бакалаврФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

____________ Б1.Б.16_Моделирование систем управления____________

(*код и наименование дисциплины в соответствии с РУП*)

Направление подготовки (специальность) 27.03.04 “Управление в технических системах”

Профиль образовательной программы " Информационные управляющие комплексы систем безопасности объектов "

Форма обучения *заочная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Общие сведения»

1.1.1 Вопросы лекции:

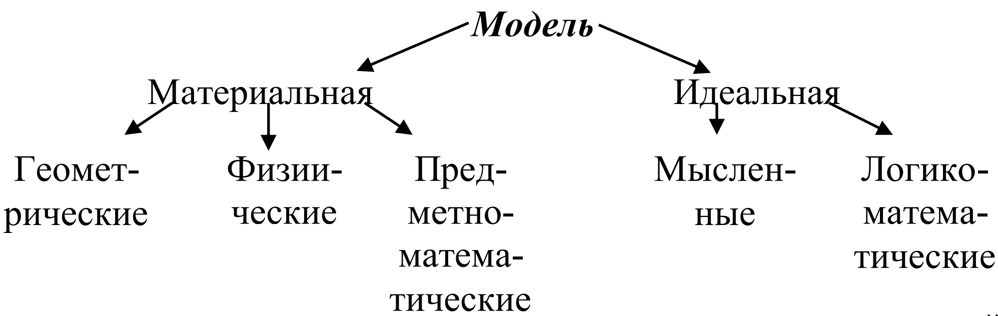
1. Предмет теории моделирования.
2. Роль и место моделирования в исследовании систем.
3. Классификация видов моделирования.
4. Математические схемы моделирования систем.
5. Принципы подхода в моделировании систем**.**
6. Классификация видов моделирования систем.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:

1. Предмет теории моделирования.

Моделирование - это замещение одного объекта (оригинала) другим (моделью) и фиксация и изучение свойств модели. Замещение производится с целью упрощения, удешевления, ускорения изучения свойств оригинала.

Модель (лат. modulus— мера) — это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.



Компьютерная модель – это программная реализация математической модели, дополненная различными служебными программами (например, рисующими и изменяющими графические образы во времени). Компьютерная модель имеет две составляющие – программную и аппаратную. Программная составляющая так же является абстрактной знаковой моделью. Это лишь другая форма абстрактной модели, которая, однако, может интерпретироваться не только математиками и программистами, но и техническим устройством – процессором компьютера.

Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью. Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследования свойств объектов на их моделях называется теорией моделирования.

Теория моделирования — взаимосвязанная совокупность положений, определений, методов и средств создания моделей. Сами модели являются предметом теории моделирования.

Теория моделирования является основной составляющей общей теории систем - системологии, где в качестве главного принципа постулируются осуществимые модели: система представима конечным множеством моделей, каждая из которых отражает определённую грань её сущности.

2. Роль и место моделирования в исследовании систем.

Познание любой системы (S) сводится по существу к созданию её модели. Перед изготовлением каждого устройства или сооружения разрабатывается его модель - проект. Любое произведение искусства является моделью, фиксирующее действительность.

Достижения математики привели к распространению математических моделей различных объектов и процессов. Подмечено, что динамика функционирования разных по физической природе систем однотипными зависимостями, что позволяет моделировать их на ЭВМ.

На качественно новую ступень поднялась моделирование в результате разработки методологии имитационного моделирования на ЭВМ.

Сейчас трудно указать область человеческой деятельности, где бы применялось моделирование. Разработаны модели производства автомобилей, выращивания пшеницы, функционирования отдельных органов человека, жизнедеятельности Азовского моря, атомного взрыва, последствий атомной войны.

Специалисты считают, что моделирование становится основной функцией ВС. На практике широко используются АСУ технологическими процессами организационно-экономическими комплексами, процессами проектирования, банки данных и знаний. Но любая из этих систем нуждается в информации об управляемом объекте и модели управляемой объектом, в моделировании тех или иных управляющих решений.

Сами ВС как сложные и дорогостоящие технические системы могут являться объектами моделирования.

Обычно процесс разработки сложной системы осуществляется итерационно с использованием моделирования проектных решений. Если характеристики не удовлетворяют предъявленным требованиям, то по результатам анализа производят корректировку проекта, затем снова проводят моделирование.

При анализе действующих систем с помощью моделирования определяют границы работоспособности системы, выполняют имитацию экспериментальных условий, которые могут возникнуть в процессе функционирования системы. Искусственное создание таких условий на действительной системе затруднено и может привести к катастрофическим последствиям.

Применение моделирования может быть полезным при разработке стратегии развития ВС, её усовершенствования при создании сетей ЭВМ.

В настоящее время при анализе и синтезе сложных (больших) систем получил развитие системный подход, который отличается от классического (или индуктивного - путем перехода от частного к общему и синтезирует (конструирует) систему путем слияния ее компонент, разрабатываемых раздельно) подхода. В отличие от этого системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель, причем исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Понятие системы и элемента системы. Специалисты по проектированию и эксплуатации сложных систем имеют дело с системами управления различных уровней, обладающими общим свойством - стремлением достичь некоторой цели. Эту особенность учтем в следующих определениях системы.

Система S— целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы.

Внешняя среда Е — множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием.

Понятие модели. <u>Модель</u> – представление объекта, системы или понятия, в некоторой форме, отличного от их реального существования.

<u>Моделирование</u> – во-первых, построение модели, во-вторых, изучение модели, в-третьих, анализ системы на основе данной модели.

<u>При системном подходе</u> к моделированию систем необходимо прежде всего четко определить цель моделирования. Применительно к вопросам моделирования цель возникает из требуемых задач моделирования, что позволяет подойти к выбору критерия и оценить, какие элементы войдут в создаваемую модель М. Поэтому необходимо иметь критерий отбора отдельных элементов в создаваемую модель.

3. Классификация видов моделирования.

Физические модели. В основу классификации положена степень абстрагирования модели от оригинала. Предварительно все модели можно подразделить на 2 группы — физические и абстрактные (математические).

Ф.М. обычно называют систему, эквивалентную или подобную оригиналу, но возможно имеющую другую физическую природу. Виды Ф.М.:

- натуральные;
- квазинатуральные;
- масштабные;
- аналоговые;

Натуральные модели — это реальные исследуемые системы (макеты, опытные образцы). Имеют полную адекватность (соответствия) с системой оригиналом, но дороги.

Квазинатуральные модели — совокупность натуральных и математических моделей. Этот вид используется тогда, когда модель части системы не может быть математической из-за сложности её описания (модель человека оператора) или когда часть системы должна быть исследована во взаимодействии с другими частями, но их ещё не существует или их включение очень дорого (вычислительные полигоны, АСУ).

Масштабная модель — это система той же физической природы, что и оригинал, но отличается от него масштабами. Методологической основой масштабного моделирования является теория подобия. При проектировании ВС масштабные модели могут использоваться для анализа вариантов компоновочных решений.

Аналоговыми моделями называют системы, имеющие физическую природу, отличающуюся от оригинала, но сходные с оригиналом процессы функционирования. Для создания аналоговой модели требуется наличие математического описания изучаемой системы. В качестве аналоговых моделей используются механические, гидравлические, пневматические и электрические системы. Аналоговое моделирование использует при исследовании средства ВТ на уровне логических элементов и электрических цепей, а так же на системном уровне, когда функционирование системы описывается, например, дифференциальными или алгебраическими уравнениями.

Математические модели. Математические модели представляют собой формализованное представление системы с помощью абстрактного языка, с помощью математических соотношений, отражающих процесс функционирования системы. Для составления математических моделей можно использовать любые математические средства — алгебраическое, дифференциальное, интегральное исчисления, теорию множеств, теорию алгоритмов и т.д. По существу вся математика создана для составления и исследования моделей объектов и процессов.

К средствам абстрактного описания систем относятся также языки химических формул, схем, чертежей, карт, диаграмм и т.п. Выбор вида модели определяется особенностями изучаемой системы и целями моделирования, т.к. исследование модели позволяет получить ответы на определённую группу вопросов. Для получения другой информации может потребоваться модель другого вида. Математические модели можно классифицировать как детерминированные и вероятностные, аналитические, численные и имитационные.

Детерминированное моделирование отображает процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики, т. е. набор однородных реализаций.

Аналитической моделью называется такое формализованное описание системы, которое позволяет получить решение уравнения в явном виде, используя известный математический аппарат.

Численная модель характеризуется зависимостью такого вида, который допускает только частные решения для конкретных начальных условий и количественных параметров моделей.

Имитационная модель — это совокупность описания системы и внешних воздействий, алгоритмов функционирования системы или правил изменения состояния системы под влиянием внешних и внутренних возмущений. Эти алгоритмы и правила не дают возможности использования имеющихся математических методов аналитического и численного решения, но позволяют имитировать процесс функционирования системы и производить вычисления интересующих характеристик. Имитационные модели могут быть созданы для гораздо более широкого класса объектов и процессов, чем аналитические и численные. Поскольку для реализации имитационных моделей служат ВС, средствами формализованного описания ИМ служат универсальные и специальные алгоритмические языки. ИМ в наибольшей степени подходят для исследования ВС на системном уровне.

4. Математические схемы моделирования систем.

Математическая модель – это совокупность математических объектов (чисел, переменных, множеств, векторов, матриц и т.п.) и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства создаваемого технического объекта. Процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза называется математическим моделированием.

При построении математической модели системы необходимо решить вопрос об ее полноте. Полнота модели регулируется, в основном, выбором границы «система S – среда E». Также должна быть решена задача упрощения модели, которая помогает выделить в зависимости от цели моделирования основные свойства системы, отбросив второстепенные.

При переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учетом воздействия внешней среды применяют математическую схему как звено в цепочке «описательная модель – математическая схема – математическая (аналитическая или (и) имитационная) модель».

5. Принципы подхода в моделировании систем.

В настоящее время при анализе и синтезе сложных (больших) систем получил развитие системный подход, который отличается от классического (или индуктивного) подхода. Классический подход рассматривает систему путем перехода от частного к общему и синтезирует (конструирует) систему путем слияния ее компонент, разрабатываемых раздельно. В отличие от этого системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель, причем исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Объект моделирования. Специалисты по проектированию и эксплуатации сложных систем имеют дело с системами управления различных уровней, обладающими общим свойством — стремлением достичь некоторой цели. Эту особенность учтем в следующих определениях системы.

Система или объект S — целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы.

Внешняя среда E — множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием.

В зависимости от цели исследования могут рассматриваться разные соотношения между самим объектом S и внешней средой E. Таким образом, в зависимости от уровня, на котором находится наблюдатель, объект исследования может выделяться по-разному и могут иметь место различные взаимодействия этого объекта с внешней средой.

С развитием науки и техники сам объект непрерывно усложняется, и уже сейчас говорят об объекте исследования как о некоторой сложной системе, которая состоит из различных компонент, взаимосвязанных друг с другом. Поэтому, рассматривая системный подход как основу для построения больших систем и как базу создания методики их анализа и синтеза, прежде всего необходимо определить само понятие системного подхода.

Системный подход — это элемент учения об общих законах развития природы и одно из выражений диалектического учения. При системном подходе к моделированию систем необходимо прежде всего четко определить цель моделирования. Поскольку невозможно полностью смоделировать реально функционирующую систему (систему-оригинал, или первую систему), создается модель (система-модель, или вторая система) под поставленную проблему.

Таким образом, применительно к вопросам моделирования цель возникает из требуемых задач моделирования, что позволяет подойти к выбору критерия и оценить, какие элементы войдут в создаваемую модель М. Поэтому необходимо иметь критерий отбора отдельных элементов в создаваемую модель.

Подходы к исследованию систем. Важным для системного подхода является определение структуры системы — совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие. Структура системы может изучаться

1. извне с точки зрения состава отдельных подсистем и отношений между ними,
2. а также изнутри, когда анализируются отдельные свойства, позволяющие системе достигать заданной цели, т. е. когда изучаются функции системы.

В соответствии с этим наметился ряд подходов к исследованию структуры системы с ее свойствами, к которым следует прежде всего отнести структурный подходифункциональный подход.

При структурном подходе выявляются состав выделенных элементов системы S и связи между ними. Совокупность элементов и связей между ними позволяет судить о структуре системы. Последняя в зависимости от цели исследования может быть описана на разных уровнях рассмотрения. Наиболее общее описание структуры — это топологическое описание, позволяющее определить в самых общих понятиях составные части системы и хорошо формализуемое на базе теории графов.

Менее общим является функциональное описание, когда рассматриваются отдельные функции, т. е. алгоритмы поведения системы, и реализуетсяфункциональный подход, оценивающий функции, которые выполняет система, причем под функцией понимается свойство, приводящее к достижению цели. Поскольку функция отображает свойство, а свойство отображает взаимодействие системы S с внешней средой E, то свойства могут быть выражены в виде либо некоторых характеристик элементов и подсистем системы, либо системы S в целом. При наличии некоторого эталона сравнения можно ввести количественные и качественные характеристики систем. Для количественной характеристики вводятся числа, выражающие отношения между данной характеристикой и эталоном. Качественные характеристики системы находятся, например, с помощью метода экспертных оценок.

Проявление функций системы во времени S(t), т. е. функционирование системы, означает переход системы из одного состояния в другое, т. е. движение в пространстве состояний Z.

6. Классификация видов моделирования систем.

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же [4]. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта.

Классификационные признаки. В качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать степень полноты модели и разделить модели в соответствии с этим признаком на полные, неполные и приближенные. В основе полного моделирования лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для неполного моделирования характерно неполное подобие модели изучаемому объекту. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем.

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе S все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, т. е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий;стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики, т. е. набор однородных реализаций. Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а динамическое моделирование отражает поведение объекта во времени.

Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а дискретно-непрерывное моделированиеиспользуется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

В зависимости от формы представления объекта (системы S) можно выделить мысленное и реальное моделирование.

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически нереализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания. Например, на базе мысленного моделирования могут быть проанализированы многие ситуации микромира, которые не поддаются физическому эксперименту. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде наглядного, символического и математического.

При наглядном моделировании на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. В основу гипотетического моделирования исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. Гипотетическое моделирование используется, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов.

С усложнением объекта используют аналогии последующих уровней, когда аналоговая модель отображает несколько либо только одну сторону функционирования объекта.

Существенное место при мысленном наглядном моделировании занимаетмакетирование. Мысленный макет может применяться в случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать проведению других видов моделирования. В основе построения мысленных макетов также лежат аналогии, однако обычно базирующиеся на причинно-следственных связях между явлениями и процессами в объекте. Если ввести условное обозначение отдельных понятий, т. е. знаки, а также определенные операции между этими знаками, то можно реализовать знаковое моделирование и с помощью знаков отображать набор понятий — составлять отдельные цепочки из слов и предложений. Используя операции объединения, пересечения и дополнения теории множеств, можно в отдельных символах дать описание какого-то реального объекта.

В основе языкового моделирования лежит некоторый тезаурус. Последний образуется из набора входящих понятий, причем этот набор должен быть фиксированным. Следует отметить, что между тезаурусом и обычным словарем имеются принципиальные различия. Тезаурус — словарь, который очищен от неоднозначности, т. е. в нем каждому слову может соответствовать лишь единственное понятие, хотя в обычном словаре одному слову могут соответствовать несколько понятий.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов.

Математическое моделирование. Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы S математическими методами, включая и машинные, должна быть проведена формализация этого процесса, т. е. построена математическая модель.

Под математическим моделированием будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для аналитического моделирования характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференпиальных, конечно-разностных и т. п.) или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами: а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик; б) численным, когда, не умея решать уравнений в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных; в) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

Наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными системы S. Однако такие зависимости удается получить только для сравнительно простых систем. При усложнении систем исследование их аналитическим методом наталкивается на значительные трудности, которые часто бывают непреодолимыми. Поэтому, желая использовать аналитический метод, в этом случае идут на существенное упрощение первоначальной модели, чтобы иметь возможность изучить хотя бы общие свойства системы. Такое исследование на упрощенной модели аналитическим методом помогает получить ориентировочные результаты для определения более точных оценок другими методами. Численный метод позволяет исследовать по сравнению с аналитическим методом более широкий класс систем, но при этом полученные решения носят частный характер. Численный метод особенно эффективен при использовании ЭВМ.

В отдельных случаях исследования системы могут удовлетворить и те выводы, которые можно сделать при использовании качественного метода анализа математической модели. Такие качественные методы широко используются, например, в теории автоматического управления для оценки эффективности различных вариантов систем управления.

В настоящее время распространены методы машинной реализации исследования характеристик процесса функционирования больших систем. Для реализации математической модели на ЭВМ необходимо построить соответствующий моделирующий алгоритм.

При имитационном моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы S во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы S.

Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и др., которые часто создают трудности при аналитических исследованиях. В настоящее время имитационное моделирование — наиболее эффективный метод исследования больших систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее проектирования.

Когда результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели процесса функционирования системы S, являются реализациями случайных величин и функций, тогда для нахождения характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение с последующей статистической обработкой информации и целесообразно в качестве метода машинной реализации имитационной модели использовать метод статистического моделирования. Первоначально был разработан метод статистических испытаний, представляющий собой численный метод, который применялся для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадали с решениями аналитических задач (такая процедура получила название метода Монте-Карло). Затем этот прием стали применять и для машинной имитации с целью исследования характеристик процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, т. е. появился метод статистического моделирования. Таким образом, методом статистического моделирования будем в дальнейшем называть метод машинной реализации имитационной модели, а методом статистических испытаний (Монте-Карло) — численный метод решения аналитической задачи.

Метод имитационного моделирования позволяет решать задачи анализа больших систем S, включая задачи оценки: вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния изменения различных параметров системы. Имитационное моделирование может быть положено также в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза больших систем, когда требуется создать систему, с заданными характеристиками при определенных ограничениях, которая является оптимальной по некоторым критериям оценки эффективности.

При решении задач машинного синтеза систем на основе их имитационных моделей помимо разработки моделирующих алгоритмов для анализа фиксированной системы необходимо также разработать алгоритмы поиска оптимального варианта системы. Далее в методологии машинного моделирования будем различать два основных раздела: статику и динамику,— основным содержанием которых являются соответственно вопросы анализа и синтеза систем, заданных моделирующими алгоритмами.

Комбинированное (аналитико-имитационное) моделирование при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования. При построении комбинированных моделей проводится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы и для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся имитационные модели. Такой комбинированный подход позволяет охватить качественно новые классы систем, которые не могут быть исследованы с использованием только аналитического и имитационного моделирования в отдельности.

Другие виды моделирования. При реальном моделировании используется возможность исследования различных характеристик либо на реальном объекте целиком, либо на его части. Такие исследования могут проводиться как на объектах, работающих в нормальных режимах, так и при организации специальных режимов для оценки интересующих исследователя характеристик (при других значениях переменных и параметров, в другом масштабе времени и т. д.). Реальное моделирование является наиболее адекватным, но при этом его возможности с учетом особенностей реальных объектов ограничены. Например, проведение реального моделирования АСУ предприятием потребует, во-первых, создания такой АСУ, а во-вторых, проведения экспериментов с управляемым объектом, т. е. предприятием, что в большинстве случаев невозможно. Рассмотрим разновидности реального моделирования.

Натурным моделированием называют проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия. При функционировании объекта в соответствии с поставленной целью удается выявить закономерности протекания реального процесса. Надо отметить, что такие разновидности натурного эксперимента, как производственный эксперимент икомплексные испытания, обладают высокой степенью достоверности.

С развитием техники и проникновением в глубь процессов, протекающих в реальных системах, возрастает техническая оснащенность современного научного эксперимента. Он характеризуется широким использованием средств автоматизации проведения, применением весьма разнообразных средств обработки информации, возможностью вмешательства человека в процесс проведения эксперимента, и в соответствии с этим появилось новое научное направление — автоматизация научных экспериментов.

Отличие эксперимента от реального протекания процесса заключается в том, что в нем могут появиться отдельные критические ситуации и определяться границы устойчивости процесса. В ходе эксперимента вводятся новые факторы и возмущающие воздействия в процессе функционирования объекта. Одна из разновидностей эксперимента — комплексные испытания, которые также можно отнести к натурному моделированию, когда вследствие повторения испытаний изделий выявляются общие закономерности о надежности этих изделий, о характеристиках качества и т. д. В этом случае моделирование осуществляется путем обработки и обобщения сведений, проходящих в группе однородных явлений. Наряду со специально организованными испытаниями возможна реализация натурного моделирования путем обобщения опыта, накопленного в ходе производственного процесса, т. е. можно говорить о производственном эксперименте. Здесь на базе теории подобия обрабатывают статистический материал по производственному процессу и получают его обобщенные характеристики.

Другим видом реального моделирования является физическое, отличающееся от натурного тем, что исследование проводится на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим подобием. В процессе физического моделирования задаются некоторые характеристики внешней среды и исследуется поведение либо реального объекта, либо его модели при заданных или создаваемых искусственно воздействиях внешней среды. Физическое моделирование может протекать в реальном и нереальном (псевдореальном) масштабах времени, а также может рассматриваться без учета времени. В последнем случае изучению подлежат так называемые «замороженные» процессы, которые фиксируются в некоторый момент времени. Наибольшие сложность и интерес с точки зрения верности получаемых результатов представляет физическое моделирование в реальном масштабе времени.

С точки зрения математического описания объекта и в зависимости от его характера модели можно разделить на модели аналоговые (непрерывные), цифровые (дискретные) и аналого-цифровые (комбинированные). Под аналоговой моделью понимается модель, которая описывается уравнениями, связывающими непрерывные величины. Под цифровой понимают модель, которая описывается уравнениями, связывающими дискретные величины, представленные в цифровом виде. Поданалого-цифровой понимается модель, которая может быть описана уравнениями, связывающими непрерывные и дискретные величины.

Особое место в моделировании занимает кибернетическое моделирование, в котором отсутствует непосредственное подобие физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессам. В этом случае стремятся отобразить лишь некоторую функцию и рассматривают реальный объект как «черный ящик», имеющий ряд входов и выходов, и моделируют некоторые связи между выходами и входами. Чаще всего при использовании кибернетических моделей проводят анализ поведенческой стороны объекта при различных воздействиях внешней среды.

Таким образом, в основе кибернетических моделей лежит отражение некоторых информационных процессов управления, что позволяет оценить поведение реального объекта. Для построения имитационной модели в этом случае необходимо выделить исследуемую функцию реального объекта, попытаться формализовать эту функцию в виде некоторых операторов связи между входом и выходом и воспроизвести на имитационной модели данную функцию, причем на базе совершенно иных математических соотношений и, естественно, иной физической реализации процесса.

1.2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Понятие математической схемы**»**

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Математическая схема общего вида.
2. Типовые математические схемы.
3. Непрерывно-детерминированные модели (*D*–схемы)

1.2.2 Краткое содержание вопросов:

1. Математическая схема общего вида.

Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы математическими методами должна быть проведена формализация этого процесса, т.е. построена математическая модель. Эта задача решается с помощью математических схем.

Математическая схема представляет собой звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учётом воздействия внешней среды, т.е. имеет место цепочка «описательная модель – математическая схема – математическая модель». Схематично процесс формализации представлен на рис.1.

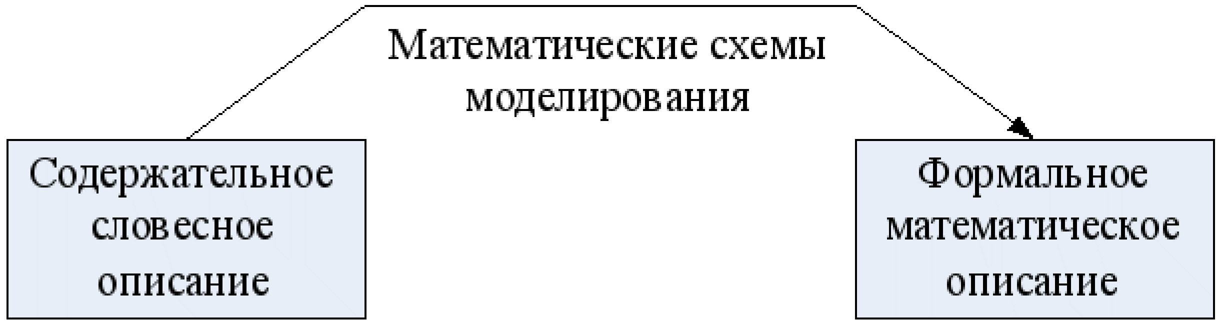


Рис.1 Схема процесса формализации

Введение понятия математической схемы позволяет рассматривать математику не как метод расчёта, а как метод мышления, как средство формулирования понятий, что является важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса её функционирования в виде математической модели. **Исходной информацией** при построении математических моделей процессов функционирования систем служат данные о назначении и условиях работы исследуемой системы, причем уровень абстрагирования зависит от круга тех вопросов, на которые исследователь системы хочет получить ответы с помощью модели.

В отличие от содержательного словесного описания, образующего описательную модель, формальное описание процесса функционирования системы, представляющее собой математическую модель, не допускает неоднозначной интерпретации, так как представляет собой правило, которое необходимо выполнить для получения результата.

При пользовании математической схемой в первую очередь решается вопрос об **адекватности отображения в виде конкретных схем реальных процессов в исследуемой системе**. Кроме того, при построении математической модели необходимо решить вопрос об её полноте. Полнота модели регулируется, в основном, выбором границы между системой и внешней средой. Также должна быть решена задача упрощения модели, которая помогает выделить основные свойства системы, отбросив второстепенные.

В практике моделирования используются математическая схема общего вида и типовые математические схемы.**Математическая схема общего вида** позволяет формализовать широкий класс систем. **Типовые математические схемы**, включающие D–схемы, F–схемы, P–схемы, Q–схемы и A–схемы, не обладают общностью, но имеют преимущества простоты и наглядности.

При использовании математической схемы общего вида модель объекта моделирования, т.е. исследуемой системы, представляется в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих четыре непересекающихся подмножества (рис. 2):

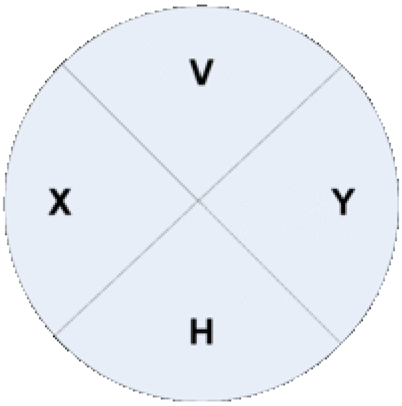


Рис.2 Модель, построенная на основе математической схемы общего вида

- подмножество совокупности входных воздействий на систему $X = \{x_i\}, i = \overline{1, n_x}$
- подмножество совокупности воздействий внешней среды на систему $V = \{v_l\}, l = \overline{1, n_v}$
- подмножество совокупности внутренних (собственных) параметров системы $H = \{h_k\}, k = \overline{1, n_h}$
- подмножество совокупности выходных характеристик системы $Y = \{y_j\}, j = \overline{1, n_y}$

При моделировании системы входные воздействия X, воздействия внешней среды V и внутренние параметры системы H являются **независимыми (экзогенными) переменными**, а выходные характеристики Y –**зависимыми (эндогенными) переменными**.

Процесс функционирования системы описывается во времени оператором, который в общем случае преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношением вида $Y(t) = F_s(X, V, H, t)$ Эта зависимость называется законом функционирования системы и обозначается F_s. В общем случае закон функционирования системы F_sможет быть задан в виде функции, функционала, логических условий, в алгоритмической и табличной формах или в виде словесного правила соответствия.

2. Типовые математические схемы.

На первоначальных этапах исследования используются типовые схемы: дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания, сети Петри и т. д.

В качестве детерминированных моделей, когда при исследовании случайные факторы не учитываются, для представления систем, функционирующих в непрерывном времени, используются дифференциальные, интегральные, интегродифференциальные и другие уравнения, а для представления систем, функционирующих в дискретном времени,— конечные автоматы и конечно-разностные схемы.

В качестве стохастических моделей (при учете случайных факторов) для представления систем с дискретным временем используются вероятностные автоматы, а для представления системы с непрерывным временем — системы массового обслуживания и т. д.

Таким образом, при построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы: непрерывно-детерминированный (например, дифференциальные уравнения); дискретно-детерминированный (конечные автоматы); дискретно-стохастический (вероятностные автоматы); непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания); обобщенный, или универсальный (агрегативные системы).

3. Непрерывно-детерминированные модели (*D*–схемы)

Непрерывно-детерминированные модели используются при описании и исследовании объектов, для которых отличительными характеристиками являются:

- отсутствие случайностей при работе и управлении объектом моделирования;
- явления в объектах моделирования рассматривают как непрерывные процессы, то есть те, в которых основная переменная, часто это время, является непрерывной величиной.

Модели построенные по этой схеме чаще всего ориентированы на изучение динамики рассматриваемого объекта (отсюда и название Д-схема). Поэтому характерным примером использования такого рода схемы являются дифференциальные уравнения.

4. Дискретно-детерминированные модели (F–схемы).

ДДМ являются предметом рассмотрения теории автоматов (ТА). ТА - раздел теоретической кибернетики, изучающей устройства, перерабатывающие дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

2.1 Практическая работа №1 (2 часа).

Тема: «Общие сведения. Математические схемы моделирования систем. Классификация видов моделирования»

2.1.1 Цель работы: Освоение методов математического моделирования объектов и систем управления.

2.1.2 Задачи работы: Отработка практических навыков компьютерного математического моделирования при проектировании и исследовании различных объектов и систем управления.

2.1.3 Описание (ход) работы:

Новый ресторан может быть построен в южной или северной части города. Если ресторан будет построен в северной части города, то вероятность его успешной работы в течение первого года равна 90%. Если построить ресторан в южной части, то вероятность успешной работы в первый год равна 65%. Северный участок удастся приобрести с вероятностью 40%.

Найти вероятность следующих событий:

а) ресторан будет построен в южной части города;

б) ресторан будет построен в южной части города и его работа в первый год будет успешной;

в) ресторан будет построен в северной части города, но его работа в первый год не будет успешной;

г) работа ресторана в первый год не будет успешной при условии, что он будет построен в северной части города;

д) работа ресторана в течение первого года будет успешной;

е) ресторан построен в северной части города при условии, что его работа в первый год оказалась успешной.

Решение.

Обозначим события:

A_1 – ресторан будет построен в северной части города;

A_2 – ресторан будет построен в южной части города;

B_1 – ресторан будет работать успешно в течение первого года;

B_2 – ресторан не будет успешно работать в течение первого года.

Обозначим исходные вероятности:

$P(A_1) = 40\% = 0{,}4$ – вероятность того, что ресторан будет построен в северной части города;

$P(B_1|A_1) = 90\% = 0{,}9$ – условная вероятность того, что ресторан будет работать успешно в течение первого года при условии, что он будет построен в северной части города;

$P(B_1|A_2) = 65\% = 0{,}65$ – условная вероятность того, что ресторан будет работать успешно в течение первого года при условии, что он будет построен в южной части города.

а) Необходимо найти вероятность события A_2.

События A_1 и A_2 являются противоположными, так как если ресторан не будет построен в северной части города, то он будет построен в южной части:

$$A_2 = \overline{A}_1.$$

Вероятность события A_1 известна из условия задачи: $P(A_1) = 0{,}4$.

Вероятность события A_2 можно определить как вероятность противоположного события:

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1) = 1 – P(A_1) = 1 – 0{,}4 = 0{,}6.$$

Ответ: вероятность того, что ресторан будет построен в южной части города, составляет 0,6 или 60%.

б) Событие «ресторан будет построен в южной части города и его работа в первый год будет успешной» представляет собой одновременное выполнение событий A_2 и B_1, т.е. произведение этих событий: $A_2 * B_1$.

События A_2 и B_1 являются зависимыми, так как по условию задачи вероятность успешной работы ресторана различна в зависимости от того, в какой части города он построен.

Поскольку эти события являются зависимыми, для расчета вероятности их произведения применим теорему о вероятности произведения событий:

$$P(A_2*B_1) = P(A_2) * P(B_1|A_2).$$

Вероятность события A_2 рассчитана в п. а), условная вероятность события B_1 при условии, что наступило событие A_2 ($P(B_1|A_2)$ известна из условий задачи. Тогда:

$$P(A_2*B_1) = 0{,}6 * 0{,}65 = 0{,}39.$$

Ответ: вероятность того, что ресторан будет построен в южной части города и его работа в первый год будет успешной, составляет 0,39 или 39%.

в) Событие «ресторан будет построен в северной части города, но его работа в первый год не будет успешной» представляет собой одновременное выполнение событий A_1 и B_2, т.е. произведение этих событий: $A_1 * B_2$.

Событие A1 может происходить либо одновременно с событием B_1, либо одновременно с событием B_2 (ресторан либо работает успешно, либо нет), поэтому событие A_1 можно представить как сумму произведений соответствующих событий:

$$A_1 = A_1 * B_1 + A_1 * B_2.$$

События A1*B1 и A1*B2 являются несовместными, следовательно вероятность события A1 можно представить как сумму вероятностей этих событий (применить следствие из теоремы о вероятности суммы):

$$P(A1) = P(A1*B1) + P(A1*B2).$$

Отсюда: $$P(A1*B2) = P(A1) – P(A1*B1).$$

Вероятность события A_1 известна из условия задачи.

События A_1 и B_1 являются зависимыми (обоснование приведено в п. б).

Для расчета вероятности произведения зависимых событий применим теорему о вероятности произведения событий:

$$P(A_1*B_1) = P(A_1) * P(B_1|A_1).$$

Все вероятности известны из условия задачи:

$$P(A_1*B_1) = 0{,}4 * 0{,}9 = 0{,}36.$$

Следовательно, $$P(A_1*B_2) = 0{,}4 – 0{,}36 = 0{,}04.$$

Ответ: вероятность того, что ресторан будет построен в северной части города, но его работа в первый год не будет успешной, составляет 0,04 или 4%.

г) Вероятность события «работа ресторана в первый год не будет успешной при условии, что он будет построен в северной части города» представляет собой условную вероятность P(B2|A1). Эту вероятность можно определить из теоремы о вероятности произведения зависимых событий:

$$P(A_1*B_2) = P(A_1) * P(B_2|A_1).$$

Отсюда: $$P(B_2|A_1) = P(A_1*B_2) / P(A_1).$$

Вероятность события A1 известна из условия задачи, вероятность события A1*B2 найдена в п. в): $$P(B_2|A_1) = 0{,}04 / 0{,}4 = 0{,}1.$$

Ответ: вероятность того, что работа ресторана в первый год не будет успешной при условии, что он будет построен в северной части города, составляет 0,1 или 10%.

д) Необходимо найти вероятность события B_1 «ресторан будет работать успешно в течение первого года».

Событие B_1 может происходить либо одновременно с событием A_1, либо одновременно с событием A_2 (ресторан построен либо в северной, либо в южной части города), поэтому событие B_1 можно представить как сумму произведений соответствующих событий:

$$B_1 = A_1 * B_1 + A_2 * B_1.$$

В этом случае вероятность события B_1 можно рассчитать по формуле полной вероятности:

$$P(B_1) = P(A_1) * P(B_1|A_1) + P(A_2) * P(B_1|A_2).$$

Вероятность события A_2 была найдена в п. а), все остальные составляющие вероятности известны из условия задачи:

$$P(B_1) = 0,4 * 0,9 + 0,6 * 0,65 = 0,75.$$

Ответ: вероятность того, что работа ресторана в течение первого года будет успешной, составляет 0,75 или 75%.

е) Вероятность события «ресторан построен в северной части города при условии, что его работа в первый год оказалась успешной» представляет собой условную вероятность P(A1|B1), которую можно рассчитать по формуле Байеса:

$$P(A_1 \mid B_1) = \frac{P(A_1) \cdot P(B_1 \mid A_1)}{P(B_1)} = \frac{P(A_1 * B_1)}{P(B_1)}.$$

Вероятность события A_1*B_1 найдена в п. в), вероятность события B_1 – в п. д):

$$P(A_1|B_1) = 0,36 / 0,75 = 0,48.$$

Ответ: вероятность того, что ресторан построен в северной части города при условии, что его работа в первый год оказалась успешной, составляет 0,48 или 48%.

1) Задачи по теме «Основные теоремы теории вероятностей»

1 На предприятии рассматривается вопрос о выпуске новой зубной пасты. При обсуждении стратегии сделаны следующие выводы: маркетинговое исследование будет удачным с вероятностью 0,65; при условии удачного маркетингового исследования вероятность успешного выпуска товара на рынок равна 0,55; полная вероятность успешного выпуска товара на рынок составляет 0,4.

а) Найдите вероятность того, что маркетинговое исследование окажется удачным и выпуск товара на рынок также окажется успешным.

б) Найдите условную вероятность того, что выпуск товара на рынок окажется успешным при условии отсутствии успеха в маркетинговом исследовании.

2 Магазин изучает модель поведения своих покупателей. Вероятность того, что посещение магазина завершится покупкой, составляет 0,35. Вероятность того, что покупатель был в этом магазине в течение предыдущего месяца, равна 0,2. Из тех, кто ничего не купил, в последний месяц посещали магазин 12% (условная вероятность).

а) Какой процент покупателей часто посещают магазин, но редко делают покупки (эту категорию покупателей составляют те, кто не совершает покупку и был в магазине в течение прошлого месяца)?

б) Найдите условную вероятность того, что посетитель совершит покупку при условии, что он был в магазине в течение прошлого месяца.

3 Для типичных посетителей кондитерского магазина вероятность покупки конфет составляет 0,23, вероятность покупки печенья равна 0,76, а условная вероятность покупки печенья при условии покупки конфет составляет 0,85.

а) Найдите вероятность покупки типичным посетителем и конфет, и печенья.

б) Найдите вероятность того, что типичный посетитель делает покупку (покупает либо конфеты, либо печенье).

4 Организация часто принимает участие в конкурсах на выполнение различных научных проектов. Если при этом разрабатывается детальный финансовый план (30% всех проектов), то существует условная вероятность 80%, что удастся заключить контракт. Если производятся только быстрые расчеты, то в этом случае условная вероятность заключения контракта составляет только 10%.

а) Найдите вероятность того, что удастся добиться заключения контракта.

б) Если заключить контракт не удалось, чему равна условная вероятность, что был разработан детальный финансовый план?

5 Из всех телефонных звонков, на которые отвечает сотрудник отдела сбыта, в 75% случаев запрашивается информация, а в 15% случаев сразу делается заказ (без запроса информации). Кроме того, в 12% звонков после запроса информации также делается и заказ.

а) Найдите условную вероятность того, что телефонный звонок приводит к получению заказа, если в этом же звонке запрашивалась информация.

б) Найдите условную вероятность того, что покупатель выбрал товар заранее (звонок не связан с получением информации при условии, что сделан заказ).

6 Организация подала заявку на участие в конкурсе на крупный государственный заказ. По оценкам экспертов существует вероятность в 35%, что предпочтение будет отдано заявкам конкурентов. Однако руководитель считает, что даже если это произойдет, то с вероятностью 10% он все равно сможет заключить контракт, убедив комиссию. С другой стороны, если предпочтение изначально будет отдано заявке данной организации, существует вероятность 5%, что контракт будет потерян в результате действий конкурентов.

а) Найдите вероятность того, что контракт удастся заключить.

б) Найдите условную вероятность того, что предпочтение отдано заявке данной организации при условии, что она заключила контракт.

7 Вероятность успешной продажи нового товара в Москве равна 0,6. Вероятность его успешной продажи в Санкт-Петербурге составляет 0,7. А вероятность того, что товар будет успешно продаваться в обоих городах, равна 0,55.

а) Найдите вероятность успешной продажи товара хотя бы в одном из городов.

б) Найдите условную вероятность, что товар будет успешно продаваться в Санкт-Петербурге при условии, что он успешно продается в Москве.

8 Предприятие начинает выпускать новые товары – детскую коляску и детское автомобильное кресло. Вероятность того, что эти товары будут иметь успех на рынке, составляет соответственно 0,8 и 0,75. Если коляски будут пользоваться успехом, то можно увеличить продажи кресел, предлагая их покупателям колясок: в этом случае продажи кресел будут успешными с условной вероятностью 0,85.

а) Найдите вероятность того, что успешными окажутся продажи хотя бы одного из товаров.

б) Найдите вероятность того, успех не будет достигнут ни для одного из товаров.

9 Организация продает вязаные изделия по каталогам. Установлено, что 6% корреспондентов, получивших каталог, заказали комплект – шапочку и шарф, а 4% корреспондентов заказали варежки. Причем из тех, кто заказал комплект, варежки заказали 55%.

а) Какой процент корреспондентов заказали и комплект, и варежки?

б) Какой процент корреспондентов не заказали вообще ничего?

2.2 Практическая работа №2(2 часа).

Тема: «Принципы подхода в моделировании систем. Классификация видов моделирования систем**»**

2.2.1 Цель работы: Изучение основных идей моделирования систем, этапов и видов моделирования.

2.2.2 Задачи работы: Изучить основные понятия теории моделирования; основные типы моделей процессов и систем; основные требования, предъявляемые к разработке математических моделей

2.2.3 Описание (ход) работы:

Стрелок производит четыре выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку насчитывается 5 очков.

а) Построить ряд распределения числа полученных очков (случайная величина X) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятности того, что стрелок получит:

- менее 10 очков;
- от 5 до 15 очков;
- более 10 очков.

Решение.

а) Дискретная случайная величина X – число полученных очков. Определим ее возможные значения:

$x_1 = 0$, если стрелок ни разу не попал в мишень;

$x_2 = 5$, если стрелок попал в мишень 1 раз;

$x_3 = 10$, если стрелок попал в мишень 2 раза;

$x_4 = 15$, если стрелок попал в мишень 3 раза;

$x_5 = 20$, если стрелок попал в мишень 4 раза.

Чтобы построить ряд распределения, нужно определить вероятности, соответствующие каждому возможному значению случайной величины:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

Для определения вероятностей используем формулу биномиального закона распределения (формулу Бернулли):

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

где n – количество независимых испытаний (4 выстрела, n = 4);

p – вероятность события (попадания) в каждом из испытаний (p = 0,4);

k – количество произошедших событий (попаданий);

C_n^k – число сочетаний из n элементов по k – неупорядоченные наборы по k элементов, взятых из n. Число сочетаний определяется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Вероятность появления значения x1 соответствует вероятности того, что стрелок ни разу не попал в мишень (событие ни разу не произошло), вероятность появления значения x2 соответствует вероятности того, что стрелок попал в мишень 1 раз (событие произошло 1 раз) и т.д.:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_i	$P_4(0)$	$P_4(1)$	$P_4(2)$	$P_4(3)$	$P_4(4)$

Рассчитаем вероятности:

k=0 $\qquad P_4(0) = C_4^0 * p^0 * (1 - p)^{4-0}$

$$C_4^0 = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} = \frac{24}{1 \cdot 24} = 1$$

$P_4(0) = 1 * 0{,}4^0 * 0{,}6^4 = 1 * 0{,}1296 = 0{,}1296$

k = 1 $P_4(1) = C_4^1 * p^1 * (1 - p)^{4-1}$

$$C_4^1 = \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} = \frac{24}{1\cdot 6} = 4$$

$P_4(1) = 4 * 0{,}4^1 * 0{,}6^3 = 4 * 0{,}4 * 0{,}216 = 0{,}3456$

k = 2 $P_4(2) = C_4^2 * p^2 * (1 - p)^{4-2}$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$$

$P_4(2) = 6 * 0{,}4^2 * 0{,}6^2 = 6 * 0{,}16 * 0{,}36 = 0{,}3456$

k = 3 $P_4(3) = C_4^3 * p^3 * (1 - p)^{4-3}$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot(4-3)!} = \frac{24}{6\cdot 1} = 4$$

$P_4(3) = 4 * 0{,}4^3 * 0{,}6^1 = 4 * 0{,}064 * 0{,}6 = 0{,}1536$

k = 4 $P_4(4) = C_4^4 * p^4 * (1 - p)^{4-4}$

$$C_4^4 = \frac{4!}{4!\cdot(4-4)!} = \frac{24}{24\cdot 1} = 1$$

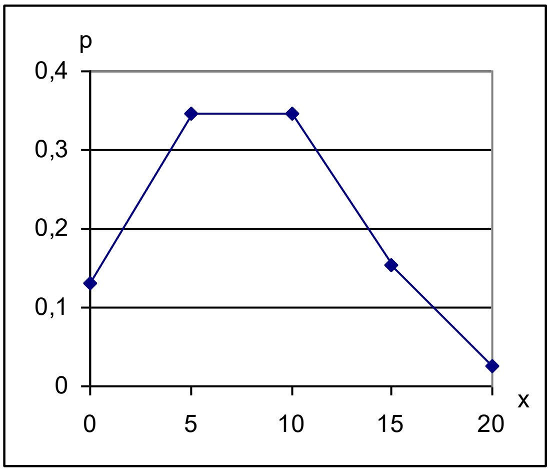
$P_4(4) = 1 * 0{,}4^4 * 0{,}6^0 = 0{,}0256 * 1 = 0{,}0256$

Построим ряд распределения:

x_i	0	5	10	15	20
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Проверим условие нормировки: 0,1296 + 0,3456 + 0,3456 + 0,1536 + 0,0256 = 1.

б) Многоугольник распределения – диаграмма, которая позволяет наглядно представить закон распределения случайной величины X:



в) Математическое ожидание дискретной случайной величины определяется по формуле:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ ,$$

где x_i – возможные значения случайной величины X;

p_i – соответствующие этим значениям вероятности.

Рассчитаем математическое ожидание случайной величины X:

M(X) = 0 * 0,1296 + 5 * 0,3456 + 10 * 0,3456 + 15 * 0,1536 + 20 * 0,0256 = 8

Вывод: среднее число очков, которое может получить стрелок, равно 8.

Дисперсию дискретной случайной величины определим по формуле:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i -[M(X)]^2$$

$D(X) = 0^2 * 0,1296 + 5^2 * 0,3456 + 10^2 * 0,3456 + 15^2 * 0,1536 + 20^2 * 0,0256 – 8^2 = 24$

Среднее квадратичное отклонение представляет собой корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{24}=4{,}9$$

Вывод: число полученных очков может отличаться от математического ожидания (равного 8) в среднем на 4,9.

г) Определим функцию распределения случайной величины X.

Аналитическая запись функции распределения складывается из отдельных записей для каждого диапазона, на которые разбивается числовая ось возможными значениями случайной величины X. Число диапазонов равно *n+1*, где *n* – число возможных значений случайной величины.

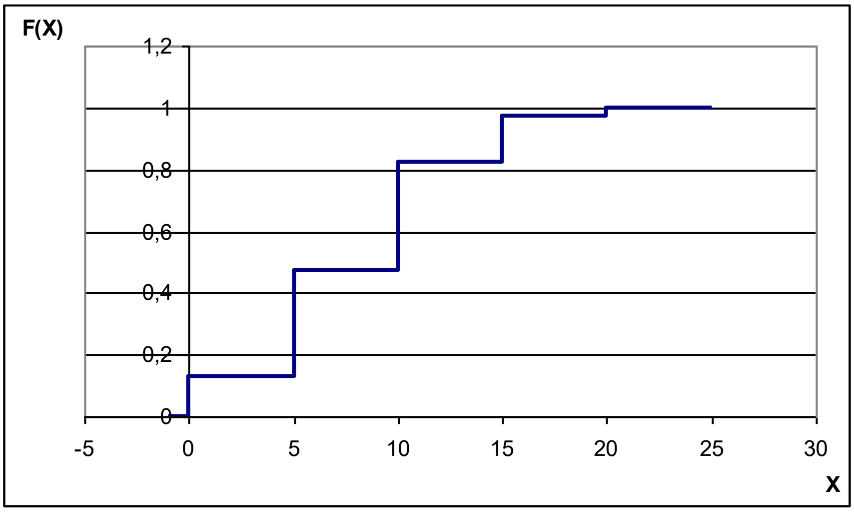
n=5, значит, число диапазонов равно 6.

Для дискретной случайной величины $F(x)=\sum_{xi<x} P(X=x_i)$,

т.е. чтобы найти значение функции распределения для значения аргумента *x*, нужно сложить все вероятности, соответствующие значениям случайной величины, меньшим, чем *x*.

$$F(x)=\begin{cases} \text{при}\, x\le 0 \quad F(x)=P(X<0)=0, \\ \text{при}\, 0<x\le 5 \quad F(x)=P(X=0)=0{,}1296, \\ \text{при}\, 5<x\le 10 \quad F(x)=P(X=0)+P(X=5)=0{,}1296+0{,}3456=0{,}4752, \\ \text{при}\, 10<x\le 15 \quad F(x)=P(X=0)+P(X=5)+P(X=10)=0{,}1296+0{,}3456+0{,}3456=0{,}8208, \\ \text{при}\, 15<x\le 20 \quad F(x)=P(X=0)+P(X=5)+P(X=10)+P(X=15)= \\ \qquad =0{,}1296+0{,}3456+0{,}3456+0{,}1536=0{,}9744, \\ \text{при}\, x>20 \quad F(x)=P(X=0)+P(X=5)+P(X=10)+P(X=15)+P(X=20)= \\ \qquad =0{,}1296+0{,}3456+0{,}3456+0{,}1536+0{,}0256=1 \end{cases}$$

Построим график функции F(x):



д) Чтобы определить вероятность попадания значений случайной величины в заданный интервал, следует использовать формулу:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

где a – нижняя граница заданного интервала;

b – верхняя граница заданного интервала;

F(b) − функция распределения случайной величины при X = b;

F(a) – функция распределения случайной величины при X = a.

Определим вероятность того, что стрелок получит менее 10 очков:

a = 0, b = 10

$$P(0 \le X < 10) = F(10) - F(0)$$

Значения функции распределения при X=10 и X=0 определим из аналитической записи функции F(x) в п. г):

значение X=0 входит в первый интервал, значит, F(0) = 0,

значение X=10 входит в третий интервал, значит, F(10) = 0,4752.

$$P(0 \le X < 10) = 0{,}4752 - 0 = 0{,}4752.$$

Таким образом, в 47,52% случаев стрелок получит менее 10 очков.

Определим вероятность того, что стрелок получит от 5 до 15 очков.

Преобразуем заданный интервал таким образом, чтобы он соответствовал формуле для определения вероятности:

$$P(5 \le X \le 15) = P(5 \le X < 20)$$

a = 5, b = 20

$$P(5 \le X < 20) = F(20) - F(5) = 0{,}9744 - 0{,}1296 = 0{,}8448.$$

Таким образом, в 84,48% случаев стрелок получит от 5 до 15 очков.

Определим вероятность того, что стрелок получит более 10 очков.

Преобразуем заданный интервал таким образом, чтобы он соответствовал формуле для определения вероятности:

$$P(10 < X < \infty) = P(15 \le X < \infty)$$

$a = 15, \quad b = \infty$

$$P(15 \leq X < \infty) = F(\infty) - F(15) = 1 - 0{,}8208 = 0{,}1792.$$

Таким образом, в 17,92% случаев стрелок получит более 10 очков.

2) Задачи по теме «Построение закона распределения дискретной случайной величины»

1 По дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» предусмотрено 16 лекций. Вероятность посещения студентом любой лекции составляет 90%.

а) Построить ряд распределения числа посещенных лекций (случайная величина X) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что студент посетит более половины лекций.

2 Бетонные блоки поступают на строительную площадку с интенсивностью 2 блока/час.

а) Построить ряд распределения количества блоков, поступивших за 2 часа, (случайная величина X) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что количество блоков, поступивших за 2 часа, составит от 3 до 5 шт.

3 Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001.

а) Построить ряд распределения количества бракованных книг (случайная величина X) по закону Пуассона. Использовать 13 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что тираж содержит менее 8 бракованных книг.

4 Фирма по доставке горячих обедов планирует позвонить в 8 крупных организаций с предложением своих услуг. Каждый звонок с вероятностью 20% приводит к заказу.

а) Построить ряд распределения числа заказанных обедов (случайная величина X) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что более половины фирм закажут горячие обеды.

5 В неудачный день на фондовой бирже 80% ценных бумаг падает в цене. Оценивается портфель, содержащий 12 ценных бумаг.

а) Построить ряд распределения количества ценных бумаг, упавших в цене, (случайная величина X) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность падения в цене менее половины ценных бумаг.

6 Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002.

а) Построить ряд распределения количества изделий, поврежденных в пути, (случайная величина X) по закону Пуассона. Использовать 8 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что в пути будет повреждено хотя бы одно изделие.

7 На заседании совета директоров должно состояться голосование по важному вопросу. Число директоров – 10 человек, а вероятность того, что каждый из них будет голосовать «за», составляет 0,53.

а) Построить ряд распределения числа положительных голосов (случайная величина X) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что решение будет принято, т.е. что большинство директоров выскажутся за него.

8 На автоматическую телефонную станцию (АТС) поступает в среднем 3 вызова в минуту.

а) Построить ряд распределения количества вызовов, поступивших за 2 минуты (случайная величина X) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что за 2 минуты на станцию поступит от 3 до 5 вызовов.

9 На ткацком станке нить обрывается в среднем 0,375 раза в течение часа работы станка.

а) Построить ряд распределения количества обрывов нити за 8 часов (случайная величина X) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что за 8 часов число обрывов нити будет заключено в границах от 2 до 4.

Приложение А
Кодификатор заданий

		Первая буква фамилии								
		А Л Х	**Б М Ц**	**В Н Ч**	**Г О Ш**	**Д П Щ**	**Е Р Э**	**Ж С Ю**	**З Т Я**	**И К У Ф**
Последняя цифра шифра	**0**	5.1 6.12 7.14	5.2 6.13 7.15	5.3 6.14 7.16	5.4 6.15 7.17	5.5 6.16 7.1	5.6 6.17 7.2	5.7 6.18 7.3	5.8 6.19 7.4	5.9 6.20 7.5
	1	5.10 6.3 7.5	5.11 6.4 7.6	5.12 6.5 7.7	5.13 6.6 7.8	5.14 6.7 7.9	5.15 6.8 7.10	5.1 6.9 7.11	5.2 6.10 7.12	5.3 6.11 7.13
	2	5.4 6.14 7.13	5.5 6.15 7.14	5.6 6.16 7.15	5.7 6.17 7.16	5.8 6.18 7.17	5.9 6.19 7.1	5.10 6.20 7.2	5.11 6.1 7.3	5.12 6.2 7.4
	3	5.13 6.5 7.4	5.14 6.6 7.5	5.15 6.7 7.6	5.1 6.8 7.7	5.2 6.9 7.8	5.3 6.10 7.9	5.4 6.11 7.10	5.5 6.12 7.11	5.6 6.13 7.12

	4	5.7 6.16 7.12	5.8 6.17 7.13	5.9 6.18 7.14	5.10 6.19 7.15	5.11 6.20 7.16	5.12 6.1 7.17	5.13 6.2 7.1	5.14 6.3 7.2	5.15 6.4 7.3
	5	5.15 6.7 7.3	5.13 6.8 7.4	5.11 6.9 7.5	5.9 6.10 7.6	5.7 6.11 7.7	5.5 6.12 7.8	5.3 6.13 7.9	5.1 6.14 7.10	5.14 6.15 7.11
	6	5.12 6.18 7.11	5.10 6.19 7.12	5.8 6.20 7.13	5.6 6.1 7.14	5.4 6.2 7.15	5.2 6.3 7.16	5.15 6.4 7.17	5.13 6.5 7.1	5.11 6.6 7.2
	7	5.9 6.9 7.2	5.7 6.10 7.3	5.5 6.11 7.4	5.3 6.12 7.5	5.1 6.13 7.6	5.14 6.14 7.7	5.12 6.15 7.8	5.10 6.16 7.9	5.8 6.17 7.10
	8	5.6 6.20 7.10	5.4 6.1 7.11	5.2 6.2 7.12	5.15 6.3 7.13	5.13 6.4 7.14	5.11 6.5 7.15	5.9 6.6 7.16	5.7 6.7 7.17	5.5 6.8 7.1
	9	5.3 6.11 7.1	5.1 6.12 7.2	5.14 6.13 7.3	5.12 6.14 7.4	5.10 6.15 7.5	5.8 6.16 7.6	5.6 6.17 7.7	5.4 6.18 7.8	5.2 6.19 7.9

2.3 Практическая работа №3 (2 часа).

Тема: «Понятие математической схемы. Математическая схема общего вида**»**

2.3.1 Цель работы: Целью работы является изучение матричных способов представления графов.

2.3.2 Задачи работы: Научиться изучать математические схемы с помощью матричных графов

2.3.3 Описание (ход) работы:

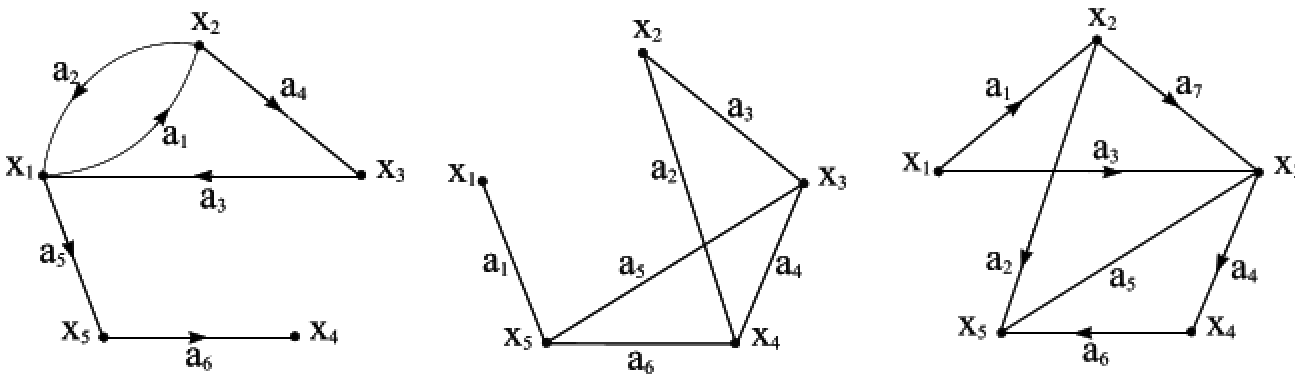
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В последнее время теория графов стала простым, доступным и мощным средством решения вопросов, относящихся к широкому кругу проблем. Это проблемы проектирования интегральных схем и схем управления, исследования автоматов, логических цепей, блок-схем программ, экономики и статистики, химии и биологии, теории расписаний и дискретной оптимизации.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Граф G задается множеством точек или вершин $x_1, x_2, \ldots, x_n$(которое обозначается через X) и множеством линий или *ребер*$a_1, a_2, \ldots, a_n$ (которое обозначается символом A), соединяющих между собой все или часть этих точек. Таким образом, граф G полностью задается (и обозначается) парой (X, A).

Если ребра из множестваA ориентированы, что обычно показывается стрелкой, то они называются *дугами*, и граф с такими ребрами называется *ориентированным* графом (рисунок 1(а)). Если ребра не имеют ориентации, то граф называется *неориентированным* (рисунок 1(б)). В случае когда $G=(X, A)$ является ориентированным графом и мы хотим пренебречь направленностью дуг из множестваA, то неориентированный граф, соответствующий G, будем обозначать как $G=(X, A)$.



(а) (б) (в)

Рисунок 1 (а) – ориентированный граф; (б) – неориентированный граф; (в) – смешанный граф.

Если дуга обозначается упорядоченной парой, состоящей из *начальной* и *конечной* вершин (т. е. двумя *концевыми* вершинами дуги), ее направление предполагается заданным от первой вершины ко второй. Так, например, на рисунке 1(а) обозначение (x_1,x_2)относится к дуге a_1, а (x_2,x_1) - к дуге a_2.

Другое, употребляемое чаще описание ориентированного графа G состоит в задании множества вершинX и *соответствия* Γ, которое показывает, как между собой связаны вершины. Соответствие Γ называется *отображением* множества X в X, а граф в этом случае обозначается парой $G=(X,\Gamma)$.

Для графа на рисунке 1(а) имеем $\Gamma(x_1)=\{x_2,x_5\}$, т. е. вершины x_2 и x_5 являются конечными вершинами дуг, у которых начальной вершиной является x_1.

$\Gamma(x_2)=\{x_1,x_3\}$, $\Gamma(x_3)=\{x_1\}$, $\Gamma(x_4)=\varnothing$ - пустое множество, $\Gamma(x_5)=\{x_4\}$.

В случае неориентированного графа или графа, содержащего и дуги, и неориентированные ребра (см., например, графы, изображенные на рисунках 1(б) и 1(в)), предполагается, что соответствие Γ задает такой эквивалентный ориентированный граф, который получается из исходного графа заменой каждого неориентированного ребра двумя противоположно направленными дугами, соединяющими те же самые вершины. Так, например, для графа, приведенного на рисунке 1(б), имеем $\Gamma(x_5)=\{x_1,x_3,x_4\}$, $\Gamma(x_1)=\{x_5\}$и др.

Поскольку *прямое соответствие* или *образ* вершины $\Gamma(x_i)$представляет собой множество таких вершин $x_j\in X$, для которых в графе G существует дуга (x_i,x_j), то через $\Gamma^{-1}(x_i)$ естественно обозначить множество вершин x_k, для которых в G существует дуга (x_k,x_i). Такое отношение принято называть *обратнымсоответствием* или *прообразом* вершины. Для графа, изображенного на рисунке 1(а), имеем

$\Gamma^{-1}(x_1)=\{x_2,x_3\}$, $\Gamma^{-1}(x_2)=\{x_1\}$ и т. д.

Вполне очевидно, что для неориентированного графа $\Gamma^{-1}(x_i)=\Gamma(x_i)$ для всех $x_i\in X$.

Когда отображение Γ действует не на одну вершину, а на множество вершин $X_q=\{x_1,x_2,\dots,x_q\}$, то под $\Gamma(X_q)$понимают объединение $\Gamma(x_1)\cup\Gamma(x_2)\cup\ldots\cup\Gamma(x_q)$, т. е. $\Gamma(X_q)$является множеством таких вершин $x_j\in X$, что для каждой из них существует дуга (x_i,x_j) в G, где $x_i\in X_q$. Для графа, приведенного на рисунке 1(а), $\Gamma(\{x_2,x_5\})=\{x_1,x_3,x_4\}$ и $\Gamma(\{x_1,x_3\})=\{x_2,x_5,x_1\}$.

Отображение$\Gamma(\Gamma(x_i))$ записывается как $\Gamma^2(x_i)$. Аналогично "тройное" отображение $\Gamma(\Gamma(\Gamma(x_i)))$ записывается как $\Gamma^3(x_i)$ и т. д. Для графа, показанного на рисунке 1(а), имеем:

$\Gamma^2(x_1)=\Gamma(\Gamma(x_1))=\Gamma(\{x_2,x_5\})=\{x_1,x_3,x_4\}$;

$\Gamma^3(x_1)=\Gamma(\Gamma^2(x_1))=\Gamma(\{x_1,x_3,x_4\})=\{x_2,x_5,x_1\}$ и т. д.

Аналогично понимаются обозначения $\Gamma^{-2}(x_i)$, $\Gamma^{-3}(x_i)$ и т. д.

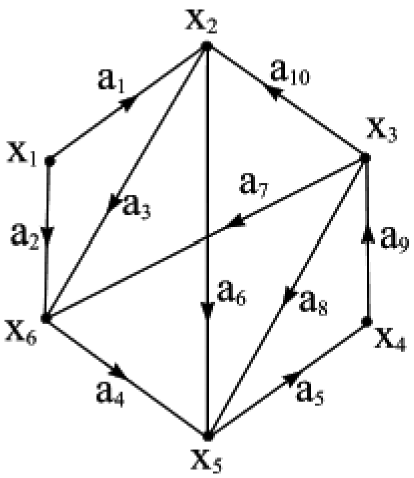


Рисунок 2.

Дуги $a=(x_i,x_j)$, $x_i\neq x_j$, имеющие общие концевые вершины, называются *смежными*. Две вершины x_i и x_j называются смежными, если какая-нибудь из двух дуг (x_i,x_j) и (x_j,x_i) или обе одновременно присутствуют в графе. Так, например, на рисунке 2 дуги a_1, a_{10}, a_3 и a_6 как и вершины x_5 и x_3, являются смежными, в то время как дуги a_1 и a_5 или вершины x_1 и x_4 не являются смежными.

Число дуг, которые имеют вершину x_i своей начальной вершиной, называется *полустепеньюисхода* вершины x_i, и, аналогично, число дуг, которые имеют x_i своей конечной вершиной, называется *полустепенью захода* вершины x_i.

Таким образом, на рисунке 2 полустепень исхода вершины x_3, обозначаемая через $deg^+(x_3)$, равна $|\Gamma(x_3)|=3$, и полустепень захода вершины x_3, обозначаемая через $deg^-(x_3)$, равна $|\Gamma^{-1}(x_3)|=1$.

Очевидно, что сумма полустепеней захода всех вершин графа, а также сумма полустепеней исхода всех вершин равны общему числу дуг графа G, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\deg^+(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\deg^-(x_i)=m, \quad (1)$$

где n- число вершин и m- число дуг графа G.

Для неориентированного графа $G=(X,\Gamma)$ *степень* вершины x_i определяется аналогично - с помощью соотношения $deg(x_i)\equiv|\Gamma(x_i)|=|\Gamma^{-1}(x_i)|$.

Петлей называется дуга, начальная и конечная вершины которой совпадают. На рисунке 3, например, дуги a_3 и a_{10} являются петлями.

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ

Пусть дан граф G, его матрица смежности обозначается через $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ и определяется следующим образом:

$a_{ij}=1$, если в G существует дуга (x_i,x_j),
$a_{ij}=0$, если в G нет дуги (x_i,x_j).

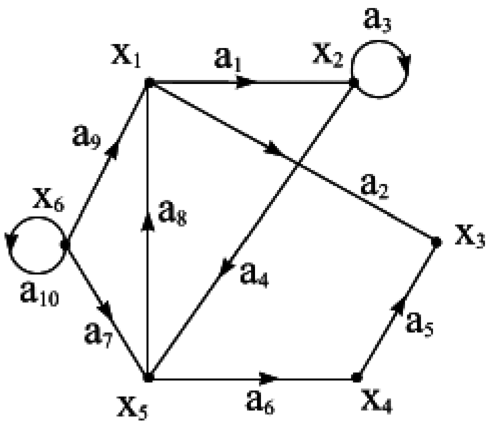


Рисунок 3.

Таким образом, матрица смежности графа, изображенного на рисунке 3, имеет вид

$$A=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccc} 0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1 \end{array}\right] \end{array}$$

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Например, сумма всех элементов строки x_i матрицы дает полустепень исхода вершины x_i, а сумма элементов столбца x_i - полустепень захода вершины x_i. Множество столбцов, имеющих 1 в строке x_i есть множество $\Gamma(x_i)$, а множество строк, которые имеют 1 в столбце x_i совпадает с множеством $\Gamma^{-1}(x_i)$.

Петли на графе представляют собой элементы, имеющие 1 на главной диагонали матрицы, например a_{22}, a_{66} для графа, изображенного на рисунке 3.

В случае неориентированного графа матрица смежности является симметричной относительно главной диагонали (рисунок 4).

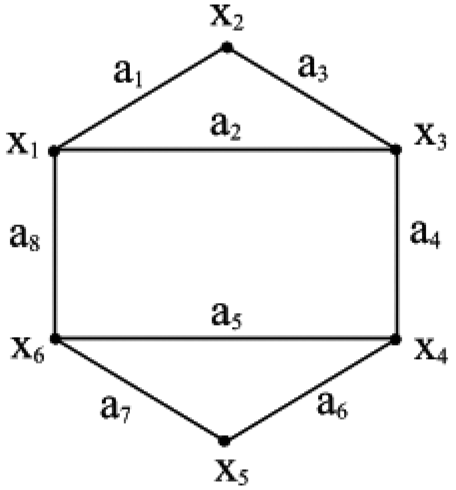


Рисунок 4.

$$A=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccc} 0&1&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&1&0 \end{array}\right] \end{array}$$

МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ

Пусть дан граф G с n вершинами и mдугами. *Матрица инцидентности* графа G обозначается через $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ и является матрицей размерности n x m, определяемой следующим образом:

$b_{ij}=1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_j;
$b_{ij}=-1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_j;
$b_{ij}=0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j.

Для графа, приведенного на рисунке 3, матрица инцидентности имеет вид:

$$B= \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{cccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \pm 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \pm 1 \end{array}$$

Поскольку каждая дуга инцидентна двум различным вершинам (за исключением случая, когда дуга образует петлю), то каждый столбец содержит один элемент, равный 1, и один - равный -1. Петля в матрице инцидентности не имеет адекватного математического представления (в программной реализации допустимо задание одного элемента $b_{ij}=1$).

Если G является неориентированным графом (рисунок 4), то его матрица инцидентности определяется следующим образом:

$b_{ij}=1$, если x_i является концевой вершиной дуги a_j;
$b_{ij}=0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j.

$$B= \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Матрица инцидентности, как способ задания графов, успешно применяется при описании мультиграфов (графов, в которых смежные вершины могут соединяться несколькими параллельными дугами).

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

По заданной матрице смежности построить неориентированный граф, составить таблицу степеней вершин, матрицу инцидентности, таблицу расстояний и условных радиусов, найти радиус и центр графа.

1)

$$A(G) = \begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

2)

$$A(G) = \begin{Vmatrix} 0&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

3)

$$A(G) = \begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

4)

$$A(G) = \begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

5)

$$A\,(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 01 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

6)

$$A\,(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

7)

$$A\,(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 00 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

8)

$$A\,(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

9)

$$A(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

2.4 Практическая работа №4 (2 часа).

Тема: «Типовые математические схемы. Непрерывно-детерминированные модели (*D*–схемы)**»**

2.4.1 Цель работы: Приобретение практических навыков анализа предметной области, информационных задач и построения концептуальной модели базы данных.

2.4.2 Задачи работы:Изучение типовых математических схем на примере информационных задач.

2.4.3 Описание (ход) работы:

Вариант1.

Задача – организация учебного процесса в вузе:
* Студенты: паспортные данные, адрес, дата зачисления, номер приказа, факультет, группа, является ли старостой, кафедра (специализация), изучаемые (изученные) предметы, оценки, задолженности, стипендия.
* Учебные курсы: название, факультет(ы), групп(ы), кафедра, семестр(ы), форма отчётности, число часов.
* Преподаватели: паспортные данные, адрес, телефон, фотография, кафедра, должность, учёная степень, начальник (зав. кафедрой), предмет(ы), число ставок, зарплата.

.

Вариант2.

Учет и выдача книг в библиотеке вуза:
* Книги: авторы, название, раздел УДК, раздел (техническая, общественно-политическая и т.п.), место и год издания, издательство, количество страниц, иллюстрированность, цена, дата покупки, номер сопроводительного документа (чек, счёт/накладная), вид издания (книги, учебники, брошюры, периодические издания), инвентарный номер (есть только для книг и некоторых учебников), длительность использования читателями (год, две недели, день), электронная версия книги или ее реферата (отсканированный текст).
* Читатели: номер читательского билета, ФИО, год рождения, адрес, дата записи, вид

(студент, аспирант, преподаватель, сотрудник), курс, номер группы, названия взятых книг и даты их выдачи.

Вариант3.

Отдел кадров некоторой компании.
* Сотрудники: ФИО, паспортные данные, фотография, дом. и моб. телефоны, отдел, комната, раб. телефоны (в т.ч. местный), подчинённые сотрудники, должность, тип(ы) работы, задание(я), проект(ы), размер зарплаты, форма зарплаты (почасовая, фиксированная).
* Отделы: название, комната, телефон(ы), начальник, размер финансирования, число сотрудников.
* Проекты: название, дата начала, дата окончания, размер финансирования, тип финансирования (периодический, разовый), задачи и их исполнители, структура затрат и статьи расходов.

Вариант4.
Отдел поставок некоторого предприятия:
* Поставщики: название компании, ФИО контактного лица, расчётный счёт в банке, телефон, факс, поставляемое оборудование (материалы), даты поставок (по договорам и реальные), метод и стоимость доставки.
* Сырьё: тип, марка, минимальный запас на складе, время задержки, цена, продукты, при производстве которых используется, потребляемые объемы (необходимый, реальный, на единицу продукции).

Вариант5.

Пункт проката видеозаписей (внутренний учет).
* Видеокассеты: идентификационный номер видеокассеты, тип видеокассет, дата его создания, компания-поставщик, число штук данного типа (общее, в магазине, выдано в настоящее время, выдано всего, выдано в среднем за месяц), общая длительность записей; записи видеокассет: название, длительность, категория, год выпуска и производитель (оригинала).
* Клиенты: ФИО, паспортные данные, адрес, телефон; заказы, т.е. взятые видеокассеты (сейчас и в прошлом): номер, дата выдачи, дата возвращения, общая стоимость заказа.

Вариант6.

Пункт проката видеозаписей (информация для клиентов).
* Видеокассеты: краткое описание, внешний вид (этикетка), марка (пустой) видеокассеты, цена за единицу прокатного времени (например: 1 день, 3 дня, неделя), есть ли в наличии, общая длительность записей; записи на видеокассете: название, длительность, жанр (категория), тема, год и страна выпуска (оригинала), кинокомпания, описание, актеры, режиссер.
* Заказы: идентификационные номера и названия выданных видеокассет, дата выдачи, дата возвращения (продления), общая стоимость заказа, возвращены ли кассеты заказа.

Вариант7.

Кинотеатры (информация для зрителей).
* Фильмы: название, описание, жанр (категория), длительность, популярность (рейтинг, число проданных билетов в России и в мире), показывается ли сейчас (сегодня, на

текущей неделе), в каких кинотеатрах показывается, цены на билеты (в т.ч. средние).
* Кинотеатры: название, адрес, схема проезда, описание, число мест (в разных залах, если их несколько), акустическая система, широкоэкранность, фильмы и цены на них: детские и взрослые билеты в зависимости от сеанса (дневной, вечерний и т.п.) и от категории мест (передние, задние и т.п.); сеансы показа фильмов (дата и время начала).

Вариант8.

Ресторан (информация для посетителей).
* Меню: дневное или вечернее, список блюд по категориям.
* Блюда: цена, название, вид кухни, категории (первое, второе и т.п.; мясное, рыбное, салат и т.п.), является ли вегетарианским, компоненты блюда, время приготовления, есть ли в наличии.
* Компоненты блюд: тип (гарнир, соус, мясо и т.п.), калорийность, цена, рецепт, время приготовления, есть ли в наличии, ингредиенты (продукты) и их расходы на порцию.

Вариант9.
Задача- информационная поддержка деятельности склада.
База данных должна содержать информацию о наименовании товара, его поставщике, количестве, цене товара, конечном сроке реализации, сроке хранения на складе. Торговый склад производит уценку хранящейся продукции. Если продукция хранится на складе дольше 10 месяцев, то она уценивается в 2 раза, а если срок хранения превысил 6 месяцев, но не достиг 10, то в 1,5 раза. Ведомость уценки товаров должна содержать информацию: наименование товара, количество товара(шт.), цена товара до уценки, срок хранения товара, цена товара после уценки, общая стоимость товаров после уценки.

Вариант10.
Задача – информационная поддержка деятельности адвокатской конторы. БД должна осуществлять:
ведение списка адвокатов;
ведение списка клиентов;
ведение архива законченных дел.
Необходимо предусмотреть:
получение списка текущих клиентов для конкретного адвоката;
определение эффективности защиты (максимальный срок минус полученный срок) с учётом оправданий, условных сроков и штрафов;
определение неэффективности защиты (полученный срок минус минимальный срок);
подсчёт суммы гонораров (по отдельных делам) в текущем году;
получение для конкретного адвоката списка текущих клиентов, которых он защищал ранее (из архива, с указанием полученных сроков и статей).

Вариант11.
Задача – информационная поддержка деятельности гостиницы.
БД должна осуществлять:
ведение списка постояльцев;
учёт забронированных мест;
ведение архива выбывших постояльцев за последний год.
Необходимо предусмотреть:
получение списка свободных номеров (по количеству мест и классу);
получение списка номеров (мест), освобождающихся сегодня и завтра;
выдачу информации по конкретному номеру;
автоматизацию выдачи счетов на оплату номера и услуг;

получение списка забронированных номеров;
проверку наличия брони по имени клиента и/или названию организации

Вариант12.

Описание предметной области:

- В компании несколько отделов.
- В каждом отделе есть некоторое количество сотрудников, занятых в нескольких проектах и размещающихся в нескольких офисах.
- Каждый сотрудник имеет план работы, т.е. несколько заданий, которые он должен выполнить. Для каждого такого задания существует ведомость, содержащая перечень денежных сумм, полученных сотрудником за выполнение этого задания.
- В каждом офисе установлено несколько телефонов.

В базе данных должна храниться следующая информация.

- Для каждого отдела: номер отдела (уникальный), его бюджет и личный номер сотрудника, возглавляющего отдел (уникальный).
- Для каждого сотрудника: личный номер сотрудника (уникальный), номер текущего проекта, номер офиса, номер телефона, название выполняемого задания вместе с датой и размером выплат, проведенных в качестве оплаты за выполнение данного задания.
- Для каждого проекта : номер проекта (уникальный) и его бюджет.
- Для каждого офиса : номер офиса (уникальный), площадь в квадратных футах, номера всех установленных в нем телефонов.

Вариант13.
Задача – информационная поддержка деятельности спортивного клуба. БД должна осуществлять:
ведение списков спортсменов и тренеров;
учёт проводимых соревнований (с ведением их архива);
учёт травм, полученных спортсменами.
Необходимо предусмотреть:
возможность перехода спортсмена от одного тренера к другому;
составление рейтингов спортсменов;
составление рейтингов тренеров;
выдачу информации по соревнованиям;
выдачу информации по конкретному спортсмену;
подбор возможных кандидатур на участие в соревнованиях (соответствующего уровня мастерства, возраста и без травм).

Вариант14.
Задача – информационная поддержка деятельности аптечного склада.
В аптечном складе хранятся лекарства. Сведения о лекарствах содержатся в специальной ведомости: наименование лекарственного препарата; количество (в шт.); цена; срок хранения на складе (в месяцах). Лекарства поступают на склад ежедневно от разных поставщиков, отпускаются два раза в неделю по предварительным заказам аптек. Выяснить, сколько стоит самый дорогой и самый дешевый препарат; сколько препаратов хранится на складе более 3 месяцев; сколько стоят все препараты, хранящиеся на складе, отыскать препараты, остаток которых равен нулю , ниже требуемого по заказам.

Вариант15.

“Электронный журнал посещаемости"
Предметная область представлена следующими документами:
Список студентов
Журнал посещаемости
Расписание занятий
Предусмотреть учет пропусков по уважительным, неуважительным причинам. Подсчет пропусков по каждому студенту, за неделю, месяц, заданный период, по конкретному предмету.

Вариант16.

«Итоги сессии»
База данных должна содержать информацию о двух последних сессиях студентов. Источником информации являются экзаменационные ведомости. Необходимо проводить анализ успеваемости по специальностям, формам обучения, курсам, группам, предметам, вычислять средний балл по указанным критериям, а также число каждых оценок .