ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.В.ДВ.04.02 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Направление подготовки (специальность):

27.03.04 Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:

Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Основы методологии научного исследования	0	0	0	2	2
2	Математическое и физическое моделирование как метод научного эксперимента	0	0	0	6	2
3	Основные понятия теории планирования эксперимента	0	0	0	2	2
4	Многофакторный эксперимент	0	0	0	8	4
5	Методы описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах	0	0	0	10	6
6	Техника экспериментальных измерений. Оптимизация параметров	0	0	0	10	4
Итого		**0**	**0**	**0**	**38**	**20**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1. Выбор предмета исследования. Основные этапы экспериментального исследования. Классификации методов исследования

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Научная теория – это высшая форма организации теоретического знания, представляющая собой совокупность объединенных в единую систему основных элементов теории (подтвержденных гипотез, понятий, суждений) в соответствующей отрасли (в данном случае в информатике). Критерием истинности теории является ее практическое подтверждение.

Основой любой науки и, в частности, науковедения является **методология**, которая представляет собой учение о структуре, логической организации, методах и средствах деятельности.

В научной литературе под **методологией** обычно понимается, прежде всего, система научного познания, т.е. учение о принципах построения, формах и способах научно-познавательной деятельности.

Научный метод – это система правил и предписаний, направляющих человеческую деятельность (производственную, политическую, культурную, научную, образовательную и т.д.) к достижению поставленной цели.

Если методология – это стратегия научных исследований, обеспечивающих достижение цели, сформулированной в гипотезе предполагаемых научных результатов (генеральный путь познания), то метод – это тактика, показывающая как лучше всего идти этим путем.

Метод (гр. methodos) — 1) способ познания, исследования явлений природы и общественной жизни; 2) прием, способ и образ действий.

Метод — путь исследования, способ достижения какой-либо цели, решения конкретных задач. Это совокупность подходов, приемов, операций практического или теоретического освоения действительности.

Из определения метода вытекает, что существуют **две большие группы методов**: познания (исследования) и практического действия (преобразовательные методы) (рис.2).

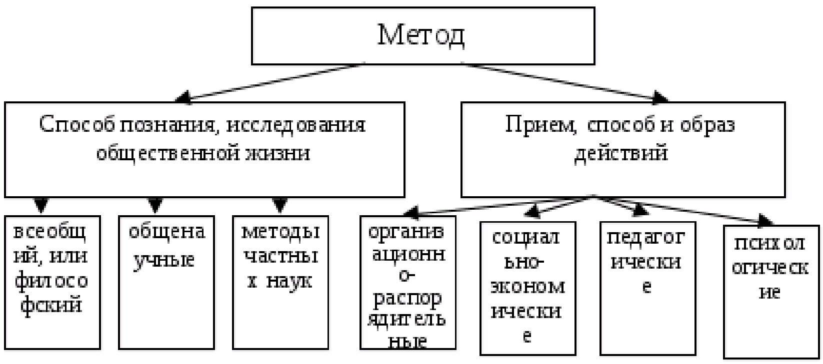

Рис. 2 –Группы научных методов

1) Методы исследования — приемы, процедуры и операции эмпирического и теоретического познания и изучения явлений действительности. С помощью этой группы методов получают достоверные сведения, используемые для построения научных теорий и выработки практических рекомендаций. Система методов исследования определяется исходной концепцией исследователя: его представлениями о сущности и структуре изучаемого, общей методологической ориентации, целей и задач конкретного исследования. Методы подразделяются на следующие:

- всеобщий, или философский, общенаучные и методы частных наук;
- констатирующие и преобразующие;
- эмпирические и теоретические;
- качественные и количественные;
- содержательные и формальные;

- методы сбора эмпирических данных, проверки и опровержения гипотез и теории;
- описания, объяснения и прогноза;
- обработки результатов исследования.

Всеобщий, или философский метод — всеобщий метод материалистической диалектики.

К **общенаучным методам** относятся:

- Наблюдение – это способ познания объективного мира, основанный на непосредственном восприятии предметов и явлений при помощи органов чувств без вмешательства в процесс со стороны исследователя.
- Сравнение - это установление различия между объектами материального мира или нахождение в них общего; осуществляется как при помощи органов чувств, так и при помощи специальных устройств.
- Счет – это нахождение числа, определяющего количественное соотношение однотипных объектов или их параметров, характеризующих те или иные свойства.
- Измерение – это физический процесс определения численного значения некоторой величины путем сравнения ее с эталоном.
- Эксперимент – одна из сфер человеческого практики, в которой подвергается проверке истинность выдвигаемых гипотез или выявляются закономерности объективного мира.
- Обобщение – определение общего понятия, в котором находит отражение главное, основное, характеризующее объекты данного класса.
- Абстрагирование – это мысленное отвлечение от несущественных свойств, связей, отношений предметов и выделение нескольких сторон, интересующих исследователя.
- Формализация – отображение объекта или явления в знаковой форме какого-либо искусственного языка (математики, химии и т.д.).
- Аксиоматический метод – способ построения научной теории, при котором некоторые утверждения принимаются без доказательств.
- Анализ – метод познания при помощи расчленения или разложения предметов исследования на составные части.
- Синтез – соединение отдельных сторон предмета в единое целое.
- Индукция – умозаключение от фактов к некоторой гипотезе (общему утверждению).
- Дедукция – умозаключение, в котором вывод о некотором элементе множества делается на основании знания общих свойств всего множества.
- Аналогия – метод, посредством которого достигается знание о предметах и явлениях на основании того, что они имеют сходство с другими.
- Гипотетический метод познания предполагает разработку научной гипотезы на основе изучения физической, химической и т.п., сущности исследуемого явления, формулирование гипотезы, составление расчетной схемы алгоритма (модели), ее изучение, анализ, разработка теоретических положений.
- Исторический метод познания предполагает исследование возникновения, формирования и развития объектов в хронологической последовательности.
- Идеализация - это мысленное конструирование объектов, которые практически неосуществимы.
- Системные методы: исследование операций, теория массового обслуживания, теория управления, теория множеств и др.

2) Методы как прием, способ и образ действий (методы практической деятельности) включают в себя способы воздействия, совокупность приемов, операций и процедур подготовки и принятия решения, организации его выполнения.

Для выбора методов на каждом этапе необходимо знать общие и конкретные возможности каждого метода, его место в системе исследовательских процедур. Задача исследователя состоит в том, чтобы для каждого этапа исследования определить оптимальный комплекс методов.

Разнообразные **методы** научного познания условно подразделяются на ряд **уровней**: *эмпирический, экспериментально-теоретический, теоретический и метатеоретический.*

Методы эмпирического уровня: *наблюдение, сравнение, счет, измерение, анкетный опрос, собеседование, тесты, метод проб и ошибок и другие*.

Методы экспериментально-теоретического уровня: *эксперимент, анализ и синтез, индукция и дедукция, моделирование, гипотетический, исторический и логический методы.*

Методы теоретического уровня: *абстрагирование, идеализация, формализация, анализ и синтез, индукция и дедукция, аксиоматика, обобщение и другие.*

К **методам метатеоретического уровня** относятся *диалектический* и метод *системного анализа.*

2.2. Использование аналогий в практике математического и физического моделирования. Изоморфизм и гомоморфизм. Типовые математические модели инженерных процессов

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Выявление общего, существенного, присущего всем системам определенного рода производится наиболее общим приемом — математическим моделированием. При математическом моделировании наиболее ярко проявляется эффективность единства качественных и количественных методов исследования, характеризующая магистральный путь развития современного научного познания.

Всякая сложная система, модель которой мы создаем, при своем функционировании подчиняется определенным законам — физическим, химическим, биологическим и др. Рассматриваются такие системы, для которых знание законов предполагает известные количественные соотношения, связывающие те или иные характеристики моделируемой системы. Модель создается для ответа на множество вопросов о моделируемом объекте. Интересуясь некоторыми аспектами функционирующей системы, изучают ее с определенных точек зрения. Направления изучения системы в значительной степени и определяет выбор модели. Опишем процесс построения математической модели сложной системы. Его можно представить состоящим из следующих этапов:

Формулируются основные вопросы о поведении системы, ответы на которые мы хотим получить с помощью модели.

Из множества законов, управляющих поведением системы, учитываются те, влияние которых существенно при поиске ответов на поставленные вопросы.

В дополнение к этим законам, если необходимо, для системы в целом или отдельных ее частей формулируются определенные гипотезы о функционировании. Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что могут быть приведены некоторые теоретические доводы в пользу их принятия.

Гипотезы, так же как и законы, выражаются в форме определенных математических соотношений, которые объединяются в некоторое формальное описание модели.

На этом заканчивается процесс построения математической модели. Дальше следует процесс исследования этих соотношений с помощью аналитических и вычислительных методов, приводящий в конечном итоге к отысканию ответов на предъявляемые модели вопросы.

Если модель хороша, то ответы, найденные с ее помощью, как правило, бывают весьма близки к ответам на те же вопросы о моделируемой системе. Более того, в этом случае зачастую с помощью модели удается ответить и на некоторые ранее не ставившиеся вопросы, расширить круг представлений о реальной системе. Если же модель плоха, т. е. недостаточно адекватно описывает систему с точки зрения задаваемых ей вопросов, то она подлежит дальнейшему улучшению или замене. Возможны также ошибки в алгоритме, в программе для ЭВМ. Такие повторные просмотры продолжаются до тех пор, пока результаты расчетов не удовлетворят исследователя. Теперь модель готова к использованию. Критерием адекватности модели служит практика, которая и определяет, когда может закончиться процесс улучшения модели.

Достоинствами метода математического моделирования является то, что модель представляет собой формализованную запись тех или иных законов природы, управляющих функционированием системы. Существуют различные модели, используемые для описания сложных систем, такие как:

- дескриптивные (описательные), описывающие происходящие в системе процессы;
- оптимизационные, управляющие процессом, т. е. принимающие те или иные решения;
- многокритериальные, рассматривающие систему по многим критериям;
- игровые, пригодные для исследования и рассматривающие конфликтные ситуации;
- имитационные, максимально использующие имеющуюся информацию о поведении системы.

Теория подобия — метод математического моделирования, основанный на переходе от обычных физических величин, влияющих на моделируемую систему, к обобщённым величинам комплексного типа, составленным из исходных физических величин, но в определённых сочетаниях, зависящих от конкретной природы исследуемого процесса. Комплексный характер этих величин имеет глубокий физический смысл отражения взаимодействия различных влияний. Теория подобия изучает методы построения и применения этих переменных и применяется в тех случаях математического моделирования, когда аналитическое решение математических задач моделирования невозможно из-за сложности и требований к точности. Теория подобия применяется в этих случаях для синтеза соотношений, получаемых на основе физического механизма изучаемого процесса и данных численного решения или эксперимента.

ИЗОМОРФИЗМ и ГОМОМОРФИЗМ (греч. isos — одинаковый, homoios — подобный и morphe — форма) — понятия, характеризующие соответствие между структурами объектов. Две системы, рассматриваемые отвлеченно от природы составляющих их элементов, являются изоморфными друг другу, если каждому элементу первой системы соответствует лишь один элемент второй и каждой связи в одной системе соответствует связь в другой и обратно. Такое взаимооднозначное соответствие называется ИЗОМОРФИЗМ. Полный ИЗОМОРФИЗМ может быть лишь между абстрактными, идеализированными объектами, напр., соответствие между геометрической фигурой и ее аналитическим выражением в виде формулы. ИЗОМОРФИЗМ связан не со всеми, а лишь с некоторыми фиксированными в познавательном акте свойствами и отношениями сравниваемых объектов, которые в других своих отношениях могут отличаться.

ГОМОМОРФИЗМ отличается от ИЗОМОРФИЗМА тем, что соответствие объектов (систем) однозначно лишь в одну сторону. Поэтому ГОМОФОРМНЫЙ образ есть неполное, приближенное отображение структуры оригинала. Таково, напр., отношение между картиной и местностью, между грамзаписью и ее оригиналом — звуковыми колебаниями воздушной среды. Понятия ИЗОМОРФИЗМ и ГОМОМОРФИЗМ широко применяются в математической логике и кибернетике.

Математическая практика показывает, что даже такое «неглубокое» сходство систем, как изоморфизм, т.е. одинаковость структуры, может оказаться достаточным, чтобы выявить и перенести на другие системы весьма глубокие системные свойства. Здесь уже возникает изоморфизм в системах знаний об изучаемых системах: изоморфизм понятий, утверждений, теорий.

Использование понятия изоморфизма в более широком, размытом смысле, при сопоставлении сложных объектов, процессов и явлений и установлении их аналогий часто не опирается на выявление структуры объектов, их элементов и системообразующих отношений. Иными словами, суть аналогии или одинаковости структуры *не выясняется, и предполагается интуитивно понятной.*

Условное понятие «степень изоморфизма» можно наглядно продемонстрировать на примере глубокой аналогии между различными видами колебаний - механическими и акустическими, что и явилось основой создания общей теории колебаний. Говоря о более или менее глубоком изоморфизме, «степени изоморфизма», имеют в виду большее или меньшее число аналогичных свойств у сопоставляемых систем.

В тех случаях, когда понятие изоморфизма используется в широком смысле, без прояснения того, в чем именно состоит аналогии, то по существу нельзя найти обоснование, которое обеспечивало бы перенос свойств известных систем на новые, менее изученные системы. Перенос на новые системы в большей степени играет роль предвидения, чем обоснования.

2.3. Дробный факторный эксперимент

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рассмотренные в полном факторном эксперименте примеры свидетельствуют о том, что ПФЭ полностью определяют коэффициенты для линейного уравнения $Y = \sum_{i=0}^{n} b_i x_i$, при $n < m$.

В такой модели необходимо определить n + 1 искомых коэффициентов. Как построить экономно эксперимент? В этом случае строят план эксперимента, который представляет часть плана ПФЭ. Такие планы называют дробными репликами ПФЭ или дробным факторным экспериментом (ДФЭ). Но при этом все требования к столбцам матрицы планирования должны соблюдаться, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = N, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 0.$$

План дробного факторного эксперимента строится очень просто. Так, для линейной модели из трех факторов требуется ДФЭ, содержащий четыре опыта. Таким образом, строится план эксперимента для меньшего числа факторов (3-1 = 2), а оставшиеся факторы варьируются как произведения каких-либо факторов, включенных в первую группу. Но, если есть уверенность, что в выбранном интервале варьирования факторов объект может быть оценен линейной моделью, то смешанные коэффициенты b_{12}, b_{13}, …. стремятся к нулю.

В этом случае факторами x_1 и x_2 варьируют как при ПФЭ, а вместо произведения x_1x_2 (b12= 0) вводят дополнительный фактор x_3. Другими словами укороченную матрицу планирования строим для трех факторов и дополнительный фактор x_3 будет меняться как произведение x_1x_2.

Матрица планирования ДФЭ приведена на рисунке ниже.
В матрице планирования четыре пары одинаковых столбцов, а это значит, что соответствующие коэффициенты неразличимы и можно судить лишь об их совместной величине (смешанные оценки коэффициентов) — линейные эффекты смешиваются с эффектами взаимодействия. Но, если объект линейный, bij и bijk равны нулю. Тогда из четырех опытов найдем истинные значения b0 и bi (b1,b2,b3)

u	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1x_2$	$x_5 = x_1x_3$	$x_6 = x_2x_3$	$x_7 = x_1x_2x_3$
1	+	–	–	+	+	–	–	+
2	+	+	–	–	–	–	+	+
3	+	–	+	–	–	+	–	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+

Если объект не является линейным и поверхность отклика, найденная по уравнению, отличается сильно от действительной, то надо ставить ПФЭ.

Дробные реплики особенно удобны при большом числе факторов (n > 5), так как при этом коэффициенты при факторах b_1 — bn смешиваются при тройных и более высоких взаимодействиях, влияние которых существенно слабее, чем при двойных взаимодействиях. Поэтому влиянием этих взаимодействий можно пренебречь.

Общий вывод: планы ПФЭ 2^n или ДФЭ 2^{n-k} позволяют получить решение для линейных и неполных квадратичных полиномов (без квадратичных членов). Невозможность использования этих планов можно считать, например, расхождение между истинным значением Y^n и У, предсказанным аппроксимирующим выражением в нулевой точке плана (x_1=x_2=xn=…= 0), превышающее допустимое.

2.4. Рототабельные планы второго порядка

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рототабельным называют планирование, для которого дисперсия отклика (выходного параметра), предсказанного уравнением регрессии, постоянна для всех точек, находящихся на равном расстоянии от центра эксперимента. Экспериментатору заранее неизвестно, где находится та часть поверхности отклика, которая представляет для него особый интерес, поэтому следует стремиться к тому, чтобы количество информации, содержащееся в уравнении регрессии, было одинаково для всех равноотстоящих от центра эксперимента точек. Действительно, удаление от центра точек 5,6,7,8 в раза меньше, чем удаление точек 1; 2, 3, 4, и, следовательно, коэффициент уравнения регрессии определяются с различной дисперсией. Бокс и Хантер предложили рототабельные планы 2-го порядка. Для того чтобы композиционный план был рототабельным, величину звездного плеча выбирают из условия:

$$\alpha = 2^{\frac{k}{4}}\ при\, k < 5 \quad и \quad \alpha = 2^{\frac{k-1}{4}}\ при\, k \geq 5$$

Или в общем случае $\alpha = 2^{\frac{k-p}{4}}$, где k - число факторов; p - дробность реплики (для ПФЭ p = 0, для полуреплики p =1, для четвертьреплики p = 2 и т.д.).

Число точек в центре плана увеличивают. Учитывая специфический характер рототабельного плана в общем виде, можно также получить формулы для расчета коэффициентов уравнения регрессии и их дисперсий:

$$b_0 = \frac{A}{n}\left[2\lambda^2(k+2)(oy) - 2\lambda c\sum_{i=1}^{k}(iiy)\right];$$

$$b_{ii} = \frac{A}{n}\left[c^2[(k+2)\lambda - k](iiy) + c^2(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}(iiy) - 2\lambda c(oy)\right];$$

$$b_{iu} = \frac{c^2}{n\lambda}(iuy);$$

$$S_{b_0}{}^2 = \frac{2A\lambda^2(k+2)}{n}\cdot S^2_{воспр};\quad S_{b_{ii}}{}^2 = \frac{A[(k+2)\lambda - (k-1)c^2)]}{n}\cdot S^2_{воспр};$$

$$S_{iu}{}^2 = \frac{c^2}{n\lambda}S^2_{воспр};\quad (iuy) = \sum_{j=1}^{n}x_{ij}x_{uj}y_j;\quad C = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^2};$$

$$A = \frac{1}{2\lambda[(k+2)\lambda - k]};\quad \lambda = \frac{nk}{(k+2)n_1} = \frac{k(n_1+n_0)}{(k+2)n_1}.$$

Матрица рототабельного планирования, оказывается неортогональной, так как:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{0i}x_{uj}^2 \neq 0;\quad \sum_{j=1}^{n}x_{uj}^2\cdot x_{ij}^2 \neq 0;\quad i \neq u.$$

Следовательно, если какой-либо из квадратичных эффектов оказался незначимые, то после его исключения коэффициенты уравнения регрессии необходимо пересчитать заново.

При использовании рототабельных планов второго порядка дисперсию воспроизводимости можно определить по опытам в центре плана. В связи с этим при проверке адекватности уравнения регрессии, полученного по рототабельному плану второго порядка, поступают следующим образом.

Находят остаточную сумму квадратов:

$$S_1^2 = \sum_{j=1}^{n}(y_j - \hat{y}_j)^2.$$

с числом степеней свободы $m_1 = n - 1 = n - \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$

По опытам в центре плана определяют сумму квадратов воспроизводимости:

$S_2^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_{0j} - \hat{\bar{y}}_{0j})^2$ с числом степеней свободы $S_3^2 = S_1^2 - S_2^2$

Далее находят сумму квадратов, характеризующих неадекватность , число степеней свободы которой

$$m_3 = m_1 - m_2 = n - \frac{(k+2)(k+1)}{2} - (n_0 - 1).$$

Проверяют значимость по критерию согласия Фишера: $F = \dfrac{S_3^2 / m_3}{S_2^2 / m_2}$

2.5. Теоретические основы обработки экспериментальных данных Методы стохастического описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности

Многомерные СВ, законы их распределения, условные числовые характеристики

Совместное рассмотрение двух или нескольких случайных величин приводит к понятию системы случайных величин. Условимся систему нескольких случайных величин $X, Y, \dots, W$ обозначать $(X, Y, \dots, W)$. Такая система называется также ***многомерной случайной величиной***. При изучении системы случайных величин недостаточно изучить отдельно случайные величины, составляющие систему, а необходимо учитывать связи или зависимости между этими величинами.

Функция распределения

Функцией распределения вероятностей системы двух случайных величин называется функция $F(x; y)$ *двух аргументов, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств* $X < x$ *и* $Y < y$*, то есть* $F(x; y) = P\{X < x,\ Y < y\}$.

Плотность распределения вероятностей системы двух случайных величин[1]

Функция $f(x, y)$ *называется плотностью распределения (или, дифференциальной функцией распределения) системы непрерывных случайных величин*.

Геометрически эту функцию можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения*.

Знная плотность распределения , можно определить вероятность попадания случайной точки в произвольную область D:

$$P\{(X, Y) \subset D\} = \iint_D f(x, y) dxdy$$
.

Рассмотрим некоторые свойства плотности распределения системы двух непрерывных случайных величин:

1. $f(x, y) \geq 0, \quad \forall(-\infty < x, y < +\infty)$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dxdy = 1$, если случайная величина распределена на всей координатной плоскости (если же распределена в некоторой плоской области G, то $\iint_G f(x, y) dxdy = 1$

Условные законы распределения

Пусть известна плотность распределения системы двух случайных величин. Используя свойства функций распределения, можно вывести формулы для нахождения плотности распределения одной величины, входящей в систему:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy; \qquad f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx \quad (*)$$

Перейдём теперь к решению обратной задачи: по известным законам распределения отдельных случайных величин, входящих в систему, найти закон распределения системы. Легко увидеть, что в общем случае эта задача неразрешима. Таким образом, если случайные величины X, Y взаимозависимы, то закон распределения системы не может быть выражен через законы распределения отдельных случайных величин, входящих в систему. Это приводит к необходимости введения условных законов распределения.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения, так и плотностью распределения. Условная функция распределения обозначается $F(x \mid y)$; условная плотность распределения обозначается $f(x \mid y)$ 1.

Плотностью распределения для случайной величины при условии, что случайная величина приняла определённое значение (*условной плотностью распределения*), назовём величину

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Аналогично, плотностью распределения для случайной величины при условии, что случайная величина приняла определённое значение, назовём величину

$$f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Отсюда получаем: $f(x, y) = f_1(x) f(y \mid x) = f_2(y) f(x \mid y)$

или, с учётом формул $(*)$

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx}; \qquad f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy}.$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами безусловной плотности распределения. В частности, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x \mid y)dx = 1; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y \mid x)dy = 1$.

Для описания условных законов распределения можно использовать различные характеристики подобно тому, как для одномерных распределений.

Наиболее важной характеристикой является условное математическое ожидание.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины при $Y = y$ (y – определённое возможное значение случайной величины) называется сумма произведений возможных значений на их условные вероятности:

$$M(X \mid Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i \mid y).$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M(X \mid Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x \mid y)dx,$$

где – условная плотность распределения случайной величины при .

Числовые характеристики системы двух случайных величин

Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Из этого определения следует, что условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям. Укажем необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

ТЕОРЕМА 1: Для того чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X,Y) была равна произведению функций распределения составляющих:

$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$

ТЕОРЕМА 2: Для того чтобы случайные величины и были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы плотность вероятности системы была равна произведению плотностей вероятностей составляющих:

$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Для описания системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий составляющих используют и другие характеристики, к которым относятся корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин и называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$\mu_{xy}=M\left(\left(X-M(X)\right)\cdot\left(Y-M(Y)\right)\right)$.

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу: $\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))P(x_i,y_j)$,

а для непрерывных величин: $\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))(y-M(Y))f(x,y)dxdy$.

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами и .

Корреляционный момент двух независимых случайных величин равен нулю.

2.6. Нелинейные методы оптимизации параметров

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности

Метод градиентного спуска как один из методов нелинейной оптимизации

Метод градиента в чистом виде формирует шаг по переменным как функцию от градиента F(x) В текущей точке поиска. Простейший алгоритм поиска Min F(X) записывается в векторной форме следующим образом:

$x^{i+1}=x^i-h\cdot gradf(x^i),$ или в скалярном виде: $x_j^{i+1}=x_j^i-h\cdot\frac{df}{dx_j^i},\quad j=1,\ldots,n.$

Величина рабочего шага в направлении градиента H Grad F(x) Зависит от величины градиента, который заранее учесть трудно, и от коэффициента пропорциональности шага H, с помощью которого можно управлять эффективностью метода.

Поиск каждой новой точки состоит из двух этапов:

1) оценка градиента F(X) Путем вычисления частных производных от F(x) По каждой переменной Xj;

2) рабочий шаг по всем переменным одновременно.

Величина H сильно влияет на эффективность метода. Большей эффективностью обладает вариант метода, когда шаг по каждой переменной определяется направляющими косинусами градиента

$x_j^{i+1}=x_j^i-h\cdot\cos\varphi_j,$ где $\cos\varphi_j=\frac{(df/dx_j)}{|gradf(x)|}.$

В этом случае величина рабочего шага не зависит от величины модуля градиента, и ею легче управлять изменением H. В районе оптимума может возникать значительное "рыскание", поэтому используют различные алгоритмы коррекции H.

Наибольшее распространение получили следующие алгоритмы:

1) $h^i=const=h$ (без коррекции);

2) $$h^i = \begin{cases} \dfrac{h^{i-1}}{2}, если \quad f(x^i) < f(x^{i-1}), \\ h^{i-1}, если \quad f(x^i) > f(x^{i-1}), \end{cases}$$

3) $$h^i = \begin{cases} h^{i-1}, если \quad \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2, \\ 2h^{i-1}, если \quad \alpha_1 > \alpha, \\ \dfrac{h^{i-1}}{3}, если \quad \alpha_2 < \alpha, \end{cases}$$

Где α - угол между градиентами на предыдущем и текущем шаге; α1 и α2 – заданные пороговые значения выбираются субъективно (например, α1=π/6, α2=π/3).

Вдали от оптимума направление градиента меняется мало, поэтому шаг можно увеличить (второе выражение), вблизи от оптимума направление резко меняется (угол между градиентами f(x) большой), поэтому h сокращается (третье выражение).

Для оценки частных производных используются разностные методы:

- алгоритм с центральной пробой

$$\frac{df}{dx_i} \approx \frac{f(x_1,\ldots,x_i+g_i,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{g_i};$$

- алгоритм с парными пробами

$$\frac{df}{dx_i} \approx \frac{f(x_1,\ldots,x_i+g_i,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_i-g_i,\ldots,x_n)}{g_i},$$

Где Gi – пробный шаг по I-й переменной, выбираемый достаточно малым для разностной оценки производной.

Первый алгоритм требует меньших затрат по сравнению со вторым (обычно затраты выражаются количеством вычислений критерия оптимальности), но позволяет получить решение менее точно, чем второй, и эта погрешность зависит от величины пробного шага.

Условием окончания поиска может являться малость модуля градиента F(X), т. е. |Gradf(X)| < ε.

Пример . Требуется найти минимум функции F(X, Y) = X3+2Y2-3X-4Y, завершив вычисления при погрешности ε = 0,01, выбрав начальное приближение X(0) = - 0,5 и У(0) = -1, коэффициент шага H = 0.1.

Решение. Необходимые начальные данные приведены в условии задачи. Для вычислений выберем работу с шагом Без коррекции (H = Const). Найдем частные производные функции: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4.$ Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 3(x^i)^2 - 3;\ \frac{\partial f}{\partial y^i} = 4y^i - 4.$

Значит, $\left|gradf(x^i, y^i)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)^2}.$ Переменные определяются по формулам: $x^{i+1} = x^i - h\cdot\frac{\partial f}{\partial x^i};\ y^{i+1} = y^i - h\cdot\frac{\partial f}{\partial y^i}.$ Результаты вычислений занесем в табл. 1

Таблица 1

X	Y	F(x, y)	Df/dx	Df/dy	|grad f|
2	3	4	5	6	7
-0,500	-1,000	7,3750	-2,2500	-8,0000	8,3104
-0,275	-0,200	1,6842	-2,7731	-4,8000	5,5435
0,002	0,280	-0,9701	-3,0000	-2,8800	4,1586
0,302	0,568	-2,5061	-2,7258	-1,7280	3,2274

	0,575	0,741	-3,4003	-2,0085	-1,0368	2,2603
	0,776	0,844	-3,8120	-1,1947	-0,6221	1,3469
	0,895	0,907	-3,9508	-0,5958	-0,3732	0,7031
	0,955	0,944	-3,9877	-0,2651	-0,2239	0,3471
	0,981	0,966	-3,9967	-0,1111	-0,1344	0,1744
0	0,992	0,980	-3,9990	-0,0453	-0,0806	0,0925
1	0,997	0,988	-3,9997	-0,0183	-0,0484	0,0517
2	0,999	0,993	-3,9999	-0,0073	-0,0290	0,0299
3	1,000	0,996	-4,0000	-0,0029	-0,0174	0,0177
4	1,000	0,997	-4,0000	-0,0012	-0,0104	0,0105
5	1,000	0,998	-4,0000	-0,0005	-0,0063	0,0063

В последней точке модуль градиента меньше заданной погрешности (0,0063 < 0.01), поэтому поиск прекращается.

Итак, $(x^*;y^*)\approx(1;0.998)$ и $f^*\approx-4$.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 ПЗ-1 Математическое моделирование в инженерных исследованиях. Основные этапы экспериментального исследования. Классификации методов исследования

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- основные тенденции в развитии науки и технологии; различные подходы к вопросам экологичности техники и технологии; динамику изменения научной парадигмы;
- этапы математического моделирования;
-допущения и ограничения при построении математических моделей;
-типовые математические модели и возможности их применения в инженерных исследованиях.

3.2 ПЗ-2 Факторы, методы отбора, общая характеристика, функция отклика. Планы факторного эксперимента

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- расчет свободного члена, коэффициентов при линейных факторах и эффектах взаимодействия в уравнении функции отклика;

- расчет и проверку значимости коэффициентов регрессии;
- расчет теоретического значения параметра оптимизации;
- проверку адекватности модели.

3.3 ПЗ-3 Теоретические основы стохастического описания и анализа особенностей процессов управления в технических системах

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- алгоритмы нахождения точечных и интервальных оценок параметров статистического распределения;
- основные понятия многомерного статистического анализа, теории корреляции, классификацией регрессий;
- алгоритмы нахождения условных законов и числовых характеристик многомерных случайных величин, вычисления коэффициента корреляции, детерминации, ковариации;
- нахождение уравнения регрессии, проверки его параметров на статистическую значимость.

3.4 ПЗ-4 Техника экспериментальных измерений. Основные положения теории погрешностей

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

- основные понятия теории экспериментальных измерений и теории погрешностей;
- методики определения статистических погрешностей;
- анализ полученных решений.