ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Направление подготовки (специальность):
27. 03. 04   Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:
Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1.Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Понятие случайной функции					4
2	Корреляционная теория случайных функций				10	6
3	Линейные преобразования случайной функции				4	4
4	Стационарный случайный процесс				6	6
5	Спектральная теория случайных функций				10	10
6	Спектральная теория случайных функций (продолжение)				10	4
7	Марковские процессы				14	6
	Всего в семестре				**54**	**40**

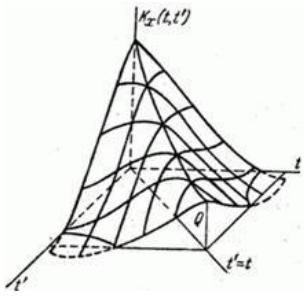
2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Нормированная корреляционная функция, ее свойства. Нормированная взаимная корреляционная функция, ее свойства

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Если изобразить корреляционную функцию $K_x(t,t')$ в виде поверхности, то эта поверхность будет симметрична относительно вертикальной плоскости Q, проходящей через биссектрису угла tOt' (рис.).

Заметим, что свойства корреляционной функции естественно вытекают из свойств корреляционной матрицы системы случайных величин.



Заменим приближенно случайную функцию $X(t)$ системой m случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$. При увеличении m и соответственном уменьшении промежутков между аргументами корреляционная матрица системы, представляющая собой таблицу о двух входах, в пределе переходит в функцию двух непрерывно изменяющихся аргументов, обладающую аналогичными свойствами. Свойство симметричности корреляционной матрицы относительно главной диагонали переходит в свойство симметричности корреляционной функции.

Вместо корреляционной функции $K_x(t,t')$ можно пользоваться нормированной корреляционной функцией: $r_x(t,t') = \dfrac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}$,

которая представляет собой коэффициент корреляции величин $X(t)$, $X(t')$. Нормированная корреляционная функция аналогична нормированной корреляционной матрице системы случайных величин.

При $t' = t$ нормированная корреляционная функция равна единице:

$$r_x(t,t) = \frac{K_x(t,t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = \frac{D_x(t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = 1.$$

Выясним, как меняются основные характеристики случайной функции при элементарных операциях над нею: при прибавлении неслучайного слагаемого и при умножении на неслучайный множитель. При исследовании вопросов, связанных с корреляционными свойствами случайных функций, часто требуется переходить от случайных функций к соответствующим центрированным функциям, отмечая это значком $^\circ$ вверху знака функции. Иногда, кроме центрирования, применяется еще нормирование случайных функций. Нормированной называется случайная функция вида: $X_N(t) = \dfrac{\overset{\circ}{X}(t)}{\sigma_x(t)}$.

Корреляционная функция нормированной случайной функции $X_N(t)$ равна $K_{x_N}(t,t') = \dfrac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')} = r_x(t,t')$, а ее дисперсия равна единице.

2.2 Виды нелинейных операторов, примеры.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Колебательная система называется ***линейной*** или ***нелинейной*** в зависимости от того, линейна или не линейна описывающая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных. Однако в силу принципиальной важности линейных систем при исследовании вопросов устойчивости колебаний, а также возможности использования принципа суперпозиции решений такая классификация оправданна.

Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют ***сосредоточенными*** системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться либо как сосредоточенная, либо как распределенная.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. ***Консервативные*** системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются ***неконсервативными.*** Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются ***диссипативными.*** В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное.

Динамические системы называются ***автономными,*** если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат. Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний неконсервативны. Среди них выделяется особый класс ***автоколебательных*** систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

Консервативный осциллятор. Рассмотрим линейный осциллятор без потерь, уравнения которого можно сформулировать на примере колебательного LC-контура, предположив амплитуду колебаний достаточно малой.

В более удобных координатах уравнения консервативного осциллятора можно записать следующим образом:

$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{x}^2 + x^2 = a^2, \quad a = const.$

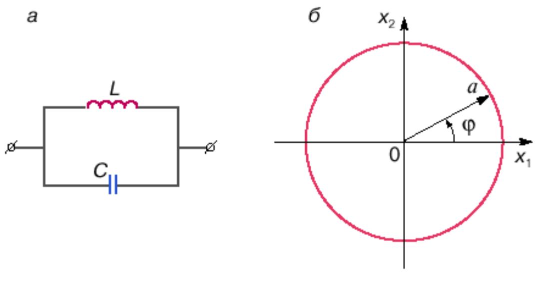


Рис. 1. *а* – колебательный контур, моделируемый уравнениями (16); *б* – фазовый портрет колебаний при заданном уровне энергии

Фазовый портрет системы представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Точка в фазовом пространстве, в которой вектор фазовой скорости обращается в нуль, называется особой, и в данном случае нуль координат есть ***особая точка*** **типа** ***центр.***

Если консервативная система нелинейна, то ее фазовый портрет усложняется. Проиллюстрируем это на примере уравнения

$\ddot{x} + \sin x = 0.$

Вблизи центров фазовый портрет соответствует линейному осциллятору: траектории представляют собой замкнутые кривые, близкие к окружностям, что отвечает по амплитуде колебаниям, близким к гармоническим. Через неустойчивые точки проходят особые интегральные кривые Γ_0, называемые ***сепаратрисами.*** Они разделяют фазовое пространство на области с различным поведением. С увеличением энергии маятника его колебания от квазигармонических вблизи точек типа центр эволюционируют к нелинейным периодическим колебаниям вблизи сепаратрис. Малейшие отклонения энергии в ту или иную сторону от энергии движения по сепаратрисе приводят к качественно различным типам движения: колебательному или вращательному.

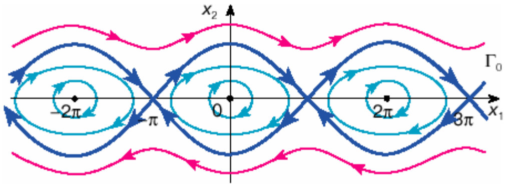


Рис. 2. Фазовый портрет осциллятора (20)

2.3 Стационарный случайный процесс с эргодическим свойством

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Если случайная функция $X(t)$ обладает эргодическим свойством, то для неё среднее по времени (на достаточно большом участке наблюдения) приближённо равно среднему по множеству наблюдений.

То же будет верно и для $X^2(t)$, $X(t)\cdot X(t+\tau)$ и т. д. Следовательно, все характеристики случайной функции (математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию) можно будет приближённо определять по одной достаточно длинной реализации.

Какие же стационарные случайные функции обладают, а какие не обладают эргодическим свойством?

Пусть для случайного процесса характерно то, что он как бы «разложим» на более элементарные случайные процессы; каждый из них осуществляется с некоторой вероятностью и имеет свои индивидуальные характеристики. Таким образом, разложимость, внутренняя неоднородность случайного процесса, протекающего с некоторой вероятностью по тому или другому типу, есть физическая причина неэргодичности этого процесса.

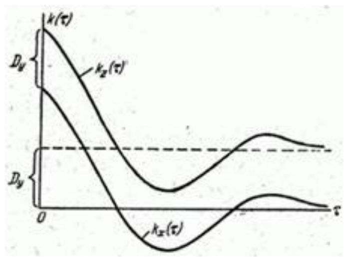
В частности, неэргодичность случайного процесса может быть связана с наличием в его составе слагаемого в виде обычной случайной величины (т. е. наличие в спектре случайного процесса, помимо непрерывной части, конечной дисперсии при частоте 0). Действительно, рассмотрим случайную функцию $Z(t) = X(t) + Y$,

где $X(t)$ - эргодическая стационарная случайная функция с характеристиками m_x, $k_x(\tau)$; Y - случайная величина с характеристиками m_y и D_y; предположим к тому же, что $X(t)$ и Y некоррелированные. Определим характеристики случайной функции $Z(t)$. Согласно общим правилам сложения случайных функций имеем:

$m_z = m_x + m_y$, $\quad k_z(\tau) = k_x(\tau) + D_y$.

Из формул видно, что случайная функция $Z(t)$ является стационарной. Но обладает ли она эргодическим свойством? Очевидно, нет. Каждая ее реализация будет по характеру отличаться от других, будет обладать тем или иным средним по времени значением в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина Y .

Об эргодичности или неэргодичности случайного процесса может непосредственно свидетельствовать вид его корреляционной функции. Действительно, рассмотрим корреляционную функцию неэргодической случайной функции. Она отличается от корреляционной функции случайной функции $X(t)$ наличием постоянного слагаемого D_y .



В то время как корреляционная функция $k_x(\tau)$ стремится к нулю при $\tau \to \infty$ (корреляционная связь между значениями случайной функции неограниченно убывает по мере увеличения расстояния между ними), функция $k_x(\tau)$ уже не стремится к нулю при $t \to \infty$, а приближается к постоянному значению D_y .

На практике мы не имеем возможности исследовать случайный процесс и его корреляционную функцию на бесконечном участке времени; участок значений τ, с которым мы имеем дело, всегда ограничен.

Пусть корреляционная функция стационарного случайного процесса при увеличении τ не убывает, а, начиная с некоторого τ, остается приблизительно постоянной. Это обычно есть признак того, что в составе случайной функции имеется слагаемое в виде обычной случайной величины и что процесс не является эргодическим. Стремление же корреляционной функции к нулю при $t \to \infty$ говорит в пользу эргодичности процесса. Во всяком случае, оно достаточно для того, чтобы математическое ожидание функции можно было определять как среднее по времени.

2.4 Стационарный белый шум и его инженерная интерпретация

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Скалярный случайный процесс называют белым шумом, если он является стационарным (в широком смысле) и обладает постоянной спектральной плотностью с, называемой интенсивностью белого шума.

Рассмотрим свойства белого шума.

Свойство 1. Ковариационная функция для белого шума имеет вид

$$K_\xi(\tau) = 2\pi c\delta(\tau).$$

Свойство 2. Если ковариационная функция стационарного скалярного случайного процесса имеет определенный вид, то этот случайный процесс является белым шумом.

Пример 1. Скалярный винеровский процесс с коэффициентом диффузии имеет ковариационную функцию

$$K_\xi(t_1,t_2) = \sigma^2 \min\{t_1,t_2\}, \quad t_1,t_2 \in T.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \begin{cases} \sigma^2, & t_1 < t_2; \\ 0, & t_1 > t_2; \end{cases}$$

и смешанная вторая производная не существует, т.е. рассматриваемый случайный процесс недифференцируем ни в одной точке в T. Но переходя к обобщенным функциям, к которым относится и (У-функция Дирака, формально получаем

$$\frac{\partial^2 K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2 \partial t_1} = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1),$$

т.е. в классе обобщенных функций производная винеровского процесса есть белый шум с интенсивностью

Свойство 3. Случайные величины, являющиеся сечениями белого шума, некоррелированны.

Свойство 4. Белый шум обладает бесконечной дисперсией.

Это вытекает из равенства

$$\mathbf{D}[\xi(t,\omega)] = K_\xi(0) = 2\pi c\delta(0) = \infty,$$

Появление термина „белый шум“ объясняется следующим. Слово белый указывает на сходство с белым светом, у которого спектральный состав примерно однороден, а слово шум говорит о том, что подобные процессы впервые привлекли к себе внимание в радиотехнике, где их наличие приводит к возникновению шумов в линиях радиопередач.

Белый шум обладает бесконечной дисперсией и практически не может быть реализован. Но из физических соображений ясно, что любая динамическая система является инерционной и очень высокие частоты не могут оказывать значимого влияния на ее поведение. Это открывает возможность моделирования с помощью белого шума реальных случайных процессов. Например, белый шум часто используют для моделирования случайных процессов, имеющих постоянную (или почти постоянную) спектральную плотность в определенной полосе частот, пренебрегая поведением спектральной плотности вне этой полосы.

Некоррелированность случайных величин, являющихся сечениями белого шума в различные моменты времени — одна из основных причин его широкого применения.

При использовании ограниченного по полосе шума мы все же получаем значимое абсолютное значение коэффициента корреляции для случайных величин, являющихся сечениями случайного процесса при близких значениях, что зачастую существенно затрудняет анализ полученных результатов. Использование белого шума в теории случайных процессов во многом аналогично использованию функции Дирака в теории линейных систем и математической физике.

2.5 Спектральное разложение случайной функции в комплексной форме

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

В ряде случаев с точки зрения простоты математических преобразований оказывается удобным пользоваться не действительной, а комплексной формой записи как спектрального разложения случайной функции, так и ее характеристик: спектральной плотности и корреляционной функции.

Комплексная форма записи удобна, в частности, потому, что всевозможные линейные операции над функциями, имеющими вид гармонических колебаний (дифференцирование, интегрирование, решение линейных дифференциальных уравнений и т. д.), осуществляются гораздо проще, когда эти гармонические колебания записаны не в виде синусов и косинусов, а в комплексной форме, в виде показательных функций. Комплексная форма записи корреляционной функции и спектральной плотности применяется и в тех случаях, когда сама случайная функция (а следовательно, и ее корреляционная функция и спектральная плотность) действительна.

Покажем, как можно в спектральном разложении случайной функции чисто формально перейти от действительной формы к комплексной.

Рассмотрим спектральное разложение случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$ на участке $(0,T)$:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

где U_k, V_k - некоррелированные случайные величины, причем для каждой пары U_k, V_k с одинаковыми индексами дисперсии равны:

$$D[U_k] = D[V_k] = D_k.$$

Учитывая, что $\omega_k = k\omega_1$; $\omega_0 = 0$, перепишем выражение в виде:

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t).$$

Придадим спектральному разложению комплексную форму. Для этого воспользуемся известными формулами Эйлера:

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2}; \qquad \sin \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2i} = -i\,\frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу, имеем:

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_k \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2} - iV_k \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} \right),$$

т. е. разложение с координатными функциями $e^{i\omega_k t}, e^{-i\omega_k t}$.

Формула представляет собой разложение случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, в котором в качестве координатных функций фигурируют комплексные функции $e^{i\omega_k t}$, а коэффициенты представляют собой комплексные случайные величины. Обозначая эти комплексные случайные величины $W_k \ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, придадим разложению форму:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t},$$

где

$$\left.\begin{aligned} W_k &= U_0 && \text{при } k = 0, \\ W_k &= \frac{U_k - iV_k}{2} && \text{при } k > 0, \\ W_k &= \frac{U_k + iV_k}{2} && \text{при } k < 0. \end{aligned}\right\}$$

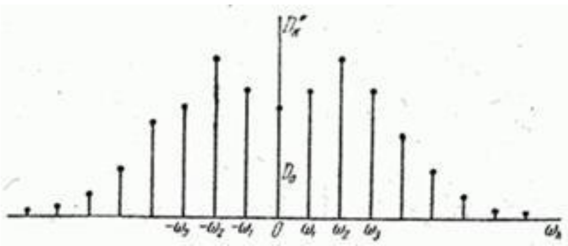
Найдем дисперсии этих коэффициентов. При $k = 0$ дисперсия D_0 осталась такой же как была при действительной форме спектрального разложения. Дисперсия каждой из комплексных величин W_k (при $k \neq 0$) равна сумме дисперсий ее действительной и мнимой частей:

$$D[W_k] = \frac{D[U_k]}{4} + \frac{D[V_k]}{4} = \frac{2D[U_k]}{4} = \frac{D_k}{2}.$$

Введем обозначение:

$$D_k^* = \frac{D_k}{2} \text{ при } k \neq 0; \quad D_k^* = D_0 \text{ при } k = 0$$

и построим дискретный спектр случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, распространённый на частоты от $-\infty$ до $+\infty$.



Этот спектр симметричен относительно оси ординат; от ранее построенного спектра он отличается тем, что определён не только для положительных, но и для отрицательных частот. Зато его ординаты при $k \neq 0$ вдвое меньше соответствующих ординат прежнего спектра; сумма всех ординат по-прежнему равна дисперсии случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$: $D_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k$.

2.6 Марковские процессы. Цепи Маркова. Стохастические зависимые процессы типа гибели и размножения

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

В инженерных приложениях известна одна очень типичная схема непрерывных марковских цепей — так называемая «схема гибели и размножения».
Марковская непрерывная цепь называется «процессом гибели и размножения», если все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний связано прямой и обратной связью с каждым из соседних состояний, а крайние состояния — только с одним соседним состоянием.
Пример 1. Техническое устройство состоит из трех одинаковых узлов; каждый из них может выходить из строя (отказывать); отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Состояния системы классифицируем по числу неисправных узлов:
— все три узла исправны;
— один узел отказал (восстанавливается), два исправны;
— два узла восстанавливаются, один исправен;
— все узла восстанавливаются.
Граф состояний показан на рис. Из графа видно, что процесс, протекающий в системе, представляет собой процесс «гибели и размножения».

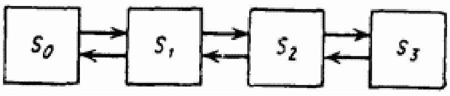
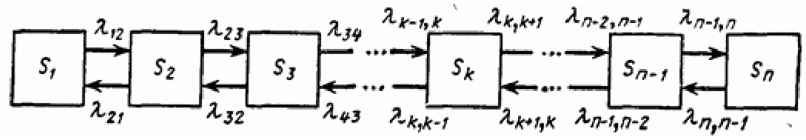


Схема гибели и размножения очень часто встречается в самых разнообразных практических задачах; поэтому имеет смысл заранее рассмотреть эту схему в общем виде и решить соответствующую систему алгебраических уравнений с тем, чтобы в дальнейшем пользоваться уже готовым решением.
Рассмотрим случайный процесс гибели и размножения с графом состояний, представленным на рис.



Напишем алгебраические уравнения для вероятностей состояний. Для первого состояния имеем:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2.$$

Для второго состояния суммы членов, соответствующих входящим и выходящим стрелкам, равны:

$$\lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3,$$

Но можно сократить справа и слева равные друг другу члены получим:

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3,$$

и далее, совершенно аналогично,

$$\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Одним словом, для схемы гибели и размножения члены, соответствующие стоящим друг над другом стрелкам, равны между собой:

$$\lambda_{k-1,\,k}\, p_{k-1} = \lambda_{k,\,k-1}\, p_k,$$

Итак, предельные вероятности состояний в любой схеме гибели и размножения удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{12} p_1 &= \lambda_{21} p_2, \\ \lambda_{23} p_2 &= \lambda_{32} p_3, \\ \lambda_{34} p_3 &= \lambda_{43} p_4, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_{k-1,\,k}\, p_{k-1} &= \lambda_{k,\,k-1}\, p_k, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_{n-1,\,n}\, p_{n-1} &= \lambda_{n,\,n-1}\, p_n \end{aligned}\right\}$$

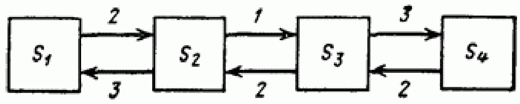
и нормировочному условию:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1, \\ p_3 &= \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_k &= \frac{\lambda_{k-1,\,k}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{k,\,k-1}\ldots\lambda_{21}} p_1, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_n &= \frac{\lambda_{n-1,\,n}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{n,\,n-1}\ldots\lambda_{21}} p_1. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, задача «гибели и размножения» решена в общем виде: найдены предельные вероятности состояний.

Пример 2. Найти предельные вероятности состояний для процесса гибели и размножения, граф которого показан на рис.



Решение По формулам имеем:

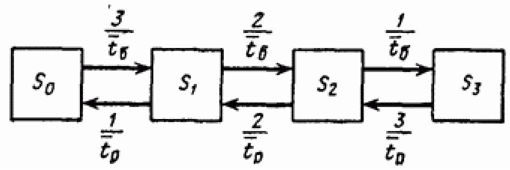
$$p_1 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 1}{3\cdot 2}+\frac{2\cdot 1\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 2}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5},$$

$$p_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15}, \quad p_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \quad p_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

Пример 3. Прибор состоит из трех узлов; поток отказов — простейший, среднее время безотказной работы каждого узла равно Отказавший узел сразу же начинает ремонтироваться; среднее время ремонта (восстановления) узла равно р; закон распределения этого времени показательный (поток восстановлений — простейший). Найти среднюю производительность прибора, если при трех работающих узлах она равна 100%, при двух — 50%, а при одном и менее — прибор вообще не работает.

Решение. Перечень состояний системы и граф состояний уже приводились в примере 1. Разметим этот граф, т. е. проставим у каждой стрелки соответствующую интенсивность.

Так как поток отказов каждого узла — простейший, то промежуток времени между отказами в этом потоке распределен по показательному закону, где - среднее время безотказной работы узла.



По стрелкам вправо систему переводят отказы. Если система находится в состоянии, то работают три узла; если система находится в состоянии, то работают два узла. По стрелкам влево систему переводят ремонты (восстановления). Пользуясь полученным выше общим решением задачи гибели и размножения, имеем:

$$p_0 = \frac{1}{1+{}^3/_2+{}^3/_4+{}^1/_8} = {}^8/_{27}, \; p_1 = {}^3/_2\cdot{}^8/_{27} = {}^{12}/_{27}, \; p_2 = {}^3/_4\cdot{}^8/_{27} = {}^6/_{27}, \; p_3 = {}^1/_8\cdot{}^8/_{27} = {}^1/_{27}.$$

Средняя производительность прибора в установившемся режиме:

$$100\%\, p_0 + 50\%\, p_1 = \left(\frac{800}{27} + \frac{600}{27}\right)\% = 51{,}9\% \text{ номинала.}$$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 ЛР-1 «Обработка опытов Аппроксимация функций в среде MathCAD. Характеристики случайной функции»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). Некоторые разделы математики, в сущности, целиком посвящены аппроксимации. Например, теория приближения функций, численные методы анализа.

Одним из наиболее часто употребляемых методов аппроксимации является метод наименьших квадратов. Следует обратить особое внимание на выбор аналитической функции для аппроксимации в ходе обработки результатов опытов.

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на инженерную интерпретацию решения задач математической статистики, связанных с первичной обработкой опытных данных, оценкой параметров распределения и параметров выборки, методами этих оценок и выравниванием статистических рядов.

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: аналитическое задание и геометрическая интерпретация характеристик СФ; необходимость введения автокорреляционной функции; возможности центрирования и нормирования СФ, взаимные характеристики при наложении нескольких СФ.

3.2 ЛР-2 «Динамические системы. Характеристики стационарной случайной функции. Метод канонических разложений случайных функций»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: математическая модель черного ящика в описании динамических систем; инженерные задачи анализа и синтеза в теории динамических систем; возможности алгебры линейных операторов в описании преобразований случайных процессов.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: стационарное течение инженерных процессов, корреляционная функция как основная характеристика стационарного процесса, преобразование линейными операторами стационарных случайных функций на входе динамических систем. Особенности и преимущества метода канонических разложений; комплексная форма канонического разложения СФ; моделирование линейными дифференциальными уравнениями реакции динамической системы на случайное входное воздействие.

3.3 ЛР-3 «Спектральный анализ методом Фурье»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: инженерные задачи анализа и синтеза в спектральном анализе; встроенные возможности MathCAD для спектрального анализа (численный спектр-анализ, быстрое преобразование Фурье и др.)