ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.В.ДВ.04.02 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Направление подготовки (специальность):

27.03.04 Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:

Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Основы методологии научного исследования	0	0	0	0	2
2	Математическое и физическое моделирование как метод научного эксперимента	0	0	0	4	2
3	Основные понятия теории планирования эксперимента	0	0	0	0	2
4	Многофакторный эксперимент	0	0	0	6	4
5	Методы описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах	0	0	0	6	6
6	Техника экспериментальных измерений. Оптимизация параметров	0	0	0	4	4
Итого		**0**	**0**	**0**	**20**	**20**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1. Типовые математические модели инженерных процессов: модель «черного ящика»

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Модель «черного ящика», примеры которой будут приведены далее, представляет собой иллюстрацию объекта, для которого заданы выход и вход. При этом его содержимое неизвестно. Рассмотрим далее, как построить модель «черного ящика».

В качестве исходного действия, необходимого для составления модели абсолютно любой системы, выступает отделение объекта от окружающей его среды. Эта простейшая операция отражает два важнейших свойства: обособленность и целостность предмета. Объектом исследования является некий объект, содержимое которого неизвестно. Любая модель состава системы не является полностью изолированной. Она поддерживает с окружающей средой определенные связи. С их помощью происходит взаимное воздействие объекта и условий, в которых он находится. Соответственно, при выстраивании модели «черного ящика» на следующем этапе связи изображаются стрелками и описываются словами. Те, которые направлены в среду, являются выходами. Соответственно, обратные стрелки будут входами

На этом уровне представления системы исследователь имеет дело с декларативной моделью. То есть выходы и входы определяются по шкале наименований. Как правило, достаточно такого отображения. Однако в ряде случаев необходимо дать количественное описание некоторых либо всех выходов и входов.

Множества задаются для того, чтобы модель «черного ящика» была максимально формализована. В результате исследователь приходит к заданию 2 множеств Y и X выходных и входных переменных. При этом никакие отношения между ними на данном этапе не фиксируются. В противном случае получится модель прозрачного, а не «черного ящика». Так, для телевизора множеством X могут являться предельные диапазоны сетевого напряжения и радиоволн трансляции.

На заключительном этапе исследуются и отражаются изменения объекта. К примеру, они могут происходить в течение определенного времени. То есть исследователь иллюстрирует состояние объекта в динамике. Описание модели «черного ящика» должно показывать соответствия, во-первых, компонентов множества X вероятных величин входных параметров и элементов упорядоченного T-множества временных отрезков. Кроме этого, должно быть отображено аналогичное соотношение для выходных показателей.

2.2. Рототабельные планы второго порядка

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рототабельным называют планирование, для которого дисперсия отклика (выходного параметра), предсказанного уравнением регрессии, постоянна для всех точек, находящихся на равном расстоянии от центра эксперимента. Экспериментатору заранее неизвестно, где находится та часть поверхности отклика, которая представляет для него особый интерес, поэтому следует стремиться к тому, чтобы количество информации, содержащееся в уравнении регрессии, было одинаково для всех равноотстоящих от центра эксперимента точек. Действительно, удаление от центра точек 5,6,7,8 в раза меньше, чем удаление точек 1, 2, 3, 4, и, следовательно, коэффициент уравнения регрессии определяются с различной дисперсией. Бокс и Хантер предложили рототабельные планы 2-го порядка. Для того чтобы композиционный план был рототабельным, величину звездного плеча выбирают из условия:

$$\alpha = 2^{\frac{k}{4}}\ при\, k < 5 \quad и \quad \alpha = 2^{\frac{k-1}{4}}\ при\, k \geq 5$$

Или в общем случае $\alpha = 2^{\frac{k-p}{4}}$, где k - число факторов; p - дробность реплики (для ПФЭ p = 0, для полуреплики p =1, для четвертьреплики p = 2 и т.д.).

Число точек в центре плана увеличивают. Учитывая специфический характер рототабельного плана в общем виде, можно также получить формулы для расчета коэффициентов уравнения регрессии и их дисперсий:

$$b_0 = \frac{A}{n}\left[2\lambda^2(k+2)(oy) - 2\lambda c\sum_{i=1}^{k}(iiy)\right];$$
$$b_{ii} = \frac{A}{n}\left[c^2[(k+2)\lambda - k](iiy) + c^2(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}(iiy) - 2\lambda c(oy)\right];$$
$$b_{iu} = \frac{c^2}{n\lambda}(iuy);$$
$$S_{b_0}{}^2 = \frac{2A\lambda^2(k+2)}{n}\cdot S^2_{восп}; \quad S_{b_{ii}}{}^2 = \frac{A[(k+2)\lambda - (k-1)c^2)]}{n}\cdot S^2_{восп};$$
$$S_{iu}{}^2 = \frac{c^2}{n\lambda}S^2_{восп}; \quad (iuy) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}x_{uj}y_j; \quad C = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2};$$
$$A = \frac{1}{2\lambda[(k+2)\lambda - k]}; \quad \lambda = \frac{nk}{(k+2)n_1} = \frac{k(n_1+n_0)}{(k+2)n_1}.$$

Матрица ротатабельного планирования, оказывается неортогональной, так как:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0i}x_{uj}^2 \neq 0; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{uj}^2\cdot x_{ij}^2 \neq 0; \quad i \neq u.$$

Следовательно, если какой-либо из квадратичных эффектов оказался незначимые, то после его исключения коэффициенты уравнения регрессии необходимо пересчитать заново.

При использовании ротатабельных планов второго порядка дисперсию воспроизводимости можно определить по опытам в центре плана. В связи с этим при проверке адекватности уравнения регрессии, полученного по ротатабельному плану второго порядка, поступают следующим образом.

Находят остаточную сумму квадратов:

$$S_1^2 = \sum_{j=1}^{n}(y_j - \hat{y}_j)^2.$$

с числом степеней свободы $m_1 = n - 1 = n - \frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

По опытам в центре плана определяют сумму квадратов воспроизводимости:

$$S_2^2 = \sum_{j=1}^{n}(y_{0j} - \hat{\bar{y}}_{0j})^2$$

с числом степеней свободы $S_3^2 = S_1^2 - S_2^2$

Далее находят сумму квадратов, характеризующих неадекватность , число степеней свободы которой

$$m_3 = m_1 - m_2 = n - \frac{(k+2)(k+1)}{2} - (n_0 - 1).$$

Проверяют значимость по критерию согласия Фишера: $F = \frac{S_3^2/m_3}{S_2^2/m_2}$

2.3. Спектральная плотность стационарного случайного процесса. Стационарный «белый шум»

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности

Временной ряд называется **детерминированным**, если значения уровней временного ряда точно определены какой-либо математической функцией, являющейся реализацией исследуемого процесса.

Временной ряд называется **случайным**, если уровни временного ряда могут быть описаны с помощью функции распределения вероятностей. Таким образом, уровни временного ряда могут быть детерминированными или случайными величинами. Уровни случайного временного ряда могут быть непрерывными и дискретными случайными величинами.

Случайная величина X называется **дискретной**, если множество её возможных значений является конечным или счётным. В качестве примера случайного временного ряда с дискретными уровнями может служить временной ряд, отражающий значения ежемесячной выдачи зарплаты рабочим.

Случайная величина X называется **непрерывной**, если она может принимать любое значение из конечного или бесконечного интервала. В качестве примера случайного временного ряда с непрерывными уровнями может служить временной ряд, отражающий значения температуры воздуха, зарегистрированные с определённой периодичностью.

Стохастическим процессом называется процесс, который развивается во времени в соответствии с законами теории вероятностей. К стохастическим процессам относится класс стационарных процессов. Стохастический процесс называется **стационарным**, если его основные свойства остаются неизменными во времени.

Предположим, что исследуется временной ряд *X*. Обозначим через *xt* уровень данного временного ряда. Тогда стационарный процесс будет характеризоваться следующими **четырьмя свойствами:**

1) математическое ожидание стационарного ряда *E(yt)* является постоянным, т. е. среднее значение временного ряда, вокруг которого изменяются уровни, является величиной постоянной: $\mathrm{E}(y_t) = \bar{y} = const$;

2) дисперсия стационарного ряда является постоянной. Она характеризует вариацию уровней временного ряда относительно его среднего значения

3) автоковариация стационарного ряда с лагом *l* является постоянной, т. е. ковариация между значениями *xt* и *xt+l*, отделёнными интервалом в 1 единиц времени, определяется по формуле:

$$R_l(y_t) = \mathrm{cov}(y_t, y_{t+l}) = \mathrm{E}\left[(y_t - \bar{y})(y_{t+l} - \bar{y})\right];$$

для стационарных рядов автоковариация зависит только от величины лага *l*, поэтому справедливо равенство вида:

$$R_{l=0}(y_t) = G^2(y);$$

4) коэффициенты автокорреляция стационарного ряда с лагом *l* являются постоянными. Следовательно, автокорреляция является нормированной автоковариацией, т. к. для стационарного процесса *G2(y)=const*:

$$\rho_l = \frac{\mathrm{E}\left[(y_t - \bar{y})(y_{t+l} - \bar{y})\right]}{\sqrt{\mathrm{E}(y_t - \bar{y})^2\,\mathrm{E}(y_{t+l} - \bar{y})^2}} = \frac{\mathrm{E}\left[(y_t - \bar{y})(y_{t+l} - \bar{y})\right]}{G^2(y)},$$

Таким образом, коэффициент автокорреляции порядка *l* определяется по формуле:

$$\rho_l = \frac{R_l(y_t)}{R_{l=0}(y_t)}.$$

Случайный процесс, называемый белым шумом, является частным случаем стационарных временных рядов.

Белым шумом называется случайная последовательность значений *y1, y2,…,yN,* если её математическое ожидание равно нулю, т.е. *E(Yt)=0*, где $t = \overline{1, N}$, её элементы являются некоррелированными (независимыми друг от друга) одинаково распределёнными величинами, и дисперсия является постоянной величиной *D(Yt)=G2=const*.

Белый шум – это теоретический процесс, который реально не существует, однако он представляет собой очень важную математическую модель, которая используется при решении множества практических задач.

2.4. Нелинейные методы оптимизации параметров

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности

Метод градиентного спуска как один из методов нелинейной оптимизации

Метод градиента в чистом виде формирует шаг по переменным как функцию от градиента F(x) В текущей точке поиска. Простейший алгоритм поиска Min F(X) записывается в векторной форме следующим образом:

$x^{i+1} = x^i - h \cdot gradf(x^i),$ или в скалярном виде: $x_j^{i+1} = x_j^i - h \cdot \dfrac{df}{dx_j^i}, \quad j = 1,\dots,n.$

Величина рабочего шага в направлении градиента H Grad F(x) Зависит от величины градиента, который заранее учесть трудно, и от коэффициента пропорциональности шага H, с помощью которого можно управлять эффективностью метода.

Поиск каждой новой точки состоит из двух этапов:

1) оценка градиента F(X) Путем вычисления частных производных от F(x) По каждой переменной Xj;

2) рабочий шаг по всем переменным одновременно.

Величина H сильно влияет на эффективность метода. Большей эффективностью обладает вариант метода, когда шаг по каждой переменной определяется направляющими косинусами градиента

$x_j^{i+1} = x_j^i - h \cdot \cos\varphi_j,$ где $\cos\varphi_j = \dfrac{(df/dx_j)}{|gradf(x)|}.$

В этом случае величина рабочего шага не зависит от величины модуля градиента, и ею легче управлять изменением H. В районе оптимума может возникать значительное "рыскание", поэтому используют различные алгоритмы коррекции H.

Наибольшее распространение получили следующие алгоритмы:

1) $h^i = const = h$ (без коррекции);

2) $$h^i = \begin{cases} \dfrac{h^{i-1}}{2}, если \quad f(x^i) < f(x^{i-1}), \\ h^{i-1}, если \quad f(x^i) > f(x^{i-1}), \end{cases}$$

3) $$h^i = \begin{cases} h^{i-1}, если \quad \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2, \\ 2h^{i-1}, если \quad \alpha_1 > \alpha, \\ \dfrac{h^{i-1}}{3}, если \quad \alpha_2 < \alpha, \end{cases}$$

Где α - угол между градиентами на предыдущем и текущем шаге; α1 и α2 – заданные пороговые значения выбираются субъективно (например, α1=π/6, α2=π/3).

Вдали от оптимума направление градиента меняется мало, поэтому шаг можно увеличить (второе выражение), вблизи от оптимума направление резко меняется (угол между градиентами f(x) большой), поэтому h сокращается (третье выражение).

Для оценки частных производных используются разностные методы:

- алгоритм с центральной пробой

$$\frac{df}{dx_i} \approx \frac{f(x_1,\dots,x_i+g_i,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{g_i},$$

- алгоритм с парными пробами

$$\frac{df}{dx_i} \approx \frac{f(x_1,\dots,x_i+g_i,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_i-g_i,\dots,x_n)}{g_i},$$

Где Gi – пробный шаг по I-й переменной, выбираемый достаточно малым для разностной оценки производной.

Первый алгоритм требует меньших затрат по сравнению со вторым (обычно затраты выражаются количеством вычислений критерия оптимальности), но позволяет получить решение менее точно, чем второй, и эта погрешность зависит от величины пробного шага.

Условием окончания поиска может являться малость модуля градиента F(X), т. е. |Gradf(X)| < ε.

Пример . Требуется найти минимум функции F(X, Y) = X3+2Y2-3X-4Y, завершив вычисления при погрешности ε = 0,01, выбрав начальное приближение X(0) = - 0,5 и У(0) = -1, коэффициент шага H = 0.1.

Решение. Необходимые начальные данные приведены в условии задачи. Для вычислений выберем работу с шагом Без коррекции (H = Const). Найдем частные производные функции: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4.$ Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 3(x^i)^2 - 3;\ \frac{\partial f}{\partial y^i} = 4y^i - 4.$

Значит, $\left|gradf\left(x^i, y^i\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)^2}.$ Переменные определяются по формулам: $x^{i+1} = x^i - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i};\ y^{i+1} = y^i - h \cdot \frac{\partial f}{\partial y^i}.$ Результаты вычислений занесем в табл. 1

Таблица 1

	X	Y	F(x, y)	Df/dx	Df/dy	|grad f|
	2	3	4	5	6	7
	-0,500	-1,000	7,3750	-2,2500	-8,0000	8,3104
	-0,275	-0,200	1,6842	-2,7731	-4,8000	5,5435
	0,002	0,280	-0,9701	-3,0000	-2,8800	4,1586
	0,302	0,568	-2,5061	-2,7258	-1,7280	3,2274
	0,575	0,741	-3,4003	-2,0085	-1,0368	2,2603
	0,776	0,844	-3,8120	-1,1947	-0,6221	1,3469
	0,895	0,907	-3,9508	-0,5958	-0,3732	0,7031
	0,955	0,944	-3,9877	-0,2651	-0,2239	0,3471
	0,981	0,966	-3,9967	-0,1111	-0,1344	0,1744
0	0,992	0,980	-3,9990	-0,0453	-0,0806	0,0925
1	0,997	0,988	-3,9997	-0,0183	-0,0484	0,0517
2	0,999	0,993	-3,9999	-0,0073	-0,0290	0,0299
3	1,000	0,996	-4,0000	-0,0029	-0,0174	0,0177
4	1,000	0,997	-4,0000	-0,0012	-0,0104	0,0105
5	1,000	0,998	-4,0000	-0,0005	-0,0063	0,0063

В последней точке модуль градиента меньше заданной погрешности (0,0063 < 0.01), поэтому поиск прекращается.

Итак, $(x^*; y^*) \approx (1; 0.998)$ И $f^* \approx -4.$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 ПЗ-1 Проблемы современной фундаментальной науки. Основные этапы экспериментального исследования. Классификация методов исследования

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- основные тенденции в развитии науки и технологии;
- различные подходы к вопросам экологичности техники и технологии;
- динамику изменения научной парадигмы.

3.2 ПЗ-2 Математическое моделирование в инженерных исследованиях

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- этапы математического моделирования, отличия математических моделей от других;
-допущения и ограничения при построении математических моделей;
-типовые математические модели и возможности их применения в инженерных исследованиях.

3.3 ПЗ-3 Факторы, методы отбора, общая характеристика, функция отклика

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- основные понятия теории;
- расчет свободного члена, коэффициентов при линейных факторах и эффектах взаимодействия в уравнении функции отклика.

3.4 ПЗ-4 Планы факторного эксперимента

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- расчет и проверку значимости коэффициентов регрессии;
- расчет теоретического значения параметра оптимизации;
- проверку адекватности модели.

.3.5 ПЗ-5 Теоретические основы обработки экспериментальных данных

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- первичную обработку и анализ статистических данных;

- непрерывные и дискретные статистические распределения, их свойства, параметры;
- алгоритмы нахождения точечных и интервальных оценок параметров статистического распределения.

3.6 ПЗ-6 Методы стохастического описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- основные понятия многомерного статистического анализа, теории корреляции, классификацией регрессий;
- алгоритмы нахождения условных законов и числовых характеристик многомерных случайных величин, вычисления коэффициента корреляции, детерминации, ковариации;
- нахождение уравнения регрессии, проверки его параметров на статистическую значимость.

3.7 ПЗ-7 Техника экспериментальных измерений. Основные положения теории погрешностей

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- основные понятия теории экспериментальных измерений и теории погрешностей;
- методики определения статистических погрешностей;
- анализ полученных решений.