ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.В.13 Теория принятия решений

Направление подготовки (специальность) 27.03.04 Управление в технических системах

Профиль подготовки (специализация) Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Квалификация выпускника бакалавр

Форма обучения заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	**Раздел 1** Линейное программирование.				**18**	**8**
2	**Тема 1** Задачи линейного программирования (ЛП).				9	4
3	**Тема 2** Двойственная задача ЛП.				9	4
4	**Раздел 2** Теория игр.				**18**	**8**
5	**Тема 3** Решение задач теории игр в чистых и смешанных стратегиях.				9	4
6	**Тема 4** Решение задачи теории игр в условиях риска и неопределённости.				9	4
7	**Раздел 3** Многокритериальные задачи принятия решений.				**20**	**6**
8	**Тема 5** Многокритериальные решения при объективных моделях.				5	
9	**Тема 6** Многокритериальная теория полезности.				5	2
10	**Раздел 4** Оценка					

	многокритериальны х альтернатив.					
11	**Тема 7** Метод аналитической иерархии МАИ.				5	2
12	**Тема 8** Методы ELECTRE.				5	2

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Задачи линейного программирования (ЛП).

Модели задач оперативного управления.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на типы задач математического программирования.

На практике распространены ситуации, когда взаимовыгодные для сторон параметры заключенного договора в ходе выполнения проекта становятся невыгодными в силу изменившихся обстоятельств, внешних условий, ошибок прогнозирования и планирования и т.д. Тогда у одной (или одновременно у обоих) сторон заказчика и исполнителя работ по проекту – возникает желание изменить параметры договора – внести дополнительные соглашения. Такую ситуацию называют перезаключением договора (пере соглашением контракта). Рассмотрим модели перезаключения договора – внесения в него дополнительных соглашений.

Одноэлементная модель [60]. В соответствии с подходом, предложенным в [22], примем, что пересоглашение контракта происходит в том, и только в том случае, если каждому из участников системы (заказчику и всем исполнителям) новый контракт обеспечивает не меньшие значения полезностей (целевых функций), чем старый контракт. Иначе говоря, каждый из участников обладает правом вето: если при новом контракте он получает полезность строго меньше, чем при старом, то он имеет право блокировать пересоглашение, и старый контракт остается в силе. Отметим, что, так как заказчик выражает интересы системы в целом (эффективность управления определяется через его целевую функцию), то приведенное выше условие пересоглашения означает следующее: если пересоглашение произошло, то эффективность управления возросла (не уменьшилась). Таким образом, задача исследования условий пересоглашения контракта свелась к задаче определения условий того, что с учетом вновь поступившей информации возможно синтезировать контракт (найти параметры нового договора), обеспечивающий всем участникам не меньшие полезности.

В литературе по теории контрактов различают контракты с обязательствами и контракты без обязательств (см. подробный обзор современных моделей пересоглашения контрактов и ссылки в [74]). В первом случае, если кто-либо из участников нарушает условия контракта, то на него накладываются достаточно сильные штрафы (сильные настолько, что нарушение становится невыгодным). Поэтому в контрактах с обязательствами при рассмотрении механизмов пересоглашения необходимо сравнивать две ситуации – когда заказчик и исполнитель следуют условиям первоначального контракта и когда они (оба!) следуют условиям нового контракта. В контрактах без обязательств участники могут нарушать усло-
вия первоначального контракта, выбирая стратегии, которые являются оптимальными с учетом вновь поступившей информации. Ниже мы ограничимся рассмотрением контрактов с обязательствами.

Пусть функции дохода заказчика и затрат исполнителя зависят от неопределенных параметров – соответственно *l ³ 0* и *r > 0:*
H(*y*, *l*) и *c*(*y*, *r*). Содержательно *l* может интерпретироваться как внешняя цена продукции, производимой исполнителем, *r* – как эффективность деятельности исполнителя. Допустим, что *" l ³ 0*
H(*0*, *l*) *= 0* и *" r > 0 c*(*y*, *r*) *= 0.*

Таким образом,
(1) $F(s(\times), y, l) = H(y, l) - s(y)$,
(2) $f(s(\times), y, r) = s(y) - c(y, r)$,
где $s(y)$ – вознаграждение, выплачиваемое заказчиком исполнителю в зависимости от действия *y Î A* последнего.
Пусть договор заключался при значениях *l0* и *r0* (фактических или прогнозируемых). Вычислим оптимальное с точки зрения заказчика действие исполнителя:
(3) $x^*(l0, r0) = \arg$
yÎA
$\max [H(y, l0) - c(y, r0)]$.
Тогда оптимальные параметры исходного договора1 (в рамках компенсаторной системы стимулирования [60, 71]) – действие исполнителя $x^*(l0, r0)$ и вознаграждение $c(x^*(l0, r0), r0)$. В рамках исходного договора полезность заказчика равна (4) $D(l0, r0) = H(x^*(l0, r0), l0) - c(x^*(l0, r0), r0)$, а полезность исполнителя равна нулю (в силу принципа компенсации затрат [71]).
Фактические значения параметров *l* и *r* могут отличаться от прогнозируемых *l0* и *r0*, что может приводить к тому, что фактические полезности заказчика и исполнителя могут отличаться от прогнозируемых. Определим следующие величины:
(5) $D(l0, l, r0, r) = H(x^*(l0, r0), l) - c(x^*(l0, r0), r0)$,
(6) $d(l0, l, r0, r) = c(x^*(l0, r0), r0) - c(x^*(l0, r0), r)$,
(7) $D(l, r) = H(x^*(l, r), l) - c(x^*(l, r), r)$.
Выражение (5) определяет полезность заказчика при изменившихся условиях в рамках исходного договора, выражение (6) –
полезность исполнителя при изменившихся условиях в рамках исходного договора, выражение (7) – полезность исполнителя.
Предположим, что функция затрат исполнителя монотонно убывает с ростом параметра *r*.
Рассмотрим два случая. В первом случае $r < r0$. Тогда полезность исполнителя $d(l0, l, r0, r) < 0$, и для него пересмотр условий договора выгоден. Для заказчика заключение договора с параметрами $(x^*(l, r)$;
$c(x^*(l, r), r))$ выгодно, если выполнено следующее неравенство: (8) $D(l, r)$ ³ $D(l0, l, r0, r)$.
Во втором случае $r > r0$. Тогда полезность исполнителя $d(l0, l, r0, r) > 0$, и для него пересмотр условий договора выгоден только если он при новых условиях договора получит полезность не менее $d(l0, l, r0, r)$. Тогда условие выгодности перезаключения договора для заказчика можно записать в виде:

(9) $D(l, r) - d(l0, l, r0, r)$ ³ $D(l0, l, r0, r)$.__

2.2 Решение задач теории игр в чистых и смешанных стратегиях.

Биматричные игры. Точка равновесия по Нэшу.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на безусловная оптимизация.

Не все конфликтные ситуации можно представить как игры с нулевой суммой, потому что интересы участников таких конфликтов не всегда противоположны. Обобщением игр с нулевой суммой на случай не противоположных интересов участников являются игры с ненулевой суммой.

Рассмотрим конечную игру с ненулевой суммой, т. е. такую, в которой множества стратегий игроков конечны: будем считать, что первый игрок может выбрать одну из m своих стратегий, обозначенных номерами $i = 1,2, \dots, m$, а второй игрок – одну из n своих стратегий, обозначенных номерами $j = 1,2, \dots, n$. Если первый игрок выбрал свою i-ю стратегию, а второй игрок – свою j-ю стратегию, то в результате такого совместного выбора первый игрок получает выигрыш a_{ij}, а второй игрок – выигрыш b_{ij}. При этом не обязательно, чтобы $b_{ij} = -a_{ij}$, как в матричных играх.

Таким образом, конечная игра с ненулевой суммой полностью определяется двумя матрицами

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & \cdots & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(m-1)1} & b_{(m-1)2} & \cdots & b_{(m-1)n} \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

поэтому называется биматричной.

Допустим, матрицы игры выглядят следующим образом:

$B_1 \quad B_2 B_1 \quad B_2$

$$A = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Припишем стратегиям A_1, A_2(B_1, B_2) вероятности p, $1-p$($q, 1-q$) соответственно.

$q \quad (1-q) \; q \quad (1-q)$

$$A = \begin{array}{c} p \\ (1-p) \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{array}{c} p \\ (1-p) \end{array}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда средний выигрыш игрока A(первого игрока) равен:

$$M_1(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}q(1-p) + a_{22}(1-p)(1-q).$$

Средний выигрыш игрока B(второго игрока) равен:

$$M_2(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}q(1-p) + b_{22}(1-p)(1-q).$$

Биматричная игра, как и матричная, происходит партиями.

Цель каждого игрока – выиграть как можно большую сумму в результате большого числа партий. Понятия чистых и смешанных стратегий игроков в биматричных играх вводятся аналогично тому, как это было сделано в матричных играх.

Если матричные игры являются играми со строгим соперничеством, поскольку выигрыш одного игрока в точности равен проигрышу другого, то в биматричных играх интересы игроков могут быть в большей или меньшей степени близки.

В зависимости от того, запрещено или разрешено сотрудничество игроков, различают ***некооперативные***и ***кооперативные***игры.

Анализ биматричной игры в некооперативном варианте сводится к поиску *максиминных стратегий* игроков, т. е. стратегий, которые обеспечивают игрокам получение максимально возможного гарантированного выигрыша вне зависимости от действий противника.

Множество всевозможных пар смешанных стратегий игроков обозначим

$S = \{(p,q)|p \in S_1, q \in S_2\}$, где

$S_1 = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_m)|p_i \geq 0, i = 1,2, \dots, m, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\}$,

$S_2 = \{q = (q_1, q_2, \dots, q_n)|q_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\}$.

Если два игрока выбрали смешанные стратегии $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$и $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$соответственно, то математические ожидания выигрышей игроков равны

$M_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$

и

$M_2(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j$.

Важным в теории игр является понятие равновесия.

Говорят, что стратегии игроков p^*и q^*образуют равновесие Нэша, если никому из игроков не выгодно от них отклоняться при условии, что другой игрок не следует своей равновесной стратегии, т. е. если для любых стратегий p и q.

$M_1(p^*, q^*) \geq M_1(p, q^*)$,

$M_2(p^*, q^*) \geq M_1(p^*, q)$.

Теорема существования равновесий. В любой биматричной игре существует хотя бы одно равновесие Нэша.

Найти равновесные ситуации можно следующим образом.

По матрице A находим числа $C = a_{11} + a_{22} - (a_{21} + a_{12})$, $a = a_{22} - a_{12}$ и решаем систему:

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-a) \geq 0 \\ p(Cq-\alpha) \geq 0\end{cases}.$$

По матрице B находим числа $D = b_{11} + b_{22} - (b_{21} + b_{12})$, $b = b_{22} - b_{12}$ и решаем систему:

$$\begin{cases}(q-1)(Dp-b) \geq 0 \\ q(Dp-\beta) \geq 0\end{cases}.$$

Изобразив обе полученные кривые в координатах (p, q), найдем точки пересечения этих кривых, лежащие в квадрате $0 \leq p$, $q \leq 1$, которые определяют равновесные ситуации. Для каждой равновесной ситуации находят средние выигрыши $M_1(p, q)$ и $M_2(p, q)$.

Критерий равновесия. Стратегии игроков p^* и q^* образуют равновесие Нэша тогда и только тогда, когда при условии использования первым игроком стратегии p^* любая чистая стратегия второго игрока, соответствующая $q_j^* > 0$, приносит второму игроку один и тот же выигрыш μ, а любая чистая стратегия второго игрока, соответствующая $q_j^* = 0$, приносит второму игроку выигрыш, не больший μ, а при условии использования вторым игроком стратегии q^* любая чистая стратегия первого игрока, соответствующая $p_i^* > 0$, приносит первому игроку один и тот же выигрыш v, а любая чистая стратегия первого игрока, соответствующая $p_i^* = 0$, приносит первому игроку выигрыш, не больший v.

Доказательство. Пусть пара стратегий первого и второго игрока $p^* = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $q^* = (q_1, q_2, \dots, q_{j_1}, \dots, q_{j_2}, \dots, q_n)$ образуют равновесие Нэша, и пусть первый игрок действует в соответствии со стратегией p^*, не отклоняясь от нее.

Предположим, что у второго игрока существуют такие чистые стратегии с номерами j_1 и j_2, что

$$q_{j_1} > 0$$

и

$$M_2(p^*, q^{(1)}) = \sum_{i=1}^m b_{ij_1} p_i < \sum_{i=1}^m b_{ij_2} p_i = M_2(p^*, q^{(2)}),$$

где

$q^{(1)} = (0,0,\dots,q_{j_1},\dots,0,\dots,0)$

$q^{(2)} = (0,0,\dots,0,\dots,q_{j_2},\dots,0)$.

В этом случае второй игрок может отклониться от стратегии q^* и выбрать стратегию $q^{**} = (q_1, q_2, \dots, 0, \dots, q_{j_1} + q_{j_2}, \dots, q_n)$, которая обеспечит ему больший выигрыш, чем стратегия q^* при условии, что первый игрок не будет отклоняться от стратегии p^*.

Действительно,

$$M_2(p^*,q^{**}) - M_2(p^*,q^*) = \sum_{i=1}^{m}(b_{i1}p_iq_1 + b_{i2}p_iq_2 + \dots + b_{ij_1}p_i \cdot 0 + \dots +$$

$$+b_{ij_2}p_i \cdot (q_{j_1} + q_{j_2}) + \dots + b_{in}p_iq_n) - \sum_{i=1}^{m}(b_{i1}p_iq_1 + b_{i2}p_iq_2 + \dots + b_{ij_1}p_iq_{j_1} + \dots +$$

$$+b_{ij_2}p_iq_{j_2} + \dots + b_{in}p_iq_n) = -q_{j_1}\sum_{i=1}^{m} b_{ij_1}p_i + q_{j_1}\sum_{i=1}^{m} b_{ij_2}p_i =$$

$$= q_{j_1}(M_2(p^*,q^{(2)}) - M_2(p^*,q^{(1)})) > 0$$

Получили противоречие с предположением, что стратегии p^* и q^* образуют равновесие Нэша, которое доказывает теорему.

Максиминные смешанные стратегии первого и второго игроков обеспечивают им гарантированные выигрыши

$$\alpha = \max_{p\in S_1}\min_{q\in S_2} M_1(p,q) \quad \text{и} \quad \beta = \max_{q\in S_2}\min_{p\in S_1} M_1(p,q)$$

соответственно вне зависимости от поведения противника.

По-другому максиминные стратегии называются ***осторожными*** – смысл этого названия очевиден, и в некооперативном случае игрокам имеет смысл придерживаться своих осторожных стратегий.

Пример 3.1. (Игра «Дилемма заключенных»). Двое преступников (первый и второй игроки), подозреваемые в совместном совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Прямые улики у следствия отсутствуют, поэтому успех обвинения зависит от того, признаются ли заключенные. У каждого из заключенных есть две стратегии: признаться (первая стратегия) или не признаваться (вторая стратегия). Если оба преступника признаются, то они будут признаны виновными и приговорены к восьми годам заключения. Если ни один из них не признается, то по обвинению в основном преступлении они будут оправданы, но суд все-таки признает их вину в менее значительном преступлении (например, в ношении оружия), в результате чего оба будут приговорены к одному году заключения. Если же признается только один и них, то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а другой преступник будет приговорен к максимальному сроку заключения – к десяти годам. Требуется определить максиминные стратегии игроков и равновесия Нэша, если такие есть.

Решение 1. Матрицы выигрышей игроков таковы:

$q \quad (1-q) q \quad (1-q)$

$A = \begin{array}{c} p \\ (1-p) \end{array} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{array}{c} p \\ (1-p) \end{array} \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Смешанные стратегии игроков представим в виде $\boldsymbol{p} = (p, 1-p)$ и $\boldsymbol{q} = (q, 1-q)$, где $p \in [0,1]$, $q \in [0,1]$.

При этом математическое ожидание выигрыша первого игрока равно

$M_1(p,q) = -8pq - 10(1-p)q - (1-p)(1-q) = (p-9)q + p - 1$.

Аналогично определяется математическое ожидание выигрыша второго игрока:

$M_2(p,q) = -8pq - 10p(1-q) - (1-p)(1-q) = (q-9)p + q - 1$.

Наилучший гарантированный выигрыш первого игрока равен

$$\alpha = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} M_1(p,q) = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} \big((p-9)q + p - 1\big) =$$

$$= \max_{p\in[0,1]} \big((p-9)\cdot 1 + q - 1\big) = \max_{p\in[0,1]} (2p - 10) = -8$$

Учли, что $(p-9) < 0$, так как $p \in [0,1]$, поэтому вне зависимости от $p \min_{q\in[0,1]} \big((p-9)q + p - 1\big)$ будет достигаться при $q = 1$, а максиминная стратегия первого игрока, соответствующая этому наилучшему гарантированному выигрышу, $\boldsymbol{p} = (1,0)$, т. е. максиминная стратегия первого игрока – признаться и получить восемь лет заключения.

Аналогично находим наилучший гарантированный выигрыш второго игрока

$$\beta = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} M_2(p,q) = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} \big((q-9)p+q-1\big) =$$

$$= \max_{q\in[0,1]} \big((q-9)\cdot 1+q-1\big) = \max_{q\in[0,1]} (2q-10) = -8$$

и его максиминную стратегию $\boldsymbol{q} = (1{,}0)$– признаться.

Очевидно, максиминные стратегии образуют равновесие Нэша.

Решение 2. По матрице A находим числа $C = -8 + (-1) - (-10 + 0) = 1$, $a = -1 - 0 = -1$ и решаем систему:

$$\begin{cases}(p-1)(q+1) \ge 0 \\ p(q+1) \ge 0\end{cases}.$$

где получим $p = 1$.

По матрице B находим числа $D = b_{11} + b_{22} - (b_{21} + b_{12}) = -8 + (-1) - (0 + (-10) = 1$, $b = b_{22} - b_{12} = -1 - (-10) = 9$ и решаем систему:

$$\begin{cases}(q-1)(p-9) \ge 0 \\ q(p-9) \ge 0\end{cases}.$$

где получим $q = 1$.

Тогда средний выигрыш игрока A (первого игрока) равен:

$$M_1(p,q) = -8pq - 10(1-p)q - (1-p)(1-q) = (p-9)q + p - 1 = (1-9)\cdot 1 + 1 - 1 = -8$$
.

Средний выигрыш игрока B (второго игрока) равен:

$$M_2(p,q) = -8pq - 10p(1-q) - (1-p)(1-q) = (q-9)p + q - 1 = (1-9)\cdot 1 + 1 - 1 = -8$$
.

Очевидно, максиминные стратегии образуют равновесие Нэша.

Пример 3.2 (Игра «семейный спор»). Два игрока (муж и жена) выбирают, где провести вечер. У каждого из них есть две стратегии: выбрать посещение футбольного матча (первая стратегия) или оперного спектакля (вторая стратегия). Полезность совместного похода в театр муж оценивает в одну единицу, а жена в две, полезность совместного похода на футбол, наоборот, жена оценивает в одну единицу, а муж в две. Если же супруги идут в разные места, вечер оказывается испорченным, что соответствует нулевым полезностям для обоих игроков. Требуется определить макси-минные стратегии игроков и равновесия Нэша, если такие есть.

Решение. Составим матрицы выигрышей игроков:

$$A = \begin{array}{c} \\ p \\ (1-p) \end{array} \begin{array}{c} q \quad (1-q) \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ и } B = \begin{array}{c} \\ p \\ (1-p) \end{array} \begin{array}{c} q \quad (1-q) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Смешанные стратегии игроков представим в виде $\boldsymbol{p} = (p, 1-p)$ и $\boldsymbol{q} = (q, 1-q)$, где $p \in [0,1]$, $q \in [0,1]$.

При этом математические ожидания выигрышей игроков равны

$$M_1(p,q) = 2pq - (1-p)(1-q) = (3p-1)q - p + 1.$$

$$M_2(p,q) = pq + 2(1-p)(1-q) = (3q-2)p - 2q + 2.$$

Наилучшие гарантированные выигрыши игроков

$$\alpha = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} M_1(p,q) = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} \big((3p-1)q - p + 1\big) =$$

$$= \max\left\{ \max_{p\in[0,{}^1/_3]} (2p), \max_{p\in[{}^1/_3,0]} (1-p) \right\} = {}^2/_3;$$

$$\beta = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} M_2(p,q) = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} \big((3q-2)p - 2q + 2\big) =$$

$$= \max\left\{ \max_{q\in[0,{}^2/_3]} (q), \max_{q\in[{}^2/_3,0]} (2-2q) \right\} = {}^2/_3,$$

а соответствующие максиминные стратегии таковы: $\boldsymbol{p} = ({}^1/_3, {}^2/_3)$ и $\boldsymbol{q} = ({}^2/_3, {}^1/_3)$.

Иным способом:

По матрице A находим числа $C = 2 + 1 = 3 = 1$, $a = 1$ и решаем систему:

$$\begin{cases} (p-1)(3q-1) \geq 0 \\ p(3q-1) \geq 0 \end{cases}.$$

где получим $p = 1$; $q = {}^1\!/_3$.

По матрице B находим числа $D = b_{11} + b_{22} - (b_{21} + b_{12}) = 1 + 2 = 3$, $b = b_{22} - b_{12} = 2$ и решаем систему:

$$\begin{cases}(q-1)(3p-2) \geq 0 \\ q(3p-2) \geq 0\end{cases}.$$

где получим $q = 1$; $p = {}^2\!/_3$

Тогда средний выигрыш игрока A (первого игрока) равен:

$$M_1(p,q) = (3p-1)q - p + 1 = (3 \cdot 1 - 1) \cdot {}^1\!/_3 - 1 + 1 = {}^2\!/_3.$$

Средний выигрыш игрока B (второго игрока) равен:

$$M_2(p,q) = (3q-2)p - 2q + 2 = (3 \cdot 1 - 2) \cdot {}^2\!/_3 - 2 + 2 = {}^2\!/_3.$$

Это означает, что муж должен в ${}^1\!/_3$ вечеров выбирать футбол и в ${}^2\!/_3$ вечеров театр, а жена должна в ${}^2\!/_3$ вечеров выбирать футбол и в ${}^1\!/_3$ вечеров театр, тогда в среднем и муж, и жена будут выигрывать по ${}^2\!/_3$ за одну партию.

Равновесий Нэша в данной игре целых три:

$p^* = (1,0), q^* = (1,0)$;

$p^{**} = (0,1), q^{**} = (0,1)$;

$p^{***} = ({}^1\!/_3, {}^2\!/_3), q^{***} = ({}^2\!/_3, {}^1\!/_3)$.

В отличие от матричных игр, в биматричных играх может оказаться так, что совместное отклонение двумя игроками от равновесий Нэша (или от максиминных стратегий) приводит к увеличению выигрыша обоих игроков. Это иллюстрируется следующими примерами.

Если в примере 3.1 один из игроков будет придерживаться максиминной стратегии и признается, а другой игрок отклонится от своей максиминной стратегии и признаваться не будет, то тот, кто не признается, получит десять лет заключения вместо восьми (в результате его положение ухудшится, а положение его соучастника улучшится).

Существенным отличием биматричных игр от матричных являются то, что возможны ситуации, когда отклонение обоих игроков от максиминных стратегий приводит к увеличению их выигрышей: если в примере 3.1 оба преступника не признаются, то оба получат всего по одному году. Это и является основой дилеммы, которая стоит перед каждым из заключенных: поскольку переговоры друг с другом невозможны, каждый из двух заключенных делает выбор, признаваться или нет, не зная, сознался ли его соучастник.

В примере 3.2 ситуация еще сложнее: участники могут увеличить свои выигрыши, совместно отклонившись от максиминных стратегий, в нескольких ситуациях. Например, если вместо максиминных стратегий $\boldsymbol{p} = (1/3, 2/3)$ и $\boldsymbol{q} = (2/3, 1/3)$ игроки выберут соответственно стратегии $\boldsymbol{p} = (1,0)$ и $\boldsymbol{q} = (1,0)$, то их выигрыши составят 2 для мужа и 1 для жены (оба эти выигрыша больше $2/3$). Но есть и другая ситуация: если вместо максиминных стратегий игроки выберут стратегии $\boldsymbol{p} = (0,1)$ и $\boldsymbol{q} = (0,1)$, то их выигрыши составят 1 для мужа и 2 для жены (что опять превышает максиминные выигрыши). Если переговоры между участниками невозможны, отклоняться от максиминных стратегий опасно, так как даже если есть возможность выиграть больше, эта возможность сопряжена с риском уменьшения выигрыша. Например, если муж выберет театр – $\boldsymbol{p} = (0,1)$, а жена футбол – $\boldsymbol{q} = (1,0)$, или наоборот, то выигрыши обоих игроков будут равны нулю.

Выходом в таких ситуациях является кооперация игроков, т. е. сотрудничество, состоящее в том, что игроки могут договориться о совместном выборе стратегий.

Перейдем к обсуждению возможностей *кооперативного поведения* игроков.

Ранее предполагалось, что в процессе игры отсутствует явный обмен информацией между участниками. Каждый игрок определял свою линию поведения, исходя из своей функции выигрыша, и, безусловно, основываясь на том, что другие игроки действуют аналогично. При этом считалось, что игроки знают функции выигрыша друг друга, но в непосредственный контакт не вступают.

Между тем в реальных экономических ситуациях участники конфликтов активно взаимодействуют друг с другом: вступают в переговоры, заключают соглашения, создают коалиции, применяют угрозы и подкупы и т. д. Все эти процессы могут в различной степени получать отражения в игровых моделях.

Игры, в которых возможны непосредственные контакты между участниками, называются ***кооперативными***. Если игроки могут вступать в переговоры и образовывать коалиции, то какие исходы могут стать результатом переговоров.

Рассмотрим биматричную игру, в которой выигрыши первого и второго игроков заданы матрицами $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ и $B = (B_{ij}) \in R^{m \times n}$.

Пусть $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ и $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – смешанные стратегии игроков. Так как $p_i \geq 0, i = 1,2, \dots, m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $q_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, множество всех возможных вариантов пар выигрышей

($M_1(p,q), M_2(p,q)) = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j, \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j)$

представляет собой выпуклую оболочку точек плоскости с координатами (a_{ij}, b_{ij}), $i = 1,2,\dots,m$ и $j = 1,2,\dots,n$; эти точки (a_{ij}, b_{ij}) соответствуют парам выигрышей игроков в случае выбора ими своих чистых стратегий.

При этом точка ($M_1' M_2'$) доминирует точку (M_1'', M_2''), если

$\begin{cases} M_1' > M_1'' \\ M_2' \geq M_2'' \end{cases}$ или $\begin{cases} M_2' > M_2'' \\ M_1' \geq M_1'' \end{cases}$

это означает, что при переходе от первой точки ко второй выигрыш каждого из игроков не уменьшится, и при этом хотя бы у одного из игроков выигрыш увеличится.

Множество точек, оптимальных по Парето (т. е. не доминируемых другими), описывается так:

$$\mathrm{T} = \{(p^*, q^*) | p^* \in S_1, q^* \in S_2, \forall p \in S_1\ M_1(p^*, q^*) \geq M_1(p, q^*), \forall q \in S_2\ \ M_2(p^*, q^*) \geq M_2(p, q^*)\}$$

.

Если выбрать из множества точек, оптимальных по Парето, те точки, в которых выигрыши первого и второго игроков окажутся не меньше их максиминных выигрышей α и β, то получится переговорное множество

$$V = \{(p^*, q^*) \in \mathrm{T} |\ M_1(p^*, q^*) \geq \alpha,\ \ M_2(p^*, q^*) \geq \beta\}.$$

Игрокам, естественно, имеет смысл выбирать свои оптимальные стратегии, соответствующие точкам из переговорного множества.

Существуют различные способы достижения игроками договоренности о совместном выборе точки из переговорного множества. Самый простой из них заключается в выборе таких чистых стратегий, которые приносят игрокам наибольший суммарный доход, из которого один из игроков платит другому оговоренную сумму. Этот способ, конечно же, предполагает полностью доверительные отношения между игроками.

Если же договориться о выборе точки из переговорного множества игрокам не удается, то можно предложить им применить одну из так называемых арбитражных схем. Например, **арбитражная схема Нэша** предлагает игрокам выбрать из переговорного множества решение Нэша — такую пару смешанных стратегий, которая доставляет максимум функции Нэша, которая равна произведению превышений выигрышей игроков над гарантированными (минимаксными) выигрышами.

Реализация алгоритма Нэша предполагает решение задачи математического программирования

$$N = (M_1(p,q) - \alpha)(M_2(p,q) - \beta) \to max, (p,q) \in V.$$

Целевая функция этой задачи называется функцией Нэша, а оптимальное решение данной — решением Нэша.

Решение этой задачи всегда существует, и если в переговорном множестве V есть хотя бы одна точка $(p,q) \in V$, такая что $M_1(p,q) - \alpha, M_2(p,q) - \beta$, то решение задачи единственно.

Пример 3.3 (Игра «Дилемма заключенных» в кооперативном варианте). Требуется найти переговорное множество и решение Нэша в игре, описанной в примере 3.1 (Двое преступников (первый и второй игроки), подозреваемые в совместном совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Прямые улики у следствия отсутствуют, поэтому успех обвинения зависит от того, признаются ли заключенные. У каждого из заключенных есть две стратегии: признаться (первая стратегия) или не признаваться (вторая стратегия). Если оба преступника признаются, то они будут признаны виновными и приговорены к восьми годам заключения. Если ни один из них не признается, то по обвинению в основном преступлении они будут оправданы, но суд все-таки признает их вину в менее значительном преступлении (например, в ношении оружия), в результате чего оба будут приговорены к одному году заключения. Если же признается только один и них, то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а другой преступник будет приговорен к максимальному сроку заключения – к десяти годам. Требуется определить максиминные стратегии игроков и равновесия Нэша, если такие есть) при условии, что заключенные могут обмениваться информацией.

Решение. Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено четырехугольником *ABCD* на рис. 3.1.

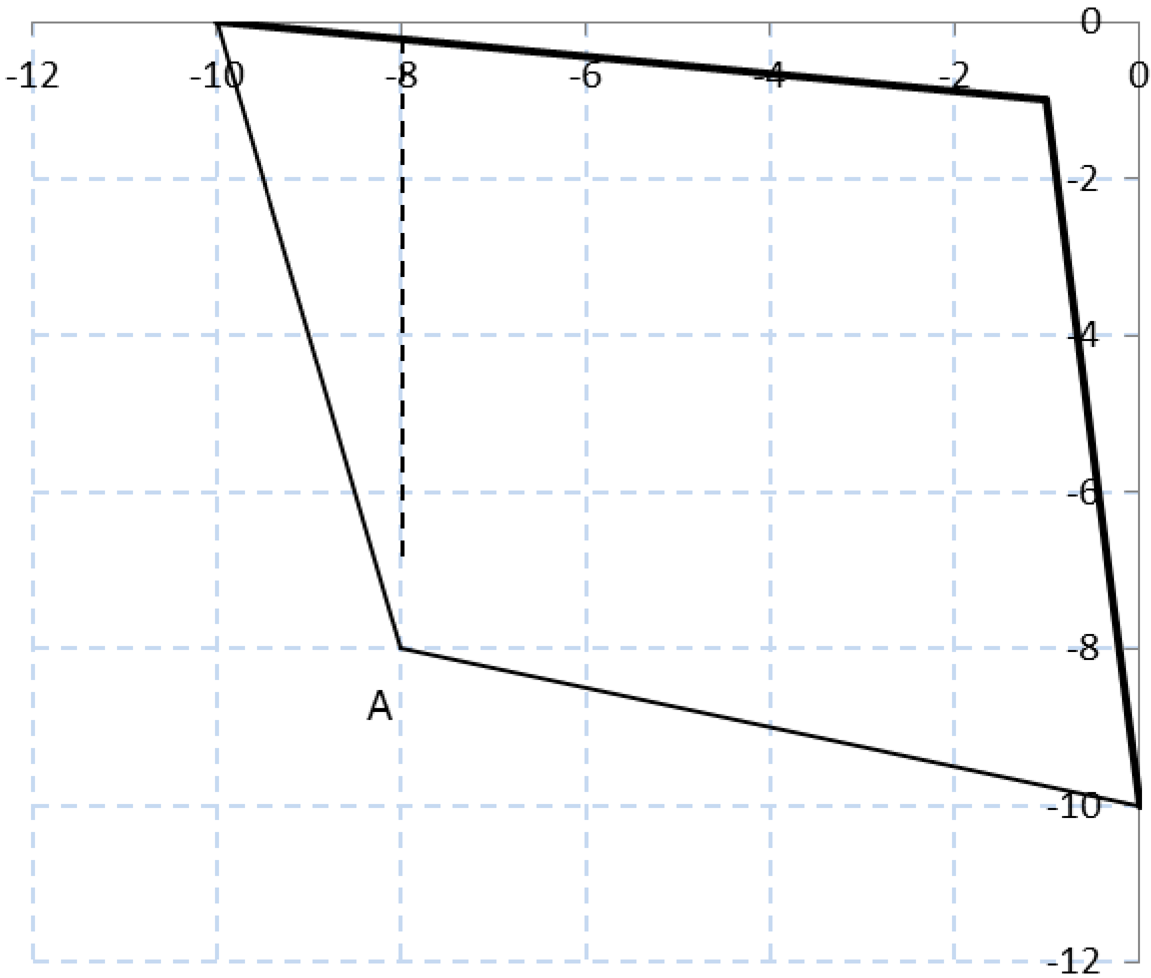

Рис. 3.1 - Множество ожидаемых выигрышей, множество Парето и переговорное множество в кооперативном варианте игры «Дилемма заключенных»

Очевидно, множество Парето соответствует ломаной *BCD*, а переговорное множество — ломаной *ECF*.

Прямая, проходящая через точки *B(-10, 0) и C(-1, -1),* задается уравнением $M_2 = (-M_1-10)/9$, а прямая, проходящая через точки *C(-1, -1)* и *D(0, -10),* — уравнением $M_2 = -9M_1 - 10$, поэтому функция Нэша

$$N(M_1, M_2) = (M_8 + 8)(M_2 + 8) =$$

$$= \begin{cases} (M_1 + 8)\left(8 - \dfrac{M_1 + 10}{9}\right), M_1 \in [-8, -1], \\ (M_1 + 8)(8 - 9M_1 - 10), M_1 \in [-1, -2/9] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-M_1^2 + 54M_1 496}{9}, M_1 \in [-8, -1], \\ -9M_1^2 - 74M_1 - 16, M_1 \in [-1, -2/9]. \end{cases}$$

Функцию Нэша мы рассматриваем на переговорном множестве, т. е. на ломаной *ECF*, при этом отрезок *EC* задается уравнением $M_2 = (-M_1 - 10)/9$ при $M_1 \in [-8, -1]$, а отрезок *CF* задается уравнением $M_2 = -9M_1 - 10$ при $M_2 = -9M_1 - 10 \in [-8, -1]$ (или, что эквивалентно, при $M_1 \in [-1, -2/9]$).

Максимум функции Нэша на переговорном множестве достигается в точке $M_1^* = -1$ (график функции Нэша представлен на рис. 3.2).

При этом $M_2^* = -9\,M_1^* - 10 = -1$.

На рис. 3.1 решение Нэша соответствует точке *C*, поэтому если заключенные имеют возможность переговариваться, то они могут договориться не признаваться вдвоем, и тогда получат всего по одному году заключения.

M_1

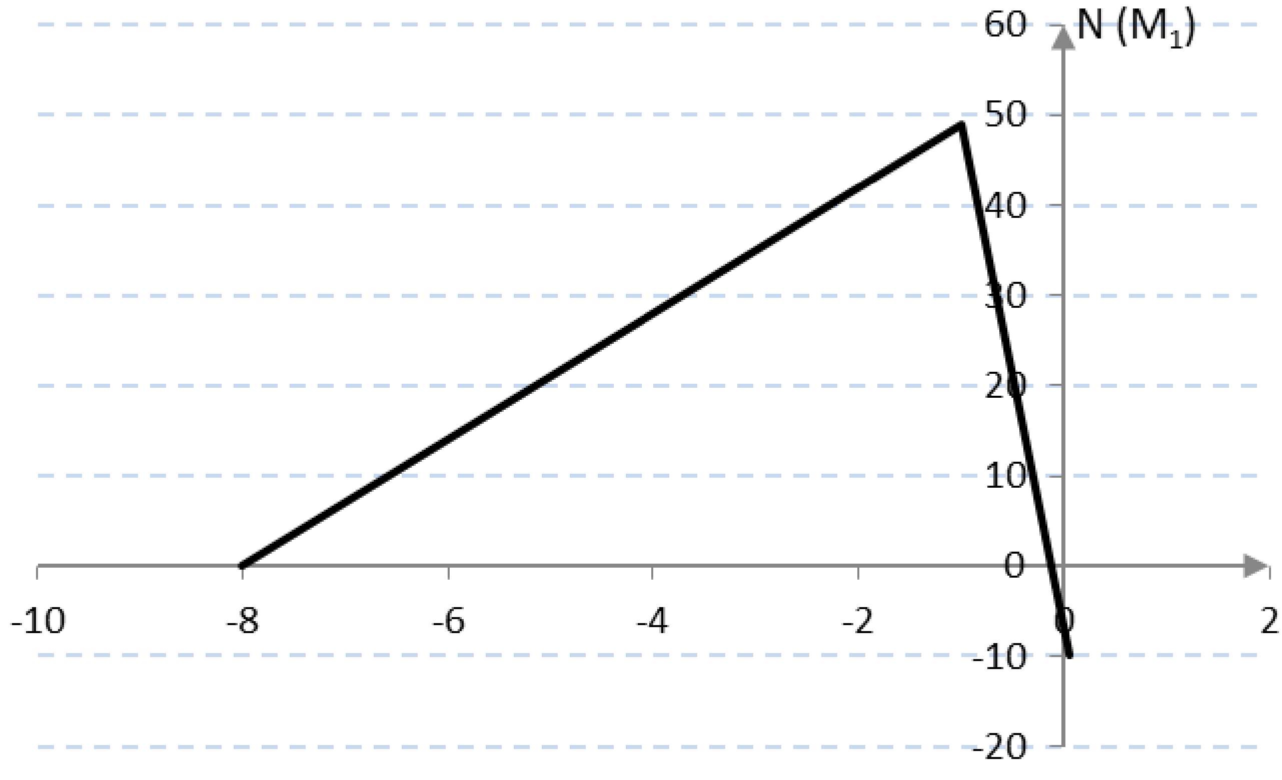

Рис. 3.2 – График функции Нэша в кооперативном варианте игры «Дилемма заключенных»

Пример 3.4 (Игра «Семейный спор» в кооперативном варианте). Требуется найти переговорное множество и решение Нэша в игре, описанной в примере 3.2 (Два игрока (муж и жена) выбирают, где провести вечер. У каждого из них есть две стратегии: выбрать посещение футбольного матча (первая стратегия) или оперного спектакля (вторая стратегия). Полезность совместного похода в театр муж оценивает в одну единицу, а жена в две, полезность совместного похода на футбол, наоборот, жена оценивает в одну единицу, а муж в две. Если же супруги идут в разные места, вечер оказывается испорченным, что соответствует нулевым полезностям для обоих игроков. Требуется определить макси-минные стратегии игроков и равновесия Нэша, если такие есть) при условии, что игроки могут обмениваться информацией.

Решение. Множество всех возможных пар выигрышей игроков представлено треугольником *OAB* на рис. 3.3. Очевидно, и множество Парето, и переговорное множество соответствуют отрезку *AB*.

Прямая, проходящая через точки *A*(1, 2) и *B*(2, 1), задается уравнением $M_2 = 3 - M_1$, поэтому функция Нэша

$$N(M_1, M_2) = \left(M_1 - \frac{2}{3}\right)\left(M_2 - \frac{2}{3}\right) = \left(M_1 - \frac{2}{3}\right)\left(3 - M_1 - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(\frac{21}{4} - \frac{2}{3}M_1\right) = -M_1^2 + 3M_1 - \frac{14}{9}.$$

Эта функция достигает максимума при M_1^*= (-3)/[2×(-1)]=1,5. При этом M_2^*= 3 - M_1^*= 1,5.

Точка (M_1^*, M_2^*) на рис. 3.3 обозначена *D*. Она находится ровно посередине отрезка *AB*, поэтому решение Нэша таково: p^*= (1/2,1/2) и q^*= (1/2,1/2).

Это означает, что игроки могут договориться выбирать (случайным образом и независимо друг от друга) в половине случаев театр, и в другой половине — футбол, тогда выигрыш каждого составит в среднем 1,5 единицы за один вече

2.3 Многокритериальные решения при объективных моделях.
Доминирование и оптимальность по Паретто.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на уравнение беллмана для конечно-разностных систем.

2.4 Методы ELECTRE.
Метод ELECTRE2 и ELECTRE3.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на уравнение беллмана в непрерывном времени.

Этап разработки индексов

Так же, как в методе ELECTRE I , в методе ELECTRE II ис пользуются четкие бинарные отношения между альтернативами.

Индекс согласия подсчитывается тем же способом, что и в методе ELECTRE I . В методе ELECTRE II задаются два уровня для индекса согласия: a 1> a 2 и два уровня индекса несогласия (вето): ?1 ? ?2. Далее вводятся два отношения предпочтения ?1 и ?2 между альтернативами так, что для i = l ,2 имеем:

Ясно, что ? 1 I ? 2; ? 1 называется сильным, а ? 2 - слабым отношением предпочтения.

Этап исследования множества альтернатив

На заданном конечном множестве альтернатив А выявля ются альтернативы, находящиеся в сильном, а затем - в сла бом отношении предпочтения. Далее выявляется первое ядро, в которое входят недоминируемые альтернативы. Затем они уда ляются из рассмотрения, и процедура повторяется снова уже для оставшихся альтернатив и т.д.

Присваивая ранги альтернативам, входящим в соответствующие ядра, строим полный порядок на множестве альтерна тив. Второй полный порядок строится аналогично первому, но начиная с класса худших альтернатив (недоминирующих дру гие) и переходя снизу вверх к лучшим альтернативам. Если два построенных порядка не слишком различны по упорядоче нию альтернатив, то на их основе строится средний порядок, который и предъявляется ЛПР.

Это построение осуществляется на основе следующих правил:

• A i PA j строго превосходит, если Ai имеет лучший ранг в од ном из порядков, и по крайней мере не худший в другом;

• A i IA j (эквивалентны), если они имеют одинаковые ранги в двух полных порядках;

• A i NA j (несравнимость), если они имеют одно упорядочение в одном из порядков, противоположное — в другом.

6. Метод electre III

Этап разработки индексов

В методе ELECTRE III используются псевдокритерии и числовые бинарные отношения. Задано N псевдокритериев и уро вень вето g j (xj)>0.

Индексы согласия и несогласия вычисляются следующим способом:

Для каждой пары альтернатив A i , A к строится «числовое» бинарное отношение в следующем виде:

здесь I * - множество критериев, для которых d k (A i , A j)> C (A i , A j).

Величину d (A i , Aj) можно интерпретировать как меру уверенности в справедливости гипотезы о том, что Ai предпочти тельнее A j .

Этап исследования альтернатив

На этом этапе определяется сначала . Устанавливается достаточно близкий к l max уровень, при кото ром принимается гипотеза о превосходстве A i над A j .

Далее для каждой альтернативы A i подсчитываются два индекса:

• индекс «силы» — число альтернатив, доминируемых A i ;

• индекс «слабости» - число альтернатив, доминирующих A i .

Альтернативе A i присваивается характеризующее ее число, равное разности индексов «силы» и «слабости».

Затем строится сверху вниз первый полный порядок альтернатив аналогично тому, как это делается в методе ELECTRE II .

Альтернативы с наибольшим значением A. удаляются, для оставшихся опять выделяется ядро на основе подсчета тех же чисел, и т.д.

Другой порядок определяется при подходе снизу вверх. На основе полных двух порядков строится средний, аналогично тому, как это делается в методе ELECTRE II .

Отметим, что метод ELECTRE IV близок по идеям к методу ELECTRE III . Наиболее существенное отличие состоит в том, что в ELECTRE IV не используются веса критериев [3].

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Задачи линейного программирования

Лабораторная работа № ЛР-1

Практическое занятие № ПЗ-1

Симплексный метод решения ЗЛП Решение задачи линейного программирования геометрическим методом.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на классификации задач принятии решений, формы задач линейного программирования и геометрический метод решения задач линейного программирования.

3.2 Двойственная задача ЛП

Лабораторная работа № ЛР-2

Практическое занятие № ПЗ-2

Исследование возможностей надстройки «поиск решения» MS Excel.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на отыскания минимума линейной функции, определение первоначального допустимого базисного решения и двойственной задачи линейного программирования.

3.3 Решение задач теории игр в чистых и смешанных стратегиях

Лабораторная работа № ЛР-3

Практическое занятие № ПЗ-3

Решение задач ТИ приведением к ЗЛП. Решение задач теории игр.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на основные понятия и задачи теории игр, антагонистические матричные игры, решение игры в смешанных стратегиях и приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

3.4 Решение задачи теории игр в условиях риска и неопределённости

Лабораторная работа № ЛР-4
Практическое занятие № ПЗ-4

Задача о замене оборудования
Принятие решений в условиях риска

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на понятие о статических играх, принятие решение в условиях риска и принятие решений в условиях неопределенности.

3.5 Многокритериальные решения при объективных моделях

Лабораторная работа № ЛР-5
Практическое занятие № ПЗ-6
Практическое занятие № ПЗ-5

Принятие решений с помощью построения дерева решений. Принятие решений с использованием метода аналитической иерархии (МАИ).

Принятие решений с использованием метода ELECTRE 1.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на альтернативы и критерии, задачи принятия решений, аксиомы рационального поведения, деревья решений и теории проспектов.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на общие постановки многокритериальной детерминированной статической задачи принятия решений, человекомашинные процедуры, многокритериальная теория полезности и метод SMART.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на основные этапы подхода аналитической иерархии, структуризация, вычисление коэффициентов важности, определение наилучшей альтернативы и проверка согласованности суждений ЛПР.

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на конструктивистский подход, свойства бинарных отношений и методы ELECTRE.