ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для

самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.15 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Направление подготовки (специальность) 27.03.04 Управление в технических системах

Профиль подготовки (специализация) Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Организация самостоятельной работы

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

1.2

№ п.п	Наименование темы	Количество часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсовой работы (проекта)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	4	5	6	7	8
1	Задачи курса. Аксиомы. Реакции связей. Силовые факторы и действия над ними.	-	-	4		2
2	Основная теорема статики. Уравнения равновесия. Статически определенные и статически неопределенные задачи.	-	-	4	2	2
3	Трение скольжения и трение качения. Центр параллельных сил, центр тяжести	-	-	4	2	2
4	Способы задания движения, основные кинематические характеристики.	-	-	4		2
5	Простейшие движения твердого тела. Плоское движение твердого тела.	-	-	4		2
6	Определение скоростей и ускорений точек. Составное движение точки.	-	-	4	4	2
7	Аксиомы динамики. Дифференциальные уравнения движения точки.					4
8	Динамика системы.	-	-	3		2
9	Основные теоремы динамики.	-	-	3	2	4
Итого		-	-	30	10	20

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Индивидуальные домашние задания выполняются в форме (расчетно-проектировочной, расчетно-графической работы, презентации, контрольной работы и т.п.).

2.1 Темы индивидуальных домашних заданий

С-3. Определение реакций опор составной конструкции

К-1. Определение скоростей и ускорений точек.

Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.

2.2 Содержание индивидуальных домашних заданий

С-3. Определение реакций опор составной конструкции

Конструкция состоит из двух частей. Установить, при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции, указанной в табл.5, наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения С.

Таблица 5

Номер варианта (рис. 17–19)	P_1	P_2	M,	q,	Исследуемая реакция	Номер варианта (рис. 17–19)	P_1	P_2	M,	q,	Исследуемая реакция
	кН		кН · м	кН/м			кН		кН · м	кН/м	
1	5,0	–	24,0	0,8	X_A	16	7,0	10,0	14,0	3,8	R_B
2	6,0	10,0	22,0	1,0	R_A	17	9,0	12,0	26,0	4,0	R_A
3	7,0	9,0	20,0	1,2	R_B	18	11,0	10,0	18,0	3,5	M_B
4	8,0	–	18,0	1,4	M_A	19	13,0	9,0	30,0	3,0	M_B
5	9,0	–	16,0	1,6	R_A	20	15,0	8,0	25,0	2,5	R_B
6	10,0	8,0	25,0	1,8	M_A	21	10,0	7,0	20,0	2,0	R_A
7	11,0	7,0	20,0	2,0	R_B	22	5,0	6,0	15,0	1,5	R_A
8	12,0	6,0	15,0	2,2	M_A	23	8,0	5,0	10,0	1,4	R_A
9	13,0	–	10,0	2,4	X_A	24	11,0	4,0	5,0	1,3	M_A
10	14,0	–	12,0	2,6	R_A	25	14,0	6,0	7,0	1,2	R_B
11	15,0	5,0	14,0	2,8	R_D	26	12,0	8,0	9,0	1,1	R_B
12	12,0	4,0	16,0	3,0	R_B	27	10,0	7,0	11,0	1,0	X_A
13	9,0	6,0	18,0	3,2	R_A	28	8,0	9,0	13,0	1,2	R_A
14	6,0	–	20,0	3,4	M_A	29	6,0	10,0	15,0	1,4	M_A
15	5,0	8,0	22,0	3,6	M_B	30	10,0	12,0	17,0	1,6	M_B

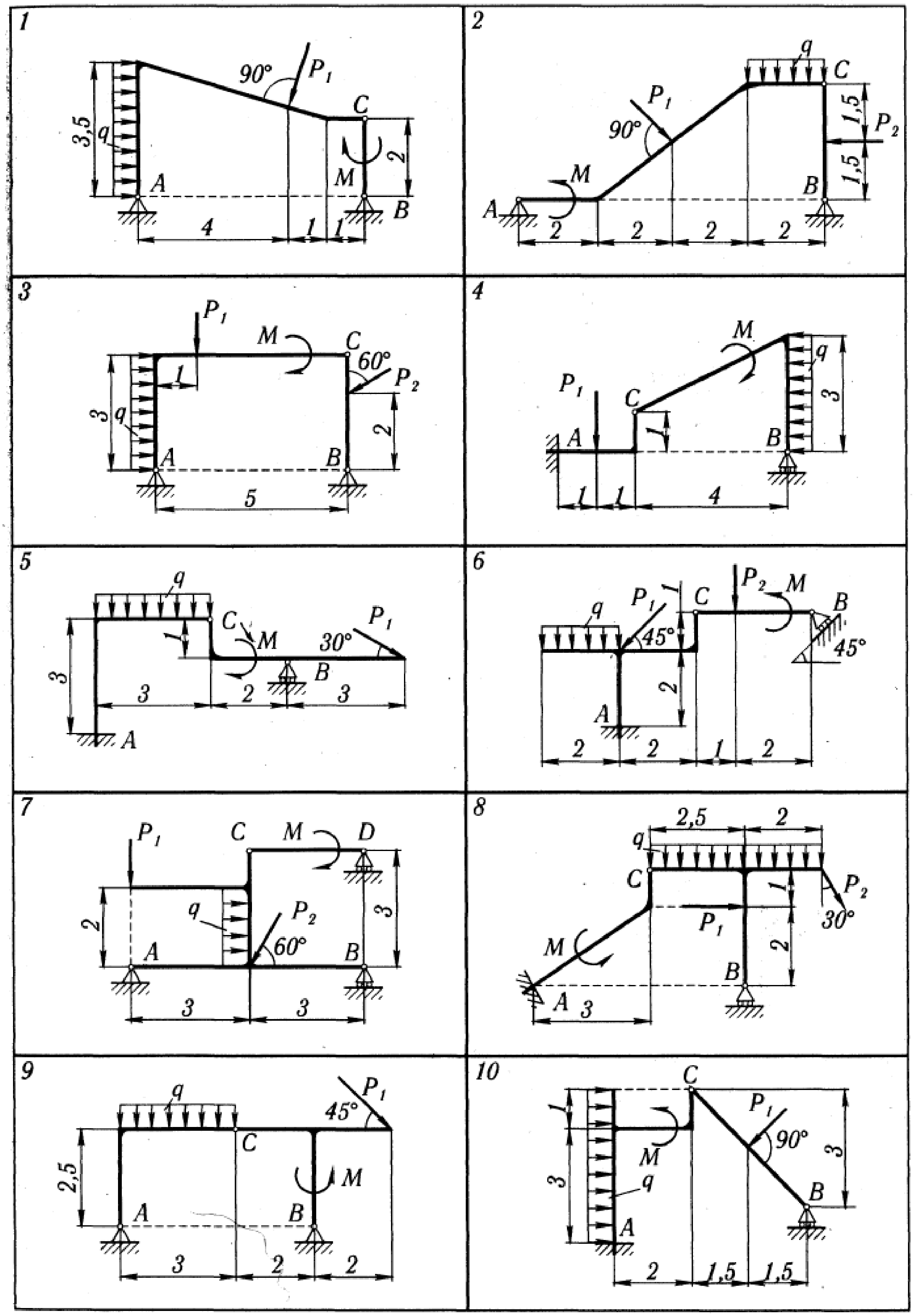

1
90°
P1
C
3,5
q
A
M
2
B
4
1
1
2
q
C
P1
1,5
90°
P2
M
1,5
B
A
2
2
2
2
3
P1
M
C
60°
P2
3
q
1
2
A
B
5
4
M
P1
C
q
1
3
A
B
1
1
4
5
q
C
M
P1
30°
1
3
B
3
2
3
A
6
P2
M
P1
1
C
B
q
45°
45°
2
A
2
2
1
2
7
P1
C
M
D
2
q
P2
3
60°
A
B
3
3
8
2,5
2
q
C
P2
1
P1
30°
M
2
B
A
3
9
q
P1
45°
2,5
C
M
A
B
3
2
2
10
C
1
P1
90°
M
3
3
q
B
A
2
1,5
1,5

Рис. 17

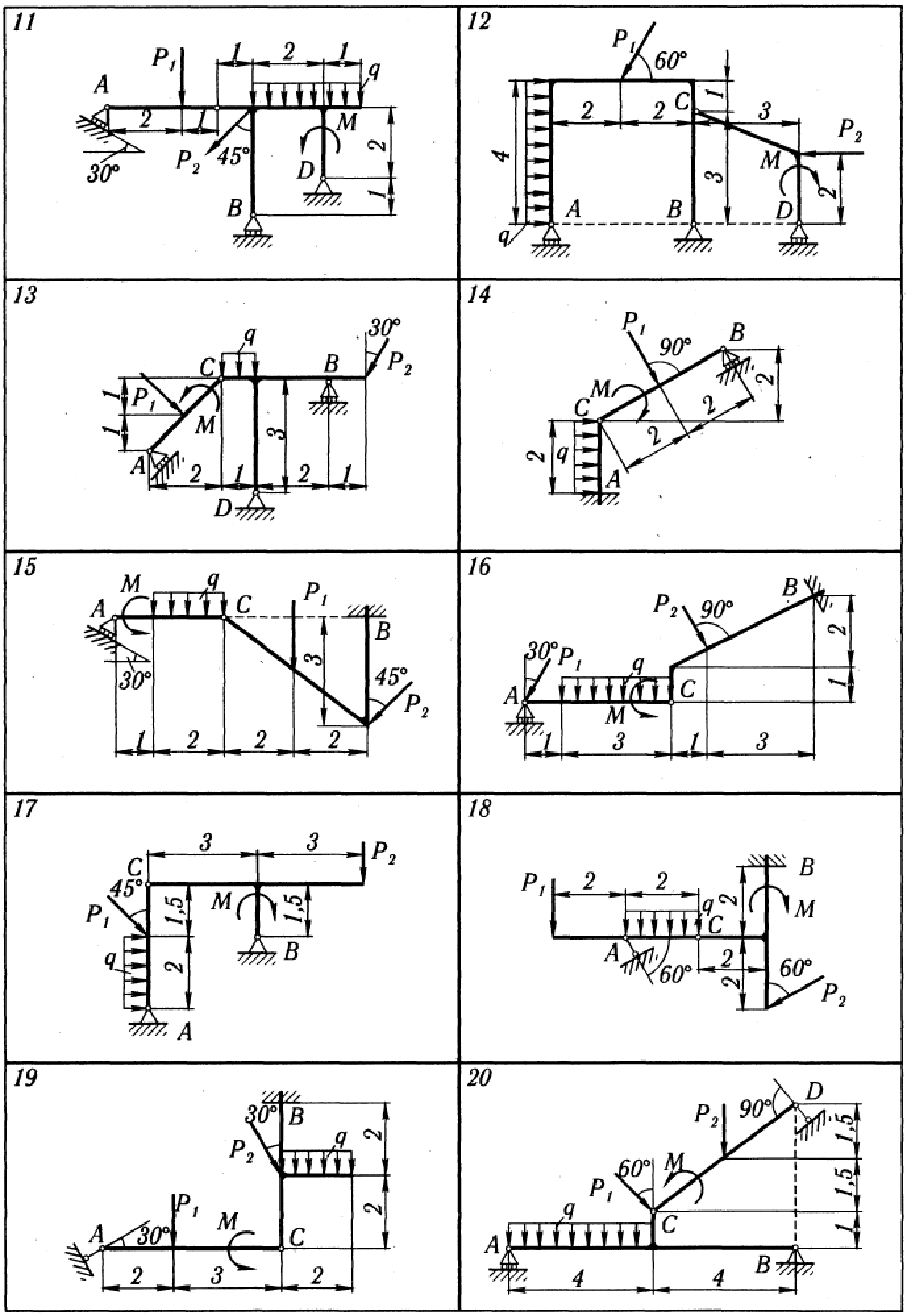

11
A P1 1 2 1 q 2 1 P2 45° M D 2 1 30° B
12
P1 60° 1 C 2 2 3 P2 4 M 3 2 A B D q
13
30° q C B P2 1 P1 M 1 3 A 2 1 2 1 D
14
P1 90° B C M 2 2 2 q 2 A
15
M q A C P1 B 3 30° 45° P2 1 2 2 2
16
B P2 90° 2 30° P1 q 1 A M C 1 3 1 3
17
C 3 3 P2 45° M P1 1,5 1,5 q 2 B A
18
P1 2 2 B q C 2 M A 2 60° 2 60° P2
19
30° B q 2 P2 P1 2 M A 30° C 2 3 2
20
D 90° P2 1,5 M 60° P1 1,5 q C A 1 B 4 4

Рис. 18

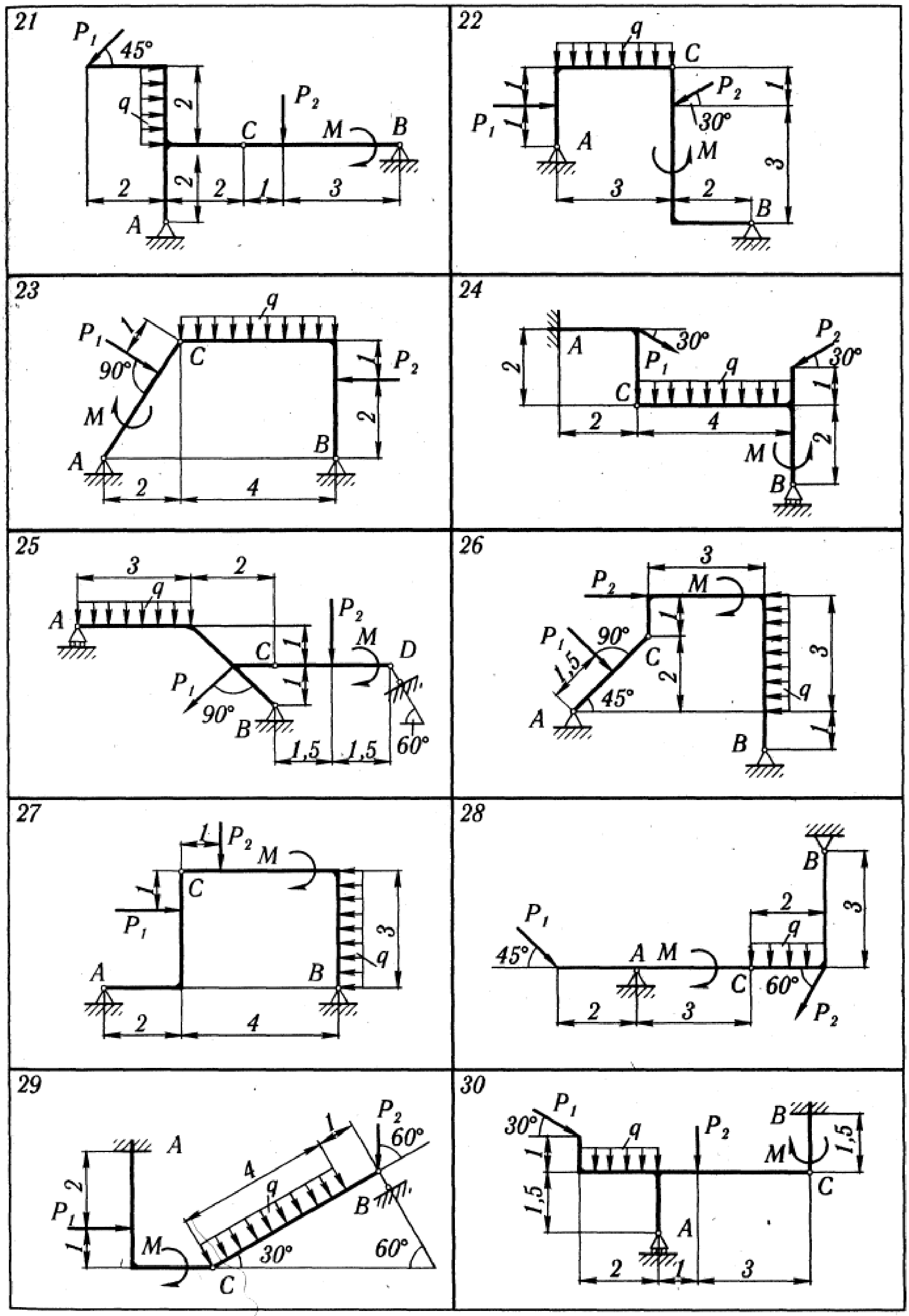
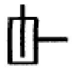
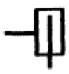
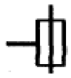
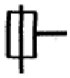
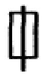
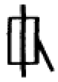
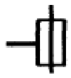
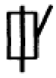
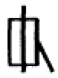
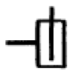
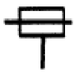

21
P1 45°
q
2
P2
C
M
B
2 2 2 1 3
A
22
q
C
1
P2
1
30°
P1
1
A
M
3
3 2
B
23
P1
1
C
q
1
P2
90°
M
2
A
B
2 4
24
A
30°
P2
30°
2
P1
q
C
1
2 4
M
2
B
25
3 2
q
A
P2
C
1
M
D
P1
1
90°
B
1,5 1,5
60°
26
3
P2
M
P1
90°
1
1,5
C
3
2
45°
q
A
1
B
27
1
P2
M
C
1
3
P1
q
A
B
2 4
28
B
3
P1
2
q
45°
A M
C 60°
2 3
P2
29
P2
A
1
60°
2
4
q
P1
B
1
M
30°
60°
C
30
30°
P1
q
P2
B
1
M
1,5
C
1,5
A
2 1 3

Рис. 19

Таблица 6

Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки
1, 2, 3		14		23	
4		15		24	
5		16		25	
6, 7, 8		17		26	
9		18		27	
10		19		28	
11		20		29	
12		21		30	
13		22			

К-1. Определение скоростей и ускорений точек.

По заданным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени $t=t_1$(с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения задачи данные приведены в таблице 20.

Таблица 20

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4\cos^2(\pi t/3) + 2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t + 6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1/2
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7\sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6) - 2$	$6\cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1
24	$-4\cos(\pi t/3) - 1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8\sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2\cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2\sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.

Варианты 1—5 (рис. 117, схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD, наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $\beta = 60°$. Определить τ и h.

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15°$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0{,}2$; $h = 4$ м; $\beta = 45°$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC.

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 3{,}5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60°$. Определить v_B и τ.

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9{,}8$ м; $\beta = 60°$; $f = 0$. Определить α и T.

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $l = 9{,}8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45°$. Определить f и v_c.

Варианты 6—10 (рис. 117, схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB, наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l, со скоростью v_A. Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f. Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью v_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20°$; $f = 0{,}1$; $\tau = 0{,}2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30°$. Определить l и v_C.

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15°$; $f = 0{,}1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45°$. Определить v_B и T.

Вариант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0{,}3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60°$. Определить α и d.

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15°$; $\tau = 0{,}3$ с; $f = 0{,}1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45°$. Определить v_B и v_A.

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15°$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60°$. Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC.

Варианты 11—15 (рис. 117, схема 3). Имея в точке A скорость v_A, мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l, составляющему с горизонтом угол α. При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d, находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью v_C. Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30°$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4{,}5$ м/с; $d = 3$ м. Определить τ и h.

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30°$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4{,}5$ м/с; $h = 1{,}5$ м. Определить v_A и d.

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30°$; $m = 400$ кг, $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1{,}5$ м. Определить P и l.

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30°$; $m = 400$ кг; $P = 2{,}2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить v_B и v_C.

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m.

Варианты 16—20 (рис. 117, схема 4). Камень скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f. Имея в точке B скорость v_B, камень через T с ударяется в точке C о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0{,}2$; $d = 2{,}5$ м. Определить h и T.

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45°$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить d и f.

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30°$; $l = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0{,}1$; $d = 3$ м. Определить h и τ.

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15°$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $\tau = 1{,}5$ с; $d = 2$ м. Определить v_A и h.

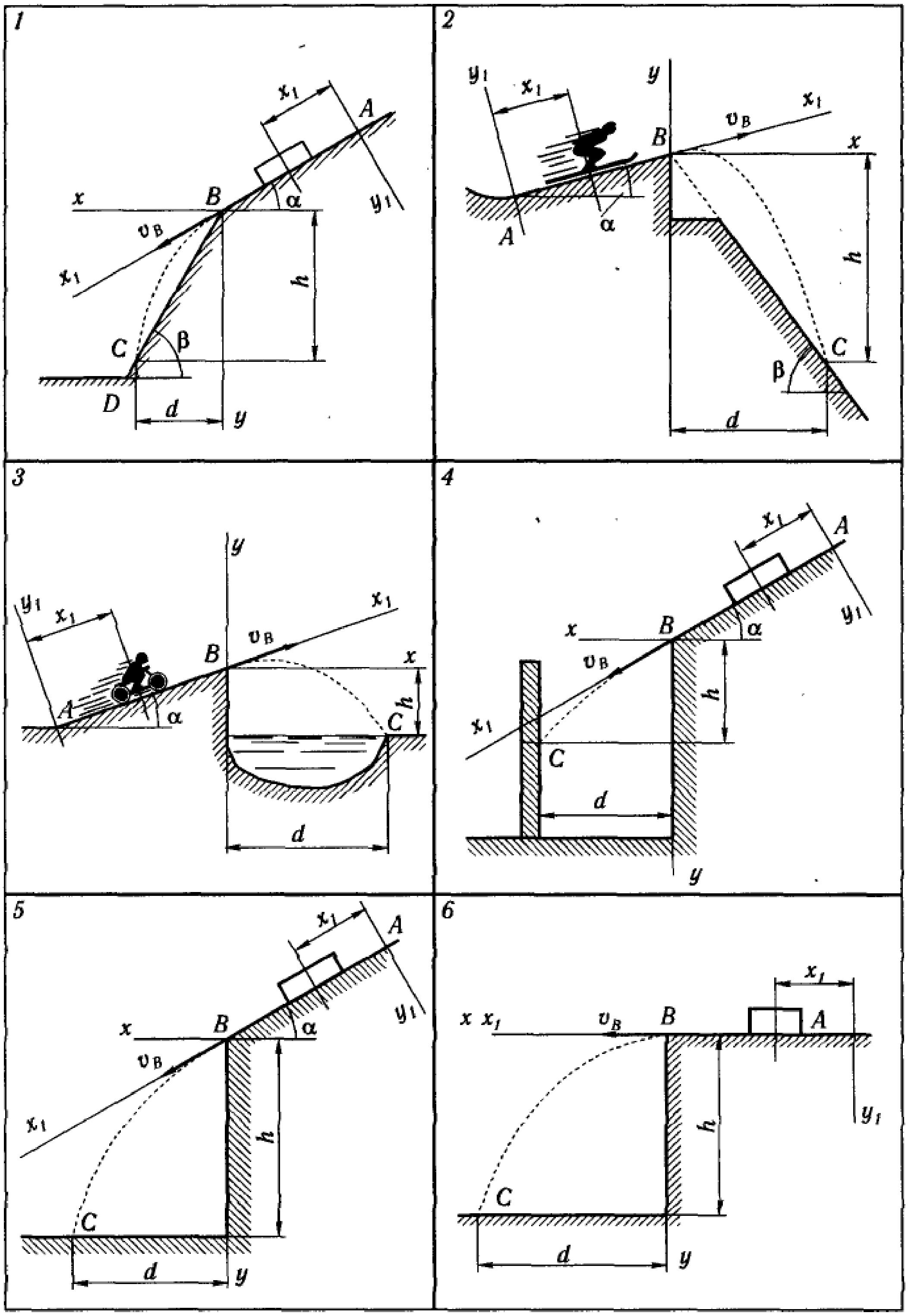


Рис.117

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45°$; $v_A = 0$; $f = 0{,}3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Определить l и τ.

Варианты 21—25 (рис. 117, схема 5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ с тело в точке B со скоростью v_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью v_C; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30°$; $f = 0{,}1$; $v_A = 1$ м/с; $\tau = 1{,}5$ с; $h = 10$ м. Определить v_B и d.

Вариант 22. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45°$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить f и уравнение траектории на участке BC.

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9{,}81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T.

Вариант 24. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30°$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить τ и h.

Вариант 25. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30°$; $f = 0{,}2$; $l = 6$ м; $h = 4{,}5$ м. Определить τ и v_C.

Варианты 26—30 (рис. 117, схема 6). Имея в точке A скорость v_A, тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. Со скоростью v_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью v_C, находясь в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $v_A = 7$ м/с; $f = 0{,}2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м. Определить d и v_C.

Вариант 27. Дано: $v_A = 4$ м/с; $f = 0{,}1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить v_B и h.

Вариант 28. Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0{,}3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и T.

Вариант 29. Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2{,}5$ м; $h = 20$ м. Определить f и d.

Вариант 30. Дано: $f = 0{,}25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и τ.

2.3 Порядок выполнения заданий

С-3:

1. В соответствии с условием задачи изобразить схему конструкции.
2. Выбрать точки или тело, равновесие которого будем рассматривать.
3. Расставить активные силы.
4. Связи убрать, а их действие заменить соответствующими реакциями.
5. Установить, какая система сил получена и записать условие равновесия.
6. Составить уравнения (выбрав направление координатных осей), решить их и оценить результат.

Примечание. В задании С-3 эту последовательность применяют для всей конструкции, затем для отдельных частей как при шарнирном соединении, так и при соединении скользящей заделкой частей конструкции.

К-1:

1. Определить траекторию движения точки и изобразить ее в масштабе в декартовой системе координат. На траектории показать начальное положение точки и положение точки в заданный момент времени.

2. По заданным законам движения точки определить составляющие скорости, показать их на графике в масштабе.
3. Зная законы изменения скорости в направлении координатных осей определить составляющие ускорения точки, вычислить их значения для заданного момента времени, показать на графике в масштабе.
4. Определить тангенциальную и нормальную составляющие ускорения, показать в масштабе на графике.
5. Вычислить радиус кривизны траектории движения точки в заданный момент времени, сформулировать ответ.

Д-1:

1. Записать исходные данные своего варианта
2. Установить участки, на которых не меняется характер действующих сил (количественно и качественно)
3. На первом участке: а) составить схему движения (участок траектории, активные силы, реакции связей, оси координат); б) составить дифференциальные уравнения движения; в) решить уравнения, используя начальные условия, определить скорость точки в конце участка (эта скорость для второго участка будет начальной)
4. На втором участке: а) составить схему движения (участок траектории, активные силы, реакции связей, оси координат); б) составить дифференциальные уравнения движения; в) решить уравнения, используя начальные условия, определить закон движения на втором участке

2.4 Пример выполнения задания

С-3 Определение реакций опор составной конструкции

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 20); $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 7$ кН; $M = 22$ кН · м; $q = 2$ кН/м; $\alpha = 60°$.

Определить реакции опор, а также соединения C для того способа сочленения (шарнир или скользящая заделка), при котором модуль опоры A наименьший.

Решение. 1. *Определение реакций опоры A при шарнирном соединении в точке C.*

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 21). Составим уравнение моментов сил относительно точки B. Для упрощения вычисления момента силы $\vec{P}_1$ разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие: $P_1' = P_1 \cos 60^\circ = 2{,}5$ кН; $P_1'' = P_1 \sin 60^\circ = 4{,}33$ кН,

$$\sum M_{iB} = 0;\ P_1' \cdot 3 + P_1'' \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + \\ + P_2\sqrt{1{,}0^2 + 1{,}5^2} = 0, \qquad (1)$$

где $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$ кН.

После подстановки данных и вычислений уравнение (1) получает вид

$$X_A - 5Y_A = -24{,}74 \text{ кН}. \qquad (1')$$

Второе уравнение с неизвестными X_A и Y_A получим, рассмотрев систему уравновешивающихся сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира C (рис. 22):

$$\sum M_{iC} = 0;\ P_1'' \cdot 6 + Q \cdot 2 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 3 = 0,$$

или после вычислений

$$4X_A - 3Y_A = -41{,}98 \text{ кН}. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1′) и (2), находим:

$$X_A = -7{,}97 \text{ кН}, \qquad Y_A = 3{,}36 \text{ кН}.$$

Модуль реакции опоры A при шарнирном соединении в точке C равен

$$R_A' = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{7{,}97^2 + 3{,}36^2} = \sqrt{74{,}81} = 8{,}65 \text{ кН}.$$

2. *Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке C скользящей заделкой показана на рис.* 23. Системы сил, показанных

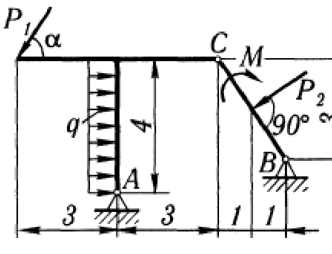


Рис. 20

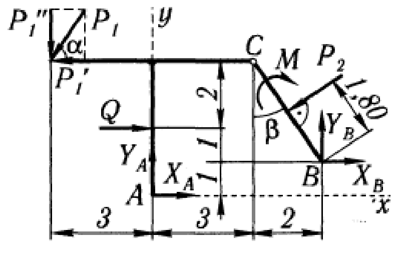


Рис. 21

на рис. 21 и 23, ничем друг от друга не отличаются. Поэтому уравнение (1′) остается в силе. Для получения второго уравнения рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее скользящей заделки C (рис. 24, *а*).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \; X_A + Q - P_1' = 0, \tag{3}$$

откуда

$$X_A = -5{,}50 \text{ кН},$$

и из уравнения (1′) находим

$$Y_A = 3{,}85 \text{ кН}.$$

Следовательно, модуль реакции опоры A при скользящей заделке в C равен

$$R_A'' = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5{,}50^2 + 3{,}85^2} = \sqrt{45{,}07} = 6{,}71 \text{ кН}.$$

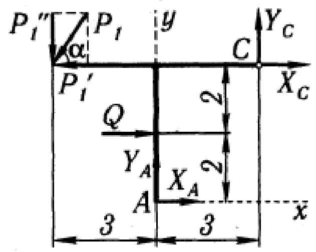


Рис. 22

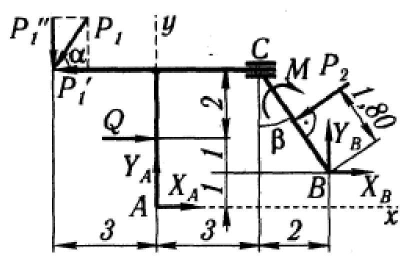


Рис. 23

Итак, при соединении в точке C скользящей заделкой модуль реакции опоры A меньше, чем при шарнирном соединении ($\approx$ на 22%). Найдем составляющие реакции опоры B и скользящей заделки.

Для левой от C части (рис. 24, *а*)

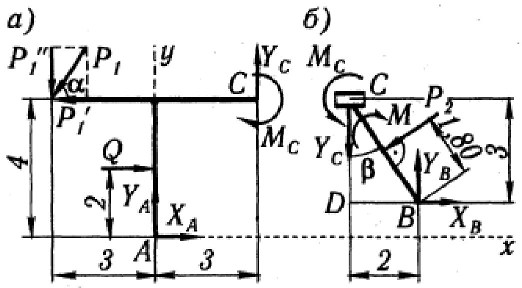


Рис. 24

$$\sum Y_i = 0; \; -P_1'' + Y_A + Y_C = 0, \tag{4}$$

откуда

$$Y_C = P_1'' - Y_A = 0{,}48 \text{ кН}.$$

Составляющие реакции опоры B и момент в скользящей заделке найдем из уравнений равновесия, составленных для правой от C части конструкции (рис. 24, *б*):

$$\sum M_{iB} = 0; \qquad M_C + Y_C \cdot 2 - M + P_2 \cdot 1{,}80 = 0, \tag{5}$$

$$\sum X_i = 0; \qquad -P_2 \cos\beta + X_B = 0, \tag{6}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_C + Y_B - P_2 \sin\beta = 0. \tag{7}$$

Из прямоугольного треугольника BCD

$$\sin\beta = BD/BC = 2{,}0/\sqrt{2^2+3^2} = 2{,}0/3{,}61 = 0{,}555;$$
$$\cos\beta = CD/BC = 3{,}0/3{,}61 = 0{,}832.$$

Решая уравнения (5)—(7) относительно M_C, X_B, Y_B, получим:

$$M_C = 8{,}44 \text{ кН}\cdot\text{м}; \qquad X_B = 5{,}82 \text{ кН}; \qquad Y_B = 4{,}37 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций убедимся, что соблюдается не использованное ранее уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции (см. рис. 21), например

$$\sum M_{iA} = P_1'\cdot 4 + P_1''\cdot 3 - Q\cdot 2 - M - P_2\sin\beta\cdot 4 + P_2\cos\beta\cdot 2{,}5 - X_B\cdot 1 +$$
$$+ Y_B\cdot 5 = 2{,}5\cdot 4 + 4{,}33\cdot 3 - 8\cdot 2 - 22 - 7\cdot 0{,}555\cdot 4 + 7\cdot 0{,}832\cdot 2{,}5 -$$
$$-5{,}82\cdot 1 + 4{,}37\cdot 5 = 59{,}40 - 59{,}36 \approx 0.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 7

	Силы, кН						Момент, кН · м
	X_A	Y_A	R_A	Y_C	X_B	Y_B	M_C
Для схемы на рис. 20	−7,97	3,36	8,65	–	–	–	–
Для схемы на рис. 23	−5,50	3,85	6,71	±0,48	5,82	4,37	±8,44

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t;\ y = 16t^2 - 1; \tag{1}$$

$$t_1 = 0{,}5 \quad (x \text{ и } y \text{ — в см, } t \text{ и } t_1 \text{ — в с}).$$

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 67.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}. \tag{2}$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$ — орты осей x и y; v_x, v_y, a_x, a_y — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 4 \text{ см/с}; \quad & a_x &= \ddot{x} = 0; \\ v_y &= \dot{y} = 32t; \quad & a_y &= \ddot{y} = 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{4}$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{5}$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t\,|, \tag{6}$$

или

$$a_\tau = |\,\vec{v}\cdot\vec{a}/v\,|; \tag{6'}$$

$$a_\tau = |\,(v_x a_x + v_y a_y)/v\,|; \tag{6''}$$

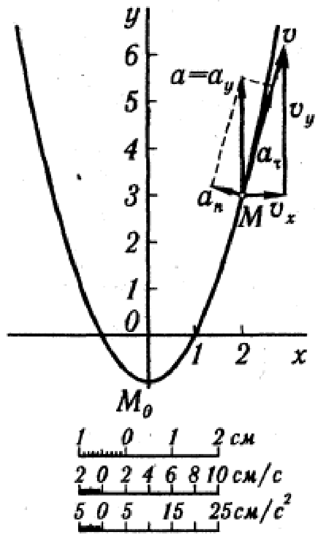


Рис. 67

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ совпадают; знак «−», — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \tag{7}$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\,\vec{v} \times \vec{a}\,|/v. \tag{8}$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |\,v_x a_y - v_y a_x\,|/v. \tag{8$'$}$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \tag{9}$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \tag{10}$$

Результаты вычислений по формулам (3)—(6), (8) и (10) для заданного момента времени $t_1 = 0{,}5$ с приведены в табл. 21.

Таблица 21

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	y	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 67 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Совпадение величин a_τ и a_n, найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы.

Пример выполнения задания (рис. 118). В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC. Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость $v_0 = 0$, определить наименьшую ширину полки b и скорость v_C, с которой камень падает на нее. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l, камень движется τ с.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60°$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75°$. Определить b и v_C.

Решение. Рассмотрим движение камня на участке AB. Принимая камень за материальную точку, покажем (рис. 118) действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$. Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB:

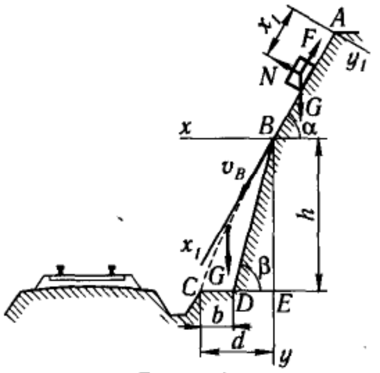


Рис. 118

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \qquad m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - fG\cos\alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha - fg\cos\alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t + C_1;$$
$$x_1 = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\ t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0$*.

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \qquad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t;$$
$$x_1 = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\ t^2.$$

Для момента τ, когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B; \qquad x_1 = l,$$

т. е.

$$v_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\tau;$$
$$l = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\ \tau^2,$$

* Постоянные интегрирования C_1 — C_6 во всех 30 вариантах задания можно найти, вводя начальные условия на первом и втором участках движения точки. Тем не менее в ряде вариантов более естественно воспользоваться граничными условиями, когда значения координат и скоростей заданы не для одного, а для разных моментов времени.

откуда

$$v_B = 2l/\tau,$$

т. е.

$$v_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C.

Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \qquad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$

$$x_0 = 0; \qquad y_0 = 0;$$
$$\dot{x}_0 = v_B \cos\alpha; \qquad \dot{y}_0 = v_B \sin\alpha.$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\dot{x} = C_3; \qquad \dot{y} = gt + C_4;$$
$$x = C_3 t + C_5; \qquad y = gt^2/2 + C_4 t + C_6.$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3; \qquad \dot{y}_0 = C_4;$$
$$x_0 = C_5; \qquad y_0 = C_6.$$

Отсюда найдем, что

$$C_3 = v_B \cos\alpha; \qquad C_4 = v_B \sin\alpha;$$
$$C_5 = 0; \qquad C_6 = 0.$$

Получим следующие уравнения проекций скорости камня:

$$\dot{x} = v_B \cos\alpha, \qquad \dot{y} = gt + v_B \sin\alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = v_B \cos\alpha \cdot t, \qquad y = gt^2/2 + v_B \sin\alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2/(2v_B^2 \cos^2\alpha) + x \operatorname{tg}\alpha.$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2{,}11 \text{ м}, \qquad d_2 = -7{,}75 \text{ м}.$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d = 2{,}11$ м.

Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - h/\operatorname{tg} 75^\circ, \qquad \text{или } b = 0{,}77 \text{ м}.$$

Используя уравнение движения камня $x = v_B \cos\alpha \cdot t$, найдем время T движения камня от точки B до точки C:

$$T = 0{,}53 \text{ с.}$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = v_B \cos\alpha, \qquad \dot{y} = gt + v_B \sin\alpha$$

по формуле

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 0{,}53$ с

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos\alpha)^2 + (gT + v_B \sin\alpha)^2},$$

или

$$v_C = 12{,}8 \text{ м/с.}$$

3. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов

3.1. Поступательное движение твердого тела.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые и (совпадающие при наложении) траектории.

3.2. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
-причины появления дополнительного ускорения (ускорение Кориолиса);
-при каких условиях ускорение Кориолиса равно нулю.

3.3 Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
Момент количества движения материальной точки относительно центра есть величина векторная, а момент количества движения материальной точки относительно оси, кинетическая энергия материальной точки и механической системы – величины скалярные.

4. Методические рекомендации по подготовке к занятиям

4.1 Статика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Понятие равнодействующей системы сил.
- Понятие момента силы относительно центра и оси.
- Инвариантность главного вектора и скалярного произведения главного вектора на главный момент.
- Условия равновесия системы сил.

4.2 Кинематика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Векторный, координатный и естественный способы задания движения. Определение кинематических характеристик в каждом из способов.
- Виды движений твёрдого тела. Кинематические характеристики в каждом из движений.
- Составное движение.

4.3 Динамика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

- Дифференциальные уравнения движения в координатной и естественной формах.
- Применение общих теорем динамики для точки, твёрдого тела и механической системы.
- Применение принципов динамики для решения первой и второй задач динамики.