

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Методические рекомендации для  
самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

**Б1.Б.15 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

**Направление подготовки (специальность) 27.03.04 Управление в технических системах**

**Профиль подготовки (специализация) Информационные управляющие комплексы систем безопасности объектов**

**Форма обучения очная**

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Организация самостоятельной работы.....                                      | 3  |
| 2. Методические рекомендации по выполнению индивидуальных домашних заданий..... | 4  |
| 2.1 Темы индивидуальных домашних заданий.....                                   | 4  |
| 2.2 Содержание индивидуальных домашних заданий.....                             | 4  |
| 2.3 Порядок выполнения заданий .....                                            | 13 |
| 2.4 Пример выполнения задания .....                                             | 14 |
| 3. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов.....         | 22 |
| 4. Методические рекомендации по подготовке к занятиям.....                      | 22 |
| 4.1 Статика.....                                                                | 22 |
| 4.2 Кинематика.....                                                             | 22 |
| 4.3 Динамика.....                                                               | 22 |

# 1. Организация самостоятельной работы

## 1.1 Организационно-методические данные дисциплины

| №<br>п.п | Наименование темы                                                                                           | Количество часов по видам самостоятельной работы             |                                              |                                                      |                                                        |                                        |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------------|
|          |                                                                                                             | подго-<br>товка<br>курсо-<br>вой<br>работы<br>(про-<br>екта) | подго-<br>товка<br>рефера-<br>ра-<br>та/эссе | индивиду-<br>альные до-<br>машние за-<br>дания (ИДЗ) | самостоя-<br>тельное изу-<br>чение вопро-<br>сов (СИБ) | подго-<br>товка к<br>занятиям<br>(ПкЗ) |
| 1        | 2                                                                                                           | 4                                                            | 5                                            | 6                                                    | 7                                                      | 8                                      |
| 1        | Задачи курса. Аксиомы. Реакции связей. Силовые факторы и действия над ними.                                 | -                                                            | -                                            | -                                                    | -                                                      | 2                                      |
| 2        | Основная теорема статики. Уравнения равновесия. Статически определенные и статически неопределенные задачи. | -                                                            | -                                            | 2                                                    | -                                                      | 2                                      |
| 3        | Трение скольжения и трение качения. Центр параллельных сил, центр тяжести                                   | -                                                            | -                                            | 2                                                    | -                                                      | 2                                      |
| 4        | Способы задания движения, основные кинематические характеристики.                                           | -                                                            | -                                            | -                                                    | -                                                      | 2                                      |
| 5        | Простейшие движения твердого тела. Плоское движение твердого тела.                                          | -                                                            | -                                            | 3                                                    | 1                                                      | 2                                      |
| 6        | Определение скоростей и ускорений точек. Составное движение точки.                                          | -                                                            | -                                            | 3                                                    | 1                                                      | 2                                      |

|              |                            |   |   |    |   |    |
|--------------|----------------------------|---|---|----|---|----|
|              | Динамика системы.          | - | - | 3  | - | 2  |
|              | Основные теоремы динамики. | - | - | 3  | 2 | 2  |
| <b>Итого</b> |                            | - | - | 16 | 4 | 16 |

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Индивидуальные домашние задания выполняются в форме (расчетно-проектировочной, расчетно-графической работы, презентации, контрольной работы и т.п.).

### 2.1 Темы индивидуальных домашних заданий

С-3. Определение реакций опор составной конструкции

К-1. Определение скоростей и ускорений точек.

Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.

### 2.2 Содержание индивидуальных домашних заданий

С-3. Определение реакций опор составной конструкции

Конструкция состоит из двух частей. Установить, при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции, указанной в табл.5, наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения С.

Таблица 5

| Номер варианта<br>(рис. 17-19) | $P_1$ | $P_2$ | $M$ ,<br>кН · м | $q$ ,<br>кН/м | Исследуемая<br>реакция | Номер варианта<br>(рис. 17-19) | $P_1$ | $P_2$ | $M$ ,<br>кН · м | $q$ ,<br>кН/м | Исследуемая<br>реакция |
|--------------------------------|-------|-------|-----------------|---------------|------------------------|--------------------------------|-------|-------|-----------------|---------------|------------------------|
| 1                              | 5,0   | —     | 24,0            | 0,8           | $X_A$                  | 16                             | 7,0   | 10,0  | 14,0            | 3,8           | $R_B$                  |
| 2                              | 6,0   | 10,0  | 22,0            | 1,0           | $R_A$                  | 17                             | 9,0   | 12,0  | 26,0            | 4,0           | $R_A$                  |
| 3                              | 7,0   | 9,0   | 20,0            | 1,2           | $R_B$                  | 18                             | 11,0  | 10,0  | 18,0            | 3,5           | $M_B$                  |
| 4                              | 8,0   | —     | 18,0            | 1,4           | $M_A$                  | 19                             | 13,0  | 9,0   | 30,0            | 3,0           | $M_B$                  |
| 5                              | 9,0   | —     | 16,0            | 1,6           | $R_A$                  | 20                             | 15,0  | 8,0   | 25,0            | 2,5           | $R_B$                  |
| 6                              | 10,0  | 8,0   | 25,0            | 1,8           | $M_A$                  | 21                             | 10,0  | 7,0   | 20,0            | 2,0           | $R_A$                  |
| 7                              | 11,0  | 7,0   | 20,0            | 2,0           | $R_B$                  | 22                             | 5,0   | 6,0   | 15,0            | 1,5           | $R_A$                  |
| 8                              | 12,0  | 6,0   | 15,0            | 2,2           | $M_A$                  | 23                             | 8,0   | 5,0   | 10,0            | 1,4           | $R_A$                  |
| 9                              | 13,0  | —     | 10,0            | 2,4           | $X_A$                  | 24                             | 11,0  | 4,0   | 5,0             | 1,3           | $M_A$                  |
| 10                             | 14,0  | —     | 12,0            | 2,6           | $R_A$                  | 25                             | 14,0  | 6,0   | 7,0             | 1,2           | $R_B$                  |
| 11                             | 15,0  | 5,0   | 14,0            | 2,8           | $R_D$                  | 26                             | 12,0  | 8,0   | 9,0             | 1,1           | $R_B$                  |
| 12                             | 12,0  | 4,0   | 16,0            | 3,0           | $R_B$                  | 27                             | 10,0  | 7,0   | 11,0            | 1,0           | $X_A$                  |
| 13                             | 9,0   | 6,0   | 18,0            | 3,2           | $R_A$                  | 28                             | 8,0   | 9,0   | 13,0            | 1,2           | $R_A$                  |
| 14                             | 6,0   | —     | 20,0            | 3,4           | $M_A$                  | 29                             | 6,0   | 10,0  | 15,0            | 1,4           | $M_A$                  |
| 15                             | 5,0   | 8,0   | 22,0            | 3,6           | $M_B$                  | 30                             | 10,0  | 12,0  | 17,0            | 1,6           | $M_B$                  |

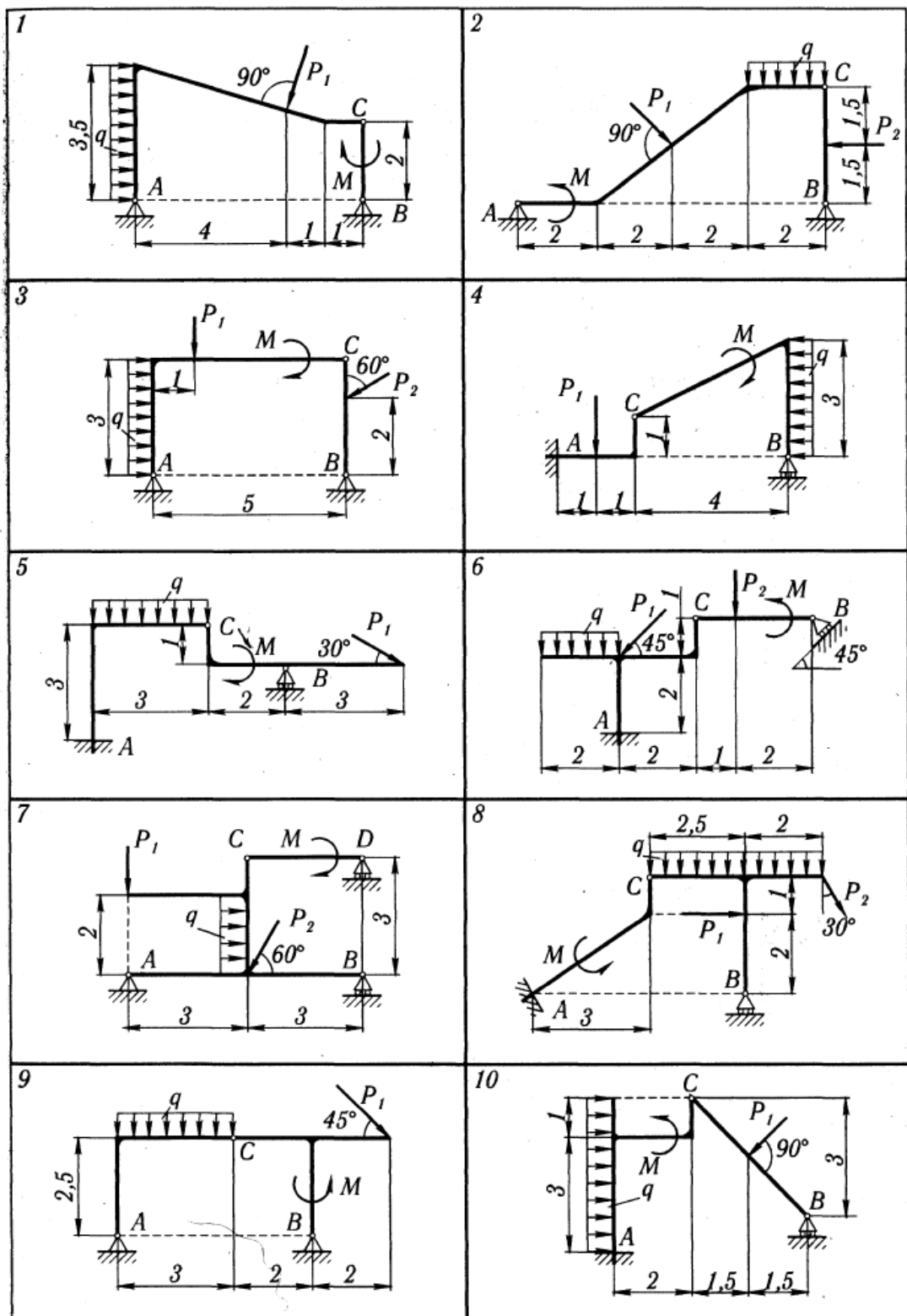


Рис. 17

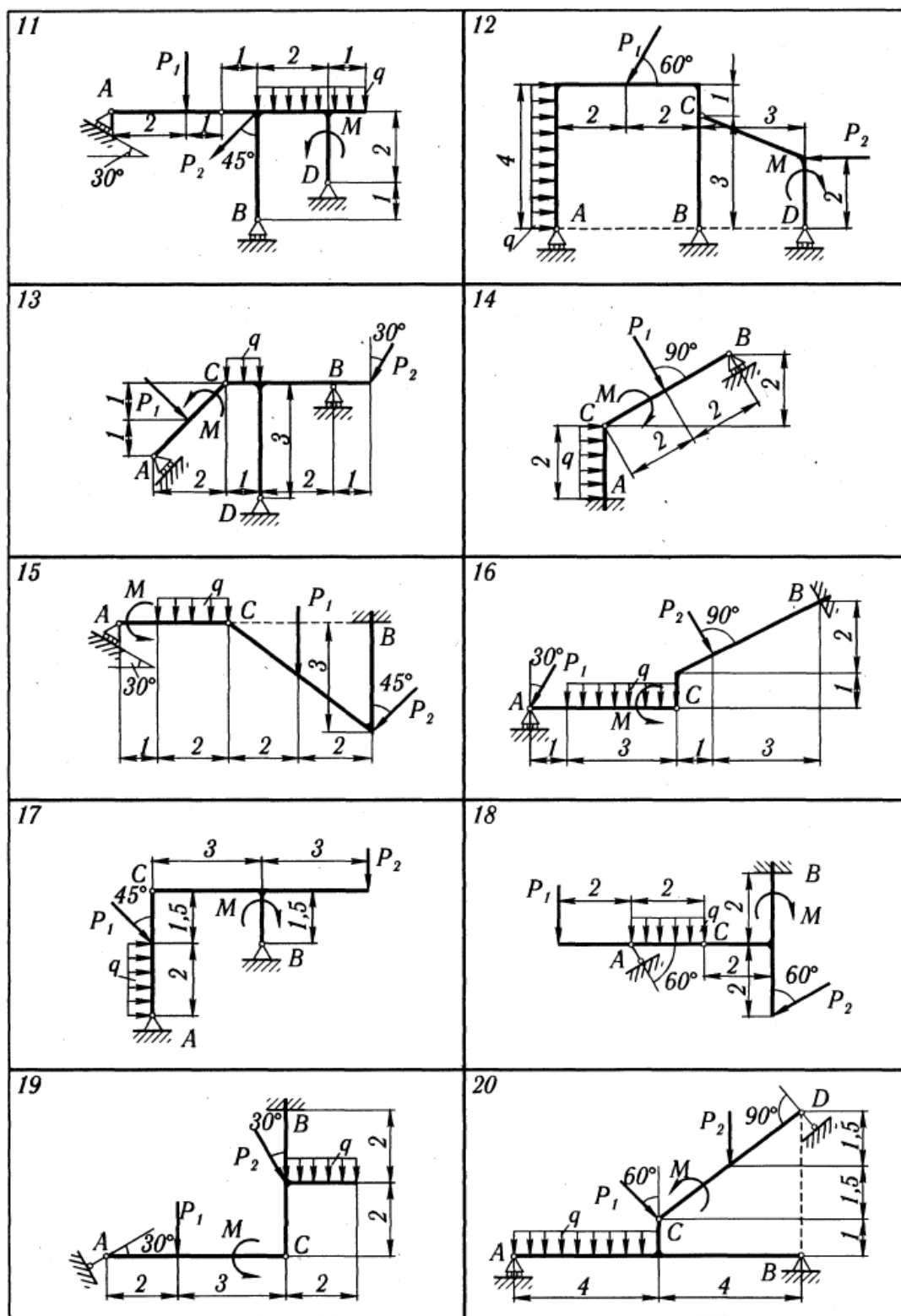


Рис. 18

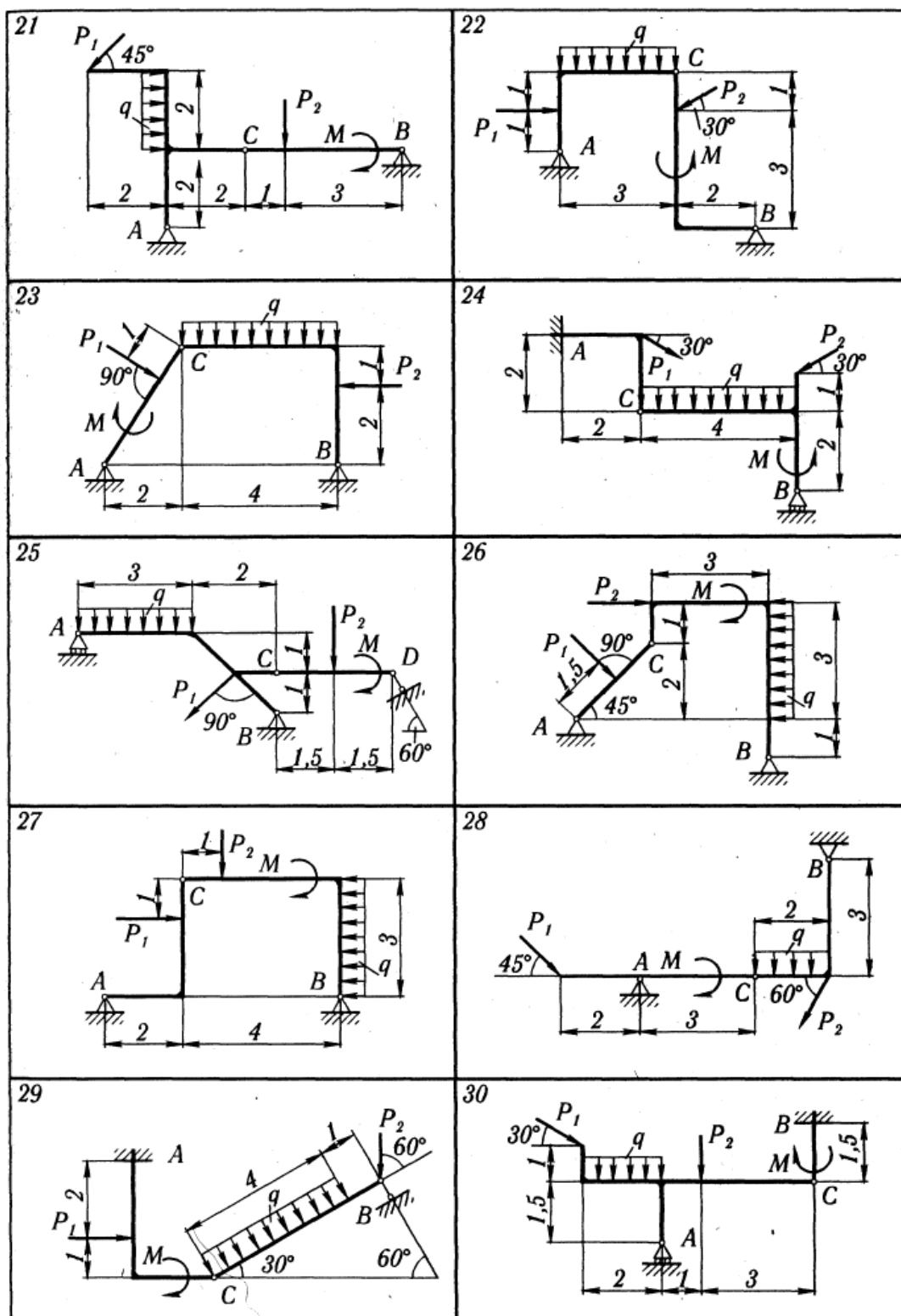


Рис. 19

Таблица 6

| Номер<br>варианта | Вид<br>скользящей<br>заделки | Номер<br>варианта | Вид<br>скользящей<br>заделки | Номер<br>варианта | Вид<br>скользящей<br>заделки |
|-------------------|------------------------------|-------------------|------------------------------|-------------------|------------------------------|
| 1, 2, 3           |                              | 14                |                              | 23                |                              |
| 4                 |                              | 15                |                              | 24                |                              |
| 5                 |                              | 16                |                              | 25                |                              |
| 6, 7, 8           |                              | 17                |                              | 26                |                              |
| 9                 |                              | 18                |                              | 27                |                              |
| 10                |                              | 19                |                              | 28                |                              |
| 11                |                              | 20                |                              | 29                |                              |
| 12                |                              | 21                |                              | 30                |                              |
| 13                |                              | 22                |                              |                   |                              |

К-1. Определение скоростей и ускорений точек.

По заданным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени  $t=t_1(c)$  найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения задачи данные приведены в таблице 20.

Таблица 20

| Номер<br>варианта | Уравнения движения       |                          | $t_1$ ,<br>с |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
|                   | $x = x(t)$ , см          | $y = y(t)$ , см          |              |
| 1                 | $-2t^2 + 3$              | $-5t$                    | 1/2          |
| 2                 | $4 \cos^2(\pi t/3) + 2$  | $4 \sin^2(\pi t/3)$      | 1            |
| 3                 | $-\cos(\pi t^2/3) + 3$   | $\sin(\pi t^2/3) - 1$    | 1            |
| 4                 | $4t + 4$                 | $-4/(t + 1)$             | 2            |
| 5                 | $2 \sin(\pi t/3)$        | $-3 \cos(\pi t/3) + 4$   | 1            |
| 6                 | $3t^2 + 2$               | $-14t$                   | 1/2          |
| 7                 | $3t^2 - t + 1$           | $5t^2 - 5t/3 - 2$        | 1            |
| 8                 | $7 \sin(\pi t^2/6) + 3$  | $2 - 7 \cos(\pi t^2/6)$  | 1            |
| 9                 | $-3/(t + 2)$             | $3t + 6$                 | 2            |
| 10                | $-4 \cos(\pi t/3)$       | $-2 \sin(\pi t/3) - 3$   | 1            |
| 11                | $-4t^2 + 1$              | $8 - 3t$                 | 1/2          |
| 12                | $5 \sin^2(\pi t/6)$      | $-5 \cos^2(\pi t/6) - 3$ | 1            |
| 13                | $5 \cos(\pi t^2/3)$      | $-5 \sin(\pi t^2/3)$     | 1            |
| 14                | $-2t - 2$                | $-2/(t + 1)$             | 2            |
| 15                | $4 \cos(\pi t/3)$        | $-3 \sin(\pi t/3)$       | 1            |
| 16                | $3t$                     | $4t^2 + 1$               | 1/2          |
| 17                | $7 \sin^2(\pi t/6) - 5$  | $-7 \cos^2(\pi t/6)$     | 1            |
| 18                | $1 + 3 \cos(\pi t^2/3)$  | $3 \sin(\pi t^2/3) + 3$  | 1            |
| 19                | $-5t^2 - 4$              | $3t$                     | 1            |
| 20                | $2 - 3t - 6t^2$          | $3 - 3t/2 - 3t^2$        | 0            |
| 21                | $6 \sin(\pi t^2/6) - 2$  | $6 \cos(\pi t^2/6) + 3$  | 1            |
| 22                | $7t^2 - 3$               | $5t$                     | 1/4          |
| 23                | $3 - 3t^2 + t$           | $4 - 5t^2 + 5t/3$        | 1            |
| 24                | $-4 \cos(\pi t/3) - 1$   | $-4 \sin(\pi t/3)$       | 1            |
| 25                | $-6t$                    | $-2t^2 - 4$              | 1            |
| 26                | $8 \cos^2(\pi t/6) + 2$  | $-8 \sin^2(\pi t/6) - 7$ | 1            |
| 27                | $-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$ | $-9 \cos(\pi t^2/6) + 5$ | 1            |
| 28                | $-4t^2 + 1$              | $-3t$                    | 1            |
| 29                | $5t^2 + 5t/3 - 3$        | $3t^2 + t + 3$           | 1            |
| 30                | $2 \cos(\pi t^2/3) - 2$  | $-2 \sin(\pi t^2/3) + 3$ | 1            |

**Варианты 1—5 (рис. 117, схема 1).** Тело движется из точки  $A$  по участку  $AB$  (длиной  $l$ ) наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, в течение  $\tau$  с. Его начальная скорость  $v_A$ . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен  $f$ .

В точке  $B$  тело покидает плоскость со скоростью  $v_B$  и попадает со скоростью  $v_C$  в точку  $C$  плоскости  $BD$ , наклоненной под углом  $\beta$  к горизонту, находясь в воздухе  $T$  с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $f = 0,2$ ;  $l = 10$  м;  $\beta = 60^\circ$ . Определить  $\tau$  и  $h$ .

Вариант 2. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $v_A = 2$  м/с;  $f = 0,2$ ;  $h = 4$  м;  $\beta = 45^\circ$ . Определить  $l$  и уравнение траектории точки на участке  $BC$ .

Вариант 3. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 3,5$  м/с;  $f \neq 0$ ;  $l = 8$  м;  $d = 10$  м;  $\beta = 60^\circ$ . Определить  $v_B$  и  $\tau$ .

Вариант 4. Дано:  $v_A = 0$ ;  $\tau = 2$  с;  $l = 9,8$  м;  $\beta = 60^\circ$ ;  $f = 0$ . Определить  $\alpha$  и  $T$ .

Вариант 5. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $l = 9,8$  м;  $\tau = 3$  с;  $\beta = 45^\circ$ . Определить  $f$  и  $v_C$ .

**Варианты 6—10 (рис. 117, схема 2).** Лыжник подходит к точке  $A$  участка трамплина  $AB$ , наклоненного под углом  $\alpha$  к горизонту и имеющего длину  $l$ , со скоростью  $v_A$ . Коэффициент трения скольжения лыж на участке  $AB$  равен  $f$ . Лыжник от  $A$  до  $B$  движется  $\tau$  с; в точке  $B$  со скоростью  $v_B$  он покидает трамплин. Через  $T$  с лыжник приземляется со скоростью  $v_C$  в точке  $C$  горы, составляющей угол  $\beta$  с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано:  $\alpha = 20^\circ$ ;  $f = 0,1$ ;  $\tau = 0,2$  с;  $h = 40$  м;  $\beta = 30^\circ$ . Определить  $l$  и  $v_C$ .

Вариант 7. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $f = 0,1$ ;  $v_A = 16$  м/с;  $l = 5$  м;  $\beta = 45^\circ$ . Определить  $v_B$  и  $T$ .

Вариант 8. Дано:  $v_A = 21$  м/с;  $f = 0$ ;  $\tau = 0,3$  с;  $v_B = 20$  м/с;  $\beta = 60^\circ$ . Определить  $\alpha$  и  $d$ .

Вариант 9. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $\tau = 0,3$  с;  $f = 0,1$ ;  $h = 30\sqrt{2}$  м;  $\beta = 45^\circ$ . Определить  $v_B$  и  $v_A$ .

Вариант 10. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $f = 0$ ;  $v_A = 12$  м/с;  $d = 50$  м;  $\beta = 60^\circ$ . Определить  $\tau$  и уравнение траектории лыжника на участке  $BC$ .

**Варианты 11—15 (рис. 117, схема 3).** Имея в точке  $A$  скорость  $v_A$ , мотоцикл поднимается  $\tau$  с по участку  $AB$  длиной  $l$ , составляющему с горизонтом угол  $\alpha$ . При постоянной на всем участке  $AB$  движущей силе  $P$  мотоцикл в точке  $B$  приобретает скорость  $v_B$  и перелетает через ров шириной  $d$ , находясь в воздухе  $T$  с и приземляясь в точке  $C$  со скоростью  $v_C$ . Масса мотоцикла с мотоциклистом равна  $m$ .

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $P \neq 0$ ;  $l = 40$  м;  $v_A = 0$ ;  $v_B = 4,5$  м/с;  $d = 3$  м. Определить  $\tau$  и  $h$ .

Вариант 12. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $P = 0$ ;  $l = 40$  м;  $v_B = 4,5$  м/с;  $h = 1,5$  м. Определить  $v_A$  и  $d$ .

Вариант 13. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $m = 400$  кг;  $v_A = 0$ ;  $\tau = 20$  с;  $d = 3$  м;  $h = 1,5$  м. Определить  $P$  и  $l$ .

Вариант 14. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $m = 400$  кг;  $P = 2,2$  кН;  $v_A = 0$ ;  $l = 40$  м;  $d = 5$  м. Определить  $v_B$  и  $v_C$ .

Вариант 15. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $P = 2$  кН;  $l = 50$  м;  $h = 2$  м;  $d = 4$  м. Определить  $T$  и  $m$ .

**Варианты 16—20 (рис. 117, схема 4).** Камень скользит в течение  $\tau$  с по участку  $AB$  откоса, составляющему угол  $\alpha$  с горизонтом и имеющему длину  $l$ . Его начальная скорость  $v_A$ . Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен  $f$ . Имея в точке  $B$  скорость  $v_B$ , камень через  $T$  с ударяется в точке  $C$  о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 1$  м/с;  $l = 3$  м;  $f = 0,2$ ;  $d = 2,5$  м. Определить  $h$  и  $T$ .

Вариант 17. Дано:  $\alpha = 45^\circ$ ;  $l = 6$  м;  $v_B = 2v_A$ ;  $\tau = 1$  с;  $h = 6$  м. Определить  $d$  и  $f$ .

Вариант 18. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $l = 2$  м;  $v_A = 0$ ;  $f = 0,1$ ;  $d = 3$  м. Определить  $h$  и  $\tau$ .

Вариант 19. Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $l = 3$  м;  $v_B = 3$  м/с;  $f \neq 0$ ;  $\tau = 1,5$  с;  $d = 2$  м. Определить  $v_A$  и  $h$ .

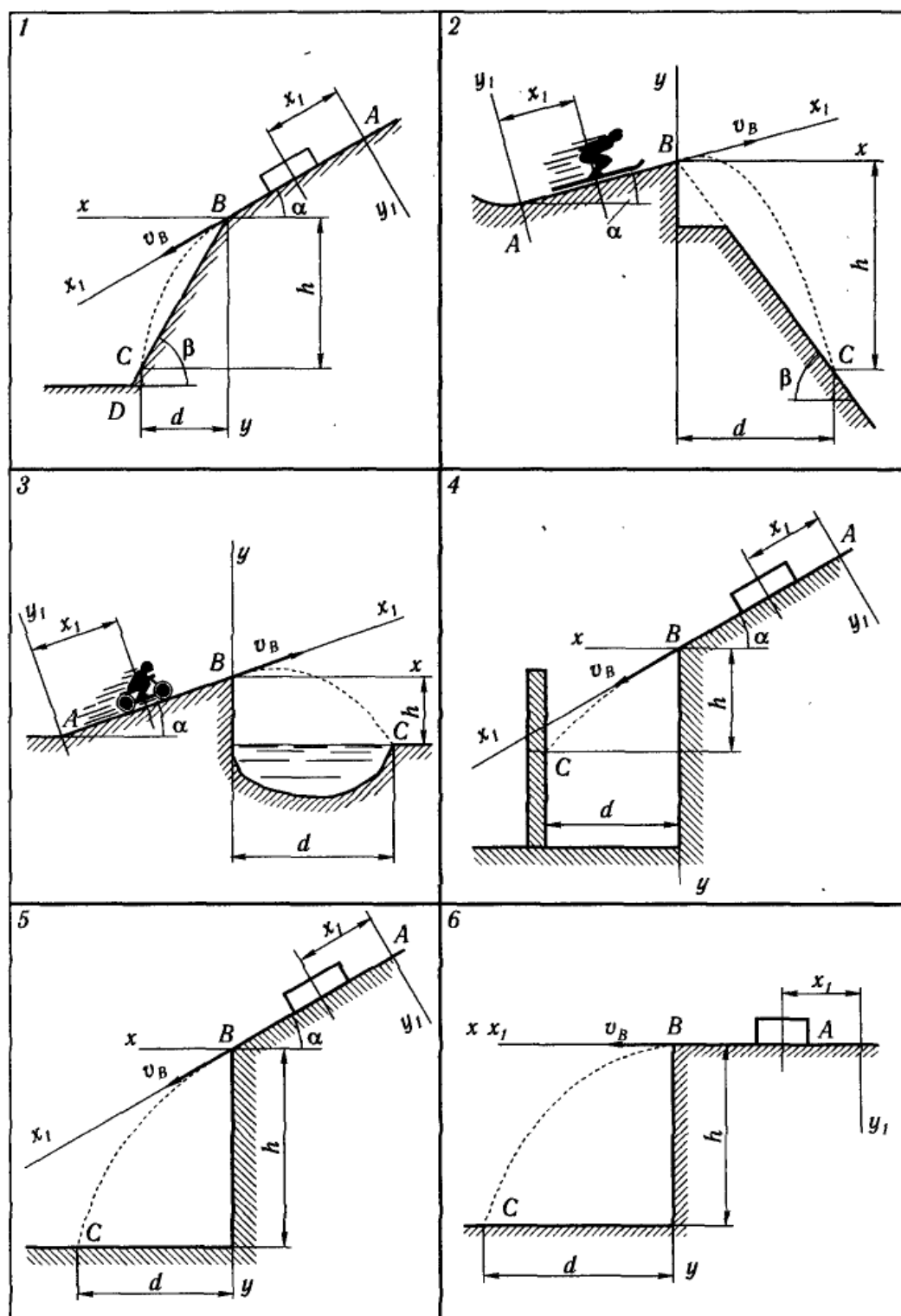


Рис.117

Вариант 20. Дано:  $\alpha = 45^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $f = 0,3$ ;  $d = 2$  м;  $h = 4$  м. Определить  $l$  и  $\tau$ .

Варианты 21—25 (рис. 117, схема 5). Тело движется из точки  $A$  по участку  $AB$  (длиной  $l$ ) наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Его начальная скорость  $v_A$ . Коэффициент трения скольжения равен  $f$ . Через  $\tau$  с тело в точке  $B$  со скоростью  $v_B$  покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку  $C$  со скоростью  $v_C$ ; при этом оно находится в воздухе  $T$  с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $f = 0,1$ ;  $v_A = 1$  м/с;  $\tau = 1,5$  с;  $h = 10$  м. Определить  $v_B$  и  $d$ .

Вариант 22. Дано:  $v_A = 0$ ;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $l = 10$  м;  $\tau = 2$  с. Определить  $f$  и уравнение траектории на участке  $BC$ .

Вариант 23. Дано:  $f = 0$ ;  $v_A = 0$ ;  $l = 9,81$  м;  $\tau = 2$  с;  $h = 20$  м. Определить  $\alpha$  и  $T$ .

Вариант 24. Дано:  $v_A = 0$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $f = 0,2$ ;  $l = 10$  м;  $d = 12$  м. Определить  $\tau$  и  $h$ .

Вариант 25. Дано:  $v_A = 0$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $f = 0,2$ ;  $l = 6$  м;  $h = 4,5$  м. Определить  $\tau$  и  $v_C$ .

Варианты 26—30 (рис. 117, схема 6). Имея в точке  $A$  скорость  $v_A$ , тело движется по горизонтальному участку  $AB$  длиной  $l$  в течение  $\tau$  с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен  $f$ . Со скоростью  $v_B$  тело в точке  $B$  покидает плоскость и попадает в точку  $C$  со скоростью  $v_C$ , находясь в воздухе  $T$  с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано:  $v_A = 7$  м/с;  $f = 0,2$ ;  $l = 8$  м;  $h = 20$  м. Определить  $d$  и  $v_C$ .

Вариант 27. Дано:  $v_A = 4$  м/с;  $f = 0,1$ ;  $\tau = 2$  с;  $d = 2$  м. Определить  $v_B$  и  $h$ .

Вариант 28. Дано:  $v_B = 3$  м/с;  $f = 0,3$ ;  $l = 3$  м;  $h = 5$  м. Определить  $v_A$  и  $T$ .

Вариант 29. Дано:  $v_A = 3$  м/с;  $v_B = 1$  м/с;  $l = 2,5$  м;  $h = 20$  м. Определить  $f$  и  $d$ .

Вариант 30. Дано:  $f = 0,25$ ;  $l = 4$  м;  $d = 3$  м;  $h = 5$  м. Определить  $v_A$  и  $\tau$ .

### 2.3 Порядок выполнения заданий

С-3:

1. В соответствии с условием задачи изобразить схему конструкции.
2. Выбрать точки или тело, равновесие которого будем рассматривать.
3. Расставить активные силы.
4. Связи убрать, а их действие заменить соответствующими реакциями.
5. Установить, какая система сил получена и записать условие равновесия.
6. Составить уравнения (выбрав направление координатных осей), решить их и оценить результат.

Примечание. В задании С-3 эту последовательность применяют для всей конструкции, затем для отдельных частей как при шарнирном соединении, так и при соединении скользящей заделкой частей конструкции.

К-1:

1. Определить траекторию движения точки и изобразить ее в масштабе в декартовой системе координат. На траектории показать начальное положение точки и положение точки в заданный момент времени.

2. По заданным законам движения точки определить составляющие скорости, показать их на графике в масштабе.
3. Зная законы изменения скорости в направлении координатных осей определить составляющие ускорения точки, вычислить их значения для заданного момента времени, показать на графике в масштабе.
4. Определить тангенциальную и нормальную составляющие ускорения, показать в масштабе на графике.
5. Вычислить радиус кривизны траектории движения точки в заданный момент времени, сформулировать ответ.

Д-1:

1. Записать исходные данные своего варианта
2. Установить участки, на которых не меняется характер действующих сил (количественно и качественно)
3. На первом участке: а) составить схему движения (участок траектории, активные силы, реакции связей, оси координат); б) составить дифференциальные уравнения движения; в) решить уравнения, используя начальные условия, определить скорость точки в конце участка (эта скорость для второго участка будет начальной)
4. На втором участке: а) составить схему движения (участок траектории, активные силы, реакции связей, оси координат); б) составить дифференциальные уравнения движения; в) решить уравнения, используя начальные условия, определить закон движения на втором участке

## 2.4 Пример выполнения задания

С-3 Определение реакций опор составной конструкции

**Пример выполнения задания.** Дано: схема конструкции (рис. 20);  $P_1 = 5 \text{ кН}$ ,  $P_2 = 7 \text{ кН}$ ;  $M = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $q = 2 \text{ кН/м}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ .

Определить реакции опор, а также соединения  $C$  для того способа сочленения (шарнир или скользящая заделка), при котором модуль опоры  $A$  наименьший.

**Решение.** 1. *Определение реакций опоры  $A$  при шарнирном соединении в точке  $C$ .*

Рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 21). Составим уравнение моментов сил относительно точки  $B$ . Для упрощения вычисления момента силы  $\vec{P}_1$  разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие:  $P'_1 = P_1 \cos 60^\circ = 2,5 \text{ кН}$ ;  $P''_1 = P_1 \sin 60^\circ = 4,33 \text{ кН}$ ,

$$\sum M_{iB} = 0; P'_1 \cdot 3 + P''_1 \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + P_2 \sqrt{1,0^2 + 1,5^2} = 0, \quad (1)$$

где  $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}$ .

После подстановки данных и вычислений уравнение (1) получает вид

$$X_A - 5Y_A = -24,74 \text{ кН}. \quad (1')$$

Второе уравнение с неизвестными  $X_A$  и  $Y_A$  получим, рассмотрев систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира  $C$  (рис. 22):

$$\sum M_{iC} = 0; P''_1 \cdot 6 + Q \cdot 2 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 3 = 0,$$

или после вычислений

$$4X_A - 3Y_A = -41,98 \text{ кН}. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1') и (2), находим:

$$X_A = -7,97 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,36 \text{ кН}.$$

Модуль реакции опоры  $A$  при шарнирном соединении в точке  $C$  равен

$$R'_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{7,97^2 + 3,36^2} = \sqrt{74,81} = 8,65 \text{ кН}.$$

2. Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке  $C$  скользящей заделкой показана на рис. 23. Системы сил, показанных

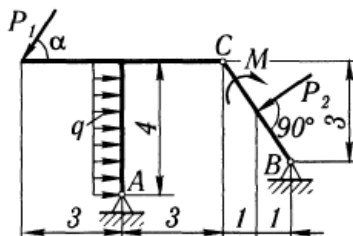


Рис. 20

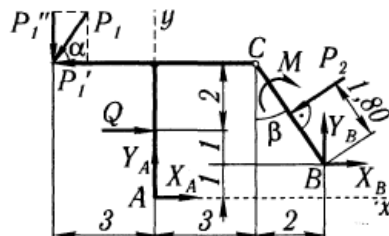


Рис. 21

на рис. 21 и 23, ничем друг от друга не отличаются. Поэтому уравнение (1') остается в силе. Для получения второго уравнения

рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее скользящей заделки  $C$  (рис. 24, а).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + Q - P'_1 = 0, \quad (3)$$

откуда

$$X_A = -5,50 \text{ кН},$$

и из уравнения (1') находим

$$Y_A = 3,85 \text{ кН}.$$

Следовательно, модуль реакции опоры  $A$  при скользящей заделке в  $C$  равен

$$R''_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,50^2 + 3,85^2} = \sqrt{45,07} = 6,71 \text{ кН}.$$

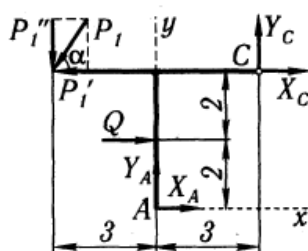


Рис. 22

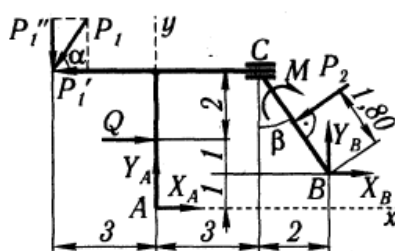


Рис. 23

Итак, при соединении в точке  $C$  скользящей заделкой модуль реакции опоры  $A$  меньше, чем при шарнирном соединении ( $\approx$  на 22%). Найдем составляющие реакции опоры  $B$  и скользящей заделки.

Для левой от  $C$  части (рис. 24, а)

$$\sum Y_i = 0; \quad -P''_1 + Y_A + Y_C = 0, \quad (4)$$

откуда

$$Y_C = P''_1 - Y_A = 0,48 \text{ кН}.$$

Составляющие реакции опоры  $B$  и момент в скользящей заделке найдем из уравнений равновесия, составленных для правой от  $C$  части конструкции (рис. 24, б):

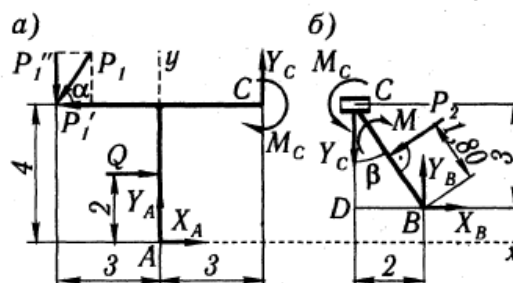


Рис. 24

$$\sum M_{iB} = 0; \quad M_C + Y_C \cdot 2 - M + P_2 \cdot 1,80 = 0, \quad (5)$$

$$\sum X_i = 0; \quad -P_2 \cos \beta + X_B = 0, \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -Y_C + Y_B - P_2 \sin \beta = 0. \quad (7)$$

Из прямоугольного треугольника  $BCD$

$$\sin \beta = BD/BC = 2,0/\sqrt{2^2 + 3^2} = 2,0/3,61 = 0,555;$$

$$\cos \beta = CD/BC = 3,0/3,61 = 0,832.$$

Решая уравнения (5)—(7) относительно  $M_C$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$ , получим:

$$M_C = 8,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_B = 5,82 \text{ кН}; \quad Y_B = 4,37 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций убедимся, что соблюдается не использованное ранее уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции (см. рис. 21), например

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= P'_1 \cdot 4 + P''_1 \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \sin \beta \cdot 4 + P_2 \cos \beta \cdot 2,5 - X_B \cdot 1 + \\ &+ Y_B \cdot 5 = 2,5 \cdot 4 + 4,33 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - 22 - 7 \cdot 0,555 \cdot 4 + 7 \cdot 0,832 \cdot 2,5 - \\ &- 5,82 \cdot 1 + 4,37 \cdot 5 = 59,40 - 59,36 \approx 0. \end{aligned}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 7

|                      | Силы, кН |       |       |       |       |       | Момент,<br>кН · м |
|----------------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------|
|                      | $X_A$    | $Y_A$ | $R_A$ | $Y_C$ | $X_B$ | $Y_B$ | $M_C$             |
| Для схемы на рис. 20 | -7,97    | 3,36  | 8,65  | —     | —     | —     | —                 |
| Для схемы на рис. 23 | -5,50    | 3,85  | 6,71  | ±0,48 | 5,82  | 4,37  | ±8,44             |

**Пример выполнения задания.** Исходные данные:

$$x = 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \quad (1)$$

$$t_1 = 0,5 \quad (x \text{ и } y \text{ — в см, } t \text{ и } t_1 \text{ — в с}).$$

**Решение.** Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время  $t$  из уравнений (1).

Получаем  $y = x^2 - 1$ , т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 67.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь  $\vec{i}, \vec{j}$  — орты осей  $x$  и  $y$ ;  $v_x, v_y, a_x, a_y$  — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 4 \text{ см/с}; & a_x = \ddot{x} &= 0; \\ v_y = \dot{y} &= 32t; & a_y = \ddot{y} &= 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt|, \quad (6)$$

или

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a}/v|; \quad (6')$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (6'')$$

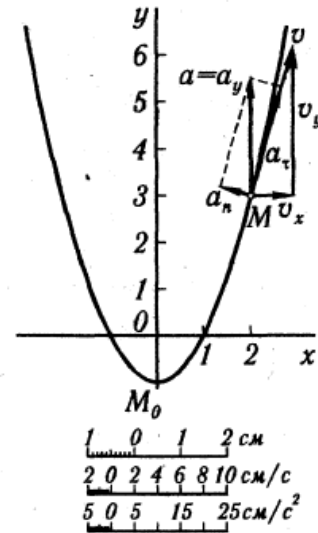


Рис. 67

$dv/dt$  выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при  $dv/dt$  означает, что движение точки ускоренное, направления  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{v}$  совпадают; знак «-», — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \quad (7)$$

Если радиус кривизны траектории  $\rho$  в рассматриваемой точке неизвестен, то  $a_n$  можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}|/v. \quad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x|/v. \quad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (9)$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3)—(6), (8) и (10) для заданного момента времени  $t_1 = 0,5$  с приведены в табл. 21.

Таблица 21

| Координаты, см |     | Скорость, см/с |       |      | Ускорение, см/с <sup>2</sup> |       |      |          |       | Радиус кривизны, см |
|----------------|-----|----------------|-------|------|------------------------------|-------|------|----------|-------|---------------------|
| $x$            | $y$ | $v_x$          | $v_y$ | $v$  | $a_x$                        | $a_y$ | $a$  | $a_\tau$ | $a_n$ | $\rho$              |
| 2,0            | 3,0 | 4,0            | 16,0  | 16,5 | 0                            | 32,0  | 32,0 | 31,0     | 7,8   | 35,0                |

На рис. 67 показано положение точки  $M$  в заданный момент времени. Вектор  $\vec{v}$  строим по составляющим  $\vec{v}_x$  и  $\vec{v}_y$ , причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор  $\vec{a}$  строим по составляющим  $\vec{a}_x$  и  $\vec{a}_y$  и затем раскладываем на составляющие  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$ . Совпадение величин  $a_\tau$  и  $a_n$ , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.

**Пример выполнения задания (рис. 118).** В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка»  $DC$ . Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки  $A$  откоса и полагая при этом его начальную скорость  $v_0 = 0$ , определить наименьшую ширину полки  $b$  и скорость  $v_C$ , с которой камень падает на нее. По участку  $AB$  откоса, составляющему угол  $\alpha$  с горизонтом и имеющему длину  $l$ , камень движется  $\tau$  с.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения  $f$  камня на участке  $AB$  постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:  $v_A = 0$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $l = 4$  м;  $\tau = 1$  с;  $f \neq 0$ ;  $h = 5$  м;  $\beta = 75^\circ$ .  
Определить  $b$  и  $v_C$ .

Решение. Рассмотрим движение камня на участке  $AB$ . Принимая камень за материальную точку, покажем (рис. 118) действующие на него силы: вес  $\vec{G}$ , нормальную реакцию  $\vec{N}$  и силу трения скольжения  $\vec{F}$ . Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке  $AB$ :

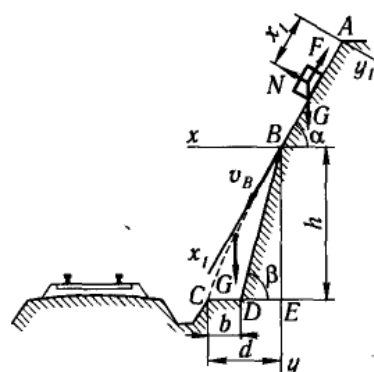


Рис. 118

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1; \\ x_1 &= [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2 + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при  $t = 0$   $x_{10} = 0$  и  $\dot{x}_{10} = 0^*$ .

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для  $t = 0$ :

$$\dot{x}_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t; \\ x_1 &= [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2. \end{aligned}$$

Для момента  $\tau$ , когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B; \quad x_1 = l,$$

т. е.

$$\begin{aligned} v_B &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau; \\ l &= [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \tau^2, \end{aligned}$$

\* Постоянные интегрирования  $C_1$  —  $C_6$  во всех 30 вариантах задания можно найти, вводя начальные условия на первом и втором участках движения точки. Тем не менее в ряде вариантов более естественно воспользоваться граничными условиями, когда значения координат и скоростей заданы не для одного, а для разных моментов времени.

откуда

$$v_B = 2l/\tau,$$

т. е.

$$v_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим движение камня от точки  $B$  до точки  $C$ .

Показав силу тяжести  $\vec{G}$ , действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при  $t = 0$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= 0; \\ \dot{x}_0 &= v_B \cos \alpha; & \dot{y}_0 &= v_B \sin \alpha. \end{aligned}$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_3; & \dot{y} &= gt + C_4; \\ x &= C_3t + C_5; & y &= gt^2/2 + C_4t + C_6. \end{aligned}$$

Напишем полученные уравнения для  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= C_3; & \dot{y}_0 &= C_4; \\ x_0 &= C_5; & y_0 &= C_6. \end{aligned}$$

Отсюда найдем, что

$$\begin{aligned} C_3 &= v_B \cos \alpha; & C_4 &= v_B \sin \alpha; \\ C_5 &= 0; & C_6 &= 0. \end{aligned}$$

Получим следующие уравнения проекций скорости камня:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = gt^2/2 + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр  $t$  из уравнений движения. Определив  $t$  из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2/(2v_B^2 \cos^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения  $y = h$ ,  $x = d$ .

Определяя  $d$  из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2,11 \text{ м}, \quad d_2 = -7,75 \text{ м.}$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то  $d = 2,11 \text{ м}$ .

Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - h/\operatorname{tg} 75^\circ, \quad \text{или } b = 0,77 \text{ м.}$$

Используя уравнение движения камня  $x = v_B \cos \alpha \cdot t$ , найдем время  $T$  движения камня от точки  $B$  до точки  $C$ :

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

по формуле

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения  $t = T = 0,53 \text{ с}$

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2},$$

или

$$v_C = 12,8 \text{ м/с.}$$

### 3. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов

#### 3.1. Поступательное движение твердого тела.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:  
Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые и (совпадающие при наложении) траектории.

#### 3.2. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:  
-причины появления дополнительного ускорения (ускорение Кориолиса);  
-при каких условиях ускорение Кориолиса равно нулю.

#### 3.3 Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:  
Момент количества движения материальной точки относительно центра есть величина векторная, а момент количества движения материальной точки относительно оси, кинетическая энергия материальной точки и механической системы – величины скалярные.

### 4. Методические рекомендации по подготовке к занятиям

#### 4.1 Статика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Понятие равнодействующей системы сил.
- Понятие момента силы относительно центра и оси.
- Инвариантность главного вектора и скалярного произведения главного вектора на главный момент.
- Условия равновесия системы сил.

#### 4.2 Кинематика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Векторный, координатный и естественный способы задания движения. Определение кинематических характеристик в каждом из способов.
- Виды движений твёрдого тела. Кинематические характеристики в каждом из движений.
- Составное движение.

#### 4.3 Динамика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Дифференциальные уравнения движения в координатной и естественной формах.
- Применение общих теорем динамики для точки, твёрдого тела и механической системы.
- Применение принципов динамики для решения первой и второй задач динамики.