ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Направление подготовки (специальность):
27. 03. 04   Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:
Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1.Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	Введение					4
2	Операции над множествами. Мощность множества				10	6
3	Отношения. Функции				4	4
4	Алгебраические структуры				6	6
5	Метрические и топологические пространства				10	10
6	Линейные пространства				10	4
7	Эвклидовы пространства				14	6
	Всего в семестре				**54**	**40**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Система аксиом Цермело. Теорема Кантора-Бернштейна

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рассмотрим вопрос о сравнении мощностей двух множеств. Для данных множеств А и В теоретически имеются четыре возможности:

• А равномощно некоторой части В, а В равномощно некоторой части А. (В этом случае, как мы знаем, множества равномощны.)

• А равномощно некоторой части В, но В не равномощно никакой части А. В этом случае говорят, что А имеет меньшую мощность, чем В.

• В равномощно некоторой части А, но А не равномощно никакой части В. В этом случае говорят, что А имеет большую мощность, чем В.

• Ни А не равномощно никакой части В, ни В не равномощно никакой части А.

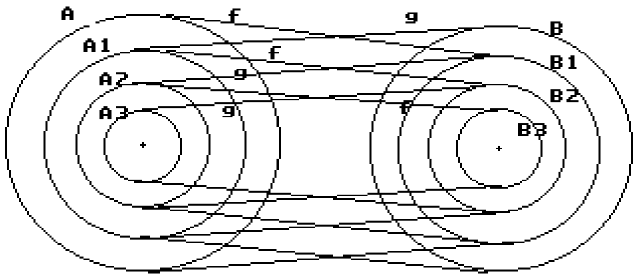
Теорема Кантора-Бернштейна.

Пусть A_1 - подмножество A, а B_1 - подмножество B и пусть A эквивалентно B_1, а B содержится эквивалентно A_1, тогда A эквивалентно B.

Смысл этой замечательной теоремы состоит вот в чем: иногда не так-то просто бывает найти точное взаимно-однозначное соответствие между множествами, попробуйте, например, установить взаимно-однозначное соответствие между отрезком

[0, 1] и интервалом (0, 1) - точки 0 и 1 все время оказываются “лишними”;

эта теорема позволяет ограничиться установлением эквивалентности отрезка [0, 1] и отрезка [1/3, 2,3], лежащего внутри (0, 1), т.к. (0, 1), в свою очередь, лежит в [0, 1], то согласно теореме Кантора-Бернштейна отрезок и интервал эквивалентны. Здесь, как и в других случаях, эта теорема “берет на себя” основные трудности, связанные с установлением взаимно-однозначного соответствия.



2.2 Борелевские алгебры

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Борелевская сигма-алгебра — это минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства (впрочем, она содержит и все замкнутые) . Обычно в качестве топологического пространства выступает множество вещественных чисел. С борелевской сигма-алгеброй связано понятие борелевской функции.

- **Борелева (борелевская) функция** — отображение одного топологического пространства в другое (обычно оба суть пространства вещественных чисел), для которого прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество.

Именно борелевская сигма-алгебра обычно выступает в роли сигма-алгебры случайных событий вероятностного пространства. В борелевской сигма-алгебре на прямой или на отрезке содержатся многие «простые» множества: все интервалы, полуинтервалы, отрезки и их счётные объединения. Всякое борелевское множество на отрезке является измеримым относительно меры Лебега, но обратное не верно. **Любое подмножество множества нулевой меры автоматически измеримо по Лебегу, но такое может не быть борелевским.**

Рассмотрим функцию на отрезке канторовой лестницы. Эта функция монотонна и непрерывна, как следствие — измерима. Мера образа канторова множества равна, а значит, мера образа его дополнения также равна. Поскольку мера образа канторова множества ненулевая, в нём можно найти неизмеримое множество. Тогда его прообраз будет измеримым (так как он лежит в канторовом множестве, мера которого нулевая), но не будет борелевским (поскольку иначе было бы измеримо как образ борелевского множества при измеримом отображении).

2.3 Поле: построение, свойства, примеры

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Поле в общей алгебре — алгебраическая структура, для элементов которой определены операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль), причём свойства этих операций близки к свойствам обычных числовых операций. Простейшим полем является поле рациональных чисел (дробей). Хотя названия операций поля взяты из арифметики, следует иметь в виду, что элементы поля не обязательно являются числами, и определения операций могут быть далеки от арифметических.

Алгебра над множеством F, образующая коммутативную группу по сложению + над F с нейтральным элементом **0** и коммутативную группу по умножению над ненулевыми элементами $F\setminus\{\mathbf{0}\}$, при выполняющемся свойстве дистрибутивности умножения относительно сложения.

Если раскрыть указанное выше определение, то множество F с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения + и умножения $*$ ($+:F\times F\to F, *:F\times F\to F$, т.е. $\forall a,b\in F (a+b)\in F, a*b\in F$) называется полем $\langle F,+,*\rangle$, если выполнены следующие аксиомы:

1. Коммутативность сложения: $\forall a,b\in F a+b=b+a$
2. Ассоциативность сложения: $\forall a,b,c\in F (a+b)+c=a+(b+c)$
3. Существование нулевого элемента: $\exists \mathbf{0}\in F : \forall a\in F a+\mathbf{0}=a$
4. Существование противоположного элемента: $\forall a\in F \exists(-a)\in F : a+(-a)=\mathbf{0}$
5. Коммутативность умножения: $\forall a,b\in F a*b=b*a$
6. Ассоциативность умножения: $\forall a,b,c\in F (a*b)*c=a*(b*c)$
7. Существование единичного элемента: $\exists e\in F : \forall a\in F a*e=a$
8. Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $(\forall a\in F : a\neq\mathbf{0}) \exists a-1\in F : a*a-1=e$
9. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a,b,c\in F (a+b)*c=a*c+b*c$

Характеристика поля — то же, что и характеристика кольца, наименьшее положительное целое число n такое, что сумма n копий единицы равна нулю.

Если такого числа не существует, то характеристика равна 0 по определению. Задачу определения характеристики обычно решают с задействованием понятия простого поля — поля, не содержащего собственных подполей, благодаря факту, что любое поле содержит ровно одно из простых полей.

Поля Галуа — поля, состоящие из конечного числа элементов. **Свойства:**

- Характеристика поля всегда 0 или простое число.
  - Поле характеристики 0 содержит подполе, изоморфное полю рациональных чисел Q.
  - Поле простой характеристики p содержит подполе, изоморфное полю вычетов Zp .
- Количество элементов в конечном поле всегда равно pn — степени простого числа.
  - При этом для любого числа вида pn существует единственное (с точностью до изоморфизма) поле из pn элементов, обычно обозначаемое Fpn.

- В поле нет делителей нуля.
- Любая конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической. В частности, мультипликативная группа ненулевых элементов конечного поля Fq изоморфна Zq−1.
- С точки зрения алгебраической геометрии, поля — это точки, потому что их спектр состоит ровно из одной точки — идеала {0}. Действительно, поле не содержит других собственных идеалов: если идеалу принадлежит ненулевой элемент, то в идеале находятся и все кратные ему, то есть всё поле. Обратно, коммутативное кольцо, не являющееся полем, содержит необратимый (и ненулевой) элемент **a**. Тогда главный идеал, порождённый **a**, не совпадает со всем кольцом и содержится в некотором максимальном (а следовательно простом) идеале, а значит спектр этого кольца содержит как минимум две точки.

2.4 Непрерывные кривые в метрических пространствах

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ. Кривой в метрическом пространстве M назовем непрерывное отображение α: I → M, где I — интервал в R. **Замечание 1.** В некоторой литературе по метрической геометрии данный объект называется путём либо параметризацией кривой, а понятие кривой используется для обозначения класса путей, которые связаны заменой параметра.

Пусть α: [a, b] → M — кривая. Рассмотрим разбиение T = {ti} n i=0 отрезка [a, b], при этом a = t0 < t1 < ... <tn = b.

Диаметром разбиения назовем величину d(T) = max i∈1,..,n (ti − ti−1). Далее рассмотрим сумму L(α, T) = X n i=1 ρ(α(ti), α(ti−1)). Длиной кривой α будем называть следующую величину L(α)| b a = sup T L(α, T). Кривую α: I → M будем называть спрямляемой, если для любого отрезка [a, b] ⊆ I величина L(α)| b a конечна. Сформулируем ряд известных из метрической геометрии свойств длины кривой в метрическом пространстве

Лемма 1. Пусть α: [a, b] → M — спрямляемая кривая, тогда:

1. Длина кривой не меньше расстояния между ее концами.
2. Длина аддитивна: L(α)| c a + L(α)| b c = L(α)| b a для c ∈ [a, b].
3. Функция l(t) = L(α)| t a непрерывна.
4. L(α)| b a = limd(T)→0 L(α, T)

Спрямляемую кривую α: I → M будем называть натурально параметризованной, если для любых a, b ∈ I, где a < b, справедливо L(α)| b a = b − a

Лемма 2. Для любой спрямляемой кривой α: I → M существует натурально параметризованная кривая β : J → M (J — некоторый интервал в R).

Рассмотрим две кривые $\alpha 1 : I1 \to M$ и $\alpha 2 : I2 \to M$, проходящие через точку $p \in M$ в моменты $t1 \in {}^{\circ}I1$ и $t2 \in {}^{\circ}I2$ соответственно. Будем говорить, что эти две кривые касаются в точке p, если lim $\Delta t \to 0$ $\rho(\alpha 1(t1 + \Delta t), \alpha 2(t2 + \Delta t))$ $|\Delta t| = 0$. Заметим, что при заданной точке $p \in M$ и кривой α, проходящей через эту точку, без ограничения общности всегда можно считать, что $\alpha(0) = p$. Кроме того, из определения касания видно, что это свойство является локальным свойством кривых, т. е. зависит только от поведения кривой в некоторой открытой окрестности точки p.

2.5 Линейные функционалы. Геометрический смысл

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Линейный функционал — функционал, обладающий свойством линейности по своему аргументу:

$$\Phi[\mathbf{f}+\mathbf{g}] = \Phi[\mathbf{f}] + \Phi[\mathbf{g}] \qquad \Phi[c\ \mathbf{f}] = c\ \Phi[\mathbf{f}]$$

где Φ — линейный функционал, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — функции из его области определения, c — число (константа). Иными словами, это линейное отображение из пространства функций во множество чисел — чаще всего подразумеваемых вещественными. Еще иначе, линейный оператор, действующий из (некоторого) пространства функций в $\mathbb{R}$ (иногда в $\mathbb{C}$).

Линейные функционалы играют особую роль в функциональном анализе.

- Как и вообще термин 'функционал', термин 'линейный функционал' употребляется и вообще для аргументов из векторных пространств — в смысле линейного отображения из какого-то векторного пространства в его пространство скаляров, то есть — в этом употреблении — его аргументом может быть не обязательно функция.
- Линейный функционал является аналогом оператора проецирования для бесконечномерных пространств (в частности, для пространств функций), а также применяется как обобщающий термин, покрывающий равно случаи конечномерных и бесконечномерных пространств.
- Одним из важнейших примеров линейного функционала служит скалярное произведение с фиксированной функцией (элементом пространства):

$$\Phi[\mathbf{f}] = \int_\Omega f(x)\phi(x)d\Omega$$

- Такие линейные функционалы, представляющие скалярное произведение $\mathbf{f}$ с каждой из базисных функций полного набора, дают прямое преобразование Фурье.

- **Пример.** $\Phi[\mathbf{f}] = \int_\Omega Lf(x)d\Omega$, где L — линейный оператор, действующий на функцию $f(x)$, Ω — область интегрирования,

  в частности:

  - $\int_1^2 f(x)dx$, $\int_1^2 (5\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx} + 3f)dx$, $\int_1^2 \int_3^4 f(x,y)dxdy$,
  - $\int_1^2 K(x)f(x)dx$, где $\mathbf{K}$ — некоторая фиксированная функция,

    $\Phi[\mathbf{f}] = f(11)$ $\qquad$ $\Phi[\mathbf{f}] = f(1) - f(0)$
  - $\Phi[\mathbf{f}] = \frac{d^3f}{dx^3}|_{x=0}$ $\qquad$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,3)dx$

2.6 Основные понятия эвклидовых пространств, примеры

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Евклидово пространство (также **Эвклидово пространство**) — в изначальном смысле, пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В этом случае предполагается, что пространство имеет размерность равную 3.

В современном понимании, в более общем смысле, может обозначать один из сходных и тесно связанных объектов: конечномерное вещественное векторное пространство R*n* с введённым на нём положительно определённым скалярным произведением, либо метрическое пространство, соответствующее такому векторному пространству.

n-мерное евклидово пространство обозначается E*n*, также часто используется обозначение R*n* (если из контекста ясно, что пространство обладает евклидовой структурой).

Для определения евклидова пространства проще всего взять в качестве основного понятие скалярного произведения. Евклидово векторное пространство определяется как конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел, на векторах которого задана вещественнозначная функция (·,·),обладающая следующими тремя свойствами:

- Билинейность: для любых векторов *u*,*v*,*w* и для любых вещественных
- чисел *a*,*b*(*au*+*bv*,*w*)=*a*(*u*,*w*)+*b*(*v*,*w*) и (*u*,*av*+*bw*)=*a*(*u*,*v*)+*b*(*u*,*w*);
- Симметричность: для любых векторов *u*,*v*(*u*,*v*)=(*v*,*u*);
- Положительная определённость: для любого *u*(*u*,*u*)⩾0, причём (*u*,*u*)=0⇒*u*=0.

Пример евклидова пространства — координатное пространство R*n*, состоящее из всевозможных *n*-ок вещественных чисел (*x*1,*x*2,…,*xn*), скалярное произведение в котором определяется формулой (*x*,*y*)=∑*ni*=1*xiyi*=*x*1*y*1+*x*2*y*2+⋯+*xnyn*.

Заданного на евклидовом пространстве скалярного произведения достаточно для того, чтобы ввести геометрические понятия длины и угла.

Полные эвклидовы пространства.

Гильбертово пространство — обобщение евклидова пространства, допускающее бесконечную размерность. Важнейшим объектом исследования в гильбертовом пространстве являются линейные операторы.

Гильбертовы пространства это полные эвклидовы пространства. Гильбертово пространство — линейное (векторное) пространство (над полем вещественных или комплексных чисел), в котором для любых двух элементов пространства x и y определено скалярное произведение (x,y) и полное относительно порождённой скалярным произведением метрики d(x,y)=||x−y||=(x−y,x−y)√.

Норма в произвольном нормированном пространстве может порождаться некоторым скалярным произведением тогда и только тогда, когда выполнено следующее равенство (тождество) параллелограмма:

(∀x,y∈H)‖x+y‖2+‖x−y‖2=2(‖x‖2+‖y‖2).

Если удовлетворяющее тождеству параллелограмма банахово пространство является вещественным, то отвечающее его норме скалярное произведение задаётся равенством

(x,y)=‖‖‖x+y2‖‖‖2−‖‖x−y2‖‖2.

Если это пространство является комплексным, то отвечающее его норме скалярное произведение задаётся равенством

(x,y)=‖‖‖x+y2‖‖‖2−‖‖x−y2‖‖2+i‖‖‖x+iy2‖‖‖2−i‖‖‖x−iy2‖‖‖2 (поляризационное тождество).

Система векторов гильбертова пространства является **полной,** если она порождает всё пространство, то есть если произвольный элемент пространства может быть сколь угодно точно приближен по норме линейными комбинациями элементов этой системы. Если в пространстве существует счётная полная система элементов, то пространство является **сепарабельным** — то есть имеется счётное всюду плотное множество, замыкание которого по метрике пространства совпадает со всем пространством.

Данная полная система {ei} является базисом, если каждый элемент пространства можно представить как линейную комбинацию элементов этой системы и притом однозначно.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 ЛР-1 «Аппроксимация функций в среде MathCAD. Сглаживание и фильтрация опытных данных в среде MathCAD»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). Некоторые разделы математики, в сущности, целиком посвящены аппроксимации. Например, теория приближения функций, численные методы анализа.

Одним из наиболее часто употребляемых методов аппроксимации является метод наименьших квадратов. Следует обратить особое внимание на выбор аналитической функции для аппроксимации в ходе обработки результатов опытов.

Необходима предварительная обработка опытных данных (выравнивание, сглаживание, фильтрация). Виды фильтрации (скользящее усреднение, полосовая и др.) для удаления соответствующей «шумовой» компоненты; встроенные функции MathCAD.

3.2 ЛР-2 «Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: различные численные методы решения алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений; необходимое и достаточное условия сходимости итерационных процессов.

3.3 ЛР-3 «Исследование свойств линейных пространств»

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: аксиоматическое определение линейного пространства, свойства и особенности задания метрики; вопросы сходимости в линейном пространстве.