

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Методические рекомендации для
самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Направление подготовки (специальность):

27. 03. 04 Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:

Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения: **очная**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Организация самостоятельной работы.....	3
2. Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов.....	3
3. Методические рекомендации по подготовке к занятиям.....	9
3.1 ЛР-1 Аппроксимация функций в MathCAD	9
3.2 ЛР-2 Обработка опытов	9
3.3 ЛР-3 Обработка опытов (продолжение).....	9
3.4 ЛР-4 Обработка опытов (продолжение).....	10
3.5 ЛР-5 Моделирование случайного процесса	10
3.6 ЛР-6 Характеристики случайной функции	10
3.7 ЛР-7 Характеристики случайной функции (продолжение).....	10
3.8 ЛР-8 Динамические системы	10
3.9 ЛР-9 Характеристики стационарной случайной функции	10
3.10 ЛР-10 Стационарные случайные функции с эргодическим свойством.....	10
3.11 ЛР-11 Метод канонических разложений случайных функций.....	11
3.12 ЛР-12 Спектральный анализ методом Фурье	11
3.13 ЛР-13 Сглаживание и фильтрация опытных данных в среде MathCAD	11
3.14 ЛР-14 Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса	11

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (из табл. 5.1 РПД)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Понятие случайной функции					2
2	Корреляционная теория случайных функций				4	2
3	Линейные преобразования случайной функции				4	2
4	Стационарный случайный процесс					2
5	Спектральная теория случайных функций				8	8
6	Спектральная теория случайных функций					4
7	Марковские процессы				8	4
	Всего в семестре				24	24

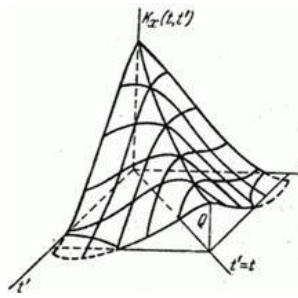
2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Нормированная взаимная корреляционная функция, ее свойства.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Если изобразить корреляционную функцию $K_x(t, t')$ в виде поверхности, то эта поверхность будет симметрична относительно вертикальной плоскости Q , проходящей через биссектрису угла tOt' (рис.).

Заметим, что свойства корреляционной функции естественно вытекают из свойств корреляционной матрицы системы случайных величин.



Заменим приближенно случайную функцию $X(t)$ системой m случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$. При увеличении m и соответственном уменьшении промежутков между аргументами корреляционная матрица системы, представляющая собой таблицу о двух входах, в пределе переходит в функцию двух непрерывно изменяющихся аргументов, обладающую аналогичными свойствами. Свойство симметричности корреляционной матрицы относительно главной диагонали переходит в свойство симметричности корреляционной функции.

Вместо корреляционной функции $K_x(t, t')$ можно пользоваться нормированной корреляционной функцией:

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_x(t')},$$

которая представляет собой коэффициент корреляции величин $X(t)$, $X(t')$. Нормированная корреляционная функция аналогична нормированной корреляционной матрице системы случайных величин.

При $t' = t$ нормированная корреляционная функция равна единице:

$$r_x(t, t) = \frac{K_x(t, t)}{[\sigma_x(t)]^2} = \frac{D_x(t)}{[\sigma_x(t)]^2} = 1.$$

Выясним, как меняются основные характеристики случайной функции при элементарных операциях над ней: при прибавлении неслучайного слагаемого и при умножении на неслучайный множитель. При исследовании вопросов, связанных с корреляционными свойствами случайных функций, часто требуется переходить от случайных функций к соответствующим центрированным функциям, отмечая это значком $\circ$ сверху знака функции. Иногда, кроме центрирования, применяется еще нормирование случайных функций. Нормированной называется

случайная функция вида:

$$X_N(t) = \frac{X(t)}{\sigma_x(t)}.$$

Корреляционная функция нормированной случайной функции $X_N(t)$ равна

$$K_{X_N}(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_x(t')} = r_x(t, t'),$$

, а ее дисперсия равна единице.

2.2 Виды нелинейных операторов, примеры.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Колебательная система называется **линейной** или **нелинейной** в зависимости от того, линейна или нелинейна описывающая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных. Однако в силу принципиальной важности линейных систем при исследовании вопросов устойчивости колебаний, а также возможности использования принципа суперпозиции решений такая классификация оправдана.

Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют **сосредоточенными** системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться либо как сосредоточенная, либо как распределенная.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. **Консервативные** системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются **неконсервативными**. Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются **диссипативными**. В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное.

Динамические системы называются **автономными**, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат. Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний неконсервативны. Среди них выделяется особый класс **автоколебательных** систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

Консервативный осциллятор. Рассмотрим линейный осциллятор без потерь, уравнения которого можно сформулировать на примере колебательного LC -контура, предположив амплитуду колебаний достаточно малой.

В более удобных координатах уравнения консервативного осциллятора можно записать следующим образом:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{x}^2 + x^2 = a^2, \quad a = \text{const.}$$

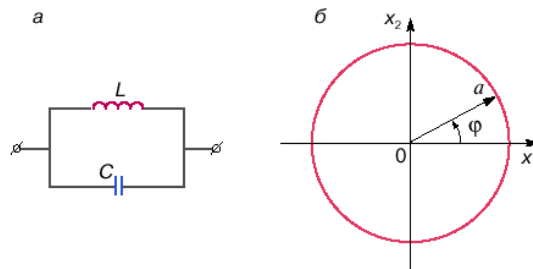


Рис. 1. а – колебательный контур, моделируемый уравнениями (16); б – фазовый портрет колебаний при заданном уровне энергии

Фазовый портрет системы представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Точка в фазовом пространстве, в которой вектор фазовой скорости обращается в нуль, называется особой, и в данном случае нуль координат есть **особая точка типа центр**.

Если консервативная система нелинейна, то ее фазовый портрет усложняется. Проиллюстрируем это на примере уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$.

Вблизи центров фазовый портрет соответствует линейному осциллятору: траектории представляют собой замкнутые кривые, близкие к окружностям, что отвечает по амплитуде колебаниям, близким к гармоническим. Через неустойчивые точки проходят особые интегральные кривые Γ_0 , называемые **сепаратрисами**. Они разделяют фазовое

пространство на области с различным поведением. С увеличением энергии маятника его колебания от квазигармонических вблизи точек типа центр эволюционируют к нелинейным периодическим колебаниям вблизи сепаратрис. Малейшие отклонения энергии в ту или иную сторону от энергии движения по сепаратрисе приводят к качественно различным типам движения: колебательному или вращательному.

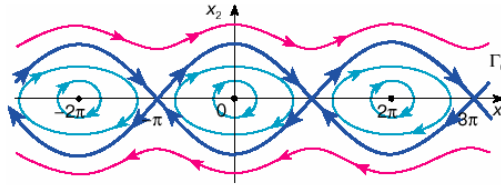


Рис. 2. Фазовый портрет осциллятора (20)

2.3 Стационарный белый шум и его инженерная интерпретация

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Скалярный случайный процесс называют белым шумом, если он является стационарным (в широком смысле) и обладает постоянной спектральной плотностью s , называемой интенсивностью белого шума.

Рассмотрим свойства белого шума.

Свойство 1. Ковариационная функция для белого шума имеет вид

$$K_{\xi}(\tau) = 2\pi c \delta(\tau).$$

Свойство 2. Если ковариационная функция стационарного скалярного случайного процесса имеет определенный вид, то этот случайный процесс является белым шумом.

Пример 1. Скалярный винеровский процесс с коэффициентом диффузии имеет ковариационную функцию

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma^2 \min\{t_1, t_2\}, \quad t_1, t_2 \in T.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \begin{cases} \sigma^2, & t_1 < t_2; \\ 0, & t_1 > t_2; \end{cases}$$

и смешанная вторая производная не существует, т.е. рассматриваемый случайный процесс недифференцируем ни в одной точке в T . Но переходя к обобщенным функциям, к которым относится и (δ -функция Дирака, формально получаем

$$\frac{\partial^2 K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1} = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1),$$

т.е. в классе обобщенных функций производная винеровского процесса есть белый шум с интенсивностью

Свойство 3. Случайные величины, являющиеся сечениями белого шума, некоррелированы.

Свойство 4. Белый шум обладает бесконечной дисперсией.

Это вытекает из равенства

$$D[\xi(t, \omega)] = K_{\xi}(0) = 2\pi c \delta(0) = \infty,$$

Появление термина „белый шум“ объясняется следующим. Слово белый указывает на сходство с белым светом, у которого спектральный состав примерно однороден, а слово шум говорит о том, что подобные процессы впервые привлекли к себе внимание в радиотехнике, где их наличие приводит к возникновению шумов в линиях радиопередач.

Белый шум обладает бесконечной дисперсией и практически не может быть реализован. Но из физических соображений ясно, что любая динамическая система является инерционной и очень высокие частоты не могут оказывать значимого влияния на ее поведение. Это открывает возможность моделирования с помощью белого шума

реальных случайных процессов. Например, белый шум часто используют для моделирования случайных процессов, имеющих постоянную (или почти постоянную) спектральную плотность в определенной полосе частот, пренебрегая поведением спектральной плотности вне этой полосы.

Некоррелированность случайных величин, являющихся сечениями белого шума в различные моменты времени — одна из основных причин его широкого применения. При использовании ограниченного по полосе шума мы все же получаем значимое абсолютное значение коэффициента корреляции для случайных величин, являющихся сечениями случайного процесса при близких значениях, что зачастую существенно затрудняет анализ полученных результатов. Использование белого шума в теории случайных процессов во многом аналогично использованию функции Дирака в теории линейных систем и математической физике.

2.4 Стохастические зависимые процессы типа гибели и размножения

При изучении вопроса необходимо обратить

В инженерных приложениях известна одна очень типичная схема непрерывных марковских цепей — так называемая «схема гибели и размножения». Марковская непрерывная цепь называется «процессом гибели и размножения», если все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний связано прямой и обратной связью с каждым из соседних состояний, а крайние состояния — только с одним соседним состоянием.

Пример 1. Техническое устройство состоит из трех одинаковых узлов; каждый из них может выходить из строя (отказывать); отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Состояния системы классифицируем по числу неисправных узлов:

- все три узла исправны;
- один узел отказал (восстанавливается), два исправны;
- два узла восстанавливаются, один исправен;
- все узла восстанавливаются.

Граф состояний показан на рис. Из графа видно, что процесс, протекающий в системе, представляет собой процесс «гибели и размножения».

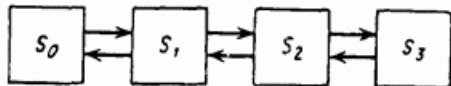
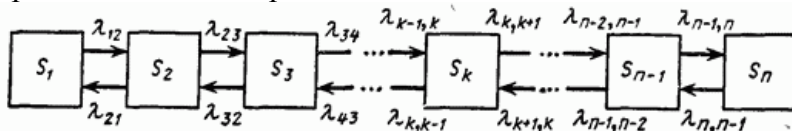


Схема гибели и размножения очень часто встречается в самых разнообразных практических задачах; поэтому имеет смысл заранее рассмотреть эту схему в общем виде и решить соответствующую систему алгебраических уравнений с тем, чтобы в дальнейшем пользоваться уже готовым решением.

Рассмотрим случайный процесс гибели и размножения с графом состояний, представленным на рис.



Напишем алгебраические уравнения для вероятностей состояний. Для первого состояния имеем:

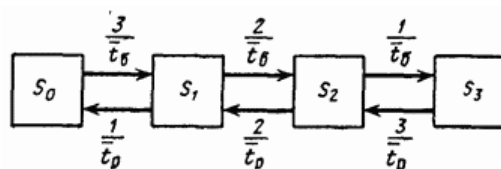
$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2.$$

Для второго состояния суммы членов, соответствующих входящим и исходящим стрелкам, равны:

$$\lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3,$$

Но можно сократить справа и слева равные друг другу члены получим:

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3,$$



По стрелкам вправо систему переводят отказы. Если система находится в состоянии, то работают три узла; если система находится в состоянии, то работают два узла. По стрелкам влево систему переводят ремонты (восстановления). Пользуясь полученным выше общим решением задачи гибели и размножения, имеем:

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_0}\right) + 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_0}\right)^2 + \left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_0}\right)^3}$$

$$p_1 = 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_0}\right) p_0;$$

$$p_2 = 3\left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_0}\right)^2 p_0;$$

$$p_3 = \left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_0}\right)^3 p_0.$$

Зададимся конкретными значениями (час). Тогда

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3/3 + 3/4 + 1/8} = 8/27, \quad p_1 = 3/2 \cdot 8/27 = 12/27, \quad p_2 = 3/4 \cdot 8/27 = 6/27, \quad p_3 = 1/8 \cdot 8/27 = 1/27.$$

Средняя производительность прибора в установившемся режиме:

$$100\% p_0 + 50\% p_1 = \left(\frac{800}{27} + \frac{600}{27}\right) \% = 51,9\% \text{ номинала.}$$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 ЛР-1 «Аппроксимация функций в MathCAD»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Аппроксимация (от лат. *proxima* – ближайшая) или **приближение** — научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). Некоторые разделы математики, в сущности, целиком посвящены аппроксимации. Например, теория приближения функций, численные методы анализа.

Одним из наиболее часто употребляемых методов аппроксимации является метод наименьших квадратов

Следует обратить особое внимание на выбор аналитической функции для аппроксимации в ходе обработки результатов опытов.

3.2 ЛР-2 «Обработка опытов»

3.3 ЛР-3 «Обработка опытов (продолжение)»

3.4 ЛР-4 «Обработка опытов (продолжение)»

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на инженерную интерпретацию решения задач математической статистики, связанных с первичной обработкой опытных данных, оценкой параметров распределения и параметров выборки, методами этих оценок и выравниванием статистических рядов.

3.5 ЛР-5 «Моделирование случайного процесса»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: случайный процесс (СП) как совокупность реализаций и случайный процесс как совокупность сечений исходной случайной функции; возможности и трудности задания СП, инженерные задачи анализа и синтеза в теории случайных функций.

3.6 ЛР-6 «Характеристики случайной функции»

3.7 ЛР-7 «Характеристики случайной функции (продолжение)»

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: аналитическое задание и геометрическая интерпретация характеристик СФ; необходимость введения автокорреляционной функции; возможности центрирования и нормирования СФ, взаимные характеристики при наложении нескольких СФ.

3.8 ЛР-8 «Динамические системы»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: математическая модель черного ящика в описании динамических систем; инженерные задачи анализа и синтеза в теории динамических систем; возможности алгебры линейных операторов в описании преобразований случайных процессов.

3.9 ЛР-9 «Характеристики стационарной случайной функции»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: стационарное течение инженерных процессов, корреляционная функция как основная характеристика стационарного процесса, преобразование линейными операторами стационарных случайных функций на входе динамических систем.

3.10 ЛР-10 «Стационарные случайные функции с эргодическим свойством»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: преимущества стационарных функций, обладающих эргодическим свойством, предварительное суждение об эргодичности процесса, особенности обработки одной реализации достаточной продолжительности после завершения эксперимента.

3.11 ЛР-11 «Метод канонических разложений случайных функций»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: особенности и преимущества метода; комплексная форма канонического разложения СФ; моделирование линейными дифференциальными уравнениями реакции динамической системы на случайное входное воздействие.

3.12 ЛР-12 «Спектральный анализ методом Фурье»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: инженерные задачи анализа и синтеза в спектральном анализе; встроенные возможности MathCAD для спектрального анализа (численный спектр-анализ, быстрое преобразование Фурье и др.)

3.13 ЛР-13 «Сглаживание и фильтрация опытных данных в среде MathCAD»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: необходимость предварительной обработки опытных данных (выравнивание, сглаживание, фильтрация); виды фильтрации (скользящее усреднение, полосовая и др.) для удаления соответствующей «шумовой» компоненты; встроенные функции MathCAD.

3.14 ЛР-14 «Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: классификация марковских процессов; линейные дифференциальные уравнения как основа моделирования характеристик марковских случайных процессов.