспонированная матрица X . Тогда получаем $CB = X^T Y$, (2)

где матрица $C = X^T X$ — квадратная и имеет $(1 + m)$ строк и столбцов.

Для определения коэффициентов A , умножим на матрицу C^{-1} слева обе части уравнения (2). Поскольку $C^{-1}C$ есть единичная матрица, то получаем: $B = C^{-1}X^T Y$ (3)

Анализ матрицы C показывает, что она симметричная: на главной диагонали элементы имеют вид $\sum_{u=1}^N x_{iu}^2$, а элементы, симметрично расположенные сверху и снизу от главной диагонали, равны между собой, т.е.

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju} x_{iu}, \quad \text{где } i = 0, 1, \dots, m, \quad j \neq i.$$

Для получения обратной матрицы C^{-1} матрица C должна быть невырожденной, т.е. её определитель не должен равняться нулю

$-\Delta_C \neq 0$. Если точности аппроксимации не достигается, то надо изменить полином.

Любое изменение полинома приведет к изменению всех коэффициентов b_i . Стало быть снова надо обращаться матрицу C , что приводит к существенному росту объема вычислений. Другими словами, при изложенной процедуре все коэффициенты оказываются зависимыми друг от друга. Конечно, хотелось бы избежать этих трудностей и чтобы коэффициенты, вычисленные при исходной, начальной модели, не надо было бы пересчитывать при усложнении модели для достижения большей точности аппроксимации. Оказывается, преодолеть указанные трудности можно с помощью выбора сочетания факторов в каждом опыте по специальному алгоритму.

$$C = \begin{bmatrix} c_{00} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{mm} \end{bmatrix}, \quad \text{а } C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{00}} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_{11}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{c_{ii}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{c_{mm}} \end{bmatrix}$$

Вычислительные трудности существенно уменьшаются, если матрица C является диагональной. Тогда обратная матрица находится очень просто. В этом случае получим $1 + m$ – независимых уравнений в соответствии с уравнением (5.10)

$$b_i = \frac{1}{c_{ii}} \sum_{u=1}^N x_{iu} Y_u, \quad c_{ii} = \sum_{u=1}^N x_{iu}^2,$$

И с учетом того, что

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} Y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}.$$

Имеем в итоге:

Итак, необходимо добиться, чтобы матрица C удовлетворяла условию $c_{ij} = c_{ji} = 0$ (элементы над и под главной диагональю) или что тоже

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju} x_{iu} = 0. \quad (4)$$

Следовательно, условие (4) означает равенство нулю произведения любых двух столбцов матрицы X . Но столбец матрицы можно рассматривать как вектор. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то векторы ортогональны. Поэтому условие (4) называют условием ортогональности матрицы X , а соответствующий выбор плана эксперимента — ортогональным планированием.

1. 2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Техника экспериментальных измерений. Основные положения теории погрешностей. Адекватность моделей. Методы оптимизации параметров процессов управления в технических системах»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Основные положения теории измерений. Техника экспериментальных измерений.
2. Основные положения теории погрешностей.
3. Адекватность моделей
4. Динамическая система. Модель черного ящика. Задачи анализа и синтеза динамических систем. Оператор динамической системы. Классификация операторов.
5. Методы оптимизации параметров процессов управления в динамических системах.

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Основные положения теории измерений. Техника экспериментальных измерений.

2. Основные положения теории погрешностей.

Измерение - это процесс нахождения физических величин, параметров, характеристик опытным путем с помощью средства измерения. Найденное значение называют результатом измерения. Измерения посредством измерительного устройства заключается в сравнении измеряемой величины с ее однородной физической величиной, принятой за единицу измерения. Результат выражается числом.

Измерение проводится различными методами, например: методом непосредственной оценки. В этом методе измерения значение измеренной величины определяют непосредственно по отчетному устройству измерительного прибора, предварительного проградуированного по мере. Т.е. при измерении непосредственной оценки меры не происходит, а она передается через предварительно проградуированную оценку. Используют также метод сравнения с мерой. В этом методе сравниваются с однородной величиной воспроизводимой мерой, размер которой известен и который определяет результат измерения.

Технические средства измерения, имеющие нормированные метрологические характеристики и оказывающие определенное влияние на результаты и погрешности измерений, называют средством измерения. В зависимости от назначения средства измерения делятся на следующие виды:

- а) мера — средство измерения, предназначенное для воспроизведения физической величины данного вида;
- б) измерительный прибор — средство измерения, вырабатывающее сигнал измерительной информации в форме, доступной для восприятия;

в) измерительный преобразователь – средство измерения, вырабатывающее сигнал измерительной информации в форме, удобной для передачи дальнейшего преобразования и обработки, но не поддающейся непосредственному восприятию. К ним относятся: усилители, входные и выходные делители, измерительные трансформаторы.

Согласно механическим функциям средства измерения подразделяются:

- 1) эталоны - средства измерения, обеспечивающие воспроизведение и хранение единицы измерения и официально утвержденные в качестве эталона;
- 2) образцовые средства измерения – это меры или измерительные приборы, служащие для проверки по ним других средств измерения и утвержденные официально в качестве образцовых;
- 3) рабочие средства измерения.

Различают 2 метода измерения:

Прямое измерение – это измерение, при котором искомое значение величины находят из опытных данных (измерение тока и т.д.). Косвенное измерение – это измерение, при котором измеряется не сама величина, а величина функционально связанная с ней, по значению которой и известной функциональной зависимости определяется измеряемая величина. Например, объем детали, определяемый по результатам измерения геометрических размеров.

Погрешности измерений, погрешности измерительных приборов.

При всяком измерении неизбежны отклонения результатов измерения от истинного значения измеряемой величины, обусловленные различными причинами. Эти отклонения – погрешности измерений. Погрешности классифицируют по причинам возникновения, условиям проведения измерений, характеру появления.

В зависимости от причин возникновения различают погрешности измерения:

- а) погрешность метода измерения – составляющая погрешность измерения, происходящая от несовершенства метода измерения (методическая погрешность);
- б) инструментальная (аппаратурная) погрешность, составляющая погрешность, измерения зависящая от погрешности применяемого средства измерения (от его точности, класса прибора);
- в) субъективная – составляющая общей погрешности измерения, обусловленная несовершенством органов чувств, а также небрежности в процессе измерения и фиксации результата.

По условиям проведения измерения, т.е. зависимости результатов измерения от внешних условий окружающей среды, различают основную и дополнительную погрешности:

- основная погрешность средства измерения, используемая в нормированных климатических условиях. Эта погрешность указывается в паспортных данных или в технических условиях на измерительный прибор.
- дополнительная погрешность – погрешность, вызванная отклонением условий измерения от номинальных. Она может превосходить основную погрешность в несколько раз, для ее учета используют графики, таблицы, формулы, которые даны в документации по эксплуатации прибора.

По характеру появления различают:

- систематические погрешности измерения, являются результатом неправильной градуировки, калибровки прибора;
- случайные погрешности измерения – это составляющая погрешности, появление которой носит случайный характер;
- грубые погрешности.

Многообразные причины появления погрешностей приводят к тому, что, многократно снятые характеристики средств измерений или серии однотипных приборов образуют некоторую область значений. В теории измерений для этого

используется понятие полосы неопределенности или полосы погрешностей средства измерения. Средняя линия такой полосы принимается за номинальную характеристику приборов, которая указывается в паспорте и используется для определения результатов измерения. Поэтому погрешность средства измерения есть разница между реальной и номинальной его характеристиками, т.е. является не числом, а функцией измеряемой величины.

$$Y_H = f(x).$$

Разница между реальной и номинальной характеристиками, найденными при заданном значении измеряемой величины, называется абсолютной погрешностью:

$$\Delta_F = Y_F - Y_H.$$

Знак абсолютной погрешности принимается положительным, если реальная характеристика проходит выше номинальной. Абсолютная погрешность не может служить показателем точности измерений, поскольку точность измерения будет изменяться в зависимости от значения измеряемой величины. Поэтому для характеристики точности результатов измерений используется относительная погрешность, выражаемая в относительных единицах или процентах:

$$\gamma = \frac{\Delta_F}{Y} ; \gamma = \frac{\Delta_F}{Y} \cdot 100\%$$

Но эта очень наглядная характеристика точности результата измерения не годится для нормирования погрешности средств измерений. Поэтому для указания и нормирования погрешности средств измерений используется еще одна разновидность погрешности, так называемая *приведенная* погрешность. Она определяется как отношение абсолютной погрешности, выраженной в единицах входной D_X или выходной D_Y величин, к протяженности диапазона изменения соответственно входной X_K или выходной Y_K величины прибора или преобразователя и выражается в относительных единицах или в процентах:

$$\gamma_{\text{пр}} = \frac{\Delta_X}{X_K} = \frac{\Delta_Y}{Y_K}$$

Основное отличие приведенной погрешности от относительной погрешности состоит в том, что D_X или D_Y относится не к переменной текущей величине x или y , а к постоянной величине протяженности диапазона. Приведенная погрешность удобна тем, что для многих систем измерения она имеет одно и то же значение, как для всех точек каждого диапазона, так и для всех его областей, то есть ее удобно использовать для нормирования свойств систем измерения.

Аддитивные и мультипликативные погрешности.

Аддитивные и мультипликативные погрешности используются для описания границ полосы погрешностей средства измерений. При поверке или градуировке средств измерений получают ряд значений входной величины x_i и ряд соответствующих им значений выходной величины y_i . Если эти данные нанести на график с координатами x и y , то полученные точки разместятся в границах некоторой полосы. В том случае, когда эти точки лежат в границах линий, параллельных друг другу, то абсолютная погрешность средства измерений во всем его диапазоне измерений ограничена постоянным, не зависящим от текущего значения входной величины x пределом $\pm D_0$, то такая погрешность называется *аддитивной*, т. е. получаемой путем сложения, или *погрешностью нуля*. Это понятие одинаково применимо как к случайным, так и к систематическим погрешностям.

Примерами систематических аддитивных погрешностей являются погрешности от постороннего груза на чашке весов, от неточной установки прибора на нуль перед измерением, от термо-ЭДС в цепях постоянного тока и т. п. Для устранения таких

погрешностей во многих средствах измерений предусмотрено механическое или электрическое устройство для установки нуля (корректор нуля).

Если ширина полосы погрешностей возрастает пропорционально росту входной величины x , а при $x = 0$ также равна нулю, то такая погрешность называется *мультипликативной*. Мультипликативная погрешность, получаемая путем умножения, называют также *погрешностью чувствительности* вне зависимости от того, является ли погрешность случайной или систематической. Причинами возникновения мультипликативных погрешностей могут быть: изменение коэффициента усиления усилителя, измерение жесткости мембраны датчика манометра или пружинки прибора, изменение спорного напряжения в цифровом вольтметре и т. д.

Погрешность квантования. Это специфическая разновидность погрешности, возникающая в цифровых приборах и дискретных преобразователях. Вследствие того, что измеряемая величина x случайным образом может принимать любые промежуточные значения, погрешность квантования также случайным образом принимает значения в интервале от $+D_0$ до $-D_0$. Поэтому погрешность квантования является инструментальной случайной аддитивной статической погрешностью, так как не зависит ни от текущего значения результата измерения величины x , ни от скорости изменения x во времени.

Методы нормирования погрешностей средств измерений.

Различные средства измерений (СИ) (измерительные приборы и преобразователи, датчики и т.д.) обладают погрешностями, характер проявления которых определяется формой границ полосы погрешности средств измерений (аддитивная, мультипликативная, или иной другой, более сложной). У каждого конкретного СИ имеется случайная и систематическая составляющие погрешности, причем их соотношение также может быть различным.

Для оценки погрешности, которую внесет данное СИ в конкретный результат, используют *нормированные* значения погрешности. Под нормированным значением понимаются погрешности, являющиеся предельными для данного типа СИ. При этом как систематическая, так и случайная составляющие погрешности отдельных экземпляров СИ одного и того же типа могут различаться, однако в целом для этого типа СИ погрешности не превосходят гарантированного значения. Таким образом, нормируется основная и дополнительная погрешности. Именно эти границы основной погрешности, а также коэффициентов влияния и заносятся в паспорт каждого экземпляра СИ.

Правила, согласно которым назначаются эти границы значений погрешности и форма записи, основываются на системе стандартов, обеспечивающих единство измерений.

Класс точности средств измерений.

Это характеристика, определяющая гарантированные границы значений основных и дополнительных погрешностей, а также другие свойства средств измерений, влияющих на точность. Соответствие погрешности СИ приписанному им классу точности во время эксплуатации проверяется при периодических поверках. Если погрешность оказывается меньше нормированных значений, то СИ продолжает эксплуатироваться, если нет, то подлежит ремонту и регулировке.

Основные способы установления пределов допускаемых погрешностей и обозначения классов точности средств измерений установлены ГОСТ 8.401—80.

Оценка инструментальной статистической погрешности результата измерения по паспортным данным средства измерения.

Результат измерения должен иметь оценку его интервал неопределенности, т. е. степень достоверности. В любой форме представления результатов измерений сообщение о любом результате измерений обязательно должно сопровождаться указанием его погрешности.

Погрешность результата прямого однократного измерения зависит от многих факторов, но, в первую очередь, определяется, естественно, погрешностью используемых средств измерений. Поэтому в первом приближении погрешность результата измерения можно принять равной погрешности, которой в данной точке диапазона измерений характеризуется используемое средство измерений.

Так как погрешности средств измерений изменяются в диапазоне, то вычисление должно производиться по формулам, соответствующие формам границ полосы погрешностей. Вычисляться должна как абсолютная, так и относительная погрешности результата измерения, так как первая из них нужна для округления результата и его правильной записи, а вторая — для однозначной сравнительной характеристики его точности.

Для разных характеристик нормирования погрешностей СИ эти вычисления производятся по-разному.

1. Класс точности прибора указан в виде одного числа g_s , заключенного в кружок. Тогда относительная погрешность результата (в процентах) $g(x) = g_s$, абсолютная его

погрешность как:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma_s \cdot x}{100}.$$

2. Класс точности прибора указан одним числом g_0 (без кружка). Тогда абсолютная погрешность результата измерения вычисляется как:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma_{0s} \cdot X_k}{100};$$

где X_k — предел измерений, на котором оно производилось.

3. Класс точности прибора указан двумя числами в виде g_k/g_n . В этом случае удобнее вычислить относительную погрешность результата по формуле:

$$\gamma(x) = \gamma_k + \gamma_n \cdot \left(\frac{X_k}{x} - 1 \right),$$

затем найти абсолютную погрешность как:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma(x) \cdot x}{100}$$

При использовании этих формул полезно помнить, что в формулы для определения $g(x)$ значения g_s , g_0 , g_n и g_k подставляются в процентах, поэтому и относительная погрешность результата измерения получается также в процентах.

Пример. На вольтметре класса точности 2.5, с пределом измерений 300 В был получен отсчет измеряемого напряжения $x=267.5$ В. Требуется провести оценку погрешности результат измерения.

Находят абсолютную погрешность:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma_0 X_k}{100} = \frac{2.5 \cdot 300}{100} = 7.5 \text{ В};$$

относительная погрешность определяют по уравнению:

$$\gamma(x) = \frac{\Delta(x)}{x} \cdot 100 = \frac{7.5}{267.5} \cdot 100 = 2.81\% \approx 2.8\%$$

Таким образом, окончательно получаем: измерение проведено с относительной погрешностью $g(x)=2.8\%$. Измеренное напряжение $x=(268.5 \pm 7.5)\text{В}$.

3. Адекватность моделей

Вопрос о необходимой и достаточной степени соответствия объекту – оригиналу или адекватности модели относится к числу важнейших в сфере модельной методологии. Под эффективностью понимают практическую полезность. Процесс моделирования неизбежно протекает в условиях диалектического взаимодействия двух противостоящих друг другу тенденций. С одной стороны, исследователь всегда стремиться к возможно более полному и точному воспроизведению в модели свойств и характеристик объекта.

Неизбежным следствием такого подхода является рост сложности, которая проявляется в числе переменных, числе учитываемых связей и влияний, повышении требования к точности исходных данных и т.д. Именно эта сторона дела – требование полноты соответствия модели объекту – оригиналу рассматривается некоторыми авторами как мера совершенства модели. Однако практика показала неопровержимо: эффективность модели находится в обратной зависимости от её сложности, быстро убывая с ростом последней.

Определить математическим путем наилучшее сочетание полноты-точности создаваемой модели с одной стороны и простоты с другой, практически никогда не удастся из-за неформализуемости и неоднозначности большей части подлежащих учету факторов.

Пара задача-объект в основном определяет номенклатуру подлежащих учету переменных объекта; параметры, входящие в модель, число и характер связей между ними, требования к точности данных и ряд других важнейших характеристик модели. Решающим фактором эффективности сейчас оказывается математический аппарат. Эффективность модели зависит и от такого субъективного момента, как профессиональные качества и уровень подготовки исследователя – исполнителя.

Таким образом, можно сделать заключение: наилучшее в практическом отношении качество или эффективность любой модели достигается как разумный компромисс между близостью модели к оригиналу (адекватностью) и простотой, обеспечивающей возможность и удобство использования модели по её прямому назначению; чрезмерная точность модели на практике не менее вредна, чем её неполнота и грубость.

Математическая модель изучаемого процесса или объекта является основой, фундаментом всего исследования. Тем не менее, на сегодняшний день не существует и, по-видимому, не может существовать науки о моделировании реальных процессов и явлений окружающего мира – точно так же, как не существует науки о том, как совершать открытия, изобретения, создавать новые методы научного поиска. Даже математика, одна из наук, которая в большей степени использует дедукцию, своему прогрессу обязана таким “ненаучным” приемам, как интуиция, догадка, фантазия (индуктивному способу мышления).

Моделирование объектов и явлений реальности (на сегодняшний день) в большой степени представляет искусство, а искусству учат на опыте. Человечество обладает таким опытом. Это опыт классиков естествознания, опыт представителей естественных наук, эксплуатирующих для своих целей математический аппарат, и т. д.

В каждом конкретном случае качество модели во многом зависит от способностей исследователя понять существо, физику изучаемого процесса и создать его адекватное математическое описание. Математику привлекают, когда сложен изучаемый или управляемый процесс. Сложность обычно состоит в огромном числе характеристик, его описывающих, и большом числе связей между ними. И задача заключается не только в том, чтобы создать адекватное математическое описание изучаемого процесса, т. е. его модель, но и разработать методику работы с ней. С громоздкими многопараметрическими моделями трудно проводить исследования, поэтому математики вынуждены были при формализации реального процесса отбрасывать многие, на их взгляд менее существенные связи, загроублять математическое описание.

Необходимо обладать незаурядной интуицией для определения, что важно с точки зрения интересующих исследователя вопросов, что – нет. Однако при решении серьезных практических задач невозможно полагаться лишь на интуицию и опыт небольшой группы исследователей, необходима методика, позволяющая с большой степенью достоверности определить адекватность модели и реальности, ею описываемой, область возможного ее применения и круг вопросов, для исследования которых они пригодны. Необходима «система знаний», которая позволила бы, используя накопленный опыт и определенные принципы, выработанные на его основе, а также доказанные или установленные на их

базе положения, создавать модели изучаемых процессов, проводить их анализ и определять пути их дальнейшего использования.

Модельное исследование, как любой другой вид осознанной целенаправленной деятельности

1) начинается с возникновения **проблемы** – потребности изменить в лучшую сторону существующее либо ожидаемое положение вещей в той или иной области. Источник проблемы – предшествующее развитие данной области или же внешние факторы.

2) Осмысление или конкретизация проблемы приводит к формулировке **цели или системы целей** как желательного результата будущей деятельности по решению проблемы.

3) Поставленная цель должна быть соотнесена с реальными возможностями ее достижения, т.е. с ресурсами (материальными и другими). Сопоставление целей с ресурсными ограничениями приводит к **формулировке задачи исследования**, которая помимо непротиворечивой системы конкретных целей, учитывающих ресурсные возможности, включает в себя объект моделирования. Задача и объект моделирования должны рассматриваться совместно.

4) Данные о целях исследования, а также исходная информация об объекте моделирования служат для определения **критерия качества создаваемой модели** – количественной меры степени её совершенства. В случае вполне формализованной оптимизационной постановки (например, на основе аппарата линейного программирования) критерий приобретает вид некоторого функционала от переменных и параметров модели, значение которого достигает экстремума при оптимальных ее характеристиках.

5) Следующим шагом в построении модели является основанный на априорных данных **содержательный анализ системы задача-объект и выбор способа формирования модели**.

Если объект не слишком сложен, достаточно изучен и комплекс подлежащих модельному исследованию свойств и характеристик объекта может быть выявлен на основе теоретических представлений и данных (дополняемых необходимым объемом эмпирической информации), целесообразно избрать **аналитический путь построения модели**.

Часто из-за сложности, слабой изученности объекта или отсутствия соответствующих теоретических разработок этот путь не может быть реализован. **Альтернативным является путь идентификации объекта**, т.е. экспериментального определения существенных для решаемой задачи свойств и характеристик объекта, специально ради построения его модели. Эксперимент осуществляется в соответствии со специально разрабатываемым оптимальным планом, данные эксперимента обрабатываются и становятся основой для формализованного описания объекта в виде математической модели вход-выход.

6) Формализованная модель, построенная теоретическим путем или идентифицированная, оценивается в соответствии с выбранным ранее критерием и либо признается удовлетворительной (принимается), либо отвергается как недостаточно совершенная. В последнем случае возникает необходимость в её корректировке и итеративном обращении к ранее выполненным этапам.

7) Решение о принятии модели (в общем случае после i -того итеративного цикла) влечет за собой переход к следующему этапу – **опытной проверке непосредственно в условиях той задачи, для решения которой она построена**. При этом возникают нередко дополнительные требования (например, связанные с удобством использования модели) и необходимость её дополнительной корректировки.

8) Наконец, следует заключительный этап процесса – **использование модели для решения исследовательской или иной задачи**, причем и на этом этапе возможны дальнейшие уточнения и корректировки.

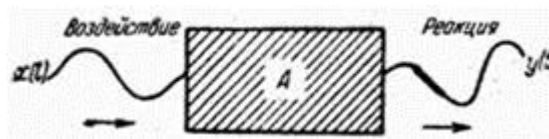
Таким образом, процесс моделирования состоит из трех задач:

- 1) построение модели (эта задача менее формализуема и конструктивна, в том смысле, что нет алгоритма для построения моделей);
- 2) исследование модели (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);
- 3) использование модели (конструктивная и конкретизируемая задача).

4. Динамическая система. Модель черного ящика. Задачи анализа и синтеза динамических систем

Имеется некоторая динамическая система A ; под «динамической системой» мы понимаем любой прибор, прицел, счетно-решающий механизм, систему автоматического управления и т. п. Эта система может быть механической, электрической или содержать любые другие элементы. Работу системы будем представлять себе следующим образом: на вход системы непрерывно поступают какие-то входные данные; система перерабатывает их и непрерывно выдает некоторый результат. Условимся называть поступающие на вход системы данные: «воздействием», а выдаваемый результат «реакцией» системы на это воздействие.

Рассмотрим самый простой случай: когда на вход системы A подается только одно воздействие, представляющее собой функцию времени $x(t)$: реакция системы на это воздействие есть другая функция времени $y(t)$. Схема работы системы A условно изображена на рис.



Будем говорить, что система A осуществляет над входным воздействием некоторое преобразование, в результате которого функция $x(t)$ преобразуется в другую функцию $y(t)$.

Преобразование A может быть любого вида и любой сложности. В наиболее простых случаях это, например, умножение на заданный множитель (усилители, множительные механизмы), дифференцирование или интегрирование (дифференцирующие или интегрирующие устройства). Однако на практике системы, осуществляющие в чистом виде такие простейшие преобразования, почти не встречаются; как правило, работа системы описывается дифференциальными уравнениями, и преобразование A сводится к решению дифференциального уравнения, связывающего воздействие $x(t)$ с реакцией $y(t)$.

При исследовании динамической системы в первую очередь решается основная задача: по заданному воздействию $x(t)$ определить реакцию системы $y(t)$. Однако для полного исследования системы и оценки ее технических качеств такой элементарный подход является недостаточным. В действительности воздействие $x(t)$ никогда не поступает на вход системы в чистом виде: оно всегда искажено некоторыми случайными ошибками (возмущениями), в результате которых на систему фактически воздействует не заданная функция $x(t)$, а случайная функция $X(t)$; соответственно этому система вырабатывает в качестве реакции случайную функцию $Y(t)$, также отличающуюся от теоретической реакции $y(t)$.



Естественно возникает вопрос: насколько велики будут случайные искажения реакции системы при наличии случайных возмущений на ее входе? И далее: как следует выбрать параметры системы для того, чтобы эти искажения были минимальными?

Из двух поставленных выше задач, естественно, более простой является первая - прямая - задача. Сформулируем ее следующим образом.

На вход динамической системы A поступает случайная функция $X(t)$; система подвергает ее известному преобразованию, в результате чего на выходе системы появляется, случайная функция:

$$Y(t) = A\{X(t)\}.$$

Известны характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание и корреляционная функция. Требуется найти аналогичные характеристики случайной функции $Y(t)$. Короче: по заданным характеристикам случайной функции на входе динамической системы найти характеристики случайной функции на выходе.

Поставленная задача может быть решена совершенно точно в одном частном, но весьма важном для практики случае: когда преобразование A принадлежит к классу так называемых линейных преобразований и соответственно система A принадлежит к классу линейных систем.

Оператор динамической системы. Классификация операторов

Понятие оператора является обобщением понятия функции. Когда мы устанавливаем функциональную связь между двумя переменными y и x и пишем:

$$y = f(x).$$

то под символом f мы понимаем правило, по которому заданному значению x приводится в соответствие вполне определенное значение y . Знак f есть символ некоторого преобразования, которому нужно подвергнуть величину x , чтобы получить y . Соответственно виду этого преобразования функции могут быть линейными и нелинейными, алгебраическими, трансцендентными и т. д.

Аналогичные понятия и соответствующая символика применяются в математике и в тех случаях, когда преобразованию подвергаются не величины, а функции. Рассмотрим некоторую функцию $x(t)$ и установим определенное правило A , согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в другую функцию $y(t)$. Запишем это преобразование в следующем виде:

$$y(t) = A\{x(t)\}.$$

Правило A , согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в функцию $y(t)$, мы будем называть оператором; например, мы будем говорить: оператор дифференцирования, оператор интегрирования, оператор решения дифференциального уравнения и т. д.

Если динамическая система преобразует поступающую на ее вход функцию $x(t)$ в функцию $y(t)$:

$$y(t) = A\{x(t)\},$$

то оператор A называется оператором динамической системы.

В более общем случае на вход системы поступает не одна, а несколько функций; равным образом на выходе системы могут появляться несколько функций; в этом случае оператор системы преобразует одну совокупность функций в другую. Однако в целях простоты изложения мы рассмотрим здесь лишь наиболее элементарный случай преобразования одной функции в другую.

Преобразования или операторы, применяемые к функциям, могут быть различных типов. Наиболее важным для практики является класс так называемых линейных операторов. Оператор L называется линейным однородным, если он обладает следующими свойствами:

1) к сумме функций оператор может применяться почленно:

$$L\{x_1(t) + x_2(t)\} = L\{x_1(t)\} + L\{x_2(t)\} ;$$

2) постоянную величину c можно выносить за знак оператора:

$$L\{cx(t)\} = cL\{x(t)\} .$$

Из второго свойства между прочим, следует, что для линейного однородного оператора справедливо свойство

$$L\{0\} = 0 ,$$

т. е. при нулевом входном воздействии реакция системы равна нулю.

Примеры линейных однородных операторов:

1) оператор дифференцирования:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} ;$$

2) оператор интегрирования:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau ;$$

3) оператор умножения на определенную функцию $\varphi(t)$:

$$y(t) = \varphi(t) x(t) ,$$

и т. д.

Кроме линейных однородных операторов, существуют еще линейные неоднородные операторы. Оператор L называется линейным неоднородным, если он состоит из линейного однородного оператора с прибавлением некоторой вполне определенной функции $\varphi(t)$:

$$L\{x(t)\} = L_0\{x(t)\} + \varphi(t) ,$$

где L_0 - линейный однородный оператор.

Примеры линейных неоднородных операторов:

$$1) y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \varphi(t) ,$$

$$2) y(t) = \int_0^t x(\tau) \varphi(\tau) d\tau + \varphi_1(t) ,$$

$$3) y(t) = \varphi_1(t) x(t) + \varphi_2(t) .$$

где $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ - вполне определённые функции, а $x(t)$ - преобразуемая оператором функция.

Оператор дифференцирования часто обозначают буквой p : $p = \frac{d}{dt}$,

помещаемой в виде множителя перед выражением, подлежащим дифференцированию. При этом запись

$$y(t) = p x(t) \quad \text{равносильна записи} \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Двойное дифференцирование обозначается множителем p^2 :

$$p^2 x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad \text{и т. д.}$$

Встречающиеся в технике динамические системы часто описываются линейными дифференциальными уравнениями. В этом случае, как нетрудно убедиться, оператор системы является линейным. Динамическая система, оператор которой является линейным, называется линейной динамической системой.

В противоположность линейным операторам и системам рассматриваются системы и операторы нелинейные. Примерами нелинейных операторов могут служить

$$y(t) = x^2(t), \quad y(t) = \int_0^t x^3(\tau) d\tau, \quad y(t) = \sin x(t),$$

а также решение нелинейного дифференциального уравнения, хотя бы

$$y'(t) + \alpha \cos y(t) = x(t).$$

Динамическая система, оператор которой не является линейным, называется нелинейной системой.

На практике линейные системы встречаются очень часто. В связи с линейностью этих систем к анализу их ошибок может быть с большой эффективностью применен аппарат теории случайных функций. Еще чаще, чем линейные системы, на практике встречаются системы не строго линейные, но в известных пределах допускающие линеаризацию.

5. Методы оптимизации параметров процессов управления в динамических системах

Пусть на вход линейной системы с оператором L воздействует случайная функция $X(t)$, причем известны ее характеристики: математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция $K_x(t, t')$. Реакция системы представляет собой случайную функцию $Y(t) = L\{X(t)\}$.

Требуется найти характеристики случайной функции $Y(t)$ на выходе системы: $m_y(t)$ и $K_y(t, t')$. Короче: по характеристикам случайной функции на входе линейной системы найти характеристики случайной функции на выходе.

Покажем сначала, что можно ограничиться решением этой задачи только для однородного оператора L . Действительно, пусть оператор L неоднороден и выражается формулой $L\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + \varphi(t)$,

где L_0 - линейный однородный оператор, $\varphi(t)$ - определенная неслучайная функция.

Тогда $m_y(t) = M[L_0\{X(t)\}] + \varphi(t)$,

т. е. функция $\varphi(t)$ просто прибавляется к математическому ожиданию случайной функции на выходе линейной системы. Что же касается корреляционной функции, то, как известно, она не меняется от прибавления к случайной функции неслучайного слагаемого. Поэтому в дальнейшем изложении под «линейными операторами» будем разумеать только

линейные однородные операторы. Решим задачу об определении характеристик на выходе линейной системы сначала для некоторых частных видов линейных операторов.

Дана случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t, t')$. Случайная функция $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейным однородным оператором интегрирования:

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau.$$

Требуется найти характеристики случайной функции $Y(t)$, $m_y(t)$ и $K_y(t, t')$. Представим интеграл как предел суммы:

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i X(\tau_i) \Delta\tau$$

и применим к равенству операцию математического ожидания. По теореме сложения математических ожиданий имеем:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M[Y(t)] = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i M[X(\tau_i)] \Delta\tau = \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i m_x(\tau_i) \Delta\tau = \int_0^t m_x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Итак,

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau.$$

т. е. математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания. Иными словами: операцию интегрирования и операцию математического ожидания можно менять местами. Это и естественно, так как операция интегрирования по своей природе не отличается от операции суммирования, которую, как мы раньше убедились, можно менять местами с операцией математического ожидания.

Найдём корреляционную функцию $K_y(t, t')$. Для этого перейдём к центрированным случайным функциям:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t), \quad \overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \int_0^t \overset{\circ}{X}(\tau) d\tau.$$

По определению корреляционной функции,

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[\overset{\circ}{Y}(t) \overset{\circ}{Y}(t')] \\ &= M\left[\int_0^t \overset{\circ}{X}(\tau) d\tau \int_0^{t'} \overset{\circ}{X}(\tau') d\tau'\right] \end{aligned}$$

Где ;

Нетрудно убедиться, что произведение двух интегралов в правой части формулы равно двойному интегралу.

Следовательно,

$$Y(t)Y(t') = \int_0^t \int_0^{t'} X(\tau)X(\tau')d\tau d\tau'$$

Применяя к равенству операцию математического ожидания и меняя ее в правой части местами с операцией интегрирования, получим:

$$K_y(t,t') = M[Y(t)Y(t')] = \int_0^t \int_0^{t'} M[X(\tau)X(\tau')]d\tau d\tau'$$

или окончательно:

$$K_y(t,t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\tau,\tau')d\tau d\tau'$$

Таким образом, для того чтобы найти корреляционную функцию интеграла от случайной функции, нужно дважды проинтегрировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем - по другому.

Дана случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t,t')$. Случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ линейным однородным оператором дифференцирования:

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

Требуется найти $m_y(t)$ и $K_y(t,t')$.

Представим производную в виде предела: $Y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$.

Применяя к равенству операцию математического ожидания, получим:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_x(t+\Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = \frac{dm_x(t)}{dt}$$

Итак,

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt},$$

т. е. математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания.

Следовательно, операцию дифференцирования, как и операцию интегрирования тоже можно менять местами с операцией математического ожидания.

Для определения $K_y(t,t')$ перейдем к центрированным случайным

функциям $\overset{\circ}{Y}(t)$ и $\overset{\circ}{X}(t)$; очевидно: $\overset{\circ}{Y}(t) = \frac{d \overset{\circ}{X}(t)}{dt}$.

По определению

$$K_y(t,t') = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]$$

Подставим вместо $\overset{\circ}{Y}(t)$ и $\overset{\circ}{Y}(t')$ их выражения:

$$K_y(t, t') = M \left[\frac{d \overset{\circ}{X}(t)}{dt} \frac{d \overset{\circ}{X}(t')}{dt'} \right]$$

Мы доказали, что математическое ожидание производной случайной функции равно производной от математического ожидания, т. е. знаки дифференцирования и математического ожидания можно менять местами. Следовательно,

$$K_y(t, t') = M \left[\frac{\partial^2 \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')}{\partial t \partial t'} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t')$$

Таким образом,

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}$$

Итак, чтобы найти корреляционную функцию производной, нужно дважды продифференцировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем - по другому.

Можно доказать, что такое правило является общим для всех линейных однородных операторов: если случайная функция $\overset{\circ}{X}(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t, t')$ преобразуется линейным однородным оператором L в случайную функцию, $Y(t) = L\{\overset{\circ}{X}(t)\}$,

то для нахождения математического ожидания случайной функции $\overset{\circ}{Y}(t)$ нужно применить тот же оператор к математическому ожиданию случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$: $m_y(t) = L\{m_x(t)\}$,

а для нахождения корреляционной функции нужно дважды применить тот же оператор к корреляционной функции случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, сначала по одному аргументу, затем - по другому:

$$K_y(t, t') = L^{(t)} L^{(t')} \{K_x(t, t')\}$$

Во многих задачах практики нас, в конечном счёте, интересует не корреляционная функция $K_y(t, t')$ на выходе линейной системы, а дисперсия $D_y(t)$ характеризующая точность работы системы в условиях наличия случайных возмущений.

Дисперсию $D_y(t)$ можно найти, зная корреляционную функцию:
 $D_y(t) = K_y(t, t)$

При этом нужно подчеркнуть, что, как правило, для определения дисперсии на выходе линейной системы недостаточно знать дисперсию на ее входе, а существенно важно знать корреляционную функцию.

Действительно, линейная система может совершенно по-разному реагировать на случайные возмущения, поступающие на ее вход, в зависимости от того, какова внутренняя структура этих случайных возмущений; состоят ли они, например, по преимуществу из высокочастотных или низкочастотных колебаний.

Внутренняя же структура случайного процесса описывается не его дисперсией, а корреляционной функцией.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие № 1 (2 часа).

Тема: «Математическое моделирование в инженерных исследованиях Основные этапы экспериментального исследования. Классификации методов исследования»

2.1.1 Задание для работы:

1. Математическая модель: этапы построения, отличительные особенности.
2. Типовые математические модели в инженерных исследованиях.
3. Исследования в области вещества и энергии. Исследования в области новых материалов и технологий
4. Основные этапы экспериментального исследования. Классификации методов исследования

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. **Математическая модель: этапы построения, отличительные особенности** -доклады с презентациями, обсуждение
2. **Типовые математические модели в инженерных исследованиях-** доклады с презентациями, обсуждение
3. **Исследования в области вещества и энергии. Исследования в области новых материалов и технологий** – доклады с презентациями по теме, обсуждение
4. **Основные этапы экспериментального исследования. Классификации методов исследования** – доклады с презентациями по теме, обсуждение

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты должны:

- рассмотреть типовые математические модели, применяемые в инженерных приложениях и условия их использования, ознакомиться с современными направлениями в исследованиях вещества и энергии, новых материалов и технологий, ознакомиться с классификацией НИР, ее особенностями;
- усвоить основные понятия, связанные с математическим моделированием, основные принципы построения глобального информационного пространства, основные требования к методологии научно-исследовательских работ;
- выработать навыки анализа этапов построения математических моделей, навыки по изучению интегративных качеств фундаментальных моделей, навыки анализа научной проблемы и построение поэтапного плана ее решения.

2.2 Практическое занятие № 2 (2 часа).

Тема: «Факторы, методы отбора, общая характеристика, функция отклика. Планы факторного эксперимента»

2.2.1 Задание для работы:

1. Факторы, классификация, методы отбора факторов.
2. Общая характеристика факторов.
3. Функция отклика
4. Полный факторный эксперимент типа 2^3 , матрица планирования которого выдается по вариантам.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

- 1. Факторы, классификация, методы отбора факторов** – подбор варьируемых факторов и составление матрицы планирования трехфакторного эксперимента (по варианту).
- 2. Общая характеристика факторов** - проведение виртуального эксперимента с назначением выходного параметра.
- 3. Функция отклика** - расчет свободного члена, коэффициентов при линейных факторах и эффектах взаимодействия в уравнении функции отклика.
- 4. Полный факторный эксперимент типа 2^3 , матрица планирования которого выдается по вариантам** – расчет и проверка значимости коэффициентов регрессии, расчет теоретического значения параметра оптимизации, проверка адекватности модели.

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты:

- должны ознакомиться с основами теории планирования эксперимента;
- усвоить основные методики на примере планирования трехфакторного эксперимента;
- выработать навыки составления и анализа функции отклика, навыки анализа параметра оптимизации и проверки модели на адекватность.

2.3 Практическое занятие № 3 (2 часа).

Тема: «Теоретические основы стохастического описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах»

2.3.1 Задание для работы:

1. Многомерные СВ, законы их распределения, условные числовые характеристики
2. Функция регрессии, коэффициент детерминации, корреляции, ковариация

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

- 1. Многомерные СВ, законы их распределения, условные числовые характеристики**

Пример 1. Найти выборочные средние, дисперсии и коэффициент корреляции для

выборки, приведенной в таблице. Построить диаграмму рассеивания.

Решение. Вычисление указанных выборочных характеристик удобно выполнять в следующей последовательности. Сначала вычисляют суммы $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i^2$, $\sum y_i^2$, $\sum x_i y_i$, $\sum (x_i + y_i)^2$. Для контроля правильности вычислений используется тождество

$$\sum (x_i + y_i)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum x_i y_i + \sum y_i^2.$$

Таблица 1

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
8,35	3,50	10,50	6,00	11,35	9,50	12,15	6,00	12,85	9,50
8,74	1,49	10,75	2,50	11,50	6,00	12,25	8,05	13,15	9,02
9,25	6,40	10,76	5,74	11,50	9,00	12,35	5,01	13,25	6,49
9,50	4,50	11,00	8,50	11,62	8,50	12,50	7,03	13,26	10,50
9,75	5,00	11,00	5,26	11,75	10,00	12,76	7,53	13,40	7,51
10,24	7,00	11,25	8,00	12,00	9,00	12,85	6,01	13,50	10,00
13,65	9,50	14,50	10,00	13,75	8,51	14,75	12,00	14,00	11,00
15,25	12,50	14,23	8,40	16,00	11,50	14,26	10,00	16,00	13,00
14,51	9,50	16,25	12,00						

Объем выборки $n = 42$.

Выборочные средние отсюда находятся по формулам

$$\bar{x} = \alpha_{1,0}^* = \frac{1}{n} \sum x_i, \quad \bar{y} = \alpha_{0,1}^* = \frac{1}{n} \sum y_i$$

Затем вычисляются суммы квадратов отклонений от среднего и произведений отклонений

$$\text{от средних: } Q_x = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}, \quad Q_y = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n},$$

$$Q_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}$$

$$\text{Отсюда } D_X^* = \frac{1}{n} Q_x, \quad D_Y^* = \frac{1}{n} Q_y, \quad r = \frac{\mu_{1,1}^*}{\sqrt{D_X^* D_Y^*}} = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x Q_y}}.$$

Предварительно вычислим

$$\sum x_i = 522,23, \quad \sum y_i = 336,41, \quad \sum x_i^2 = 6652,25, \quad \sum y_i^2 = 2987,80, \quad \sum x_i y_i = 4358,626.$$

Тогда найдем $\bar{x} = 12,434$, $\bar{y} = 8,011$.

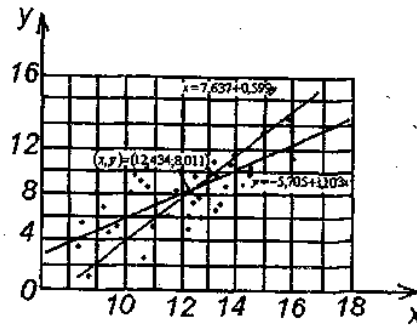
$$\text{Далее находим } Q_x = 6652,25 - \frac{522,23^2}{42} \approx 158,8182, \quad Q_y = 2987,805 - \frac{336,41^2}{42} \approx 292,5958,$$

$$Q_{xy} = 4358,626 - \frac{522,23 \cdot 336,41}{42} \approx 175,1912.$$

Окончательно, получаем

$$D_X^* = \frac{158,8182}{42} \approx 3,7814, \quad D_Y^* = \frac{292,5958}{42} \approx 6,9666, \quad r = \frac{175,1912}{\sqrt{158,8182 \cdot 292,5958}} \approx 0,813.$$

Диаграмма рассеивания приведена на рис. 1.



Выборочная линейная регрессия Y на X по выборке (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$, определяется

$$\text{уравнением } y = \beta_0^* + \beta_1^* x = \bar{y} + r \frac{D_Y^*}{D_X^*} (x - \bar{x}).$$

Коэффициенты β_0^* и β_1^* называются *выборочными коэффициентами регрессии*. Они

$$\text{вычисляются по формулам: } \beta_1^* = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{Q_{xy}}{Q_x}, \quad \beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x}.$$

Аналогично определяется выборочная линейная регрессия X на Y :

$$x = \beta_0^{**} + \beta_1^{**} y = \bar{x} + r \frac{D_X^*}{D_Y^*} (y - \bar{y}) \quad \text{коэффициенты } \beta_0^{**} \text{ и } \beta_1^{**} \text{ которой находятся по формулам}$$

$$\beta_1^{**} = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2} = \frac{Q_{xy}}{Q_y}, \quad \beta_0^{**} = \bar{x} - \beta_1^{**} \bar{y}.$$

Для контроля правильности расчетов используют соотношение $\sqrt{\beta_1^* \beta_1^{**}} = |r|$.

Прямые $y = \beta_0^* + \beta_1^* x$, $x = \beta_0^{**} + \beta_1^{**} y$ пересекаются в точке с координатами (\bar{x}, \bar{y}) .

Пример 2. Вычислить выборочные коэффициенты линейной регрессии X на Y и Y на X по выборке из предыдущего примера. Нанести прямые регрессии на диаграмму рассеивания.

Решение. Воспользуемся результатами вычислений в предыдущем примере. По формулам находим

$$\beta_1^* = \frac{175,1912}{158,8182} \approx 1,103, \quad \beta_0^* = 8,011 - 1,103 \cdot 12,434 \approx -5,705.$$

Таким образом, прямая регрессии Y на X имеет уравнение $y = -5,705 + 1,103x$.

$$\text{Аналогично находим } \beta_1^{**} = \frac{175,1912}{292,5958} \approx 0,599, \quad \beta_0^{**} = 12,434 - 0,599 \cdot 8,011 \approx 7,637.$$

Отсюда прямая регрессии X на Y имеет уравнение $x = 7,637 + 0,599y$.

Проверка показывает $\sqrt{1,103 \cdot 0,599} \approx 0,813$, что полученный результат совпадает со значением r , вычисленным в примере (*). Прямые регрессии нанесены на диаграмму рассеивания на рис.1.

Пример 3. Используя группировку выборки, заданной таблицей в примере (*), вычислить выборочные средние, дисперсии, коэффициент корреляции, а также выборочные коэффициенты линейной регрессии X на Y и Y на X .

Решение. Выберем $b_x=1$, $b_y=2$. Прямоугольная сетка, соответствующая этим значениям, нанесена на диаграмму рассеивания (рис. 1). Непосредственно по диаграмме строим корреляционную таблицу (таблица 2). Находим $d_x^* = 11,5$, $d_y^* = 9$ и вычисляем значения u_i

$$\text{и } v_j \text{ по формулам } u_i = \frac{\hat{x}_i - 11,5}{1}, i=1, 2, \dots, 9, \quad v_j = \frac{\hat{y}_j - 9}{2}, j=1, 2, \dots, 7.$$

Вычисляем следующие суммы:

$\sum n_i u_i = 43$, $\sum n_j v_j = -15$, $\sum n_i u_i^2 = 215$, $\sum n_j v_j^2 = 87$, $\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^7 n_{ij} u_i v_j = 80$. По формулам находим $Q_u = 215 - \frac{43^2}{42} \approx 170,976$, $Q_v = 87 - \frac{(-15)^2}{42} \approx 81,643$, $Q_{uv} = 80 - \frac{43 \cdot (-15)}{42} \approx 95,357$.

Далее получаем $\bar{x} = 1 \frac{43}{42} + 11,5 \approx 12,52$, $\bar{y} = 2 \frac{(-15)}{42} + 9 \approx 8,28$, $D_x^* = 1^2 \frac{170,976}{42} \approx 4,071$,

$D_y^* = 2^2 \frac{81,643}{42} \approx 7,775$, $r = \frac{95,357}{\sqrt{170,976 \cdot 81,643}} \approx 0,807$. Находим выборочные коэффициенты

регрессии: $\beta_1^* = \frac{2}{1} \frac{95,357}{170,976} \approx 1,12$, $\beta_1^* = \frac{1}{2} \frac{95,357}{81,643} \approx 0,58$, $\beta_0^* = 8,28 - 1,12 \cdot 12,52 \approx -5,74$,

$\beta_0^* = 12,52 - 0,58 \cdot 8,28 \approx 7,72$.

Окончательно получим, что уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид $y = -5,74 + 1,12x$, а уравнение линейной регрессии X на Y имеет вид $x = 7,72 + 0,58y$.

Расхождение полученных результатов с результатами выше рассмотренных примеров обусловлено группировкой.

Таблица 2. Корреляционная таблица для диаграммы рассеивания

Границы и середины интервалов для у	v _j	Границы и середины интервалов для x									n _j	n _j v _j	n _j v _j ²
		8-9 8,5	9- 10 9,5	10- 11 10,5	11- 12 11,5	12- 13 12,5	13- 14 13,5	14- 15 14,5	15- 16 15,5	16- 17 16, 5			
		u _i											
		-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5			
0-2 1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	16
2-4 3	-3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-6	18
4-6 5	-2	0	2	1	1	1	0	0	0	0	5	-10	20
6-8 7	-1	0	1	2	1	4	2	0	0	0	10	-10	10
8-10 9	0	0	0	0	5	3	3	2	0	0	13	0	0
10-12 11	1	0	0	0	1	0	2	3	0	1	7	7	7
12-14 13	2	0	0	0	0	0	0	1	1	2	4	8	16
n _i		2	3	4	8	8	7	6	1	3	Σ=42	Σ=-15	Σ=87
n _i v _i		-6	-6	-4	0	8	14	18	4	15	Σ=43		
n _i v _i ²		18	12	4	0	8	28	54	16	75	Σ=215		

2. Функция регрессии, коэффициент детерминации, корреляции, ковариация

Допустим, что в результате лечения 12 больных с артериальной гипертензией в результате суточного мониторингирования систолического артериального давления (САД) до лечения и после месячного лечения были получены следующие результаты:

№	САД до (x_i)	САД после (y_i)	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
			-9,6	-7,5	

			-19,6	-17,5	
			-14,6	-12,5	182,5
			-4,6	7,5	-34,5
			0,4	12,5	
			5,4	12,5	67,5
			-9,6	-7,5	
			10,4	7,5	
			15,4	12,5	192,5
			0,4	-7,5	-3
			5,4	-2,5	-13,5
			20,4	2,5	
	$\bar{x} = 169,6$	$\bar{y} = 137,5$			$\Sigma = 1012,5$
	$\sigma_x = 12,1$	$\sigma_y = 10,6$			

$$r_{x,y} = \frac{\frac{1}{12-1} \cdot 1012,5}{12,1 \cdot 10,6} = 0,718$$

Итак, коэффициент корреляции получился равным 0,718.

Определим, достоверно ли он отличается от нуля. Для этого используем Таблицу 10 приложения. У нас 12 пар измерений, поэтому входим в Таблицу по 12 строке. На пересечении 12 строки и столбца $P=0,05$ стоит число 0,576. Полученный коэффициент корреляции (0,718) больше этого числа.

Следовательно, на этом уровне коэффициент корреляции достоверно отличается от нуля, то есть связь есть. На пересечении этой же строки и столбца $P=0,01$ стоит число 0,708. Поскольку коэффициент корреляции больше и этого числа, следовательно, мы можем говорить, что связь существует и на этом более значимом уровне. Итак, ответ на первый вопрос таков: существование связи высоко достоверно. Далее, поскольку получено положительное значение коэффициента корреляции, мы заключаем, что связь прямая. Используя Таблицу 2 данного раздела, мы приходим к заключению, что связь сильная.

Найдем коэффициент детерминации:

$$d = r^2 \times 100 = 0,718^2 \times 100 = 0,516 \times 100 = 51,6 (\%)$$

Таким образом, систолическое артериальное давление после лечения на 51,6 % определяется систолическим артериальным давлением до лечения, а на 48,4 % другими факторами.

Формы проявления взаимосвязей явлений и процессов весьма разнообразны. Из них в самом общем виде выделяют *функциональную* (полную) и *корреляционную* (неполную) связи.

Математически ковариация представляет собой меру линейной зависимости двух случайных величин.

Коэффициент корреляции - это математическая мера корреляции двух величин. Коэффициенты корреляции могут быть положительными и отрицательными. Иногда показателям тесноты связи можно дать качественную оценку (шкала Чеддока):

Количественная мера тесноты связи	Качественная характеристика силы связи
0,1 - 0,3	Слабая
0,3 - 0,5	Умеренная
0,5 - 0,7	Заметная
0,7 - 0,9	Высокая
0,9 - 0,99	Весьма высокая

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты должны:

- ознакомиться с основными понятиями многомерного статистического анализа, теории корреляции, классификацией регрессий;
- усвоить алгоритмы нахождения условных законов и числовых характеристик многомерных случайных величин, вычисления коэффициента корреляции, детерминации, ковариации;
- выработать навыки нахождения уравнения регрессии, проверки его параметров на статистическую значимость.

2.4 Практическое занятие № 4 (2 часа).

Тема: «Техника экспериментальных измерений. Основные положения теории погрешностей»

2.4.1 Задание для работы:

1. Практика применения основных положений теории погрешностей.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Практика применения основных положений теории погрешностей.

Задача. Измерена концентрация активного вещества в шести пробах продукта, получаемого в периодическом химическом процессе. Получены следующие результаты (в г/л) 4,45; 4,40; 4,42; 4,45; 4,38; 4,42. Предполагая, что результаты измерений имеют нормальное распределение, требуется:

- 1) найти точечные несмещанные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения;
- 2) записать плотность вероятности и функцию распределения СВ X (концентрация вещества);
- 3) найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание концентрации с заданной доверительной вероятностью $(1-\alpha) = 0,95$, считая s неизвестной;
- 4) найти доверительный интервал, накрывающий неизвестное среднее квадратичное отклонение s с заданной доверительной вероятностью $(1-\alpha) = 0,95$;

5) принимая доверительную вероятность $P = 1 - \alpha = 0,99$, найти предельную

погрешность, с которой $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ оценивает математическое ожидание a концентрации;

6) найти минимальное число проб раствора, концентрации которых надо измерить, чтобы с доверительной вероятностью $(1 - \alpha) = 0,95$ можно было бы утверждать, что,

принимая среднее арифметическое \bar{x} за математическое ожидание концентрации, мы совершаем погрешность, не превышающую $\varepsilon = 0,5s$, считая $s = S$;

7) вычислить $P(4,41 < x < 4,43)$.

Решение:

$$1) \quad \hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 4,42 \quad (\text{г/л})$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{6 - 1}} = 0,028 \quad \text{г/л.}$$

2) Следовательно, плотность вероятности СВ X (концентрация) имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{0,028\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - 4,42)^2}{0,016}\right).$$

Функция распределения концентрации имеет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{0,028\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x - 4,42)^2}{0,016}\right) dx.$$

Используя нормированную функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

можно записать

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{S}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x - 4,42}{0,028}\right).$$

3) Найдем интервальные оценки параметров нормального распределения концентрации. Для нахождения доверительного интервала, накрывающего математическое ожидание, найдем по таблице квантилей распределение Стьюдента по заданной доверительной вероятности $P = 1 - \alpha = 0,95$ и числу степеней свободы $n = n - 1 =$

$$6 - 1 = 5 \text{ квантиль } \frac{t_{\alpha/2, n}}{2} = t_{0,025, 5} = 2,571.$$

Вычислим предельную погрешность интервального оценивания математического ожидания

$$\varepsilon = t_{\frac{\alpha}{2}, n} \frac{S}{\sqrt{n}} = 2,571 \frac{0,028}{\sqrt{6}} = 0,029 \quad (\text{г/л}).$$

Искомый доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание концентрации вещества с заданной доверительной вероятностью $P = 0,95$, равен:

$$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon;$$

$$4,42 - 0,029 < a < 4,42 + 0,029;$$

$$4,391 < a < 4,449.$$

Смысл полученного результата:

если будет произведено достаточно большое число выборок по 6 пробам из бесконечно большой по численности партии химического продукта, то в 95% случаев из них доверительный интервал накроет неизвестное математическое ожидание и только в 5% математическое ожидание может выйти за границы доверительного интервала.

4) Для нахождения доверительного интервала, накрывающего неизвестное среднее квадратическое отклонение s с заданной доверительной вероятностью $(1-\alpha) = 0,95$, найдем по заданной доверительной вероятности 0,95 и числу степеней свободы $n = n-1 = 6-1 = 5$ два числа g_1 и g_2 , т.е. $g_1 = 0,624$ и $g_2 = 2,45$. Искомый доверительный интервал равен:

$$g_1 S < s < g_2 S;$$

$$0.624 \cdot 0.028 < s < 2.45 \cdot 0.028;$$

$$0.017 < s < 0.068.$$

5) Если задать доверительную вероятность $P = 1-\alpha = 0,99$, то предельная погрешность, с

которой среднее арифметическое емкости конденсаторов \bar{x} оценивает неизвестное математическое ожидание, равна:

$$\varepsilon = t_{\frac{\alpha}{2}, n} \frac{S}{\sqrt{n}} = t_{0.005, 5} \frac{0.028}{\sqrt{6}} = 4.032 \frac{0.028}{\sqrt{6}} = 0.046.$$

6) Найдем минимальное число конденсаторов, емкость которых необходимо измерить, чтобы с доверительной вероятностью $P = 1-\alpha = 0,95$ можно было бы утверждать, что,

принимая среднее арифметическое \bar{x} за математическое ожидание концентрации, мы совершаем погрешность, не превышающую $0,2s = 0,0056$, считая s известным и равным 0,028.

Искомый объем выборки найдем из соотношения

$$n = \frac{\sigma^2 u_{\frac{\alpha}{2}}^2}{\varepsilon^2} = \frac{0.028^2 (1.96)^2}{(0.0056)^2} \geq 96 \text{ проб.}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad P(4.41 < X < 4.43) &= \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{4.43 - 4.42}{0.028}\right) - \Phi\left(\frac{4.41 - 4.42}{0.028}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\Phi(0.357) - \Phi(-0.357)] = \Phi(0.357) = 0.279. \end{aligned}$$

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведенного занятия студенты должны:

- ознакомиться с основными понятиями теории экспериментальных измерений и теории погрешностей;
- усвоить методики определения статистических погрешностей;
- выработать навыки анализа полученных решений.

