ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика**»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Математика

Направление подготовки (специальность) **27.03.04** *Управление в технических системах*

Профиль образовательной программы Системы и средства автоматизации технологических процессов

Форма обучения *очная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1. Лекция № 1 (2 часа)

Тема: «Матрицы»

1.1.1. 1. Вопросы лекции

1.Виды матриц.

2. Действия над матрицами.

3. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

1.1.2. Краткое содержание вопросов

1. Виды матриц.

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет две строки и два столбца, следовательно, её размер (2х2).

c_{ij}- элемент матрицы С, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце.

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то такая матрица называется **квадратной**.

Две матрицы одинакового размера называются **равными** ($A=B$), если равны их элементы, стоящие на соответствующих местах.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.**

Квадратная матрица называется **единичной**, если она имеет вид:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{3x3} \quad \text{или} \quad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{4x4}$$

Верхнетреугольной называется матрица, у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю.

2. Действия над матрицами.

С матрицами можно производить операции сложения (вычитания), умножения на число, умножения матрицы на матрицу, транспонирования, нахождения матрицы, обратной данной. Для иллюстрации операций будем рассматривать матрицы размера (3х3), если заранее не оговорен другой размер.

Суммой (**разностью**) двух матрицA и B называется матрица, определяемая равенством:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}_{3x3} \pm \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23}\\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33}\end{pmatrix}$$

Произведением числа *m* на матрицу *A*называется матрица, определяемая равенством:

$$m\bullet\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ma_{11} & ma_{12} & ma_{13}\\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23}\\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33}\end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц*A* и *B*обозначается символом $A\cdot B$ и определяется **равенством:**

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{j3}\\ \sum_{j=1}^{3}a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3}a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3}a_{2j}b_{j3}\\ \sum_{j=1}^{3}a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3}a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3}a_{3j}b_{j3}\end{pmatrix}$$

т.е. элемент матрицы - произведения стоящий в i-ой строке и k -м столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицыA и k-го столбца матрицы B.

Отсюда вытекает ограничение на размерность матрицA и B: число элементов в строке матрицы Aдолжно равняться числу элементов в столбце матрицы B, чтобыдля каждого элемента i-й строкиматрицы A нашелся парный элементиз k-го столбца B.

Пример. Найдите произведение матриц, если это возможно:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Так как число столбцов матрицыA совпадает с числом строк матрицы B, следовательно, их можно перемножить. Чтобы получить элемент c_{11}произведения, умножим первую строку матрицыA на первый столбец матрицы B. Далее, умножая первую строку A на второй столбец B, получим c_{12}**,** умножая первую строку A на третий столбец B, получим c_{13}.

В результате получится матрица С, состоящая из двух строк и трех столбцов:С= $\begin{pmatrix}7 & 12 & 6\\ 4 & 6 & 2\end{pmatrix}_{2x3}$.

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: AB не равно BA.

3. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

Рангом матрицы А называется наибольший из порядков миноров матрицы А, отличных от нуля. Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Алгоритм вычисления ранга матрицы:

матрица приводится к ступенчатому с помощью элементарных преобразований;

количество ненулевых строк в полученной матрице будет равно рангу первоначальной матрицы.

Свойства ранга матрицы:

ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров;

ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица нулевая;

ранг матрицы не изменится, если из нее вычеркнуть все нулевые строки и столбцы;

ранг матрицы не изменится при ее транспонировании;

элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга

1.2.Лекция 2. (2ч.)

Тема: «Определители».

1.2.1. Вопросы лекции

1.Определители второго порядка.

2. Способы вычисления определителя третьего порядка.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

4. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.

1.2. 2.Краткое содержание вопросов

1. Определители второго порядка.

Каждой квадратной матрицеA соответствует число − **определитель** данной матрицы Δ ($det\ A$).

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ −определитель второго порядка.

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ −определитель третьего порядка

Формула для вычисления определителя второго порядка:

$$\text{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21} \qquad (1)$$

Свойства определителей:

1. Определитель не изменяется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами,

2. При перестановки двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель с двумя одинаковыми сроками (столбцами) равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя; если все элементы какой-то строки или столбца равны 0, то и определитель равен 0.

5. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

2. Способы вычисления определителя третьего порядка.

Рассмотрим теперь матрицу размера (3 х 3), то есть имеющую 3 строки и 3 столбца

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

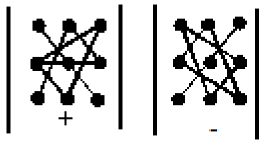
Её определителем (третьего порядка) называют число, обозначаема символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) берутся со знаком *«+»,* а какие со знаком«—», полезно использован следующее правило треугольников:



Это правило позволяет легко записать формулу (2) и вычислить данный определитель.

Все свойства определителей второго порядка остаются справедливыми для определителей третьего порядка и доказываются так же непосредственной проверкой.

3. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.

Для вычисления определителей любого порядка широко применяется теорема разложения определителя по элементам строки (столбца). Перед тем как рассмотреть теорему, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} некоторого элемента α_{ij} определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием 1 строки и] столбца Так минор, соответствующий элементу a_{12} есть определитель:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Он получается, если вычеркнуть первую строку и второй столбец.

Аналогично M_{13} получится вычеркиванием первой строки и третьего столбца.

Алгебраическим дополнениемA_{ij} элемента a_{ij}определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(— 1)^p$, где $p=i+j$.

Например, если элемент a_{12} находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него p=1+2=3 и алгебраическим дополнением является

$$A_{12}=(— 1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\,(a_{21} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{31})$$

Теорема о разложении определителя (Теорема Лапласа):

Определитель равен сумме произведений элементов любого столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е. $\Delta =$ $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$

(разложение по элементам 1-й строки; 1=1;2;..,;n);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; j=1;2;...;n);

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{21} + a_{13} + A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

4. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.

Определение: Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется обратной к матрице А, если выполняется условие $A^{-1}A=AA^{-1}=E$, где E - единичная матрица n-го порядка.

Матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю. Иначе матрица называется невырожденной

Теорема: Для того чтобы у матрицы А существовала обратная матрица, необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной .

Утверждение.Если обратная матрица существует, то она единственна.

Если квадратная матрица A является невырожденной, то обратная для нее

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

существует и (1) где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам a_{ij}.

1.3.Лекция 3. (2ч.)

Тема: «Системы линейных уравнений».

1.3.1. Вопросы лекции

1.Основные понятия.

2. Методы решения СЛУ.

3. Теорема Кронекера – Капелли.

1.3.2. Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия.

Рассмотрим систему из **m** линейных алгебраических уравнений с **n** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ .... \quad .... \quad .... \quad ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Решением этой системы будем называть совокупность **чисел** $(X_1;X_2;...X_n)$, которые после подстановки вместо неизвестных в уравнения системы, обратят каждое из этих уравнений в тождество. Система уравнений называется **совместной,** если она имеет хотя бы одно решение. **Система** называется **несовместной,** если она не имеет ни одного решения.

Система называется **определенной,** если она имеет только одно решение и **неопределенной,** если она имеет более одного решения.

Воспользуемся элементами теории определителей для решения описанных выше систем.

2. Методы решения СЛУ.

Решение систем методом Крамера:

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

Решая эту систему «школьными» методами, получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 & \left| \bullet\, a_{22} \right. \\ & \quad + \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 & \left| \bullet\, (-a_{12}) \right. \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = c_1a_{22} - c_2a_{12}$$

аналогично

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = c_2a_{11} - c_1a_{21}$$

1)Но:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

это определитель матрицы A(det A) или его еще называют определителем системы, и он составлен из коэффициентов при неизвестных. Обозначим его Δ.

2) $c_1 a_{22} - c_2 a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

определитель, который получается из det A, **если в** нем столбец коэффициентов при X_1 (первый столбец) заменить на столбец правых частей. Обозначим его Δx_1.

3) $c_2 a_{11} - c_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$

определитель, который получится, если в det A столбец коэффициентов при x_2 заменить на столбец правых частей. Обозначим его Δx_2

Покажите, что

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad a \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$$

Очевидно, если мы возьмемсистему трех уравнений с тремя неизвестными, или **m**уравнений с**n**неизвестными, то формулы останутся те же:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad a \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \ldots\ldots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

Эти формулы широко известны и называются **формулами Крамера.**

Рассмотрим три случая:

1. $\Delta \neq 0$ тогда $x_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta}$ - решение существует, причемединственное.

2. $\Delta = 0$ акакой-либо из $\Delta x_i \neq 0$, т.е. у нас в $x_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta}$ производиться деление на 0, система не имеет решения (*несовместна*).

3. $\Delta = 0$ и все $\Delta x_i = 0$, тогда система либо не имеет решения, либо имеет их бесконечно много и необходимо

дополнительные исследования.

Рассмотрим универсальный метод решения систем линейных уравнений - метод Гаусса. Рассмотрим его на простейшем примере, решая систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24 \\ -15x_1 + 4x_2 = -42 \end{cases}$$

Мы хотим исключить x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого мы должны прибавить ко второму уравнению первое, умноженное на (- 4), а к третьему прибавить первое, умноженное на *5*.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \quad \textit{ведущее уравнение} \quad (-4) \quad 5 \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24 \qquad\qquad \hookleftarrow \\ -15x_1 + 4x_2 = -42 \qquad\qquad\qquad \hookleftarrow \end{cases}$$

Получим систему равносильную исходной.

На втором шаге исключения мы не трогаем первое уравнение. Другие два уравнения содержат два неизвестных x_2 и x_3 и к ним можно применить ту же процедуру исключения. Для этого к третьему уравнению прибавляем первое, умноженное на 3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ -3x_1 + 17x_3 = -8 \quad 3 \\ -9x_2 - 25x_3 = -2 \end{cases}$$

Вновь получим систему равносильную исходной.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ \quad -3x_1 + 17x_3 = -8 \\ \qquad 26x_3 = -26 \end{cases}$$

Далее наши действия очевидны. Из третьего уравнения $x_3 = -1$, подставляя значения x_3 во второе уравнение, получаем $x_2 = -3$ и. наконец, из первого уравнения получаем $x_1= 2$.

Если в результате преобразований получим уравнение, в котором все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то полученное уравнение, а, следовательно, и вся система несовместны, если же свободный член равен нулю, то система является неопределенной.

Решение линейных систем с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим линейную систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ и введем следующие обозначения:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

Тогда систему можно записать в виде матричного уравнения: AX = B. Пусть матрица А – невырожденная, тогда существует обратная к ней матрица A^{-1}.

Умножим обе части равенства (3.1) слева на A^{-1}. Получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

Но $A^{-1}A = E$, тогда $EX = A^{-1}B$, а поскольку $EX = X, X = A^{-1}B$. (3.2)

Итак, решением матричного уравнения является произведение матрицы, обратной к А, на столбец свободных членов системы

3. Теорема Кронекера – Капелли.

Теорема Кронекера — Капелли — критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений: Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.

Следствия

Количество главных переменных системы равно рангу системы.

Совместная система будет определена (её решение единственно), если ранг системы равен числу всех её переменных.

1.4.Лекция 4. (2ч.)

Тема: «Векторы. Базис».

1.4.1. Вопросы лекции:

1.Виды векторов.

2. Линейные операции над векторами.

3. ПДСК. Базис. Координаты вектора.

1.4.2. Краткое содержание вопросов

1. Виды векторов.

На практике Вы встречаетесь с величинами двух типов: для задания одних достаточно **числа,** например, температура 1°=36,6, для задания других требуется указать и направление - например: сила или скорость. Величины первого типа называются **скалярными,** авторого **- векторными.**

Под вектором будем понимать направленный отрезок, который обозначим $\vec{a}$.

Вектор обычно обозначается символом $\overrightarrow{AB}$, где А – начало, а В – конец направленного отрезка, либо одной буквой $\vec{a}$(в некоторых учебниках буква выделяется полужирным шрифтом; при этом стрелка опускается а). На чертеже вектор изображается стрелкой. Начало вектора называют точкой его приложения.

Определение: Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной. Для обозначения длины вектора (его абсолютной величины) пользуются символом модуля. Так $\left|\overrightarrow{AB}\right|$и $|\vec{a}|$обозначают длины соответствующих векторов.

Определение: Вектор единичной длины называют ортом.

Определение: К векторам будем относить и так называемый нулевой вектор, у которого начало и конец совпадают. Считается, что нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину равную нулю. Это позволяет обозначать нулевой вектор вещественным числом 0 (нуль).

Определение: Векторы расположенные либо на одной прямой, либо на параллельных прямых называются коллинеарными. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Среди коллинеарных векторов различают одинаково направленные (сонаправленные) и противоположно направленные векторы. Векторы называются компланарными, если они лежат либо на одной плоскости, либо на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

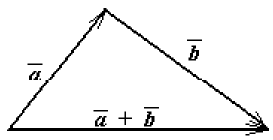
Определение: Два вектора называются равными, если они: 1) коллинеарны; 2) равны по длине; 3) одинаково направлены.

Следствие: Для любого вектора $\vec{a}$и для любой точки А, существует, и притом единственная, точка В такая, что $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

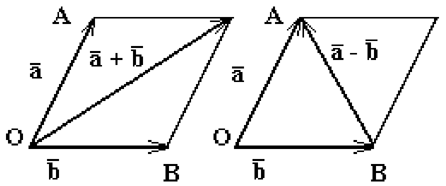
Мы не будем различать двух равных векторов, имеющих разные точки приложения. Такие векторы называются свободными.

2. Линейные операции над векторами.

Определение: ***Суммой***$\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов и называется вектор, имеющий начало в начале вектора $\vec{a}$, а конец – в конце вектора $\vec{b}$, при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.В соответствии с определением слагаемые $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и их сумма $\vec{a}+\vec{b}$ образуют треугольник. Поэтому данное правило сложения двух векторов называют «правилом треугольника».



Замечание: Существует еще одно правило сложения векторов, называемое «правилом параллелограмма»: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ прикладываются к общему началуO, и на них строится параллелограмм (рис. 4). Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ будет вектор $\overline{OC}$, расположенный на диагонали параллелограмма. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ здесь будет вектор $\overline{BA}$, расположенный на второй диагонали.



Операция сложения векторов обладает свойствами:

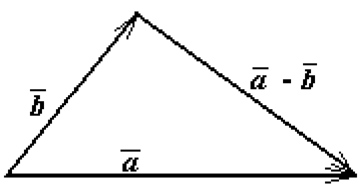
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность);

2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} = \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$, (ассоциативность);

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$ (особая роль нулевого вектора);

4.для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор $\vec{a}_1$такой, что $\vec{a}+\vec{a}_1=0$ (для получения $\vec{a}_1$достаточно поменять местами начало и конец вектора $\vec{a}$).

Вектор противоположный вектору $\vec{a}$ обозначают $(-\vec{a})$.



Определение: Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма вектора $\vec{a}$ и вектора противоположного вектору $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Разность $\vec{a}-\vec{b}$ получается из вектора $\vec{a}$ сдвигом его начала в конец вектора $\vec{b}$, при условии, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общее начало (рис.3). Очевидно, что $\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=0$ для любого вектора $\vec{a}$.

Определение: ***Произведением*** $\lambda\vec{a}$ ***вектора*** $\vec{a}$ ***на вещественное число*** **λ** (скаляр) называется вектор $\vec{b}$, такой, что 1) $|\vec{b}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$; 2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$; 3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое (противоположное) направление, если $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$).

Замечание: В случае, когда $\lambda = 0$ или $\vec{a}=0$ произведение $\lambda\vec{a}$ является нулевым вектором. Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (ассоциативное свойство сомножителей);

$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

2. $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (свойства дистрибутивности).

3. ПДСК. Базис. Координаты вектора.

Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$ называются линейно независимыми, если

$\lambda_1\cdot\vec{a}_1+\lambda_2\cdot\vec{a}_2-...+\lambda_k\cdot\vec{a}_k=\vec{0}$

равенство возможно лишь при $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k=0$, где $\bar{0}$ - вектор, все координаты которого равны нулю.

Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ не все одновременно равные нулю, для которых имеет место равенство

$\lambda_1\cdot\vec{a}_1+\lambda_2\cdot\vec{a}_2+...+\lambda_k\cdot\vec{a}_k=\vec{0}$.

Пусть $\lambda_1\neq 0$. Тогда, разделив это равенство на λ_1, и перенеся все векторы, кроме $\vec{a}_1$, в правую часть, получим: $\vec{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a}_3-...-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{a}_k$

и, если обозначить отношение $-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}=\mu_i$ то $\vec{a}_1=\mu_2\vec{a}_2+...+\mu_k\vec{a}_k$

Это выражение и называется **линейной** комбинацией векторов.

Итак, мы пришли к выводу, что если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных и наоборот, если один из векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов, то все эти векторы линейно зависимы.

Отметим, что любые три (или больше) вектора на плоскости линейно зависимы. Максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум. При этом не любые два вектора на плоскости будут линейно независимы. Так в случае коллинеарностивекторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ является линейной комбинацией $\vec{a}$ и, следовательно, они линейно зависимы.

Аналогично в трехмерном пространстве максимальное число линейно независимых векторов равно 3.

Введем понятие базиса на плоскости и в пространстве.

Базисом на плоскости называются любые два линейно независимых вектора.

Таким образом, если любые два вектора плоскости $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны, то они образуют базис, а любой вектор $\vec{a}$ уже не может быть линейно независим от них, следовательно, является их линейной комбинацией:

$\vec{a}=\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{c}$, где числа λ_1 *и* λ_2 координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Аналогично, в трехмерном пространстве, базисом называются любые три линейно независимых вектора.

Орты $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ не компланарны, образуют базис, который называется **ортонормированным базисом или декартовой системой координат впространстве.**

1.5.Лекция 5. (2ч.)

Тема «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов».

1.5.1.Вопросы лекции:

1.Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.

2. Векторное произведение векторов, его свойства, приложения.

3. Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения.

1.5.2.Краткое содержание вопросов

1. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла γ между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma$ и обозначается $(\vec{a},\vec{b})$

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, *или* $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ *если* $\vec{a}=0,$ *или* $\vec{b}=0,$ *либо* $\vec{a}\perp\vec{b}$ (ортогональность двух ненулевых векторов)

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон)

4. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон)

5. $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю)

Скалярные произведения ортов осей координат:

$\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1 \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

Пусть векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k} \qquad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$

Тогда скалярное произведение этих векторов определяется формулой:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Используя скалярное произведение векторов, можно найти угол между ними:

$$\cos\gamma=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)}}$$

Некоторые приложения скалярного произведения

Угол между векторами

Определение угла φ между ненулевыми векторами $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$и $\vec{b}$=(b_x; b_y; b_z):

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|},\quad \text{т. е.}\quad \cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\bar{a}\perp\bar{b}\iff a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора$\vec{a}$на направление, заданное векторомb, может осуществляться по формуле

$$\text{пр}_{\bar b}\,\bar a = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar b|} \quad \left(\text{пр}_{\bar a}\,\bar b = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar a|}\right), \qquad \text{т. е.} \qquad \text{пр}_{\bar b}\,\bar a = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Работа постоянной силы

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения А в положение В под действием постоянной силы $\vec{F}$, образующей угол j с перемещением $\overline{\text{AB}}= \vec{S}$

Рис. 15.

Из физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{S}$равна

$$\text{A} = \overrightarrow{|F|} \bullet |\vec{S}| \bullet cosj\text{т. е.}\, \text{A} = (\vec{F} \bullet \vec{S}).$$

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на **вектор** перемещения.

2. Векторное произведение векторов, его свойства, приложения.

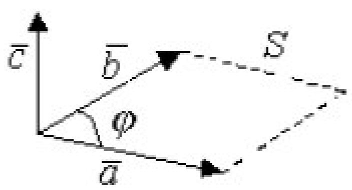
Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом:

- модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ ($|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$);

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$;

- векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение $\vec{a}$ на$\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ *или* $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$



Свойства векторного произведения:

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$, т.е. векторное произведение не обладает переместительным свойством;

2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0,\ \text{если}\ \vec{a} = 0,\ \text{или}\ \vec{b} = 0,\ \text{либо}\ \vec{a} \parallel \vec{b}$ (коллинеарность нулевых векторов);

3. $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю;

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ распределительное свойство;

Векторные произведения ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$

Векторное произведение векторов

$\vec{a} = x_1 \times \vec{i} + y_1 \times \vec{j} + z_1 \times \vec{k}$ $\qquad$ $\vec{b} = x_2 \times \vec{i} + y_2 \times \vec{j} + z_2 \times \vec{k}$

удобнее всего находить по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Приложение векторного произведения.

Площадь параллелограмма равна произведению смежных сторон на синус угла между ними. Поэтому, исходя из вышесказанного, справедлива формула вычисления ДЛИНЫ векторного произведения:

$$|\overline{N}| = |[\overline{a} \times \overline{b}]| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin \angle(\overline{a}; \overline{b})$$

Площадь параллелограмма часто находят через понятие векторного произведения:

$$S_{п-грамма} = |\overline{N}| = |[\overline{a} \times \overline{b}]| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin \angle(\overline{a}; \overline{b})$$

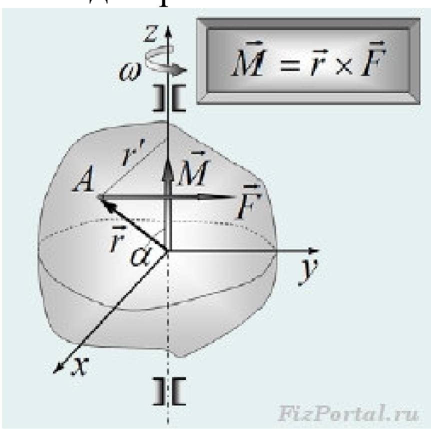
Получим вторую важную формулу. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника. Следовательно, площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно найти по формуле:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{N}| = \frac{1}{2} \cdot |[\overline{a} \times \overline{b}]| = \frac{1}{2} |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin \angle(\overline{a}; \overline{b})$$

Вектор момента силы − векторное произведение.

Рассмотрим теперь понятие вектора момента силы. Ранее мы определили момент силы, как произведение момента силы на ее плечо. Покажем, что момент силы может быть описан как вектор и представлен в виде векторного произведения.

Пусть произвольное твердое тело может вращаться вокруг фиксированной оси, с которой совместим ось **Oz** декартовой системы координат



Пусть сила **F** приложена к точке **A**, расположенной в плоскости **xOy**, на расстоянии **r**$^{/}$ от оси вращения (положение этой точки задается радиус-вектором **r**) и направлена перпендикулярно плоскости **xOy** (следовательно, и перпендикулярно оси вращения). Действие этой силы приведет к вращению тела вокруг оси, которое может быть описано вектором угловой скорости **ω**, направленным вдоль этой же оси. Разумно определить вектор момента силы так, чтобы он был направлен тоже вдоль оси вращения. В нашем случае модуль вектора момента силы равен произведению

$$M = r^{/}F = rF\sin\alpha \,,$$

можно заметить, «правильное» направление этого вектора будет задано, если определить его как векторное произведение

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \,. \quad (5)$$

Эта формула дает самое строгое определение вектора момента силы.

3. Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:
- хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю;
- перемножаемые векторы коллинеарны;
- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - компланарны.

2. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного (×) и скалярного (•) умножения, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ условимся записывать в виде $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

3. Смешанное произведение не изменится, если переставлять перемножаемые векторы местами, следующим образом $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$.

4. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак: $\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$; $\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$; $\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Пусть векторы заданы их разложениями по ортам:

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$

Тогда: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Из свойств смешанного произведения трех векторов вытекает следующее:

- необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$

- Объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и объем V_2 образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам:

$$V_1 = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| \qquad\qquad V_2 = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$$

1.6.Лекция 6. (2ч.)

Тема «Прямая линия на плоскости».

1.6.1. Вопросы лекции:

1.Способы задания прямой.

2. Взаимное расположение двух прямых.

1.6.2. Краткое содержание вопросов

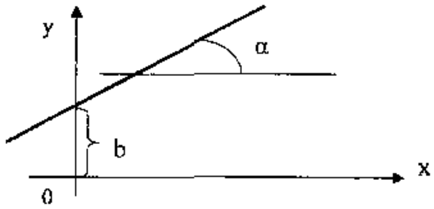
1. Способы задания прямой.

Любое уравнение первой степени относительно неизвестных Хи У является уравнением прямой на плоскости: *Ax+By+C=0*

Мы записали **общее** уравнение прямой. Это уравнение может быть записано в некоторых специальных видах:

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

y=kx+b, где $k=tg\alpha$, *b*- отрезок, отсекаемый графиком на ОУ



2)уравнение прямой проходящей через две заданные точки

$(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

3) Уравнение прямой проходящей через заданную точку в заданном направлении:

точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит прямой l, $\vec{a}=(m;n)$- направляющий вектор прямой, т.е. вектор, лежащий на данной прямой или на параллельной ей прямой

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ **каноническое уравнение прямой**

2. Взаимное расположение двух прямых.

Признакомпараллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов $k_1=k_2$

Признаком перпендикулярности двух прямых является выполнение соотношения: $k_1k_2=-1$ *или* $k_2=\frac{1}{k_1}$.

Пусть уравнения прямых записаны в общем виде.

Теорема. Пусть

$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

– общие уравнения двух прямых на координатной плоскости Оху. Тогда

1) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 совпадают;

2) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 параллельные;

3) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются.

Заметим, что если прямые пересекаются, то для нахождения координат их точки пересечения достаточно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Следствие. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ – определитель системы . Если $\Delta \neq 0$, то прямые пересекаются в одной точке и система имеет единственное решение

Если $\Delta = 0$, то прямые или параллельны и тогда система не имеет решений, или прямые совпадают и тогда система имеет бесконечно много решений.

Итак, в декартовых координатах каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени, и каждое уравнение первой степени определяет прямую на плоскости.

1.7.Лекция 7. (2ч.)

Тема: «Кривые второго порядка».

1.7.1. Вопросы лекции

1.Окружность.

2. Эллипс.

3. Гипербола.

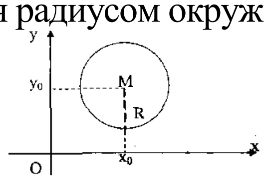
4. Парабола.

1.7.2.Краткое содержание вопросов

3.1Окружность.

Кривые второго порядка - это линии на плоскости, координаты точек которых связаны уравнениями второй степени относительно х и ув декартовой системе координат. Рассмотрим следующие виды кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность - это совокупность точек на плоскости, равноудаленных от одной фиксированной точки (центра). Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра называется радиусом окружности.

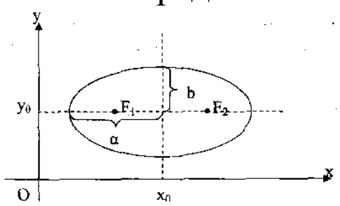


Каноническое уравнение окружности имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,\ \ где\ \ M(x_0,y_0)$-центр окружности, R –радиус.

2. Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов примято обозначать через 2а. Фокусы эллипса обозначают буквами $F_1\ и\ F_2$, расстояние между ними - через 2с. По определению эллипса 2а >2с или а > с.



Данная фигура обладает двумя осями симметрии и центром симметрии.

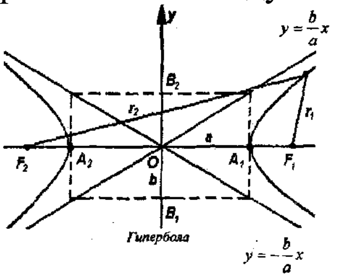
Если фокусы ($F_1\ и\ F_2$) расположенные на прямой, параллельной оси ОХ, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$- центр эллипса, $a\ и\ b$- большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса $F_1\ и\ F_2$расположены в точках, удаленных на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от центра эллипса. Отношение $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается ε.

3. Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается обычно через 2a. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 расстояние между ними - через 2c. По определению гиперболы 2a <2c или a < c.



Данная фигура также обладает двумя осями симметрии и центром. Если фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$- центр гиперболы, a и b - действительная и мнимая полуось.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

4. Парабола.

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

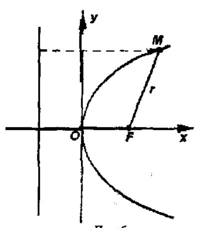
Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой p. Число p называется параметром параболы.

Фигура обладает осью симметрии. Если директриса параболы перпендикулярна Ox (Ox - ось симметрии), то уравнение параболы имеет вид:

$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, где p - расстояние от фокуса до директрисы, точка (x_0; y_0) - вершина параболы. Уравнение директрисы: $x=x_0-\frac{p}{2}$.

Фокус в точке $F\left(x_0+\frac{p}{2};y_0\right)$.

Если Oy - ось симметрии, то уравнение параболы имеет вид: $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$. Уравнение директрисы: $y=y_0-\frac{p}{2}$. Фокус в точке $F\left(x_0;y_0+\frac{p}{2}\right)$.



1.8.Лекция 8. (2ч.)

Тема: «Плоскость в пространстве»

1.8.1. Вопросы лекции

1.Способы задания плоскости в пространстве.

2. Взаимное расположение плоскостей.

1.8.2.Краткое содержание вопросов

1. Способы задания плоскости в пространстве.

В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени относительно x,y,z и каждое такое уравнение определяет плоскость.

Ax+By+Cz+D=0 - общее уравнение плоскости.

Пусть точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - фиксированная точка плоскости, а точка M(x;y;z) - текущая точка плоскости,

$\overline{M_0M}$ - вектор, лежащий в описываемой плоскости

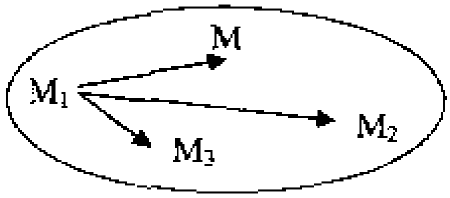
$\vec{n}=(A;B;C)$ - вектор, перпендикулярный данной плоскости.

Следовательно, $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$. Рассмотрим скалярное произведение этих векторов:

$A(x-x_0)+b(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - каноническое уравнение плоскости.

Составим теперь уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z\ )$

Пусть точка M(x;y;z) - текущая точка плоскости. Рассмотрим три вектора $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$,которые лежат в одной плоскости и, следовательно, являются компланарными. Воспользуемся условием компланарности векторов:



:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Полученное равенство определяет уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Неполные уравнения плоскости.

Если хотя бы одно из чисел*A, B, C, D* равно нулю, уравнение (8.2) называют неполным.

Рассмотрим возможные виды неполных уравнений:

1) $D = 0$ – плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.

2) $A = 0$ – $\boldsymbol{n} = \{0,B,C\} \perp Ox$, следовательно, плоскость $By + Cz + D= 0$ параллельна оси*Ox*.

3) $B = 0$ – плоскость $Ax + Cz +D = 0$ параллельна оси *Oy*.

4) $C = 0$ – плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси *Oz*.

5) $A = B = 0$ – плоскость $Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости *Oxy* (так как она параллельна осям*Ox* и *Oy*).

6) $A = C = 0$ – плоскость $By + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxz.

7) $B = C = 0$ – плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oyz.

8) $A = D = 0$ – плоскость $By + Cz = 0$ проходит через осьOx.

9) $B = D = 0$ – плоскость$Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy.

10) $C = D = 0$ - плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz.

11) $A = B = D = 0$ – уравнение $Cz = 0$ задает координатную плоскость Oxy.

12) $A = C = D = 0$ – получаем $By = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz.

13) $B = C = D = 0$ – плоскость$Ax = 0$ является координатной плоскостью Oyz.

2. Взаимное расположение плоскостей.

1) пересекаются $\Leftrightarrow \bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2;$

2) параллельны (но не совпадают) $\Leftrightarrow \bar{n}_1 = \lambda\bar{n}_2 \quad (\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2), \quad D_1 \neq \lambda D_2;$

3) совпадают $\Leftrightarrow \bar{n}_1 = \lambda\bar{n}_2, \quad D_1 = \lambda D_2.$

Если плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ то случаи 1 - 3 имеют место, когда:

1) $\neg\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\right);$

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$

3) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$

Угол между плоскостями

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}\right) = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

1.9.Лекция 9. (2ч)

Тема: «Прямая в пространстве».

1.9.1. Вопросы лекции

1.Способы задания прямой в пространстве.

2. Взаимное расположение прямой и плоскости.

3. Понятие поверхности в пространстве.

1.9.2.Краткое содержание вопросов

1. Способы задания прямой в пространстве.

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей. Так как точка прямой принадлежит каждой из плоскостей, то ее координаты обязаны удовлетворять уравнениям обеих плоскостей, то есть удовлетворять системе из двух уравнений.

Итак, если уравнения двух непараллельных плоскостей -- $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то прямая, являющаяся их линией пересечения, задается системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

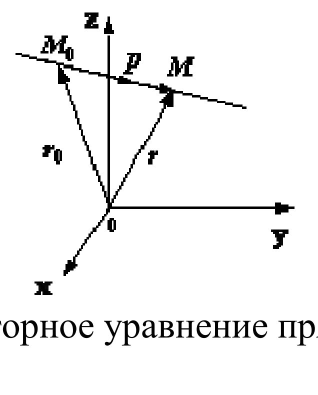
И наоборот, точки, удовлетворяющие такой системе уравнений, образуют прямую, являющуюся линией пересечения плоскостей, чьи уравнения образуют эту систему.

Уравнения называют общими уравнениями прямой в пространстве.

Можно задать прямую в пространстве и другим способом.

Ненулевой вектор, лежащий на прямой (параллельный ей) называется направляющим вектором прямой.

Пусть для прямой γ известны ее направляющий вектор $\mathbf{p}=(k;l;m)$ и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, лежащая на этой прямой. Пусть $M(x;y;z)$ -- произвольная (текущая) точка прямой γ. Обозначим через $\mathbf{r}_0$ и **r** радиус-векторы точек M_0 и M соответственно



.Векторное уравнение прямой

Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору **p** и, следовательно, $\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{p}$, где t -- некоторое число. Из рис. видно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{p}.$$

Это уравнение называется векторным уравнением прямой или уравнением в векторной форме. При каждом значении параметра t мы будем получать новую точку M на прямой γ.

Замечание Если в качестве параметра t взять время, то точка M будет двигаться по прямой со скоростью $|\mathbf{p}|$, причем в момент времени $t = 0$ ее положение совпадает с точкой M_0. Вектор скорости точки совпадает с вектором **p**.

От векторного соотношения перейдем к соотношениям координат. Так как $(x;y;z)$ -- координаты точки M, то $\mathbf{r} = (x;y;z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0;y_0;z_0)$, $t\mathbf{p} = (tk;tl;tm)$. Из формулы получим

$$\begin{cases} x = kt + x_0, \\ y = lt + y_0, \\ z = mt + z_0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений называется параметрическими уравнениями прямой.

Обратим внимание на то, что по параметрическим уравнениям легко установить направляющий вектор прямой и координаты одной из ее точек. Коэффициенты перед параметром t дают координаты направляющего вектора, а свободные члены в правой части -- координаты точки на прямой.

Так как направляющий вектор прямой определяется с точностью до умножения на число, отличное от нуля, а в качестве точки M_0 можно взять любую точку прямой, то одна и та же прямая может задаваться бесконечным множеством систем параметрических уравнений. Причем разные системы могут быть не похожими друг на друга.

Из уравнений выразим параметр t:

$$t = \frac{x - x_0}{k}, \quad t = \frac{y - y_0}{l}, \quad t = \frac{z - z_0}{m}.$$

Так как во всех трех соотношениях параметр t имеет одно и то же значение, то

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Эти уравнения называются каноническими[1] уравнениями прямой.

Замечание В канонических уравнениях прямой допускается в знаменателе писать 0. Это не означает, что можно выполнить деление на 0. Просто из канонических уравнений мы получаем информацию о том, что направляющий вектор прямой имеет координаты k, l, m, из которых одна нулевая.

2. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами. Поэтому, если две прямые заданы каноническими уравнениями вида

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$ и $$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$ косинус угла между ними можно найти по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к соответствующим условиям для их направляющих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$ - **условие параллельности прямых**,

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$ - **условие перпендикулярности прямых**,

Угол φ между прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$ и плоскостью, определяемой общим уравнением

$Ax + By + Cz + D = 0$, можно рассматривать как дополнительный к углу ψ между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Тогда

$$\sin\varphi=\cos\psi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

У**словием параллельности прямой и плоскости** является при этом условие перпендикулярности векторов ***n*** и ***a****:*

$Al + Bm + Cn= 0$, а **условием перпендикулярности прямой и плоскости** – условие параллельности этих векторов: $A/l = B/m = C/n$.

3. Понятие поверхности в пространстве.

Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z - их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z)=0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются **текущими координатами** точек поверхности.

1.10.Лекция 10. (2ч.)

Тема: «Функция».

1.10.1. Вопросы лекции

1.Основные понятия.

2. Способы задания функции.

3. Основные свойства функции.

4. Неэлементарные функции.

1.10.2Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия.

Множество действительных чисел *x*, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$, называется **отрезком** и обозначается [*a;b*].

Множество действительных чисел *x*, удовлетворяющих неравенству $a<x<b$, называется **интервалом** и обозначается *(a; b).*

Интервал $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ называется ε **- окрестностью точки *x*.**

Тогда ε - окрестностью $+\infty$ называется $(\varepsilon;+\infty)$; ε- окрестностью $-\infty$ называется $(-\infty; -\varepsilon)$; ε - окрестностью ∞ называется $(-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon;+\infty)$.

Величины в математике делятся на постоянные и переменные.

Постояннойназывается величина, которая в условиях данного эксперимента сохраняет одно и то же значение.

Примерами таких величин могут быть: t° кипения воды при постоянном давлении; длина *R* одной и той же окружности.

Некоторые постоянные величины сохраняют свое значение при любых условиях, то есть являются **абсолютно постоянными**. Например, сумма внутренних углов в треугольнике или число секунд в минуте.

Переменнойназывается величина, которая в условиях данного эксперимента может принимать различные значения.

В практических задачах часто имеют дело с переменными величинами, которые связаны между собой так, что значение одной величины однозначно определяет значение другой. Например, $V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Рассмотрим две переменные величины *x* и *y* и пусть *y* зависит от *x*.

Зависимость *y* от *x,*при которой каждому значению переменной *x* соответствует единственное, вполне определенное, значение переменной *y*, называется **функциональной.**

Правило или закон, по которому осуществляется функциональная зависимость *y* от *x*, называется **функцией.**

Обозначение*:* *y=f(x)* (*y* есть функция от *x),* где *x* - независимая переменная или аргумент;*y* - зависимая от *x* переменная.

В примере с объемом шара объем есть функция радиуса: *V=f(R).*

Совокупность всех значений аргумента *x*, при которых функциональное выражение имеет смысл, называется **областью определения функции.**Обозначение: *D(y)* или *Df*

2. Способы задания функции.

Имеется несколько способов задания функций, но наиболее часто используются следующие: 1)аналитический; 2)табличный; 3)графический.

Графиком функции $y=f(x)$ называется линия на плоскости *XOY*, состоящая из точек, у которых абсцисса есть значение аргумента, а ордината соответствует значению функции.

3. Основные свойства функции.

Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = - f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется *ограниченной*, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leq M$ для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - *неограниченная*.

Периодичность функции.

Функция $f(x)$ - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: $f(x+T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

4. Неэлементарные функции.

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, называются **элементарными**.

Элементарные функции - класс функций, включающий в себя многочлены, рациональные функции, показательные, степенные, логарифмические и тригонометрические функции, а также функции, получаемые из перечисленных с помощью четырёх арифметический действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и суперпозиции (образования сложной функции), применённых конечное число раз, эти действия называются элементарными алгебраическими. Элементарные функции могут быть простыми и сложными. Понятие сложной функции рассмотрим далее.

Действия: логарифмирование, возведение в степень с иррациональным показателем, вычисление синусов, косинусов, тангенсов, котангенсов, секансов, косекансов, арксинусов, арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов, арксекансов, арккосекансов, - называются трансцендентными элементарными действиями.

Если функцию можно задать формулой, содержащей элементарные действия, в состав которых входят алгебраические и трансцендентные действия, то её называют трансцендентной функцией (в переводе - "превосходящей", а именно превосходящей силу алгебраических операций).

Другое определение трансцендентной функции: функция y=f(x) называется трансцендентной, если она не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению вида P(x,y)=0, где P(x,y) - многочлен относительно переменных x и y.

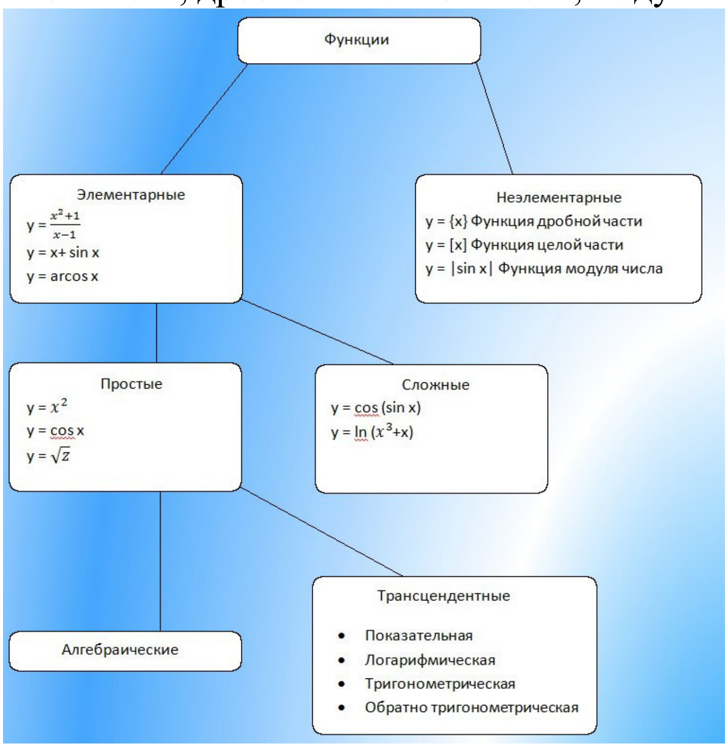
Трансцендентная функция может быть простейшей трансцендентной функцией, график которой известен, например: y = sin x, y = lnX, y = arccos x

Таким образом, к простейшим трансцендентным функциям относятся:

- Показательная функция
- Логарифмическая функция
- Степенная функция с иррациональным показателем
- Тригонометрическая функция
- Обратнотригонометрическая функция

Если функцию можно задать формулой, не содержащей трансцендентные действия, её называют алгебраической функцией.

К неэлементарным функциям относят функции, содержащие неэлементарные действия, к таким действиям относятся действия взятия целой части от числа, дробной части от числа, модуля числа и другие



1.11.Лекция 11. (2ч)

Тема: «Предел последовательности и предел функции».

1.11.1.1. Вопросы лекции

1.Понятие последовательности.

2. Предел числовой последовательности.

3. Предел функции в точке.

1.11.2.Краткое содержание вопросов

1. Понятие последовательности.

Числовой последовательностьюназываются значения функции натурального аргумента, взятые в порядке возрастания аргумента.

Введемобозначения:(x_n) -числовая последовательность;x_n - общий член числовой последовательности.

Пример. а) (x_n):-1; 1; -1; 1 ... ; $x_n=(-1)^n$; б) $(y_n)=1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n};...$ $\quad y_n=?$;

в) $(z_n)=1;0;\frac{1}{3};0;\frac{1}{5};0;...$ $\quad z_n-?$

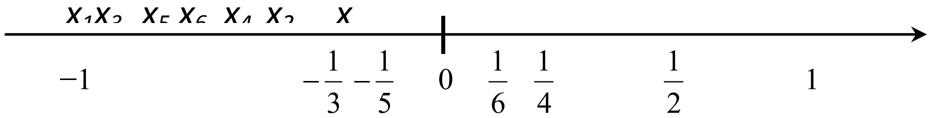
Числовую последовательность можно задать **формулойобщего члена:**

$$x_n=(-1)^n \quad ; \quad y_n=\frac{1}{n} \quad ; z_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, если\, n-нечетное\\ 0, если\, n-четное\end{cases}$$

2. Предел числовой последовательности.

Рассмотрим последовательность: $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ $\quad (x_n):-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};.-\frac{1}{5};...$

Изобразим члены последовательности точками на числовой оси:

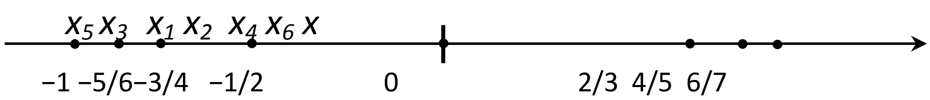


последовательности приближаются, “стремятся” к нулю. Число 0 является пределом (*limit*) данной последовательности. Коротко можно записать так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Рассмотрим другую последовательность:

$y_n=(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}$ $\quad (y_n):-\frac{1}{2};\frac{2}{3};-\frac{3}{4};.\frac{4}{5};-\frac{5}{6}:\frac{6}{7}...$

Сделаем соответствующий рисунок:



Члены последовательности с четными номерами приближается к 1, с нечетными - к(-1). Такая последовательность предела не имеет.

Число a называется **пределом числовой последовательностям**(x_n), если какую бы малую окрестность точки a мы не взяли, все члены последовательности, начиная с некоторого номера, попадут в эту окрестность (иначе: за границами окрестности останется лишь конечное число членов последовательности). $x_n \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Если последовательность имеет предел, она называется **сходящейся**если предел не существует или он равен бесконечности, последовательность называется **расходящейся.**

Выше приведены примеры сходящейся и расходящейся последовательностей.

Можно доказать, что сходящаяся последовательность всегда имеет единственный предел.

3. Предел функции в точке.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$.Придавая переменной x различные значения, получим $x_1; x_2; x_3;...x_n$...- последовательность значений аргумента. Ей соответствует: $f(x_1);f(x_2);\ f(x_3);\ ...;\ f(x_n);...$ - последовательность соответствующих значений функции.

Если из того, что любая последовательность значений аргумента, взятая из области определения функции и ε-окрестности точки x_0 ($x_n \neq x_0$) сходится к x_0 ($x \to x_0$) следует, что последовательность соответствующих значений функции сходится к числуA ($f(x) \to A$), то число A называется **пределом функции $f(x)$ в точке x_0.**

Обозначение: $\lim\limits_{n\to x_0} f(x) = A$.

При вычислении пределов функций обычно пользуются следующими основными **теоремами о пределах**:

если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)$ существуют и конечны, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, где $c=const.$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) \neq 0$

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к **неопределенностям**.

Например, зная лишь, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = \infty$ нельзя сказать заранее, чему равен $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. В таком случае говорят, чтоимеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

1.12.Лекция 12. (2ч)

Тема: «Правила раскрытия неопределенностей».

1.11.Вопросы лекции

1. Бесконечно малые функции, их свойства.
2. Бесконечно большие функции, их свойства.
3. Замечательные пределы.

1.12. Краткое содержание вопросов

1. Бесконечно малые функции, их свойства.

Если переменная величина x_n имеет своим пределом нуль $\lim x_n = 0$, то она называется бесконечно малой. Это же определение можно высказать и в другой формулировке:

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to a$, если для каждого положительного сколь угодно малого числа ε найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to \infty$, если для каждого положительного сколь угодно малого числа ε найдется сколь угодно большое положительное число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < N$ будет выполняться неравенство $|f(x)| < \varepsilon$

Ни одно число, кроме нуля, не может быть отнесено к бесконечно малым величинам.

2. Алгебраическая сумма нескольких бесконечно малых величин есть также величина бесконечно малая.

Алгебраической суммой называется такая сумма, члены которой присоединяются друг к другу не только при помощи знака плюс, но и при помощи знака минус.

3. Разность двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

4. Произведение ограниченной переменной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Отсюда следует:

а) Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

б) Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

в) Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

5. Отношение двух бесконечно малых величин не обязательно есть величина бесконечно малая.

Отношение двух бесконечно малых величин может быть величиной конечной, бесконечно малой и даже бесконечно большой величиной.

Об отношении двух бесконечно малых величин иногда говорят, что оно представляет собой "неопределенность" вида $\frac{0}{0}$.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых часто называется также раскрытием "неопределенности" вида $\frac{0}{0}$.

2. Бесконечно большие функции, их свойства.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to a$, если для каждого положительного сколь угодно большого числа N найдется соответствующее сколь угодно малое положительное число $y = f(x)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > N$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to \infty$, если для каждого положительного сколь угодно большого числа Nнайдется соответствующее сколь угодно большое число K(N) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > N$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Сумма бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая: $\lim\limits_{x\to a} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \infty$.

Произведение бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая: $\lim\limits_{x\to a} (\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \infty$.

Произведение бесконечно большой величины на константу*C*, или на функцию, имеющую конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f_3(x) = A$, есть величина бесконечно большая: $\lim\limits_{x\to a} C\varphi_1(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to a} \varphi_1(x) \cdot f_3(x) = \infty.$

Связь бесконечно малой и бесконечно большой величины

Величина, обратная бесконечно малой величине, есть величина бесконечно большая, и наоборот, величина, обратная бесконечно большой величине, есть величина бесконечно малая.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, тогда $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0$.

Символически можно записать:

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}} = \boldsymbol{\infty}$ и $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\infty}} = \mathbf{0}$

3. Замечательные пределы.

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x \to \infty$);

3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;

4) применение первого замечательного предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и второго замечательного предела $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Кроме того, при вычислении пределов полезно запомнить следующее:

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, т.е. $\left(\frac{c}{\infty}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, т.е. $\left(\frac{c}{0}\right) = \infty$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = c$, т.е. $\left(\frac{0}{c}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = c$, т.е. $\left(\frac{\infty}{c}\right) = \infty$

Может также понадобится таблица бесконечно малых в окрестности x_0 функций, эквивалентных данным.

$$\left.\begin{array}{l} tgmx \sim mx \\ sain\ mx \sim mx \\ \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x \\ arctg\ mx \sim mx \\ \sqrt{x+1} - 1 \sim \frac{x}{2} \\ 1 - cos^2 x \sim \frac{3}{2} sin^2 x \\ arcsin\ mx \sim mx \\ 1 - cos\ x \sim \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} при \quad x \to 0$$

1.13.Лекция 13. (2ч)

Тема: «Непрерывность функции.»

1.7.1. Вопросы лекции

1.Односторонние пределы.

2. Непрерывность функции в точке.

3. Точки разрыва.

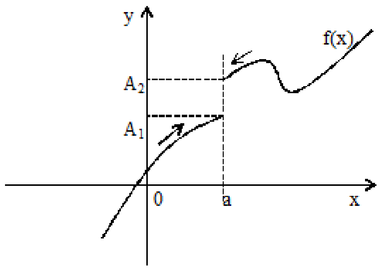
4. Асимптоты графика функции.

1.13.2. Краткое содержание вопросов

1. Односторонние пределы.

Определение. Если f(x) $\to A_1$ при x $\to$ a только при x<a, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если f(x) $\to A_2$ при x $\to$ a только при x>a, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.



Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a.

2. Непрерывность функции в точке.

Определение. Пусть переменная величина x в некоторый начальный момент равна x_0, в другой (конечный) момент равна x_1; тогда разность $\Delta x = x_1 - x_0$ называется приращением переменной x.

Определение. Пусть исходное (начальное) значение функции равно $y_0 = f(x_0)$, а новое (конечное) значение функции равно $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$; тогда разность $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x+\Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл Δx *и* Δy*:* каждому изменению величины x, соответствует изменение величины y, т.е. Δy зависит от Δx.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции; т.е. существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \Leftrightarrow$ предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема. Если $y = f(x)$ - элементарная функция, определённая в некоторой окрестности точки x_0; то она непрерывна в точке x_0.

Определение. Функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке заданного интервала, называется непрерывной на всём интервале.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она имеет односторонние пределы, равные между собой и равные в свою очередь значению функции в точке x_0.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной, если она непрерывна на своей области определения.

Заметим: все элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

3. Точки разрыва.

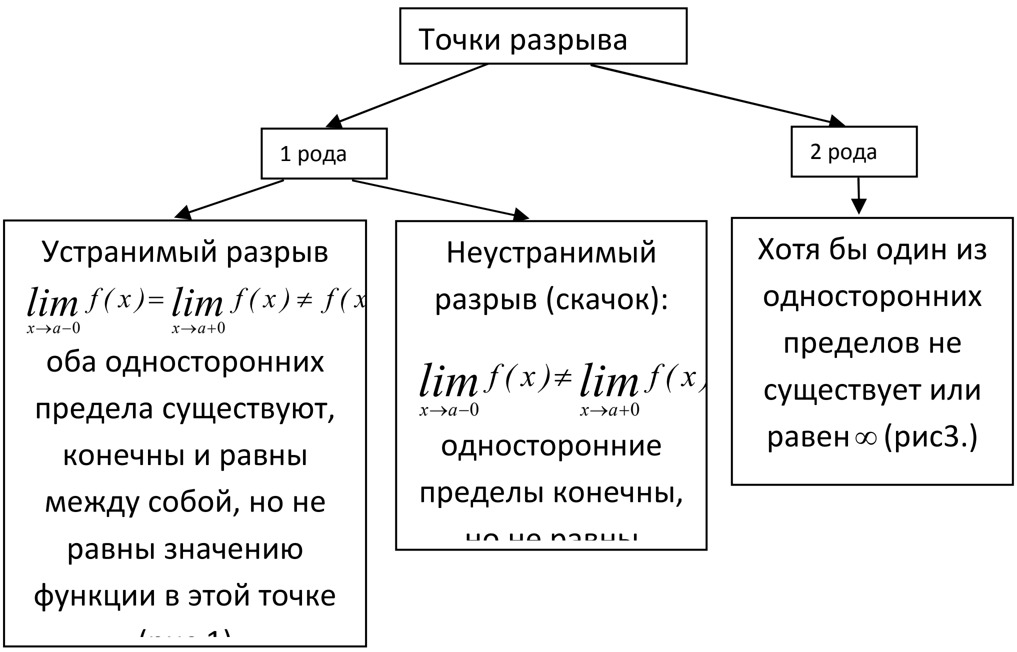
Определение 1. Точка, в которой не выполняется условие непрерывности, называется точкой разрыва.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, в точке x_0 не определена или её предел в точке x_0 не равен значению функции в этой точке; то говорят, что функция имеет разрыв в точке x_0, а точку x_0 называют точкой разрыва.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода, если функция имеет конечные левосторонний $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и правосторонний пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, но $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$.

Заметим: $\left| f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0) \right|$ - называется скачком функции в точке x_0.

Определение. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности или вообще не существует, то x_0 - точка разрыва второго рода.



4. Асимптоты графика функции.

Назовём асимптотами прямые линии, к которым неограниченно приближается график функции, когда точка графика неограниченно удаляется от начала координат. В зависимости от поведения аргумента при этом, различаются два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Определение Вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется вертикальная прямая $x = a$, если $f(x) \to +\infty$ или $f(x) \to -\infty$ при каком-либо из условий: $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to a$. Заметим, что мы при этом не требуем, чтобы точка a принадлежала области определения функции $f(x)$, однако она должна быть определена по крайней мере в какой-либо из односторонних окрестностей этой точки: $(a - \delta; a)$ или $(a; a + \delta)$, где $\delta > 0$.

Итак, для нахождения вертикальных асимптот графика данной функции нужно исследовать точки разрыва функции и точки, лежащие на границах области определения функции, и выяснить, при приближении аргумента к каким из этих точек значения функции стремятся к бесконечности.

Определение Наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ называется прямая $y = kx + b$, если выполнены два условия:

1) некоторый луч $(a; +\infty)$ целиком содержится в $\mathcal{D}(f)$;

2) расстояние по вертикали между графиком и прямой стремится к 0 при $x \to +\infty$:

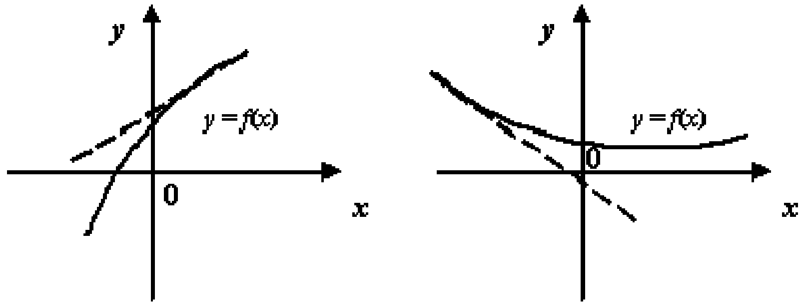
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ называется прямая $y = kx + b$, если

1) некоторый луч $(-\infty; a)$ целиком содержится в $\mathcal{D}(f)$;

2) расстояние по вертикали между графиком и прямой стремится к 0 при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$



Графики функций, имеющие наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$

В случае, если наклонная асимптота расположена горизонтально, то есть при $k = 0$, она называется горизонтальной асимптотой. Таким образом, горизонтальная асимптота -- частный случай наклонной асимптоты; прямая $y = c = \mathrm{const}$ является горизонтальной асимптотой графика $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, если

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$$

или

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$$

соответственно.

1.14.Лекция 14. (2ч)

Тема: «Производная»

1.14.1. Вопросы лекции

1.Понятие производной.

2. Геометрический и механический смыслы производной.

3. Правила и формулы дифференцирования.

1.14.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие производной.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат график непрерывной функции *y=f(x)* и любую точку $M_0(x_0;f(x_0))$, принадлежащую графику.

Придадим аргументу *x* в точке x_0 произвольное приращение $\Delta x\neq 0$. На графике получим точку $M(x_0+\Delta x;f(x_0+\Delta x))$. Через точки M_0 и M проведем секущую, в точке M_0 проведем касательную к графику функции.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0NM:

Угловой коэффициент секущей M_0M $k_{\text{сек}}=tg\alpha=\dfrac{NM}{M_0N}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

<u>Определение</u> **Касательной к кривой в точке M_0** называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M, двигаясь по кривой стремится совпасть с точкой M_0

Угловой коэффициент секущей ($k_{\text{сек}}$) будет стремиться к угловому коэффициенту касательной $M\to M_0,\quad \alpha\to\varphi,\quad tg\alpha\to tg\varphi$ $tg\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}tg\alpha$, т.е. $k_{кас}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}k_{сек}$.

Тогда $k_{кас}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}k_{сек}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует и конечен.

2. Задача о мгновенной скорости.

Пусть материальная точка движется по закону *S=S(t),* где *S* – пройденный путь,*t* – время. Найдем скорость движения в момент времени t_0(мгновенная скорость).

Зафиксируем момент времени t_0, придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t\neq 0$. Функция *S=S(t)* получит приращение $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. За промежуток времени Δt средняя скорость точки будет $V_{ср}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Устремим Δt к нулю. Чем меньше Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в момент времени t_0. Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 (мгновенная скорость) понимается предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$, т.е. $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{ср}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

В первой и во второй задачах, а также во многих других, мы приходим к необходимости вычислять пределы определенного вида, а именно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.Регулярное использование этого предела повлекло за собой необходимость введения нового понятия – понятие производной.

<u>Определение.</u>Производной функции *f(x)* в точке x = x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

2. Геометрический и механический смыслы производной.

Уравнение касательной к кривой: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Введём несколько формулы для дифференцирования функций (правила дифференцирования).

3. Правила и формулы дифференцирования.

Правила дифференцирования

1) $C'=0$;

2) $y=x,\ y'=1$;

3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

4) $(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'$;

где $u=u(x), v=v(x)$ - дифференцируемые на множестве X функции .

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

Заметим: *а)* $(C\cdot u)'=C\cdot u'$;

б) $\left(\dfrac{u}{c}\right)'=\dfrac{u'}{c}$.

Производные основных элементарных функций

1. $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$

2. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

$(e^x)'=e^x$

3. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

4. $(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(tg\ x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\ x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

5. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arc\cos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctg\ x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(arcctg\ x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

Даны функции $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, т.е. $y=f(u)=f[\varphi(x)]$- правила f и φ сопоставляют каждому значению x одно значение y.

Определение. Производная сложной функции равна произведению производных функций, из которых она состоит: $\boxed{y'_x=y'_u\cdot u'_x}$.

Лекция 15. (2ч)

Тема: «Производные высших порядков. Дифференциал»

1.15.1. Вопросы лекции

1.Производные высших порядков.

2. Понятие дифференциала.

3. Геометрический смысл дифференциала.

4. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

1.15.2. Краткое содержание вопросов

1.Производные высших порядков.

Производной второго порядка или просто второй производной функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной $y'=f'(x)$, т.е. $y''=(y')'$ или $f'(x)=(f'(x))'$.

Аналогично, производной третьего порядка или третьей производной данной функции называется производная от ее второй производной.

Вообще, производной n-го порядка или n-ой производной от функции $y=f(x)$ называется производная от ее ($n-1$)-ой производной.

Для производной n-го порядка принято обозначение: $y^{(n)}, f^{(n)}(x)$.

2. Понятие дифференциала.

Производная функции $y=f(x)$ есть, как мы уже знаем, пределотношения приращения функции Δyк приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Согласно определению предела, разность между переменной величиной $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и ее пределом y' стремится к нулю, т. е. является величиной бесконечно малойпри $\Delta x\to 0$. Обозначим ее черезα: $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha \to 0$

отсюда $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x$

Мы выразили приращение функции Δyв виде суммы двух слагаемых, имеющих различную природу.

Рассмотрим равенство. Во-первых, заметим, что Δy и α, стремятся к нулю при $\Delta x\to 0$, иначе говоря, являются бесконечно малыми вместе с Δx. Величина же производной y' не зависит от Δx (она зависит от x) и при данном значении x рассматривается как конечная постоянная величина.

Во-вторых, мы видим, что хотя оба слагаемых правой части (3) $y'\Delta x$ и $\alpha\Delta x$ являются бесконечно малыми, порядок их различен. В самом деле, первое слагаемое состоит из конечного множителя y' и бесконечно малого Δx, второе же слагаемое является произведением двух бесконечно малых α и Δx, и $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{y'\cdot\Delta x} = 0$, т.е. это слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $y'\Delta x$ при $\Delta x\to 0$.

На этом основании мы можем считать, что из двух слагаемых, на которые мы разбили Δy, первое $y'\Delta x$ является «главным», т. е. содержит «большую» часть Δy, а второе — «меньшую», даже незначительную его часть.

Первое слагаемое и называется дифференциалом функции и обозначается dy: $dy = y'\Delta x$ или $dy=f'(x)\,\Delta x$.

Таким образом, дифференциал функции dy есть главная часть ее приращения Δy; он равен производной, умноженной на приращение аргумента.

Далее мы видим, что дифференциал функции пропорционален приращению Δx, являясь, таким образом, линейной функцией Δx (коэффициент y'постоянен), между тем как слагаемое $\alpha\Delta x$, где α — переменная величина, изменяется непропорционально Δx.

Поэтому можно дать и другое определение дифференциала: **дифференциал функции**dy есть главная часть ее приращения Δy, линейная относительно Δx с коэффициентом пропорциональности равным производной $f'(x)$.

2.3. Геометрический смысл дифференциала.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$.

Проведём касательную к графику функции в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, α - угол наклона касательной.

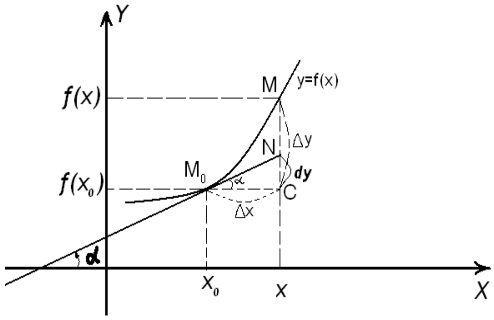
Выберем точку $M(x; f(x))$, где $x = x_0 + \Delta x$. Рассмотрим

$\triangle NCM_0 : \angle C = 90^\circ, M_0C = \Delta x, \angle CM_0N = \alpha$

$$\Rightarrow \frac{NC}{M_0C} = tg\alpha = f'(x_0),$$

$$\Rightarrow NC = f'(x_0)\cdot M_0C = f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

$$\Rightarrow NC = dy$$



Вывод: дифференциал равен изменению ординаты касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, при изменении x_0 на Δx.

4. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Замена приращения функции её дифференциалом означает замену части графика функции $\overset{\frown}{M_0M}$ отрезком касательной M_0N. Чем меньше $|\Delta x|$, тем меньше касательная отклоняется от графика функции, тем точнее приближённая формула: $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$.

1.16.Лекция 16. (2ч)

Тема: «Приложения производной»

1.16.1. Вопросы лекции

1.Правило Лопиталя.

2. Исследование на монотонность функции, точки экстремума.

3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.

4. Исследование на вогнутость и выпуклость функции, точки перегиба.

5. Общий план исследования функции и построения графика

1.16.2.Краткое содержание вопросов

1.Правило Лопиталя.

Мы уже знакомы с приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т.е. раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Рассмотрим новые правила для раскрытия этих неопределенностей – **правила Лопиталя**.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$) равен пределу отношения их производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\Psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\Psi'(x)}$, если предел правой части этого равенства существует.

Поясним на примерах.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{1}=5\lim_{x\to 0}\cos 5x=5$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то можно снова применить правило Лопиталя, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{16\sin 4x}{2}=8\lim_{x\to 0}\cos 4x=8$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие функции при $x\to\infty$. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Кроме рассмотренных случаев неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, правила Лопиталя позволяют раскрывать неопределенности других видов.

Неопределенность вида (∞-∞). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела (здесь и в дальнейшем под*c* следует понимать как число, так и бесконечность) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-\Psi(x)]$, когда *f(x)* и *Ψ(x)* являются бесконечно большими функциями одного знака, т.е. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай преобразованием выражения *(f(x)- Ψ(x))* сводится к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$

Если $x\to 1$, то $\frac{1}{\ln x}\to\infty$ и $\frac{x}{\ln x}\to\infty$; следовательно, имеем неопределенность вида (∞-∞). Приведем дроби к общему знаменателю, тогда при $x\to 1$ числитель и знаменатель в последнем выражении одновременно стремятся к нулю. Таким образом, получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, найдем $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-1$.

Неопределенность вида (0·∞). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\Psi(x)]$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай также преобразованием выражения *(f(x) Ψ(x))* сводится к раскрытию неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx$.

Так как $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0$ и $tgx\to\infty$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, то имеем неопределенность вида 0·∞. Преобразуем данное выражение так:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1$$

Неопределенность вида 1^{∞}. Под раскрытием такой неопределенности понимаем нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$.

Неопределенность вида 0^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=0$.

Неопределенность вида ∞^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=0$.

Неопределенности вида 1^{∞}, 0^0, и ∞^0 приводятся к случаям неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$обычно с помощью логарифмирования $[f(x)]^{\Psi(x)}$ при условии, что *f(x)>0.*

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

В этом случае $(1+x^2)\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$, и мы имеем неопределенность вида ∞^0. Обозначим $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, т.к. $(1+x^2)>0$, то логарифмируя, находим

$$\ln y=\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln(1+x^2)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

Так как при $x\to+\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, то получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=0$$

Так как *z=lny* – функция непрерывная на D_z, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}y\right)$; следовательно, $\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}y\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}y=e^0=1$. Итак $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=1$.

2. Исследование на монотонность функции, точки экстремума.

Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)**на интервале $(a;b)$, если для любых значений x_1и x_2 аргумента x, таких что $a<x_1<x_2<b$ выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$.

Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции нужно пользоваться **достаточными признаками монотонности**:

Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) на некотором интервале и стационарные точки (те в которых $f'(x)=0$) не заполняют сплошь никакого отрезка, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума:Если функции $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и дифференцируема в этой точке, то первая производная $f'(x_0)$ равна нулю. Таким образом, экстремум может наблюдаться в точках, в которых $f'(x_0)=0$ или не существует.

Достаточное условие экстремума:Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус — при максимуме, с минуса на плюс - при минимуме.

4. Исследование на вогнутость и выпуклость функции, точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f''(x)>0$. Тогда кривая $y=f(x)$ выпукла вниз в точке с абсциссой x_0. Если же $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ в этой точке выпукла вверх.

Точка с абсциссой x_0 называется **точкой перегиба**кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба:если x_0 - точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба: x_0является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если в достаточно малой окрестности точки x_0 при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

Прямая$y_{ac}=\kappa x+b$ называется наклонной асимптотой кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x;f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

При k=0 имеем горизонтальную асимптоту: $y=b$.

Заметим, что если не существует хотя бы один из пределов, определяющих κ и b, то асимптоты нет.

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции.

5. Общий план исследования функции и построения графика

Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. Элементарное исследование:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность (нечетность);
3) исследовать функцию на периодичность;
4) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика с координатными осями.

II. Исследование графика функции по первой производной:

1) найти $y'(x)$;
2) используя необходимый признак существования экстремума найти точки, «подозрительные» на экстремум, т.е. точки в которых $y'(x)=0$ или $y'(x)$ не существует;
3) нанести критические точки на область определения и найти знак производной во всех получившихся интервалах;
4) используя признаки монотонности определить характер монотонности функции на каждом интервале;
5) используя достаточный признак существования экстремума установить наличие экстремума и их характер;
6) вычислить значение функции в точках экстремума, если они есть.

III.Исследование графика функции по второй производной:

1) найти $y''(x)$;
2) используя необходимый признак существования точек перегиба, найти точки «подозрительные» на перегиб, т.е. точки в которых $y''(x)=0$ или $y''(x)$ не существует;
3) нанести полученные точки на область определения и найти знак второй производной в каждом из получившихся интервалов;

4) используя теорему о форме кривой установить характер выпуклости (вогнутости) графика функции на каждом промежутке;
5) используя достаточный признак существования точек перегиба установить их наличие;
6) вычислить значения функции в абсциссах точек перегиба.

IV. Исследовать поведение функции на границах области определения.

V. Исследовать кривую $y=f(x)$ на наличие асимптот и указать область значений функции.

VI. Построить график функции.

1.17.Лекция 17. (2ч)

Тема : «Кривизна кривой».

1.17.1. Вопросы лекции

1.Длина дуги кривой.

2. Угол смежности и кривизна.

3. Радиус и круг кривизны.

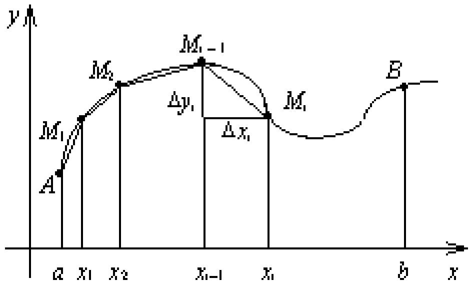
4. Эволюта и эвольвента.

1.17.2.Краткое содержание вопросов

1.Длина дуги кривой.

Найдём длину дуги AB кривой $y = f(x)$, где $A(a, f(a))$,

$B(b, f(b))$



Длиной дуги называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной линии при условии, что число звеньев неограниченно возрастает и длина наибольшего из них стремится к нулю.

$l = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$, Δl_i – длина звена $M_{i-1}M_i$ ломаной AB.

Рассмотрим незамкнутую дугу AB, заданную уравнением $y = f(x)$.

Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Разобьём дугу AB на n частей произвольным образом точками

$$A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$$

и проведём хорды

$$M_0M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n.$$

Длина i -того звена Δl_i равна длине вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$.

$$\Delta l_i = |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

где $y_{i-1} = f(x_{i-1})$, $y_i = f(x_i)$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $y_i - y_{i-1} = \Delta y_i$,

$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$, $i = 1, 2, 3, n$.

Просуммировав все Δl_i, получим приближенное значение длины дуги AB:

$$l_{AB} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\Delta x_i.$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$ и $\max \Delta l_i \to 0$, получим точное значение длины дуги.

$$l_{AB} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta l_i \to 0}} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\Delta x_i.$$

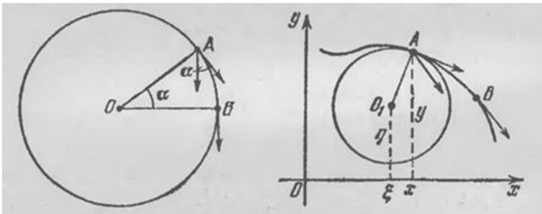
В правой части равенства предел интегральной суммы существует в силу непрерывности функции $f(x)$ и её производной и не зависит от способа разбиения дуги на части.

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$$

2. Угол смежности и кривизна.

Рассмотрим плоскую гладкую кривую Γ. Угол α $(0 \le \alpha \le \pi)$ между касательными к Γ в точках A и B называется углом смежности дуги $\overset{\frown}{AB}$. Отношение угла смежности дуги $\overset{\frown}{AB}$ к ее длине называется средней кривизной дуги $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 86). Наконец, кривизной кривой Γ в ее точке A называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности α дуги $\overset{\frown}{AB}$ кривой к ее длине $\left|\overset{\frown}{AB}\right| = |\Delta s|$, когда последняя стремится к нулю:

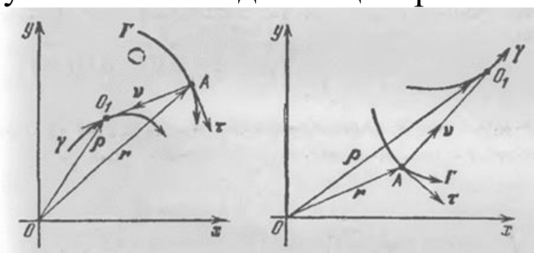
$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{|\Delta s|}.$$



3. Радиус и круг кривизны.

Таким образом, $0 \le K \le \infty$. По определению, величина $R = 1/K$ (где считается, что $0 = 1/\infty, \ \infty = 1/0$) называется радиусом кривизны Γ в точке A.

Точка O_1, лежащая на нормали к Γ в точке A на расстоянии $R = 1/K$ от A в сторону вогнутости Γ, называется центром кривизны Γ в точке A. Очевидно, что центр окружности совпадает с центром ее кривизны.



Пусть кривая Γ задана функцией $y = f(x)$ $(c \le x \le d)$, имеющей непрерывную вторую производную. Найдем ее кривизну в точке $A = (x, f(x))$. Пусть φ_1 и φ_2 - углы, которые составляют касательные к Γ в точках A и $B = (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ с положительным направлением оси x.

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = f'(x), \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = f'(x+\Delta x),$$

$$\alpha = \left|\operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f'(x+\Delta x)\right|.$$

Далее

$$\Delta s = |AB| = \int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}\, du$$

Поэтому из (1), применяя правило Лопиталя (по Δx), получаем

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f'(x+\Delta x)}{\int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\frac{f''(x+\Delta x)}{1+\left(f'(x+\Delta x)\right)^2}}{\sqrt{1+\left(f'(x+\Delta x)\right)^2}} \right| = \frac{|f''(x)|}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Мы получили формулу для кривизны

$$K = \left| \frac{|f''(x)|}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}} \right|.$$

Если гладкая кривая Γ задана параметрически

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (a \le t \le b),$$

где φ и ψ - дважды непрерывно дифференцируемые функции, то, пользуясь правилом дифференцирования параметрически заданных функций, получим

$$f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad f''(x) = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}, \qquad K = \left| \frac{\left(x'_t{}^2 + y'_t{}^2\right)^{3/2}}{y'_t x''_t \;\; x'_t y''_t} \right|, \qquad K = \frac{1}{R}$$

4. Эволюта и эвольвента.

Кривая γ, являющаяся геометрическим местом центров O_1 кривизны плоской кривой Γ, называется эволютой Γ. Сама кривая Γ называется эвольвентой γ.

Найдем параметрическое уравнение эволюты γ кривой Γ, заданной уравнением $y = f(x)$. Имеем $\frac{1}{R} = \left| \frac{|f''(x)|}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}} \right| = \frac{f''(x)\operatorname{sign} f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}}$.

Центр кривизны O_1 кривой Γ в ее точке $A(x, f(x))$ пусть имеет координаты (ξ, η). Он определяется вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\nu},$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор точки $A \in \Gamma$, а $\boldsymbol{\nu}$ - единичный вектор нормали, направленный в сторону вогнутости Γ. Кривая Γ имеет векторное уравнение

$$\mathbf{r} = (x, y).$$

Отсюда

$$\dot{\mathbf{r}}_x = (1, y'_x), \quad \ddot{\mathbf{r}}_x = (0, y''_x) \quad \boldsymbol{\nu} = \pm\left(\frac{-y'_x}{\sqrt{1+y'^2_x}}, \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_x}}\right).$$

Знак надо выбрать так, чтобы вектор $\boldsymbol{\nu}$ был направлен в сторону вогнутости Γ, т. е. чтобы скалярное произведение $(\boldsymbol{\nu}, \ddot{\mathbf{r}}_x)$ имело положительный знак:

$$(\boldsymbol{\nu}, \ddot{\mathbf{r}}_x) = \pm\frac{y''_x}{\sqrt{1+y'^2_x}} = y''_x(\operatorname{sign} y''_x)\left(1+y'^2_x\right)^{-1/2}.$$

Итак

$$\boldsymbol{\nu} = \operatorname{sign} y''_x \cdot \left(\frac{-y'_x}{1+y'^2_x}, \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_x}}\right). \quad \xi = x + \frac{\left(1+y'^2_x\right)^{3/2}}{y''_x \operatorname{sign} y''_x} \cdot \frac{-y'_x \operatorname{sign} y''_x}{\left(1+y'^2_x\right)^{1/2}} = x - \frac{y'_x\left(1+y'^2_x\right)}{y''_x},$$

$$\eta = y + \frac{\left(1+y'^2_x\right)^{3/2}}{y''_x \operatorname{sign} y''_x} \cdot \frac{\operatorname{sign} y''_x}{\left(1+y'^2_x\right)^{1/2}} = y + \frac{1+y'^2_x}{y''_x}.$$

Докажем, что нормаль к кривой (эвольвенте) в точке $A = (x, f(x))$ является касательной к эволюте γ в точке $O_1 = (\xi, \eta)$. Достаточно для этого доказать, что касательные к кривой Γ и к эволюте γ в соответствующих точках ортогональны (перпендикулярны):

$$x'_x\xi'_x + y'_x\eta'_x = 1\cdot\left[1 + y''_x\frac{1+y'^2_x}{y''_x}y'_x\left(\frac{1+y'^2_x}{y''_x}\right)\right] + y'_x\left[y'_x + \left(\frac{1+y'^2_x}{y''_x}\right)'\right] = 0.$$

Другое важное свойство эволюты заключается в следующем. Приращение радиуса кривизны эвольвенты равно с точностью до знака приращению длины соответствующей дуги эволюты:

$$R_2 - R_1 = \pm|\sigma_2 - \sigma_1|.$$

На доказательстве этого свойства мы не останавливаемся.

Представим себе нить, навернутую на эволюту. Пусть она сматывается с последней, будучи все время натянутой. Отделяясь от эволюты, она, очевидно, все время будет касаться эволюты. Свободный же ее конец будет описывать эвольвенту . Так как длина нити может быть произвольной, то эволюта порождает бесконечно много эвольвент. Длина, на которую сматывается нить с эволюты, равна, очевидно, приращению радиуса кривизны эвольвенты. Если кривая Γ задана параметрически: $x = x(t), \ y = y(t)$, то эволюта определяется уравнениями

$$\xi = x - y'_t\frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}, \quad \eta = y + x'_t\frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}$$

1.18.Лекция 18. (2ч)

Тема: «Основные понятия функции двух переменных»

1.18.1. Вопросы лекции

1.ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.

2. Частные приращения.

3. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.

1.18.2. Краткое содержание вопросов

1.ОДЗ функции двух переменных и ее геометрическое изображение.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение: Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.** z = f(x, y)

Определение: Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

Определение:Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Определение:Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$.

Определение: Число А называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа ε> 0 найдется такое число r>0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие , $MM_0 < r$ также верно и условие $|f(x,y)-A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

Определение: Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция z = f(x, y) не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство

$f(x_0, y_0, \dots) \geq f(x, y, \dots)$а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \dots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство $f(x_{01}, y_{01}, \dots) \leq f(x, y, \dots)$ тогда $f(x_0, y_0, \dots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \dots) = m$ – **наименьшее значение** функции $f(x, y, \dots)$ в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области Dдостигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

<u>Свойство.</u> Если функция $f(x, y, \dots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка $N_0(x_0, y_0, \dots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \dots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области Dфункция по крайней мере один раз обращается в ноль.

<u>Свойство.</u> Функция $f(x, y, \dots)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число К, что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, ...)| < K$.

2. Частные приращения.

<u>Определение.</u> Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

<u>Определение.</u> Для функции $f(x, y)$ выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением**.

3. Частные производные первого и второго порядка. Теорема Шварца.

Можно записать $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции $z = f(x, y)$ по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$

Аналогично определяется частная производная функции по y. $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\right] + \left[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\right]$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y} \in (y, y + \Delta y); \qquad \bar{x} \in (x, x + \Delta x)$

Тогда получаем $\Delta z = \Delta x \dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \dfrac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$

Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

<u>Определение.</u> Выражение $\Delta z = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется **полным приращением** функции f(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.**

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

<u>Определение.</u> Частные производные вида $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

<u>Теорема.</u> Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

1.19.Лекция 19. (2ч)

Тема: «Приложения производных ФНП»

1.19.1. Вопросы лекции

1.Полный дифференциал.

2. Производная по направлению. Градиент.

3. Касательная плоскость и нормаль.

1.19.2. Краткое содержание вопросов

1. Полный дифференциал.

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ то получим приближенную формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Из заданного выражения определим Δx = 1,04 – 1 = 0,04,

Δy = 1,99 – 2 = -0,01,Δz = 1,02 – 1 = 0,02.

Найдем значение функции u(x, y, z) = $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0{,}04\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 1\cdot 0{,}04 - 0\cdot 0{,}01 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

13,5

нии *L*.

Предположим, что: 1) функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в точке P и не все её частные производные в этой точке равны нулю; 2) функции $x(t), y(t), z(t)$ также дифференцируемы.

Поскольку кривая принадлежит поверхности s , то координаты любой точки этой кривой, будучи подставленными в уравнение поверхности, обратят его в тождество. Таким образом, справедливо тождественное равенство: $F\,[x(t), y(t), z(t)] = 0$.

Продифференцировав это тождество по переменной t, используя цепное правило, получим новое тождественное равенство, справедливое во всех точках кривой, в том числе и в точке $P\,(x_0, y_0, z_0)$: $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$.

Пусть точке P соответствует значение параметра t_0, то есть $x_0 = x\,(t_0)$,

$y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Тогда последнее соотношение, вычисленное в точке P, примет вид $F_x^{/}(P)\cdot x^{/}(t_0)+F_y^{/}(P)\cdot y^{/}(t_0)+F_z^{/}(P)\cdot z^{/}(t_0)=0$.

Формула представляет собой скалярное произведение двух векторов. Первый из них – постоянный вектор

$$\overline{N}_P=\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(P),\frac{\partial F}{\partial y}(P),\frac{\partial F}{\partial z}(P)\right\},$$

не зависящий от выбора кривой на поверхности σ.

Второй вектор $\bar{l}_P=\left\{x^{/}(t_0),y^{/}(t_0),z^{/}(t_0)\right\}$ – касательный в точке P к линии L, а значит, зависящий от выбора линии на поверхности, то есть является переменным вектором.

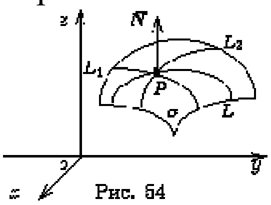


Рис. 54

При введённых обозначениях равенство перепишем как $\overline{N}_P\cdot\bar{l}_P=0$. Его смысл таков: скалярное произведение равно нулю, следовательно, векторы $\overline{N}_P$ и $\bar{l}_P$ перпендикулярны. Выбирая всевозможные кривые (см. рис. 54), проходящие через точку P на поверхности s , мы будем иметь различные касательные векторы, построенные в точке P к этим линиям; вектор же $\overline{N}_P$ от этого выбора не зависит и будет перпендикулярен любому из них, то есть все касательные векторы расположены в одной плоскости, которая, по определению, является касательной к поверхности s , а точка P в этом случае называется точкой касания. Вектор $\overline{N}_P$ является направляющим вектором нормали к поверхности.

Определение 2. *Нормалью к поверхности s в точке P называется прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная к касательной плоскости, построенной в этой точке.*

Мы доказали существование касательной плоскости, а, следовательно, и нормали к поверхности. Запишем их уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)(z-z_0)=0$$

; – уравнение касательной плоскости, построенной в точке P (x_0, y_0, z_0) к поверхности s , заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$;

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}$$

; – уравнение нормали, построенной в точке P к поверхности s .

1.20.Лекция 20. (2ч)

Тема: «Экстремум функции двух переменных»

1.20.1. Вопросы лекции

1.Понятие экстремума.

2. Необходимое и достаточное условия экстремума.

3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.

1.20.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие экстремума.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, то точка M_0 называется *точкой максимума*.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$,то точка M_0 называется *точкой минимума*.

2. Необходимое и достаточное условия экстремума.

Необходимые условия экстремума: Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) называют *критической*.

Достаточные условия экстремума: Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Рассмотрим выражение: $D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$.

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума.

3) В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции *z = f(x, y)* в заданной замкнутой области *D*, надо:

1. вычислить первые частные производные;
2. решив систему (4.17), найти координаты стационарных точек и, если они принадлежат области *D*, вычислить значение функции в этих точках;
3. найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе *D*;
4. из всех найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Если координаты стационарных точек не принадлежат заданной области *D*, то наибольшее и наименьшее значение функции лежит на границе.

Пример. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 - xy + y^2 - 4x$$

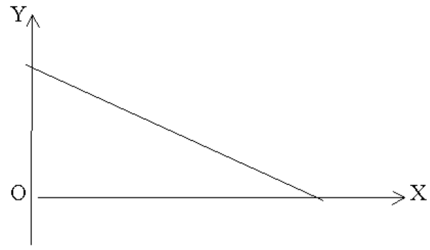
Область D определена линиями:

$$x = 0, \quad y = 0, \qquad 2x + 3y - 12 = 0$$

Найдём координаты стационарных точек:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4 = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0, \qquad M(8/3;4/3).$$

Построим для наглядности границу D на плоскости XOY.



Найденная стационарная точка M (8/3;4/3) принадлежит заданной области D:

$$z(8/3;4/3) = \frac{64}{9} - \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3} + \frac{16}{9} - \frac{4\cdot 8}{3} = -\frac{16}{3} = -5.333$$

Найдём значения функции на границах:

$a)\ x = 0, \quad z(0,y) = y^2, \quad z'_y = 2y = 0, \quad y = 0.$

Экстремальная точка на той части границы, которая совпадает с осью OY, лежит на нижней границе интервала. Значение функции в этой точке z (0;0)=0.

На другом конце интервала z (0;4)=16:

$б)\ y = 0, \quad z(x;0) = x^2 - 4x, \quad z'_x = 2x - 4 = 0, \quad x = 2$

– точка экстремума функции на второй границе.

На этой границе, совпадающей с осью OX, вычислим значение функции в трёх точках: (0,0); (2,0); (6,0) – правая граница интервала. В первой точке значение функции уже известно из пункта (а): z(2,0)= -4; z(6,0)=12.

Третье аналитическое выражение для границы запишем как $y = f(x)$ и подставим в исходное уравнение:

$$2x + 3y - 12 = 0,\ y = 4 - 2/3\cdot x,\ z(x, 4 - 2/3\cdot x) = \frac{19}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16.$$

Значение функции на концах отрезка прямой $y = 4 - 2/3\cdot x$ мы уже знаем. Это точка z(0,4)=16 из пункта (а) и точка z(6,0)=12 из пункта (б).

Найдём экстремальное значение функции (если оно есть) внутри этой границы: $z'_x = 2\cdot\frac{19}{9}x - \frac{40}{3} = 0, \qquad x = 60/19.$

Это точка экстремума функции внутри границы $y = 4 - 2/3\cdot x$;

z = -96/19» -5.053.

Тогда из найденных значений функций z (8/3;4/3)= -5.333 – наименьшее, а z (0;4)=16 – наибольшее.

1.21.Лекция 21. (2ч)

Тема: «Комплексные числа»

1.21.1. Вопросы лекции

1.Числовые множества.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.

4. Извлечение корня из комплексного числа.

5. Понятие функции комплексного аргумента.

1.21.2.Краткое содержание вопросов

1. Числовые множества.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Def: *Комплексным числом* называется выражение вида $z = a + ib$, где a, b - действительные числа, i - мнимая единица, $i^2 = -1$. (В электродинамике мнимую единицу принято обозначать через*j*, кроме того, следует отметить, что в электротехнике векторная комплексная величина обозначается точкой над величиной, а скалярная - подчеркиванием снизу*)*

a - называется действительной частью числа z, b - называется мнимой частью числа z. Их обозначают $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Выражение $z = a + ib$ называют *алгебраической формой записи комплексного числа.*

Если $a = 0$, то число ib называется чисто мнимым, если b=0, то получается действительное число $a + i0 = a$

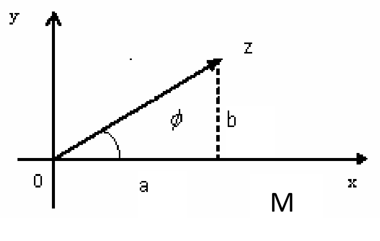
Def: Комплексные числа$z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib$, которые отличаются только знаком мнимой части, называются *сопряженными.*

Замечания: 1) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части соответственно.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

2) Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда действительная и мнимая части равны нулю

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$



Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $M(a,b)$. Обратно, каждой точке плоскости $M(a,b)$ соответствует комплексное число $z = a + ib$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

Точкам плоскости, лежащим на оси абсцисс соответствуют действительные числа. Точки, лежащие на оси ординат, изображают чисто мнимые числа. Поэтому, ось Ox называют действительной осью, а ось Oy - мнимой осью.

В алгебраической форме $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$

Def: Суммой двух комплексных чисел называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$, т.е. сложение комплексных чисел происходит по правилу сложения радиус-векторов этих чисел.

При вычитании комплексных чисел их радиус-векторы вычитаются.

Т.о. $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

Def: Произведением комплексных чисел называется такое комплексное число, которое получается, если перемножить числа как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + ia_1b_2 + i^2b_1b_2$, проведя преобразования, получим $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$.

Замечание: Произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля каждого из них $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

Def: Частным от деления z_1 на z_2 называется комплексное число z, удовлетворяющее условию. $z_2 \cdot z = z_1$ Т.е $a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy) = (a_2x - b_2y) + i(a_2y + b_2x)$. Чтобы найти x и y необходимо решить систему уравнений $\begin{cases} a_2x - b_2y = a_1 \\ b_2a_2x + a_2y = b_1 \end{cases}$, решив эту систему, получим $x = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$. Окончательно получаем $z = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$.

Практически деление комплексных чисел выполняется следующим образом: чтобы разделить $z_1 = a_1 + ib_1$ на $z_2 = a_2 + ib_2$, умножим делимое и делитель на число сопряженное делителю, т. е. на число $a_2 - ib_2$.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.

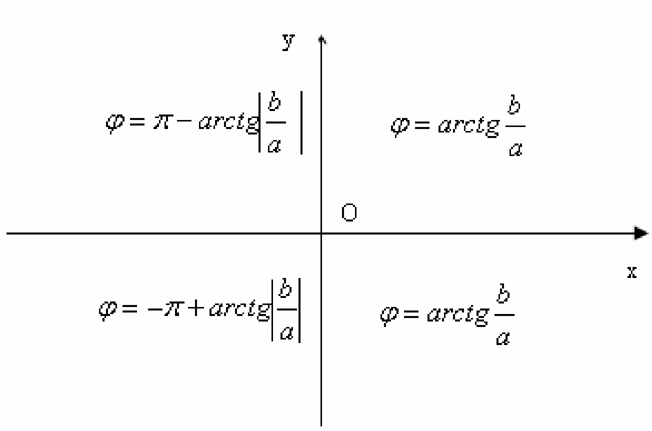
С каждой точкой z связан радиус-вектор этой точки $\overrightarrow{OM}$. Длина радиус - вектора r называется модулем комплексного числа $r = |z|$. Угол, образованный радиус-вектором точки z с осью Ox, называется аргументом $\varphi = Argz$ этой точки. Наименьшее по модулю значение аргумента называется его главным значением и обозначается через $\arg z$:

$$-\pi < \arg z \le \pi .$$

Для модуля и аргумента комплексного числа справедливы следующие соотношения

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg z$,

$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad tg\varphi = \dfrac{b}{a}$.



$r, \quad \varphi$ - полярные координаты точки z. Для того чтобы найти аргумент комплексного числа, необходимо определить в какой из координатных четвертей оно располагается, и воспользоваться следующими соотношениями

Подставив полученные нами соотношения в выражение для комплексного числа, получим $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи комплексного числа.*

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k \end{cases} \quad k \in N$

.Для сопряженных комплексных чисел справедливы следующие соотношения $\bar{z} = a - ib = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, То есть $\arg\bar{z} = -\arg z$

Если комплексному числу $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение $e^{i\varphi}$, то получим соотношение $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, которое называется *формулой Эйлера.*

Любое комплексное число z можно записать в виде $z = re^{i\varphi}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной формой*.

Итак, существуют три формы записи комплексного числа:

$z = a + ib$ **– алгебраическая форма;**

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **– тригонометрическая форма;**

$z = re^{i\varphi}$ **– показательная форма.**

В тригонометрической и показательной форме.

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2}$

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Применив формулу Эйлера, получим правило нахождения произведения комплексных чисел в показательной форме $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Для нахождения частного двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме применяют следующие формулы

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Возведение в степень представляет собой произведение n одинаковых сомножителей. В силу правила умножения комплексных чисел получим

$z^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$ - формула Муавра. $z^n = r^n e^{in\varphi}$

Формулу Муавра удобно применять для вывода формул кратных углов

4. Извлечение корня из комплексного числа.

Корень из комплексного числа. Пусть $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z = \rho^n(\cos n\psi - i\sin n\psi)$.

Отсюда, $r = \rho^n, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, т. е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$ где $k = 0,1,2,3,\ldots n-1$

Из этой формулы следует, что корень n-степени из любого отличного от нуля комплексного числа имеет точно n значений. Геометрически они изображаются точками, равноотстоящими друг от друга на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

1.22. Лекция 22. (2ч)

Тема: «Многочлены»

1.22.1. Вопросы лекции

1.Понятие многочлена.

2. Основная теорема алгебры.

3. Разложение многочлена на множители.

4. Решение уравнений во множестве комплексных чисел.

1.22.2.Краткое содержание вопросов

1. Понятие многочлена

DEF: **многочлены** или **полиномы** от одной переменной, это выражения вида $c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$,где c_i фиксированные коэффициенты, а x— переменная. Многочлены составляют один из важнейших классов элементарных функций.

Изучение полиномиальных уравнений и их решений составляло едва ли не главный объект «классической алгебры». С изучением многочленов связан целый ряд преобразований в математике: введение в рассмотрение нуля, отрицательных, а затем и комплексных чисел, а также появление теории групп как раздела математики и выделение классов специальных функций в анализе.

2. Основная теорема алгебры.

Теорема (основная теорема алгебры). Всякая целая рациональная функция $f(x)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.Другими словами всякое уравнение $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет решение в поле комплексных чисел.

3. Разложение многочлена на множители.

Тождественное преобразование, приводящее к произведению нескольких множителей - многочленов или одночленов, называют **разложением многочлена на множители.** В этом случае говорят, что многочлен делится на каждый из этих множителей.**Вынесение общего множителя за скобки.** Этопреобразование является непосредственным следствием распределительного закона ac+bc=c(a+b)

Использование формул сокращенного умножения. Формулы сокращённого умножения позволяют довольно эффективно представлять многочлен в форме произведения. **Способ группировки.** Этот способ заключается в том, что слагаемые многочлена можно сгруппировать различными способами на основе сочетательного и переместительного законов. На практике он применяется в тех случаях, когда многочлен удается представить в виде пар слагаемых таким образом, чтобы из каждой пары можно было выделить один и тот же множитель. Этот общий множитель можно вынести за скобку и исходный многочлен окажется представленным в виде произведения.

4. Решение уравнений во множестве комплексных чисел.Пример Уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня. $x^2 - 2x + 2 = 0 \quad D = 4 - 8 = -4$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2} = 1 + i \qquad x_2 = \frac{2 - \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2} = 1 - i$$

При решении кубических уравнений, как уже отмечалось ранее, используются комплексные числа. Решим кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ методом Кардано. Подстановкой $x = y - \frac{a}{3}$ приведем к неполному виду $y^3 + py + q = 0$, где $p = -\frac{a^2}{3} + b$

$q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c$. Тогда корни уравнения находятся по формулам $y_1 = A + B$,

$y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm \frac{A-B}{2}\sqrt{3}$, где $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$, Причем в качестве A, B берутся любые значения кубических корней, удовлетворяющие соотношению $AB = -\frac{p}{3}$.

Если коэффициенты кубического уравнения действительны, то уравнение имеет либо три действительных корня, либо один действительный и два комплексно сопряженных.

1.23.Лекция 23. (2ч)

Тема: «Первообразная и неопределенный интеграл»

1.23.1. Вопросы лекции

1.Первообразная функция и ее свойства.

2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.

3. Таблица интегралов.

1.23.2 Краткое содержание вопросов

1. Первообразная функция и ее свойства.

Определение: Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

2. Понятие неопределенного интеграла, основные свойства.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функции.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$

где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

3. Таблица интегралов.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

10. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

14. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

15. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left| tg \frac{x}{2}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right| + C$

1.24.Лекция 24.(2ч)

ТемА:«Методы интегрирования».

1.24.1. Вопросы лекции

1.Непосредственное интегрирование.

2. Замена переменной.

3. Интегрирование по частям.

1.24.2.Краткое содержание вопросов

1. Непосредственное интегрирование

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Метод непосредственного интегрирования применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

2. Замена переменной.

Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену t = sinx, dt = cosxdt.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

3. Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)′ = u′v + v′u

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin xdx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x} \cos xdx = \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$= \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x; \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x} \sin x +$

$+ 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos xe^{2x}dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x} \cos xdx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

1.25.Лекция 25. (2 ч)

Тема: «Интегрирование рациональных функций».

1.25.1. Вопросы лекции

1.Понятие рациональной функции.

2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

3. Интегрирование рациональных функций.

1.25.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие рациональной функции.

Def: рациональной дробью называется отношение многочленов. Дробь называется правильной , если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе.

2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

Def: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и b2 – 4ac <0.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t = ax + b.

3. Интегрирование рациональных функций.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

<u>Теорема:</u>Если $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде:$P(x) = (x - a)^{\alpha}...(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}...(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+...+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+...+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+...+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

<u>Пример.</u> $\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases} \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases} \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Итого:

$$\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$
$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

<u>Пример.</u> $\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{r|l} 6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7 & 3x^3-4x^2-17x+6 \\ \underline{6x^5-8x^4-34x^3+12x^2} & 2x^2+3 \\ -\;9x^3+8x^2-76x-7 & \\ \underline{9x^3-12x^2-51x+18} & \\ 20x^2-25x-25 & \end{array}$$

$$\int\left[2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right]dx=\int 2x^2dx+\int 3dx+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+$$
$$+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при x = 3 знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-4x^2-17x+6 & x-3 \\ \underline{3x^3-9x^2} & 3x^2+5x-2 \\ 5x^2=17x & \\ \underline{5x^2-15x} & \\ -2x+6 & \\ \underline{-2x+6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$3x^3-4x^2-17x+6=(x-3)(3x^2+5x-2)=(x-3)(x+2)(3x-1).$$

Таким образом Тогда:

$$\frac{4x^2-5x-5}{(x-3)(x+2)(3x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1)+B(x-3)(3x-1)+C(x-3)(x+2)=4x^2-5x-5$$

Для того чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений x. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае – 3, -2, 1/3. Получаем:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{A}{x+3} dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{Dx + E}{x^2+2} dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+3) + (Dx+E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$

$$= (D+A)x^4 + (3D+E)x^3 + (A+B+2D+3E+4A)x^2 + (3B+C+6D+2E)x + (2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases} D + A = 3 \\ 3D + E = 0 \\ B + 2D + 3E + 4A = 14 \\ 3B + C + 6D + 2E = 7 \\ 3C + 6E + 4A = 15 \end{cases} \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 6 - 2A - 27 + 9A + 4A = 14 \\ 3B + C + 18 - 6A - 18 + 6A = 7 \\ 3C - 54 + 18A + 4A = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 11A = 35 \\ 3B + C = 7 \\ 3C + 22A = 69 \end{cases} \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ 11A = 35 - B \\ C = 7 - 3B \\ 21 - 9B + 70 - 2B = 69 \end{cases} \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$3\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2} dx = 3\int \frac{dx}{x+3} + 2\int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = 3\ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} +$$

$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

1.26.Лекция 26.

Тема: «Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций»

1.26.1. Вопросы лекции

1.Универсальная тригонометрическая подстановка.

2. Частные случаи тригонометрических подстановок.

3. Интегрирование иррациональных функций.

1.26.2.Краткое содержание вопросов

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2arctgt;\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

<u>Пример.</u> $$\int\frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int\frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2} = 2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2+4t+4} = \int\frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C.$$

2. Частные случаи тригонометрических подстановок.

Достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]} = 2\int\frac{dt}{t^2+2t+17} = 2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16} =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4} + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно cosx.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = sinx$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx$$

Функция $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать cosx только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sinx.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \left\{\begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{matrix}\right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} +$$

$$+ 3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно sinx.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка

$t = cosx$.

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}dx = \left\{\begin{matrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{matrix}\right\} = -\int \frac{1 - t^2}{2 + t}dt = \int \frac{t^2 + 4t + 4 - 4t - 5}{t + 2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2 - 4t - 5}{t + 2}\right]dt =$$

$$= \int \left[t + 2 - \frac{4t}{t+2} - \frac{5}{t+2}\right]dt = \int t dt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2} + 1 \end{matrix}\right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ функция R четная относительно sinx и cosx.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = tgx$.

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16}dx = \left\{\begin{matrix} tgx = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx) = dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx + 3 - 5}{tgx + 3 + 5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx - 2}{tgx + 8}\right| + C.$$

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Пример.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$

$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{\frac{dctg 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x}\right\} = -2ctg 2x + C$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

3. Интегрирование иррациональных функций.

Подынтегральная функция	Подстановка
$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \cdot \sin t \quad (a \cdot \cos t)$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{\sin t} \quad \left(\frac{a}{\cos t}\right)$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$x = a \cdot tgt \quad (a \cdot ctgt)$
$x^m \cdot (a + bx^n)^p$	p – *целое, то* $x = t^N$, *где* N – *общий знаменатель для* m *и* n; $\frac{m+1}{n}$ – *целое, то* $a + bx^n = t^N$, *где* N – *знаменатель дроби* p; $\frac{m+1}{n} + p$ – *целое, то* $\frac{a}{x^n} + b = t^N$, *где* N – *знаменатель дроби* p.
$R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$	$\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = t^N$, *где* N – *общий знаменатель дробей* m, p
$R(x, x^\alpha, x^\beta, \ldots)$	$x = t^k$, *где* k – *общий знаменатель дробей* $\alpha, \beta, \ldots$

1.27.Лекция 27. (2ч)

Тема: «Определенный интеграл»

1.27.1. Вопросы лекции

1.Понятие определенного интеграла.

2. Геометрический и физический смыслы.

3. Основные свойства определенного интеграла.

4. Формула Ньютона – Лейбница.

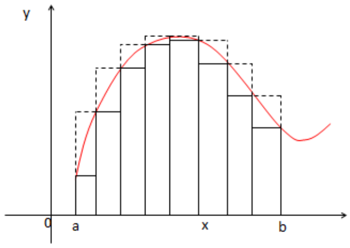
5. Приемы интегрирования.

1.27.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие определенного интеграла.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).Найти площадь фигуры.

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.



$$x_0<x_1<x_2< \ldots <x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.$x_0<\varepsilon_1<x_1$, $x_1<\varepsilon<x_2$, … , $x_{n-1}<\varepsilon<x_n$.

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S$.

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx$. a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>Теорема:</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема

2. Геометрический и физический смыслы.

3. Основные свойства определенного интеграла.

<u>Свойства определенного интеграла.</u>

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤φ(x) на отрезке [a, b] a<b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

6) **<u>Теорема о среднем.</u>** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. Формула Ньютона – Лейбница. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбница.

5. Приемы интегрирования.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

<u>Замена переменных.</u>

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a,b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

<u>Пример.</u> $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

<u>Интегрирование по частям.</u>

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

1.28.Лекция 28. (2ч)

Тема: « Геометрические приложения определенного интеграла»

1.28.1. Вопросы лекции

1.Приближенное вычисление определенных интегралов.

2. Вычисление площадей плоских кривых.

3. Нахождение объема тела вращения.

4. Вычисление длины дуги кривой.

1.28.2. Краткое содержание вопросов

1. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подынтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках x_0, x_1, … , x_m, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом:

$$y_0 = f(x_0),\ \ y_1 = f(x_1),\ \ \ldots.\ \ ,\ y_n = f(x_n).$$

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$

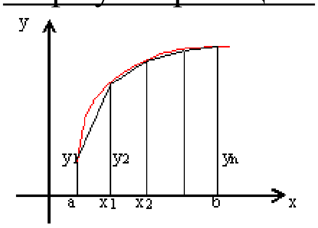
$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Формула трапеций.



Эта формула является более точной по сравнению с формулой прямоугольников. Подынтегральная функция в этом случае заменяется на вписанную ломаную.

Геометрически площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей вписанных трапеций. Очевидно, что чем больше взять точек n разбиения интервала, тем с большей точностью будет вычислен интеграл.

Площади вписанных трапеций вычисляются по формулам:

$$\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x;\quad \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x;\quad \ldots\quad ,\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

После приведения подобных слагаемых получаем **формулу трапеций**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$$

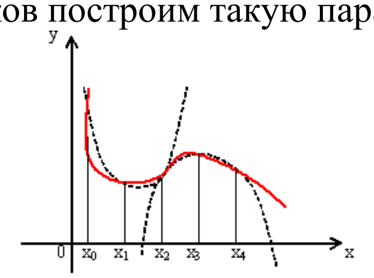
Формула парабол

(формула Симпсона или квадратурная формула).

(Томас Симпсон (1710-1761)- английский математик)

Разделим отрезок интегрирования [a, b] на четное число отрезков (2m). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x) заменим на площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой второй степени с осью симметрии, параллельной оси Оу и проходящей через точки кривой, со значениями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для каждой пары отрезков построим такую параболу.



Уравнения этих парабол имеют вид $Ax^2 + Bx + C$, где коэффициенты A, B, C могут быть легко найдены по трем точкам пересечения параболы с исходной кривой.

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C$$

$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$$

$$y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 = C$$

Обозначим $2h = x_2 - x_0$. $S = \int_{x_0}^{x_2}(Ax^2+Bx+C)dx = \left[A\frac{x^3}{3}+B\frac{x^2}{2}+Cx\right]\Big|_{x_0}^{x_2}$

Если принять $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, то $S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$

Тогда уравнения значений функции (1) имеют вид

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

С учетом этого: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.

Отсюда уравнение (2) примет вид: $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Тогда $\int_{x_2}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$

....

Складывая эти выражения, получаем **формулу Симпсона:**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right]$$

Чем больше взять число m, тем более точное значение интеграла будет получено.

2. Вычисление площадей плоских кривых.

Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ox, т.е. f(x) < 0, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. f(x) > 0, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид ρ = f(φ), где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$$

3. Нахождение объема тела вращения.

Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

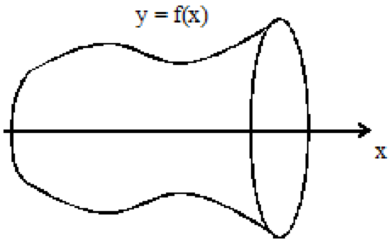
Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Объем тел вращения.

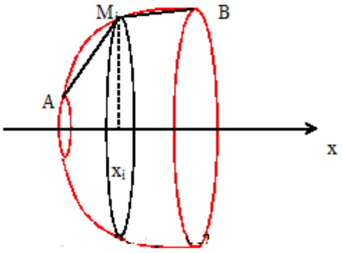
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



<u>Определение:</u>Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max\Delta x_i \to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i = \lim_{\max\Delta x_i \to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}2f(\varepsilon_i)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

4. Вычисление длины дуги кривой.

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max\Delta S_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать , что

$$S = \lim_{\max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt,$$

где $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

Если задана **пространственная кривая**, и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $z = Z(t)$, то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

1.29.Лекция 29. (2ч)

Тема: «Физические приложения определенного интеграла»

1.29.1. Вопросы лекции

1.Вычисление работы переменной силы.

2. Нахождение давления.

3. Определение статических моментов.

1.29.2.Краткое содержание вопросов

1. Вычисление работы переменной силы.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.

2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Пример: Два электрических заряда $e_0 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} k$ и $e_1 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} k$ находятся на оси OX соответственно в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместится в точку $x_2 = 10$? (Сила взаимодействия зарядов $f(x) = 9 \cdot 10^9 \frac{e_0 e_1}{x^2}\, H$).

Решение:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_1^{10} 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}}{x^2} dx = 2 \cdot 10^{-5} \int_1^{10} \frac{1}{x^2} dx = -2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{x}\Big|_1^{10} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-6} = 18 \cdot 10^{-6}..$$

2. Нахождение давления.

Координаты центра тяжести.

Центром тяжести совокупности материальных точек называется центр параллельных сил тяжести, приложенных в этих точках.

Для материальной дуги АВ плоской кривой $y = f(x)$ прямоугольные координаты центра тяжести C определяются формулами $(a \le x \le b)$:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx}.$$

Для материальной однородной криволинейной трапеции, прилежащей к оси OX и имеющей верхнюю границу $y = y(x)$, центр тяжести имеет координаты

$$x_c = \frac{\int_a^b xy(x)dx}{S}, \; y_c = \frac{\int_a^b y^2(x)dx}{2S},$$

где S – площадь криволинейной трапеции.

Центр тяжести произвольной плоской, ограниченной графиком функции

$y_1 = f_1(x)$ сверху и $y_2 = f_2(x)$ снизу, определяется формулами

$$x_c = \frac{\int_a^b x(y_1(x) - y_2(x))dx}{S}, \; y_c = \frac{\int_a^b (y_1^2(x) - y_2^2(x))dx}{2S}.$$

Задача. Бассейн высоты H наполнен водой. Вычислить давление воды на прямоугольную стенку бассейна с основанием прямоугольника, равным a.

Разделим высоту H на n равных частей (Δh). Стенка разделится на «элементы». Так как кубометр воды весит тонну, то давление столба жидкости высоты h_i м, имеющего сечение 1 м^2, равно h_i тоннам.

Давление же воды на элемент, находящийся на глубине h_i, равно произведению h_i на площадь элемента: $h_i a\ \Delta h$. Обозначим произведение $h_i a$ через $F(h_i)$. Тогда величина давления на всю стенку приближенно равна

$P_n \approx F_1(h_1)\Delta h_1 + \ldots + F_n(h_n)\ \Delta h_n$.

Данную сумму называют интегральной суммой функции $F(h)$ на отрезке [$0; H$]. При этом предполагается, что функция $F(h)$ непрерывна на отрезке [$0; H$] и может принимать любые значения. Если $n \to \infty$ и высоты «элементов» стремятся к нулю, то точное выражение суммы равно $\lim\limits_{\Delta h \to 0} P_n$. Его называют определенным интегралом от функции $F(h)$ на отрезке [$0; H$] и обозначают $\int_0^H F(h)dh$.

Далее понятие определенного интеграла обобщается на произвольную непрерывную функцию $F(x)$ и произвольный отрезок [$a; b$].

Рассмотрим несколько задач с физическими моделями, где интеграл определяется как приращение первообразной.

3. Определение статических моментов.

1.30.Лекция 30. (2ч)

Тема: «Несобственные интегралы.»

1.30.1. Вопросы лекции

1.Несобственные интегралы первого рода.

2. Несобственные интегралы второго рода.

3. Геометрический смысл несобственных интегралов, его применение.

1.30.2. Краткое содержание вопросов

1. Несобственные интегралы первого рода.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на промежутке [a, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом первого рода* от функции f(x) на промежутке [a, ∞) (интеграл с бесконечными пределами интегрирования).Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx$.Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. В противном случае – расходится.Аналогичные $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$.

Теорема: Если для всех x (x≥a) выполняется условие $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx \ge \int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Теорема: Если для всех x (x≥a) выполняется условие $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже расходится.**Теорема:** Если $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл$\int\limits_a^\infty f(x)dx$.В этом случае интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

2. Несобственные интегралы второго рода.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на промежутке [a,c), тогда $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx$ – *несобственный интеграл второго рода* (интеграл от неограниченной функции).Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, то интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ – сходится, если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует, то $\int\limits_a^c f(x)dx$ – расходится.

Аналогично, если в точке x=a функция терпит разрыв, то $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to a+0}\int\limits_b^c f(x)dx\cdot$

Если функция f(x) имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx\cdot$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

1.31.Лекция 31. (2ч)

Тема: «Двойной интеграл.»

1.31.1.1. Вопросы лекции

1.Понятие двойного интеграла.

2. Геометрический смысл.

3. Способы вычисления двойного интеграла.

4. Перестановка пределов интегрирования.

1.31.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие двойного интеграла.

Двойной интеграл – это обобщение определенного интеграла для функции двух переменных.

Пусть в замкнутой области D задана непрерывная функция $z = f(x;y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i, площади которых ΔS_i, диаметры - d_i. В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$ и вычислим значение функции в этой точке. Составим сумму вида $\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot\Delta S_i$, которую назовем интегральной суммой.

Рассмотрим предел интегральной суммы, когда $n\to\infty$ таким образом, что $\max d_i \to 0$. Если этот предел существует, то он называется двойным интегралом от функции $z = f(x;y)$ по области D.

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum f(x_i;y_i)\cdot\Delta S_i \cdot$$

Теорема: если функция непрерывна в замкнутой области, то она интегрируема в этой области.

Замечание: из определения двойного интеграла следует, что он не зависит от способа разбиения области на части. Таким образом, область можно разбивать на площадки прямыми, параллельными координатным осям.

2. Геометрический смысл.

Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от неотрицательной функции численно равен объему цилиндрического тела.

Основные свойства двойного интеграла:

1. $\iint_D c\cdot f(x;y)dxdy = c\cdot\iint_D f(x;y)dxdy$.

2. $\iint_D (f(x;y)\pm g(x;y))dxdy = \iint_D f(x;y)dxdy \pm \iint_D g(x;y)dxdy$.

3. Если $D = D_1\cup D_2$, то $\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint_{D_2} f(x;y)dxdy$.

4. Знак двойного интеграла определяется знаком подынтегральной функции.

5. Больше функции соответствует больший двойной интеграл.

6. Если функция непрерывна в замкнутой области D, то в этой области существует такая точка $(x_0;y_0)$, что $\iint_D f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0)\cdot S$. Величину $f(x_0;y_0)$ называют средним значением функции двух переменных в области D.

3. Способы вычисления двойного интеграла.

Способы вычисления двойного интеграла

1. Область, правильная в направлении оси ординат: любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Пусть область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$$

2. Область, правильная в направлении оси абсцисс: любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Пусть область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $y = a$ и $y = b$, $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x;y)dx$$

4. Перестановка пределов интегрирования.

Способы вычисления двойного интеграла

1. Область, правильная в направлении оси ординат: любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Пусть область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$$

2. Область, правильная в направлении оси абсцисс: любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает границу области не более чем в двух точках.

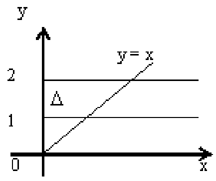
Пусть область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $y = a$ и $y = b$, $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x;y)dx$$

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c<d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤Ψ(y)), то*

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_\Delta (x^2 + y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.



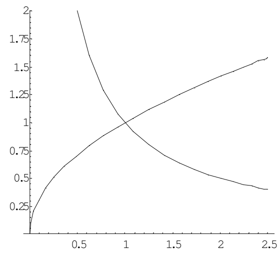
$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^x (x^2+y^2)dx=\int\limits_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^y dy=\int\limits_1^2\frac{4}{3}y^3dy=\frac{4}{12}y^4\Big|_1^2=\frac{64}{12}-\frac{4}{12}=5$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y², y = 2.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx=\int\limits_0^2(x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2}dy=$$

$$=\int\limits_0^2(y^6-y^5+y^3)dy=\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{244}{21}$$

<u>Пример.</u> Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta}y\ln xdxdy$, если область интегрирования ограничена линиями xy=1, y = $\sqrt{x}$, x = 2.



$$\iint\limits_{\Delta}y\ln xdxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}}y\ln xdy=\int\limits_1^2\frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^2\left[\frac{x\ln x}{2}-\frac{\ln x}{2x^2}\right]dx$$

1. $$\int x\ln xdx=\begin{Bmatrix} u=\ln x; & dv=xdx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=\frac{x^2}{2}\end{Bmatrix}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4};$$

$$\int\limits_1^2 x\ln xdx=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

2.

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{Bmatrix} \ln x=t; & x=e^t; \\ dt=\frac{1}{x}dx; & \end{Bmatrix}=\int\frac{txdt}{x^2}=\int\frac{tdt}{x}=\int e^{-t}tdt=\begin{Bmatrix} u=t; & du=dt; \\ dv=e^{-t}dt; & v=-e^{-t};\end{Bmatrix}=-te^{-t}+$$

$$+\int e^{-t}dt=-te^{-t}-e^{-t}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x};$$

$$\int\limits_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\left(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}+1=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2};$$

3. $$\iint\limits_{\Delta}y\ln xdxdy=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5\ln 2}{2}-\frac{5}{4}\right)=\frac{5\ln 2}{4}-\frac{5}{8}.$$

1.32. Лекция 32. (2ч)

Тема: « Приложения двойного интеграла»

1.32.1. Вопросы лекции

1.Вычисление площади плоской кривой.

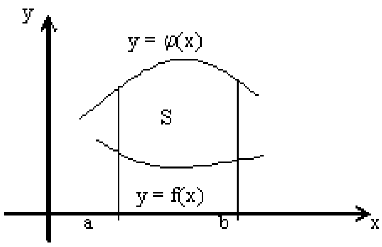
2. Нахождение объема пространственного тела.

3. Нахождение координат центра тяжести однородной пластины.

1.32.2.Краткое содержание вопросов

1. Вычисление площади плоской кривой.

1) Вычисление площадей в декартовых координатах.

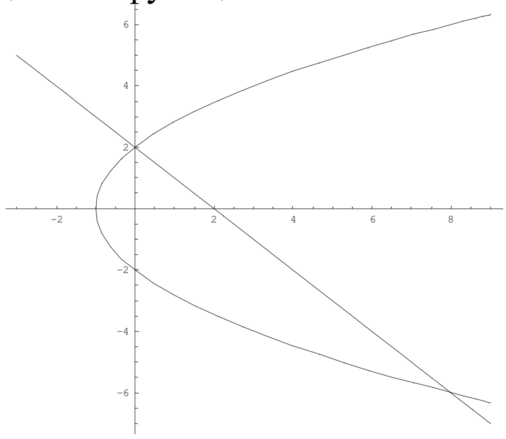


Площадь S, показанная на рисунке может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \int_{a}^{b}\int_{f(x)}^{\varphi(x)} dydx$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Построим графики заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от $x = \frac{y^2 - 4}{4}$ до $x = 2 - y$, а по оси Оу – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна: S= $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dxdy = \int_{-6}^{2}\left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right)dy = \int_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)dy = \frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\left(-y^2 - 4y + 12\right)dy =$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y\right)\Big|_{-6}^{2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3} - 8 + 24 - \left(\frac{36\cdot 6}{3} - \frac{4\cdot 36}{2} - 12\cdot 6\right)\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(88 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}$$

2) Вычисление площадей в полярных координатах.

$$S=\iint_{\tau}\rho d\rho d\theta=\iint_{\Delta}dydx=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)}\rho d\rho d\theta$$ Вычисление площади кривой поверхности.

Если поверхность задана уравнением: f(x, y, z) = 0, то площадь ее поверхности находится по формуле:

$$S=\iint_{\Delta}\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dydx$$

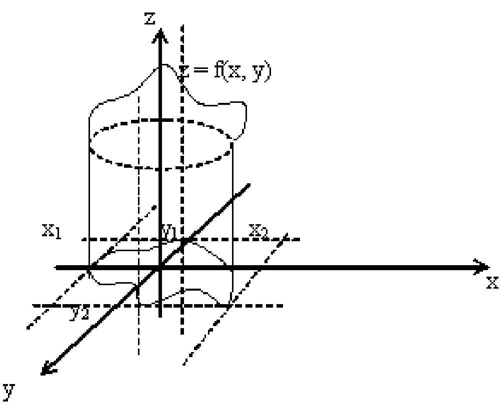
Если поверхность задана в неявном виде, т.е. уравнением z = φ(x, y), то площадь этой поверхности вычисляется по формуле:

$$S=\iint_{\Delta}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dydx$$

2. Нахождение объема пространственного тела.

Пусть тело ограничено снизу плоскостью xy, а сверху– поверхностью z = f(x,y), а с боков – цилиндрической поверхностью.

Такое тело называется **цилиндроид.**



V = $\lim_{\Delta x\to 0}\sum\sum_{\Delta} z\Delta y\Delta x=\iint_{\Delta}zdydx=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}zdydx$

<u>Пример.</u> Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; x + y + z =3 и плоскостью XOY.

Пределы интегрирования: по оси OX: $y_1=-\sqrt{1-x^2}$; $y_2=\sqrt{1-x^2}$; по оси OY: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x}}(3-x-y)dydx=3\pi;$$

3. Нахождение координат центра тяжести однородной пластины.

Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур.

Пусть площадь плоской фигуры (область Δ) ограничена линией, уравнение которой f(x,y) = 0. Тогда моменты инерции этой фигуры находятся по формулам:

- относительно оси Ox: $I_x = \iint\limits_{\Delta} y^2 dydx$

- относительно оси Oy: $I_y = \iint\limits_{\Delta} x^2 dydx$

- относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_{\Delta}(x^2 + y^2)dydx$ - этот момент инерции называют еще **полярным моментом инерции.**

Вычисление центров тяжести площадей плоских фигур.

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wxdydx}{\iint\limits_{\Delta} wdydx}; \qquad y_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wydydx}{\iint\limits_{\Delta} wdydx};$$

здесь w – поверхностная плотность ($dm = wdydx$ –масса элемента площади).

Вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла.

Если поверхность тела описывается уравнением f(x, y, z) = 0, то объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} dzdydx$$

при этом z_1 и z_2 – функции от x и y или постоянные, y_1 и y_2 – функции от x или постоянные, x_1 и x_2 – постоянные.

Координаты центра тяжести тела.

$$x_C = \frac{\iiint\limits_{r} wxdv}{\iiint\limits_{r} wdv}; \quad y_C = \frac{\iiint\limits_{r} wydv}{\iiint\limits_{r} wdv}; \quad z_C = \frac{\iiint\limits_{r} wzdv}{\iiint\limits_{r} wdv};$$

Моменты инерции тела относительно осей координат.

$$I_x = \iiint\limits_{r}(y^2 + z^2)wdv; \quad I_y = \iiint\limits_{r}(x^2 + z^2)wdv; \quad I_z = \iiint\limits_{r}(x^2 + y^2)wdv;$$

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей.

$$I_{xy} = \iiint\limits_{r} z^2 wdv; \quad I_{xz} = \iiint\limits_{r} y^2 wdv; \quad I_{yz} = \iiint\limits_{r} x^2 wdv;$$

Момент инерции тела относительно начала координат.

$$I_0 = \iiint\limits_{r}(x^2 + y^2 + z^2)wdv;$$

Вычисление массы неоднородного тела.

$$M = \iiint\limits_{r} wdv;$$

Теперь плотность w – величина переменная.

1.33.Лекция 33. (2ч)

Тема: «Основные понятия дифференциальных уравнений»

1.33.1. Вопросы лекции

1.Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

2. Частные и общие решения.

3. ДУ первого порядка. Задача Коши.

4. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.

1.33.2. Краткое содержание вопросов

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле: $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V,* которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е. $V = \frac{dS}{dt}$; $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$;

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

2. Частные и общие решения.

Определение.Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Определение. **Общим решением** дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = φ(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = φ(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием

Определение. **Интегральной кривой** называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

3. ДУ первого порядка. Задача Коши.

Определение. **Дифференциальным уравнением первого порядка** называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале

$a<x<b$. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную С.

<u>Определение.</u>Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида у = φ(х, C_0), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

<u>Теорема Коши.</u> (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, *то какова бы не была точка* (x_0, y_0) *в области D, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y' = f(x, y)$, *определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *принимающее при* $x = x_0$ *значение* $\varphi(x_0) = y_0$, *т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.*

<u>Определение.</u>Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

4. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.

<u>Определение.</u> Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде $y' = \alpha(x)\beta(y)$.

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $X(x)dx + Y(y)dy = 0;$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$. $\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$ $\frac{dy}{y^2 + 1} = xdx$ $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int xdx$;

$arctgy = \frac{x^2}{2} + C$; $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x_0 и y_0. Тогда:

$$arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$.

1.34.Лекция 34. (2ч)

Тема: «Дифференциальные уравнения первого порядка»

1.34.1. Вопросы лекции

1.ЛДУ первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли

2. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

1.34.2. Краткое содержание вопросов

1. ЛДУ первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли

<u>Определение.</u> Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде: $y' + P(x)y = Q(x)$,

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и*Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a<x<b.

<u>Метод Бернулли</u> (Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем: $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1\cdot 2x^2;\quad y = 2\cdot x^2;$ $y = 2x\cdot x;$ и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме: $\frac{du}{u} = -P(x)dx;\qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx;\qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$

$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx;\qquad u = Ce^{-\int P(x)dx};\quad C = 1/C_1;$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u*в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю. $Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x);\qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$

Интегрируя, можем найти функцию *v*: $Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$; $v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2$;

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем: $y = uv = Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$

Окончательно получаем формулу: $y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right)$, C_2- произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче: $y'+P(x)y=Q(x)$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем. $y'+P(x)y=0$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения: $y=C_1e^{-\int P(x)dx}$.

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}+C_1(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot(-P(x));$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}-C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)\ \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}=Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$dC_1(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$ Интегрируя, получаем: $C_1=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C;$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

2. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

<u>Определение.</u>Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y'+Py=Q\cdot y^n$,

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z=\frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n. $\frac{y'}{y^n}+P\frac{1}{y^{n-1}}=Q;$

Применим подстановку, учтя, что $z'=-\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}}\cdot y'=-\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1}+Pz=Q\ z'-(n-1)Pz=-(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде: $z=e^{-\int Pdx}\left(\int Q_1e^{\int P_1dx}dx+C\right)$

$$Q_1=-(n-1)Q;\qquad P_1=-(n-1)P.$$

1.35-36.Лекция 35,36. (4ч)

Тема: «Дифференциальные уравнения первого порядка «

1.35-36.1. Вопросы лекции:

1.Однородные ДУ и приводящиеся к ним.

2. ДУ в полных дифференциалах.

1.35-36.2. Краткое содержание вопросов

1. Однородные ДУ и приводящиеся к ним.

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x,y)=x^3+3x^2y$?

$$f(tx,ty)=(tx)^3+3(tx)^2ty=t^3x^3+3t^3x^2y=t^3(x^3+3x^2y)=t^3f(x,y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y'=f(x,y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y'=f(x,y)$.

Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t=\frac{1}{x}$.

Получаем: $f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u=\frac{y}{x}$, т.е. $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(u)$;

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде: $y'=\varphi(u)$

Далее заменяем $y = ux$, $y'=u'x+ux'$.

$$u'x+ux'=\varphi(u);\quad u'x+u=\varphi(u);\quad u'=\frac{\varphi(u)-u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

2. ДУ в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x,y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C.$

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции *u*;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции *u*, то можно записать:

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$.

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется **условием тотальности.**

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u*.

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$:

$$u = \int M(x,y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину C, а некоторую функцию C(y), т.к. при интегрировании переменная *y* полагается постоянным параметром.

Определим функцию C(y).

Продифференцируем полученное равенство поy.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от x. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по x равна нулю.

$$[C'(y)]_x' = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$
$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию С(у):

$$C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции u, получаем:

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy = C.$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Проверим условие тотальности: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y} = 10x;$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2-1)}{\partial x} = 10x.$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию u.

$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1;\ C'(y) = -1;\quad C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1;$

Итого, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1.$

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2 y - y = C.$$

Дифференциальные уравнения первого порядка			
I. Уравнения с разделяющимися переменными	II. Уравнения, однородные относительно переменных	III. Уравнения в полных дифференциалах	IV. Линейные дифференциальные уравнения
$y' = f(x)\, g(y)$	$y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — однородная функция нулевого порядка	$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$, где $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$	$y' + P(x)\, y = Q(x)$
1. $y' = \frac{dy}{dx}$. 2. Разделить переменные. 3. Проинтегрировать.	1. Замена $\frac{y}{x} = u$, где $u = u(x)$. 2. После подстановки получим уравнение с разделяющимися переменными. 3. Решив его, заменим $u = \frac{y}{x}$.	1. Проверяем $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. 2. Решением дифференциального уравнения является $u(x, y)$, где $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.	1. $y' + P(x)\, y = 0$ — линейное однородное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. 2. $y' + P(x)\, y = Q(x)$ • метод вариации произвольной постоянной; • метод Бернулли: $y = u(x) \cdot v(x)$.

1.37.Лекция 37. (2ч)

Тема: «ДУ высших порядков»

1.37.1. Вопросы лекции:

1.Основные понятия.

2. ДУ, допускающие понижение порядка

1.37.2. Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия.

<u>Определение.</u>Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$: $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

<u>Определение.</u> Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

<u>Определение.</u> Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

<u>Теорема Коши.</u> (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n-1) –й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$*, то какова бы не была точка (* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$*) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$*, определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0*, удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

2. ДУ, допускающие понижение порядка

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

<u>Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.</u>

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a<x<b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

………………………………………………………………

$$y = \int dx \int dx .... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k – 1* включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на *k* единиц. Для этого производят замену переменной: $y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением: $z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$

Делая обратную подстановку, имеем: $y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$

Интегрируя полученное соотношение последовательно *k* раз, получаем окончательный ответ: $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$

<u>Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.</u>

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p.$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем: $F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\varPhi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\varPhi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

1.38.Лекция 38. (2ч)

Тема: «ЛОДУ второго порядка»

1.38.1. Вопросы лекции

1.Линейно зависимые и линейно независимые функции.

2. ФСР. Определитель Вронского.

3. Структура общего решения ЛОДУ.

4. Характеристическое уравнение.

1.38.2. Краткое содержание вопросов

1. Линейно зависимые и линейно независимые функции.

Определение.Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'',..., y^{(n)}$ вида: $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$;

где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим *L(y)*. $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$;

Определение.Если $f(x) = 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется **линейным однородным** уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, ... p_n$ – постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами**.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами**.** Рассмотрим уравнение вида

$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

Определение. Выражение $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ называется **линейным дифференциальным оператором**.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

1) $L(Cy) = CL(y)$;

2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1, где*C* – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

2. ФСР. Определитель Вронского.

Определение.Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения *n* –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система *n* линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение. Если из функций y_i составить определитель *n* – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского.**

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

Теорема.*Если функции* $y_1, y_2, ..., y_n$ *линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.*

Теорема.*Если функции* $y_1, y_2, ..., y_n$ *линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Теорема.*Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения* $y_1, y_2, ..., y_n$ *была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.*

Теорема.*Если* $y_1, y_2, ..., y_n$ *- фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$,

где C_i –постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Структура общего решения ЛОДУ.

Если $y_1 = y_1(x)$ — *частное решение однородного линейного уравнения* $L(y) = 0$, то $y = Cy_1$, где C — произвольная постоянная, тоже является решением этого уравнения.

Таким образом, зная одно частное решение, можем (без квадратур!) получить целое (однопараметрическое) семейство решений.

Это свойство иногда выражают так: *решение однородного линейного уравнения определяется с точностью до постоянного множителя.*

Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — *частные решения однородного уравнения* $L(y) = 0$, то их сумма $y = y_1 + y_2$ тоже является решением этого уравнения.

Наличие свойств 1 и 2 говорит о том, что множество решений однородного линейного уравнения является *линейным пространством*.

Если $y_1, y_2, \dots, y_m$ — *частные решения уравнения* $L(y) = 0$, то $y = \sum_{k=1}^{m} C_k y_k$,

где $C_1, C_2, \dots, C_m$ — произвольные постоянные, тоже является решением этого уравнения.

4. Характеристическое уравнение.

$y'' + py' + qy = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Вид общего решения зависит от решения характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Если корни k_1 *и* k_2 действительны и различны, то общее решение имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. Если корни k_1 *и* k_2 действительны и совпадают (равны k), то общее решение имеет вид $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$. Если корни комплексно -сопряженные ($k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$), то общее решение имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

1.39.Лекция 39. (2ч)

Тема: «ЛНДУ второго порядка «

1.39.1.Вопросы лекции

1.Структура общего решения ЛНДУ.

2. Метод Лагранжа.

3. ЛНДУ второго порядка с правой частью специального вида. Подбор частного решения.

1.39.2. Краткое содержание вопросов

1.Структура общего решения ЛНДУ

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$.

С учетом обозначения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = L(x)$ можно записать: $L(x) = f(x)$.

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

<u>**Теорема.**</u>*Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$ *в некоторой области есть сумма* ***любого*** *его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.*

2. Метод Лагранжа

На практике удобно применять метод **вариации произвольных постоянных**.

Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения: $y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i;$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0.$

$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$ $y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1; \; y = A\cos x + B\sin x;$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$

Составляем систему уравнений: $\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$

Решим эту систему: $\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию $A(x)$.

$$A(x) = \int (2\sin^2 x\cos x - x\sin x)dx = 2\int \sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx =$$

$$=\left.\begin{cases} u=x; & dv=\sin x dx; \\ du=dx; & v=-\cos x \end{cases}\right\} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Теперь находим *B(x)*.

$$B(x)=\int x\cos x dx - 2\int \cos^2 x \sin x dx = \left.\begin{cases} u=x; & dv=\cos x dx; \\ du=dx; & v=\sin x; \end{cases}\right\} = x\sin x - \int \sin x dx + \frac{2}{3}\cos^3 x =$$

$$=\frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y=\frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2\sin x =$$

$$=\frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Окончательный ответ: $y=\frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

3. ЛНДУ второго порядка с правой частью специального вида. Подбор частного решения.Вид частного решения зависит от вида правой части.

Вид правой части f(x)	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_m(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$R_m(x)$
	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r R_m(x)$
$e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}R_m(x)$
	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x}R_m(x)$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$	Число βi не является корнем характеристического уравнения	$R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x$
	Число βi является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r\left(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x\right)$
$e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right]$	Число $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x\right)$
	Число $\alpha\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x\right)$

Здесь $P_m(x)$ *и* $Q_s(x)$ – известные многочлены степеней m и s.

$R_l(x)$ *и* $T_l(x)$ – неизвестные многочлены, определяемые подстановкой частного решения в дифференциальное уравнение, $l=\max\{m,s\}$.

1.40.Лекция 40. (2ч)

Тема: « Знакоположительные ряды»

1.40.1. Вопросы лекции

1.Понятие числового ряда.

2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов.

3. Свойства рядов.

4. Признаки сходимости знакоположительных рядов.

5. Эталонные ряды.

1.40.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие числового ряда.

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**. $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов. Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

Теорема. *Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема. *Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна S + σ.* $\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

4. Признаки сходимости знакоположительных рядов.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами (знакоположительных рядов), т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами

Первый признак сравнения: Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), причем для любого n верно неравенство $u_n \le v_n$. Тогда: если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1); если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

Второй (предельный) признак сравнения: Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ne 0$, то ряды одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Признак Даламбера: Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения (n+1)-го члена ряда к n-му члену $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=d$. Тогда, если d<1, то ряд сходится; если d>1, то ряд расходится; если d=1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Коши: Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=k$. Тогда, если k<1, то ряд сходится; если k>1, то ряд расходится; если k=1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Интегральный признак сходимости: Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого положительны и не возрастают, то есть $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \cdots \ge u_n \ge \cdots$, а функция f(x), определенная при $x \ge 1$, непрерывная и возрастающая и $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2$, $\ldots$, $f(n)=u_n, \ldots$. Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

5. Эталонные ряды.

«Эталонные» ряды для сравнения

$\sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$ – геометрический ряд, сходится при $|q|<1$, расходится при $|q| \ge 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots$ – гармонический ряд, сходится при $\alpha > 1$, расходится при $0<\alpha \le 1$.

1.41.Лекция 41. (2ч)

Тема: «Знакочередующиеся ряды»

1.41.1.1. Вопросы лекции

1.Понятие знакочередующегося ряда.

2. Признак Лейбница.

3. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости.

4. Абсолютная и условная сходимость.

1.41.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие знакочередующегося ряда.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ...$ где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,...$

2. Признак Лейбница.

Признак Лейбница: Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине, то есть $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \cdots$;

2) предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма ряда не превосходит первого члена: $S \le u_n$.

Признак сходимости знакочередующегося ряда: знакочередующийся ряд $u \; - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa+1} u_\kappa$ сходится, если $\lim_{\kappa\to\infty} u_\kappa = 0$ и $u_\kappa > u_{\kappa+1}$ $(\kappa = 1, 2, ...)$.

3. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков). $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда $|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

<u>**Теорема.**</u>*Из сходимости ряда* $|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *следует сходимость ряда* $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

4. Абсолютная и условная сходимость.

Ряд с произвольными членами $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_\kappa|$.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_\kappa|$ расходится, то первый ряд называется условно сходящимся.

<u>Свойства абсолютно сходящихся рядов.</u>

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k, \quad i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

1.42.Лекция 42. (2ч)

Тема: Функциональные ряды

1.42.1. Вопросы лекции

1.Понятие функционального ряда.

2. Равномерная сходимость.

3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.

4. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд.

5. Применение рядов.

1.42.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие функционального ряда.

Функциональный ряд: $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_\kappa(x) + ... = \sum_{\kappa=1}^{\infty} u_\kappa(x)$.

Этот ряд сходится при $x = a$, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(a)$.

Область сходимости функционального ряда – это множество тех значений *x*, при которых ряд сходится.

Определение. Совокупность всех значений *x*, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

2. Равномерная сходимость.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема.(Критерий Коши равномерной сходимости ряда) *Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при n>N и любом целом p>0 неравенство $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$*

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

Теорема. (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса) (Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами : $M_1 + M_2 + ... + M_n + ...$

т.е. имеет место неравенство: $|u_n(x)| \le M_n$.

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$.

3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.

<u>Определение.</u>Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

<u>Теорема.</u>*Если степенной ряд* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| > |x_1|$.

<u>Следствие.</u> Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал (-R, R) называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right|$

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x);\quad \int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(x)dx .$$

Радиус сходимости этих рядов, полученным почленным дифференцированием и интегрированием, остается без изменения.

4. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд.

Ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots .$$

Ряд Маклорена: $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$

Биномиальный ряд: $(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \ldots + C_m^n x^n + \ldots$, где $C_m^n = \dfrac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}$.

При m целом и положительном ряд конечен, в противном случае – бесконечен. Ряд сходится в промежутке $(-1;\,1)$.

Частные случаи этого ряда:

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ сходится при условии $-1 < x < 1$;

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ сходится при условии $-1 < x < 1$;

$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2\cdot 4}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots$ сходится при условии $-1 \le x \le 1$;

$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4+...$ сходится при условии $-1\le x\le 1$

Разложение в степенной ряд элементарных функций:

$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...$ сходится при всех значениях x;

$a^x=1+\frac{x}{1}\ln a+\frac{x^2}{2}(\ln a)^2+\frac{x^3}{3}(\ln a)^3+...$ сходится при всех значениях x;

$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$ сходится при всех значениях x;

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$ сходится при всех значениях x;

$tgx=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+...$ сходится при $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;

$ctgx=\frac{1}{x}-(\frac{1}{3}x+\frac{1}{45}x^3+\frac{2}{945}x^5+\frac{2}{4725}x^7+...)$ сходится при $-\pi<x<\pi$;

$\ln(1\pm x)=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\frac{x^5}{5}-...$ сходится при $-1<x<1$;

$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right)$ сходится при $-1<x<1$;

$\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+...\right]$ сходится при всех положительных значениях x;

$arc\sin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+...$ сходится при $-1\le x\le 1$;

$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...$ сходится при $-1\le x\le 1$.

5. Применение рядов

Задача. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin 2x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Предварительно представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда. Используя известное разложение в степенной ряд функции $\sin x$, будем иметь

$\sin 2x=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+...,$

тогда $\frac{\sin 2x}{x}=2-\frac{2^3x^2}{3!}+\frac{2^5x^4}{5!}-\frac{2^7x^6}{6!}+...$;

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin 2x}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{2^3x^2}{3!}+\frac{2^5x^4}{5!}-\frac{2^7x^6}{7!}+...\right)dx=\left[2x-\frac{2^3}{3!}\frac{x^3}{3}+\frac{2^5}{5!}\frac{x^5}{5}-\frac{2^7}{7!}\frac{x^7}{7}+...\right]_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-\frac{1}{7!\cdot 7}+...=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}+...$$

Мы получили знакочередующийся ряд, который удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Так как в полученном ряде четвертый член ряда по абсолютному значению меньше 0,001, то ограничиваемся только первыми тремя членами. Итак,

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 1 - 0,0556 + 0,0017 \approx 0,946 \cdot$$

1.43.Лекция 43. (2ч)

Тема: « Основы теории вероятностей «

1.43.1. Вопросы лекции

1.Комбинаторика.

2. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.

3. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.

4. Решение задач на нахождение вероятности.

1.43.2. Краткое содержание вопросов

1.Комбинаторика.

При решении некоторых задач на определение вероятности применяются формулы из теории соединений. Для справок приводим основные определения и формулы.

Пусть имеется некоторая совокупность предметов какой угодно природы. Из этой совокупности предметов можно составить отдельные группы, отличающиеся одна от другой либо порядком этих предметов, либо самими предметами, либо тем и другим сразу. Эти группы называются *соединениями*. Предметы, из которых составляются соединения, в математике принято называть *элементами*. Пусть количество всех предметов (всех элементов), из которых составляются соединения, равно числу n, а число элементов в каждом соединении равно m. очевидно, что число m не может быть больше числа n. Различают три вида соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Размещениями из nразличных элементов по m называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов (из данных n элементов) и отличается от любого другого или составом элементов, или порядком расположения этих элементов. Число всевозможных размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m, где n есть число всех элементов данной совокупности, а m – число элементов, входящих в каждое размещение. Число всевозможных размещений из n элементов по m вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-m+1)$$

***Перестановками* из данных n элементов называются соединения, каждое из которых содержит все n данных элементов и отличается от любого другого только порядком расположения этих элементов.**

Число всевозможных перестановок из n элементов принято обозначать символом P_n. Перестановки можно рассматривать как частный случай размещений, когда число элементов в каждом соединении равно числу всех элементов, то есть когда $m = n$. Поэтому

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)...(n-n+1)$$

Если переставить множители в обратном порядке, то получим:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Итак, число всех перестановок из данных n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно. Такое произведение сокращенно обозначают символом $n!$ (читается n факториал). Следовательно, $P_n = n!$.

Сочетаниями из данных n элементов по m называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов (из данных n элементов) и отличается от любого другого составом элементов. Порядок расположения при этом не имеет значения. Число сочетаний из n элементов по m принято обозначать символом C_n^m. Это число вычисляется по формуле $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$ или, используя формулы для вычисления числа размещений и числа перестановок , получим: $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}$

Если правую часть (3) умножить и разделить на произведение всех натуральных чисел от 1 до (n-m) включительно, то есть на (n-m)!, то в числителе получим n! и формула примет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$. Следует иметь в виду, что 0!=1.

2. Испытание и событие. Виды событий, их классификация.

Под испытанием будем понимать опыт, эксперимент, любое действие, приводящее к возникновению определенной совокупности условий. Событием называется результат всякого испытания. Все события делятся на достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие — это событие, которое обязательно наступает в данном испытании.

Невозможное — это событие, которое никогда не наступает в данном испытании.

Случайное событие – это событие, которое в данном испытании может наступить или не наступить.

Случайные событие называются несовместными в данном испытании, если никакие два из них в этом испытании не могут наступить одновременно.

Случайные события образую полную группу, если являются всеми возможными результатами данного испытания.

Случайные события называются противоположными в данном испытании, если они несовместны и образуют полную группу.

Рассмотрим полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий. Такие события будут называться случаями, шансами или исходами.

События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно является более возможным, чем другое.

3. Понятие вероятности случайного события. Свойства вероятности.

Классическое определение вероятности события. Вероятностью события А называется отношение: $P(A) = \frac{m}{n}$,

где m – число благоприятствующих случаев (исходов), а n – число всех возможных случаев (исходов), образующих полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий.

Если какому-либо событию благоприятствует все n случаев, образующих полную группу равновозможных, несовместных, случайных событий, то оно является достоверным ($p=1$). Событие, которому не благоприятствует ни один из n случаев, является невозможным ($p=0$).

Следовательно, $0 \le P(A) \le 1$.

Ограниченность классического определения вероятности

Классическая формула вероятности события применяется для непосредственного подсчета вероятностей тогда, когда задача сводится к «схеме случаев». Другими словами классическое определение предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно, то есть далеко не всякий опыт может быть сведен к «схеме случаев». Следовательно, существует класс событий, вероятности которых нельзя вычислить по классической формуле. Например, бросается несимметричная игральная кость. Какова вероятность выпадения нужной грани?

Часто так же невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных исходов или указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными.

Указанные недостатки могут быть преодолены введением геометрической и статистической вероятностей.

Геометрические вероятности

Геометрической вероятностью называют вероятность попадания наудачу брошенной точки в область (отрезок, часть плоскости, часть пространства).

Пусть отрезок *l* составляет часть отрезка *L*. На отрезок *L* наудачу поставлена точка. Вероятность попадания точки на отрезок *l* пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L: $P = \frac{\text{длина l}}{\text{длина L}}$.

Пусть плоская фигура *g* составлять часть плоской фигуры *G*. На *G* наудачу брошена точка. Вероятность попадания брошенной точки на *g* пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно *G*, ни от формы *g*: $P = \frac{\text{площадьg}}{\text{площадьG}}$

По аналогии через отношение объемов определяется вероятность попадания наудачу брошенной точки в часть пространства.

Статистическая вероятность события

Введем еще одну количественную оценку возможности появления события в данном испытании, корнями уходящую в опыт, эксперимент.

Относительной частотой наступления события А называется отношение $W(A) = \frac{m}{n}$,

где *n* – число проведенных опытов (испытаний), а *m* – число испытаний, в которых событие А наступило.

Заметим, что классическая формула не требует проведения испытаний в действительности, $P(A)$ вычисляется до опыта. Для нахождения относительной частоты испытания должны быть проведены, либо возможно их проведение, $W(A)$ вычисляют после опыта.

При небольшом числе опытов W носит случайный характер и может изменяться. Например, при 10 бросаниях монеты герб может появиться 2 раза, а может 8 раз.

Но при увеличении числа опытов частота утрачивает случайный характер, случайные причины, влияющие на результат каждого отдельного опыта, взаимно «гасят» друг друга и W приближается к некоторой средней, постоянной величине.

Если в одинаковых условиях производят серии опытов и в каждой серии число испытаний довольно велико, то W обнаруживает свойство устойчивости. В таком случае W или близкое к ней число принимают за статистическую вероятность события.

Все свойства вероятности, вытекающие из классического определения, распространяются и на статистическое определение вероятности события.

Для существования статистической вероятности события требуется:

1) возможность, хотя бы принципиальная, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие А наступает или нет;

2) устойчивость относительных частот в различных сериях из достаточно большого числа испытаний.

Например, по данным шведской статистики приводится относительная частота рождения девочек по месяцам года: 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Значение относительной частоты колеблется около числа 0,482, его можно принять за статистическую вероятность рождения девочки. Статистические данные других стран дают примерно те же значения W и ту же статистическую вероятность.

Рассмотрим другой пример:

Число бросаний монеты	Число появлений герба	W
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Данные таблицы показывают как с увеличением числа испытаний «уточняется» значение относительной частоты.

Недостатком статистического определения является неоднозначность выбора значения относительной частоты при возникновении свойства устойчивости.

При практическом применении вероятностных методов исследования необходимо понимать, принадлежит ли исследуемое случайное явление к категории массовых, для которых выполняется свойство устойчивости частоты и понятие вероятность имеет глубокий практический смысл.

Между относительной частотой события и классической вероятностью существует глубокая, органичная связь. Получая вероятность некоторого события, мы не можем придать этому числу иного реального, практического смысла, чем относительная частота появления данного события при большом числе опытов.

4. Решение задач на нахождение вероятности.

Задача. В корзине 8 красных и 12 белых шаров, наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что он красный? Какова вероятность того, что он белый?

Испытание: извлечение шара из корзины.

Событие А: появление шара красного цвета.Событие В: появление шара белого цвета.

События А и В – противоположные в данном испытании. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$; $P(B)=1-P(A)=\frac{3}{5}$.

Задача. Из колоды в 56 карт вынимается одна карта. Какова вероятность того, что она пиковой масти?

Испытание: извлечение карты из колоды.

Событие А: появление пиковой масти. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

Задача. Одновременно подбрасывают две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах сразу?

Испытание: подбрасывание монет (одновременно).

Событие А: появление герба на двух монетах сразу.

Составим схему возможных случаев:

Первая монета	Вторая монета
герб	герб
герб	цифра
цифра	герб
цифра	цифра

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$.

Задача. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу, попадет в кольцо, образованное двумя окружностями с радиусами 5 и 10 см.

Площадь кольца (фигура g): $S_g=\pi\left(10^2-5^2\right)=75\pi$

$S_G = \pi \cdot 10^2 = 100\pi \;\; P = \dfrac{75\pi}{100\pi} = 0,75$

1.44.Лекция 44. (2ч)

Тема: «Основные теоремы теории вероятностей»

1.44.1. Вопросы лекции

1.Сумма и произведение событий.

2. Теоремы сложения и умножения.

3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

1.44.2. Краткое содержание вопросов

1. Сумма и произведение событий.

Суммой двух событий А и В называется новое событие С, состоящее в появлении или события А, или события В, или событий А и В одновременно.

Суммой нескольких событий называется новое событие, состоящее в появлении хотя бы одного из исходных событий.

Произведением (совмещением) двух событий А и В называют новое событие С, состоящее в совместном появлении события А и события В одновременно.

Произведением нескольких событий называют новое событие, состоящее в одновременном появлении всех исходных событий.

2. Теоремы сложения и умножения.

Теорема (о сложении вероятностей несовместных событий).

Пусть события А и В несовместны в данном испытании (явлении, опыте), причем вероятности этих событий известны.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Формула из теоремы справедлива для любого числа попарно несовместных слагаемых: $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Следствие. Если случайные события $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то справедливо равенство:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

Случайные события А и В называются совместными, если в данном испытании могут наступить оба этих события, т.е. произойдет совмещение событий А и В.

Событие, заключающееся в совмещении событий А и В, будем обозначать (А и В) или (АВ).

Теорема (о сложении вероятностей совместных событий).

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совмещения:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Событие А называется независимым от события В, если вероятность появления события А не зависит от того, наступило событие В в данном испытании или нет.

Теорема (об умножении вероятностей независимых событий).

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Замечание. Равенство из теоремы справедливо для любых *n* независимых событий: $P(A_1\cdot A_2\ \ldots\ A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$

Замечание. С учетом теоремы об умножении вероятностей теорема о сложении вероятностей совместных событий записывается следующим образом: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$,

если события А и В – совместны, но независимы.

Событие А называется зависимым от события В, если вероятность появления события А зависит от того, наступило событие В в данном испытании или нет.

Вероятность события А, найденную при условии, что наступило событие В ($P_B(A)$), будем называть условной вероятностью события А при условии В.

Например, в урне 3 белых и 2 черных шара. Наудачу вынимают один шар, затем еще один. Событие В: появление белого шара при первом вынимании; событие А: появление белого шара при втором вынимании. Тогда $P_B(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Теорема (об умножении вероятностей зависимых событий). Вероятность совмещения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную в предположении, что первое событие наступило:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Теорема (формула полной вероятности)

Пусть $B_1, B_2, ..., B_n$ - образуют полную группу несовместных событий, т.е. $\sum_{i=1}^{n} P(B_i)=1$. Если событие А может осуществляться только при условии совмещении с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, то

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

Вероятность гипотез. Формула Байеса

Пусть $B_1, B_2, ..., B_n$ - полная группа несовместных событий, $P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$ - соответствующие вероятности. Событие А может наступить только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые мы будем называть гипотезами. Тогда справедлива формула полной вероятности: $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$.

Допустим, что событие А уже наступило. Это изменит вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$. Требуется определить условные вероятности этих гипотез $P_A(B_1), ..., P_A(B_n)$, в предположении, что событие А уже наступило.

Найдем

$$P(A\cdot B_1)=p(B_1)\cdot P_{B_1}(A)=p(A)\cdot P_A(B_1)\Rightarrow P_A(B_1)=\frac{P(A\cdot B_1)}{P(A)}=\frac{p(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$$

Заменим $P(A)$ формулой полной вероятности события:

$$P_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot P_{B1}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}$$

Аналогично определяется $P_A(B_2), ..., P_A(B_n)$.

Окончательно получаем формулу Байеса или формулу из теоремы гипотез:

$$P_A(B_k)=\frac{p(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}.$$

1.45.Лекция 45. (2ч)

Тема: «Повторные испытания»

1.45.1. Вопросы лекции

1.Схема Бернулли. Формула Бернулли.

2. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

3. Формула Пуассона.

4. Интегральная теорема Лапласа.

1.45.2. Краткое содержание вопросов

1. Схема Бернулли. Формула Бернулли.

Рассмотрим методы решения задачи, в которой один и тот же опыт повторяется несколько раз. В результате каждого опыта может появиться или не появиться интересующее нас событие. Причем, нас будет интересовать не результат отдельного опыта, а результат серии опытов, а именно вероятность появления того или иного числа событий в серии независимых опытов (испытаний).

Испытания считаются независимыми, если вероятность появления события $P(A)$ в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

Пусть проводится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие А может наступить с вероятностью *p* или не наступить с вероятностью *q=1-p*.

Задача. Вычислить вероятность того, что в *n* испытаниях событие А наступит *k* раз и не наступит *(n-k)* раз, причем последовательность появления события А не важна.

Вероятность этого сложного события по теореме об умножении вероятностей независимых событий определяется как $p^k \cdot q^{n-k}$.

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний $C_n^к$. Все эти события несовместны, а вероятности их одинаковы, поэтому искомая вероятность определяется по формуле:

$$P_n(к) = C_n^к p^k \cdot q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют формулой Бернулли

2. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Если число независимых испытаний *n* достаточно велико, то вычисления по формуле Бернулли будут слишком громоздки. В таком случае формулу, хотя и асимптотическую, дает локальная теорема Лапласа.

Заметим, что для частного случая формула была найдена в 1730 году Муавром, а в 1783 году обобщена Лапласом. Поэтому теорему, о которой идет речь, иногда называют теоремой Муавра-Лапласа.

Если производится большое число независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события А постоянна и равна $p(p \neq 0,\ p \neq 1)$, то вероятность $P_n(k)$ считается приближенно по формуле:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \ \varphi(x),$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса (табулирована, четная); $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Чем больше *n*, тем точнее будет результат, полученный по формуле из локальной теоремы Лапласа.

3. Формула Пуассона.

Если число проведенных испытаний *n* очень велико, а вероятность *p*наступления события А в каждом из *n* независимых испытаний очень мала, то $P_n(k)$ вычисляется по формуле Пуассона:

$$P_n(k)\approx\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}.$$

Формула применяется, если параметр $\lambda=n\cdot p<10$.

4. Интегральная теорема Лапласа.

Во многих задачах требуется определить вероятность $P_n(k_1\le k\le k_2)$ того, что событие А наступит не менее k_1 и не более k_2 раз в *n* независимых испытаниях. Это позволяет сделать интегральная теорема Лапласа.

Если вероятность наступления события А в каждом из *n* независимых испытаний постоянна и равна $p,(p\neq 0,\, p\neq 1)$, то $P_n(k_1\le k\le k_2)$вычисляется по приближенной формуле:

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^x e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ$ - функция Лапласа (табулирована, нечетная, для $x>5 \quad \Phi(x)=0{,}5$).

1.46.Лекция 46. (2ч)

Тема: «ДСВ»

1.46.1. Вопросы лекции

1.Понятие случайной величины. Ее виды.

2. Закон распределения и многоугольник распределения ДСВ.

3. Числовые характеристики, их свойства.

1.46.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие случайной величины. Ее виды.

Рассмотрим событие: появление определения числа очков на грани игральной кости, выпавшей при бросании. При этом может появляться любое из чисел 1,2,3, … 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть случайная величина, а числа 1,2, … 6 - возможные значения этой величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает одно из всех своих возможных значений, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могли быть учтены.Обозначение: X, Y, Z, … - случайные величины; x, y, z, … - значения случайных величин.Случайные величины делятся на дискретные (ДСВ) и непрерывные (НСВ). Значения ДСВ отделены промежутками и могут быть перечислены до проведения испытания. Например, число студентов группы, успешно сдавших экзамен по математике.Значения НСВ затруднительно перечислить до испытания и отделить друг от друга, проще указать интервал, которому эти значения принадлежат.Например, скорость ветра в течение суток в данной местности или отклонение размера детали от стандарта.

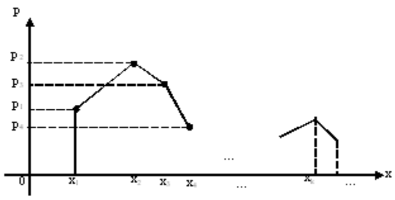
2. Закон распределения и многоугольник распределения ДСВ.

Переменная величина X, принимающая в результате испытания одно из конечной или бесконечной последовательности значений $x_1, x_2, \dots x_k$, называется дискретной, если каждому значению x_k соответствует определенная вероятность p_k того, что переменная величина X примет именно это значение.

Функциональная зависимость вероятности p_k от значения x_k называется законом распределения вероятностей ДСВ *X* (или кратко «закон распределения случайной величины»).

Возможные значения случайной величины	x_1	x_2	x_3	…	x_k	…
Вероятности этих значений	p_1	p_2	p_3	…	p_k	…

Закон распределения можно задать графически:



3. Числовые характеристики, их свойства.

Случайная величина полностью определяется законом распределения.

Однако во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать СВ полностью, исчерпывающим образом. Достаточно указать отдельные числовые параметры, характеризующие основные черты распределения. Такие параметры называются числовыми характеристиками случайной величины. Числовые характеристики задают случайную величину косвенно, описывают случайную величину суммарно. В теории вероятностей применяется большое количество числовых характеристик, имеющих различное назначение. Из них рассмотрим только некоторые, наиболее часто встречающиеся характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Имеется ДСВ *X* с соответствующим законом распределения:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Математическим ожиданием ДСВ *X* (M[x] или m_x) называют сумму произведений всех возможных значений этой величины на вероятности этих значений: $M[x] = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$, при этом $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Если значения случайной величины образуют бесконечную последовательность, то $m_x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$. Мы будем рассматривать только такие случайные величины, для которых этот ряд сходится.

Замечание. Математическое ожидание случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Вероятностный смысл M[*X*]: математическое ожидание приближенно равно (чем больше число испытаний, тем точнее) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. На числовой оси возможные значения случайной величины расположены слева и справа от M[*X*]. Поэтому M[*X*] называют центром распределения вероятностей случайной величины (точнее – абсциссой центра).

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной $M[c] = c$, где c – ДСВ, которая имеет одно возможное значение c и принимает его с *p*=1. Следовательно, $M[c] = c \cdot 1 = c$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания: $M[cX] = c \cdot M[X]$.

3. $M[X \cdot У] = M[X] \cdot M[У]$, $M[X + У] = M[X] + M[У]$ где величины *X* и *У* – независимы.

Математическое ожидание не полностью характеризует случайную величину. На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией случайное величины *X* называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right] \quad или \quad D[X] = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_x)^2 \cdot p_k$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины *X* называется характеристика $\sigma_x = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ или $\sigma[X] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 \cdot p_k}$

Для вычисления $D[X]$ удобно использовать формулу:

$$D[X] = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_x)^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot m_x \cdot p_k + \sum_{k=1}^{n} m_x^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - 2m_x \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k + m_x^2 \sum_{k=1}^{n} p_k = M[X^2] - 2m_x \cdot m_x + m_x^2 \cdot 1 = M[X^2] - m_x^2$$

Следовательно, $D[X] = M[X^2] - m_x^2$, т.е. дисперсия равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания этой случайной величины.

Свойства дисперсии:

1. $D[C] = M\left[(c - c)^2\right] = M[0] = 0$, $M[c] = c$
2. $D[CX] = C^2 \cdot D[X]$
3. $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$
4. $D[C + X] = D[C] + D[X] = 0 + D[X] = D[X]$
5. $D[X - Y] = D[X] + D[Y]$

1.47.Лекция 47. (2ч)

Тема: «Виды распределений ДСВ»

1.47.1. Вопросы лекции

1.Биномиальное распределение.
2. Распределение Пуассона.
3. Геометрическое и гипергеометрическое распределение.

1.47.2. Краткое содержание вопросов

1. Биномиальное распределение.

Если вероятность находится по формуле: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$,
где *к = 0,1,2,…*,то закон распределения называется *биноминальным*.
Для биномиального распределения:
математическое ожидание M(X) = np,дисперсия D(X) = npq,
мода np-q ≤ Mo ≤ np+p,

2. Распределение Пуассона.Если вероятность находится по формуле: $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$,где $\lambda = np$, то получаем *распределения Пуассона***.** Если известны числа λ и *k*, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.Пусть имеется некоторая последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (будем называть это потоком событий). *Интенсивность* потока (среднее число событий, появляющихся в единицу времени) равна λ. Пусть этот поток событий - *простейший* (пуассоновский), т.е. обладает тремя свойствами:

1) вероятность появления k событий за определённый промежуток времени зависит только от длины этого промежутка, но не от точки отсчёта, другими словами, интенсивность потока есть постоянная величина (свойство *стационарности*);

2) вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись события в прошлом или нет (свойство *«отсутствия последействия»*);

3) появление более одного события за малый промежуток времени практически невозможно (свойство *ординарности*).Вероятность того, что за промежуток времени t событие произойдёт k раз, равна $P_t(k) = \dfrac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$

3. Геометрическое и гипергеометрическое распределение.

Говорят, что случайная величина τ имеет геометрическое распределение с параметром p, где $0 \le p \le 1$, и пишут $\tau \in \mathrm{G}_p$, если τ принимает значения $1, 2, 3, \ldots$ с вероятностями $\mathsf{P}(\tau = k) = p(1-p)^{k-1}$. Случайная величина τ с таким распределением имеет смысл *номера первого успешного испытания в схеме Бернулли с вероятностью успеха* p Таблица распределения τ имеет вид

τ	1	2	...	k	...
P	p	$p(1-p)$	...	$p(1-p)^{k-1}$	...

Если количество испытаний не ограничено, т.е. если случайная величина может принимать значения 1, 2, ..., ∞, то математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения можно найти по формулам M(X) = 1/p, D(X) = q/p^2

Гипергеометрическое распределение.

Говорят, что случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение с параметрами n , N и K , где $K \le N$, $n \le N$, если ξ принимает целые значения от $\max\{0, N-K-n\}$ до $\min\{n, K\}$ с вероятностями $\mathsf{P}(\xi = k) = \dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$. Случайная величина ξ с таким распределением имеет смысл *числа белых шаров среди* n *шаров, выбранных наудачу и без возвращения из урны, содержащей* K *белых шаров и* $N-K$ *не белых.*

1.48.Лекция 48. (2ч)

Тема: «Характеристики НСВ «

1.48.1. Вопросы лекции

1.Интегральная функция распределения, ее свойства

2. Дифференциальная функция распределения НСВ, ее свойства.

3. Числовые характеристики НСВ.

1.48.2. Краткое содержание вопросов

1. Интегральная функция распределения, ее свойства

Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее *x*: $F(x) = P(X < x)$.

Функцию распределения также называют *интегральной функцией*.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Свойства $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$ (из определения).

2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1)$.

Доказательство: Пусть $x_2 > x_1$. Рассмотрим событие: $X < x_2$, оно состоит из двух несовместных событий:

$$\tilde{O} < x_1; \quad x_1 \le \tilde{O} < x_2 \Rightarrow P(\tilde{O} < x_2) = P(\tilde{O} < x_1) + P(x_1 \le \tilde{O} < x_2)$$

$$P(\tilde{O} < x_2) - P(\tilde{O} < x_1) = P(x_1 \le \tilde{O} < x_2)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le \tilde{O} < x_2) \ge 0$$

Следовательно, $F(x_2) - F(x_1) \ge 0 \Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1)$

Что и требовалось доказать.

3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то, следовательно, $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x > b$

Доказательство: $x_1 \le a \Rightarrow X < x_1$ - невозможное событие. Следовательно, $P(x < x_1) = 0$.

Если $x_2 > b$, то событие $X < x_2$ - достоверное. Следовательно, $P(x < x_2) = 1$.

Перейдем к особенностям функции распределения дискретной и непрерывной случайных величин.

Для ДСВ график $F(x)$ имеет разрывный, ступенчатый вид. График расположен в полосе, ограниченной прямыми*y*=0, *y*=1.

2. Дифференциальная функция распределения НСВ, ее свойства.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция p*(x)* – первая производная от функции распределения F(x): $p(x) = F'(x)$.

Плотность распределения также называют *дифференциальной функцией.* Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает, как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки *x* при повторении опытов.

Свойства плотности распределения:

1) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b: $P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$;

2) функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$;

3) плотность распределения – неотрицательная функция: $p(x) \geq 0$;

4) несобственный интеграл от плотности распределения на бесконечном интервале равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

3. Числовые характеристики НСВ.

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *p(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a,b*].

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл вида: $M(X) = \int_a^b xp(x)dx$.

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то *математическое ожидание* находится по формуле: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$.

При этом предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения: $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 p(x)dx$.

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула: $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - [M(X)]^2$

*Средним квадратичным отклонением*называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

*Модой*Мо непрерывной случайной величины называется такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум: $f(M_0) = \max$.

Если кривая распределения случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двумодальным или многомодальным.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется *антимодальным*.

*Медианой*Ме случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины: $P(X < Me) = P(X > Me)$.

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

*Начальным моментом*порядка *k*случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k: $\nu_k = M[X^k]$.

1.49.Лекция 49. (2ч)

Тема: «Виды распределений НСВ»

1.49.1. Вопросы лекции

1.Равномерное распределение.

2. Показательное распределение.

3. Нормальный закон распределения, его параметры.

4. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

1.49.2. Краткое содержание вопросов

1. Равномерное распределение.

Непрерывная случайная величина имеет равномерноераспределение на отрезке [a, b], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Определим вероятность того, что случайная величина $\overline{x}$ примет значение, заключенное в $(\alpha;\beta)$: $P(\alpha<\overline{x}<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$

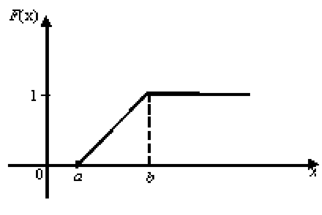
Определим интегральную функцию распределения равномерного закона: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)dx$

Если $x\le a$, то $f(x)=0\Rightarrow F(x)=0$.

Если $a<x\le b$, то $f(x)=\frac{1}{b-a}\Rightarrow F(x)=\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}$.

Если $b<x$, то $f(x)=0\Rightarrow\int\limits_{b}^{+\infty}f(x)dx=0\Rightarrow F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx=\frac{b-a}{b-a}=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a<x\le b\\ 1, & при \quad x>b\end{cases}$$



.

2. Показательное распределение.

*Показательным (экспоненциальным)*называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью:

$$p(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x\ge 0\end{cases}$$ где λ - положительное число.

Примеры величин, распределенных по показательному закону:

1) длительность времени безотказной работы элемента;

2) время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока с заданной интенсивностью λ (время между двумя сбоями ЭВМ).

Случайные величины, распределенные показательно, обладают интересным свойством: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка, он остается таким же, как и для всего промежутка.

Определим интегральную функцию $F(x)$:

1. $x < 0$ $F(x) = 0$.
2. $x \ge 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = -\left(e^{-\lambda x} - 1\right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Показательное распределение широко применяется в приложениях теории вероятностей, в частности, в теории надежности, одним из основных понятий этой теории является функция надежности.

Будем называть элементом любое устройство, независимо от его сложности.

Рассмотрим НСВ Т – длительность времени безотказной работы элемента.

Функция распределения Т определяет вероятность отказа элемента за время длительностью *t*: $P(T < t) = F(t)$.

Следовательно, вероятность безотказной работы за то же время:

$P(T \ge t) = 1 - F(t) = R(t)$ определяет функцию надежности.

$R(t) = e^{-\lambda t}; F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Часто, но не всегда, случайная величина Т имеет показательное распределение.

3. Нормальный закон распределения, его параметры.

*Нормальным*называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Можно легко показать, что параметры *a* и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины Х.

Нормальный закон распределения также называется *законом Гаусса*.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Функция распределения имеет вид: $F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma_x^2}} dt$.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал находится по формуле:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$,где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ *– функция Лапласа или интеграл вероятностей***.**

Значения этой функции при различных значениях *x* посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Функцию Лапласа является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Правило трех сигм: Если случайная величина имеет нормальное распределение, то отклонение этой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднего квадратического отклонения: $P(|X-a| < 3\sigma) = 0{,}9973$.

Существует множество распределений, основанных на нормальном распределении. В частности, χ^2 – распределение (хи-квадрат), распределение Стьюдента, распределение Фишера-Снедекора и другие.

4. Кривая Гаусса. Ее свойства и график.

График плотности нормального распределения называется *кривой Гаусса.*

Нормальная кривая обладает следующимисвойствами:

1) функция определена на всей числовой оси;
2) при всех *x* функция распределения принимает только положительные значения;
3) ось ОХ является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента *x*, значение функции стремится к нулю;
4) в точке $x = a$ функция имеет максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
5) функция является симметричной относительно прямой $x = a$, т.к. разность $(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате;
6) при $x = a + \sigma$ и $x = a - \sigma$ функция имеет перегиб. Значение функции равно $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

Построим график функции плотности распределения .

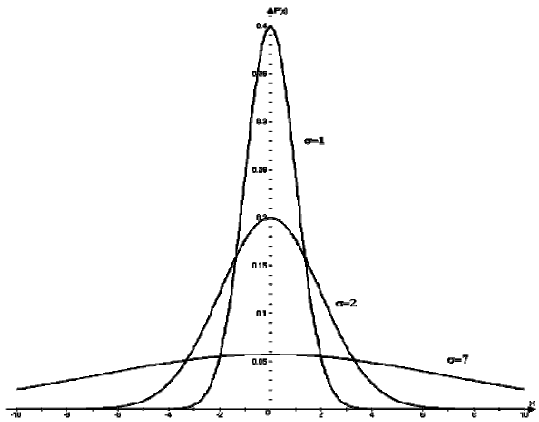


График функции плотности распределения

Построены графики при a =0 и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения σ = 1, σ = 2 и σ = 7. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается.

Еслиa> 0, то график сместится в положительном направлении, если a< 0, то график сместится в отрицательном направлении вдоль оси ОХ.

Приa = 0 и σ = 1 кривая называется *нормированной*. Уравнение нормированной кривой: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1.50.Лекция 50. (2ч)

Тема: «Основные выборочные характеристики»

1.50.1. Вопросы лекции

1.Задачи математической статистики.

2. Генеральная совокупность и выборка.

3. Выборочные характеристики.

1.50.2. Краткое содержание вопросов

1. Задачи математической статистики.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий) по результатам наблюдений.

Для получения опытных данных необходимо провести обследование соответствующих объектов.

2. Генеральная совокупность и выборка.

Совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений определённой случайной величины, называется генеральной совокупностью.

Генеральную совокупность будем называть конечной или бесконечной в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих её элементов.

Часть отобранных объектов из генеральной совокупности называется выборочной совокупностью или выборкой.

Число N объектов генеральной совокупности и число n объектов выборочной совокупности будем называть объёмами генеральной и выборочной совокупности соответственно.

Для того чтобы по выборке можно было достаточно уверенно судить о случайной величине, выборка должна быть представительной (репрезентативной). Репрезентативность выборки означает, что объекты выборки достаточно хорошо представляют генеральную совокупность. Она обеспечивается случайностью отбора.

3. Выборочные характеристики.

Для описания основных свойств статистических распределений чаще всего используют *выборочные характеристики* следующих видов:

- *выборочная средняя:* характеризует типичное для выборки значение признака X; приближенно характеризует (оценивает) типичное для генеральной совокупности значение признака X;
- *средняя арифметическая*: применяется к вариационному ряду (данные наблюдения не сгруппированы) $\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$;
- *взвешенная средняя арифметическая* (частоты m_i, и частости w_i называют весами): используется, если данные сгруппированы; непосредственно применима только к статистическому распределению дискретного признака (дискретному ряду)

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i \,,\ \overline{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot w_i \,;$$

- *медиана* – это серединное значение признака X; по определению

$$F^*(x_{\text{ме}}) = \frac{1}{2}.$$

$x_{\text{ме}} = \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}$,если $n = 2j$ – четное;

$x_{\text{ме}} = x_{j+1}$, если $n = 2j+1$ – нечетное;

- *мода*– наиболее часто встречающееся значение признака X. $x_{\text{мо}} = x_i$, если $m_i = m_{\max}$(справедливо только для дискретного ряда).

Если $\bar{x}_{\text{в}} = x_{\text{мо}} = x_{\text{ме}}$, то распределение симметричное. При нарушении симметрии равенство нарушается.

Характеристики вариации (рассеяния)

- *выборочная дисперсия* есть выборочная средняя арифметическая квадратов отклонений значений признака Xот выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$ (равна «среднему квадрату без квадрата средней»):

$$D_{\text{в}} = \overline{(x - \bar{x}_{\text{в}})^2}\,,\; D_{\text{в}} = \overline{x^2} - \bar{x}_{\text{в}}^2\,;$$

Выборочная дисперсия применяется к вариационному ряду (данные наблюдения не сгруппированы):

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}_{\text{в}})^2\;;$$

- *выборочная взвешенная дисперсия:* используется, если данные сгруппированы; непосредственно применима только к статистическому распределению дискретного признака (дискретному ряду)

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i\,,\; D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot w_i\,;$$

- *средний квадрат* есть выборочная средняя арифметическая квадратов значений признака X (для вариационного ряда и для дискретного распределения соответственно):

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\,,\; \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot m_i\,;$$

- *выборочное среднее квадратическое отклонение* есть арифметическое значение корня квадратного из дисперсии; оно показывает, на сколько в среднем отклоняются значения x_j признака Xот выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$: $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$;
- *размах вариации:* $R = x_{\max} - x_{\min}$;
- *коэффициент вариации:* применяют для сравнения вариации признаков сильно отличающихся по величине, или имеющих разные единицы измерения (разные наименования): $v = \dfrac{\sigma_{\text{в}}}{\bar{x}_{\text{в}}} \cdot 100\ \%$.

Если исходный вариационный ряд недоступен, приведенные выше формулы вычисления выборочных характеристик, применимые только к дискретному ряду, могут быть использованы для приближенного вычисления выборочных характеристик непрерывного признака, представленного интервальным рядом. Для этого предварительно каждый интервал x_{i-1}–x_i заменяется его серединой $x_i' = (x_{i-1} + x_i)/2$, то есть производится замена интервального ряда дискретным, соответствующим ему приближенно.

1.51.Лекция 51. (2ч)

Тема: «Точечные и интервальные оценки»

1.51.1.1. Вопросы лекции

1.Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.

2. Доверительный интервал. Надежность.

3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

1.51.2. Краткое содержание вопросов

1. Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.

Важной задачей математической статистики является задача оценивания (приближенного определения) по выборочным данным параметров закона распределения признака *X* генеральной совокупности. Другими словами, необходимо по данным выборочного распределения оценить неизвестные параметры теоретического распределения. Статистическиеоценки могут быть точечными и интервальными.

Пусть признак *X* генеральной совокупности распределен нормально, то есть теоретическое распределение имеет вид:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$,с параметрами:

$a=M(X)=\bar{x}_{\text{ген}}$ – математическое ожидание признака *X*;

$\sigma=\sqrt{M((X-M(X))^2)}=\sigma_{\text{ген}}$ – среднеквадратическое отклонение признака *X*.

Точечной оценкой неизвестного параметра называют число (точку на числовой оси), которое приблизительно равно оцениваемому параметру и может заменить его с достаточной степенью точности в статистических расчетах.

Для того чтобы точечные статистические оценки обеспечивали «хорошие» приближения неизвестных параметров, они должны быть несмещенными, состоятельными и эффективными.

Пусть θ^* – точечная оценка неизвестного параметра θ.

*Несмещенной*называют такую точечную статистическую оценку θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру: $M\left(\theta^*\right)=\theta$.

Состоятельной называют такую точечную статистическую оценку, которая при$n\to\infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. В частности, если дисперсия несмещенной оценки при$n\to\infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

*Эффективной*называют такую точечную статистическую оценку, которая при фиксированном*n* имеет наименьшую дисперсию.

Можно показать, что выборочная средняя $\bar{x}_{\text{в}}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой генеральной средней $\bar{x}_{\text{ген}}$.Точечными оценками генеральной дисперсии $D_{\text{ген}} = \sigma^2$ могут служить выборочная дисперсия $D_{\text{в}}$, или, при малых объемах выборки n, исправленная выборочная дисперсия: $S^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}$.

Точечными оценками для генерального среднеквадратического отклонения $\sigma_{\text{ген}} = \sigma$ могут служить: $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение или $S = \sqrt{S^2}$ – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

2. Доверительный интервал. Надежность.

Для построения *интервальной оценки* рассмотрим событие, заключающееся в том, что отклонение точечной оценки параметра θ^* от истинного значения этого параметра θ по абсолютной величине не превышает некоторую положительную величину Δ. Вероятность такого события $P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \Delta\right) = \gamma$. Заменив неравенство $\left|\theta - \theta^*\right| < \Delta$ на равносильное, получим: $P\left(\theta^* - \Delta < \theta < \theta^* + \Delta\right) = \gamma$.

Вероятность того, что *доверительный интервал* $(\theta^* - \Delta,\ \theta^* + \Delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ и называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки. Величину Δ называют *точностью*оценки.

3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

Построим интервальную оценку параметра $a = \overline{x}_{\text{ген}}$ для двух случаев:

1) параметрσ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *известен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a = \overline{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$$\overline{x}_{\text{в}} - \Delta < a < \overline{x}_{\text{в}} + \Delta \text{,где } \Delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

t – аргумент функции Лапласа: $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;

2) параметрσ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *неизвестен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a = \overline{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$$\overline{x}_{\text{в}} - \Delta < a < \overline{x}_{\text{в}} + \Delta,$$

где $\Delta = \dfrac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}$,

S – точечная оценка параметра σ,

$t_\gamma = t(\gamma, n)$– значения распределения Стьюдента, которые находим по таблице.

1.52.Лекция 52. (2ч)

Тема: Корреляция

1.52.1. Вопросы лекции

1.Составление корреляционной таблицы.

2. Вычисление коэффициента корреляции.

3. Определение параметров линейной регрессии.

1.52.2. Краткое содержание вопросов

1. Составление корреляционной таблицы.

Условимся обозначать через X независимую переменную, а через Y – зависимую переменную.

Зависимость величины Y от X называется**функциональной**, если каждому значению величины X соответствует единственное значение величины Y. С функциональной зависимостью мы встречаемся, например, в математике, при изучении физических законов. Обратим внимание на то, что если X – детерминированная величина (т.е. принимающая вполне определённые значения), то и функционально зависящая от неё величина Y тоже является детерминированной; если же X – случайная величина, то и Y также случайная величина.

Однако гораздо чаще в окружающем нас мире имеет место не функциональная, а **стохастическая**, или **вероятностная**, **зависимость**, когда каждому фиксированному значению независимой переменной X соответствует не одно, а множество значений переменной Y, причём сказать заранее, какое именно значение примет величина Y, нельзя. Более частое появление такой зависимости объясняется действием на результирующую переменную не только контролируемого или контролируемых факторов (в данном случае таким контролируемым фактором является переменная X), а и многочисленных неконтролируемых случайный факторов. В этой ситуации переменная Y является случайной величиной. Переменная же X может быть как детерминированной, так и случайной величиной. Следует заметить, что со стохастической зависимостью мы уже сталкивались в дисперсионном анализе.

Допустим, что существует стохастическая зависимость случайной переменной Y от X. Зафиксируем некоторое значение x переменной X. При $X = x$ переменная Y в силу её стохастической зависимости от X может принять любое значение из некоторого множества, причём какое именно – заранее неизвестно. Среднее этого множества называют **групповым генеральным средним** переменной Y при $X = x$ или **математическим ожиданием случайной величины Y, вычисленным при условии, что X = x; это условное математическое ожидание обозначают так: M(Y/X = x)**. Если существует стохастическая зависимость Y от X, то прежде всего стараются выяснить, изменяются или нет при изменении x условные математические ожидания $M(Y/X=x)$. Если при изменении x условные математические ожидания $M(Y/X=x)$ изменяются, то говорят, что имеет место **корреляционная зависимость** величины Y от X; если же условные математические ожидания остаются неизменными, то говорят, что корреляционная зависимость величины Y от X отсутствует.

Функция $\varphi(x)$=M(Y/X=x), описывающая изменение условного математического ожидания случайной переменной Y при изменении значений x переменной X, называется **функцией регрессии**.

Выясним, почему именно при наличии стохастической зависимости интересуются поведением условного математического ожидания.

Рассмотрим пример. Пусть X – уровень квалификации рабочего, Y – его выработка за смену. Ясно, что зависимость Y от X не функциональная, а стохастическая: на выработку помимо квалификации влияет множество других факторов. Зафиксируем значение x уровня квалификации: ему соответствует некоторое множество значений выработки Y. Тогда M(Y/X = x) – средняя выработка рабочего при условии, что его уровень квалификации равен x, или, иначе говоря, M(Y/X = x) – это норматив выработки при уровне квалификации, равном x. Зная зависимость этого норматива от уровня квалификации, можно для любого уровня квалификации рассчитать норматив выработки и, сравнив его с реальной выработкой, оценить работу рабочего.

Обратим внимание на то, что введённые понятия стохастической и корреляционной зависимости относились к генеральной совокупности.

Пусть имеется n наблюдений двумерной величины (X, Y). Наблюдавшиеся «иксы « и «игреки» поместим в табл. 17, которая называется **корреляционной таблицей** и строится следующим образом:

- «иксы» группируются в вариационный ряд, число групп которого обозначим ν; если это дискретный ряд, то x_1, x_2, …, x_ν– различающиеся между собой результаты наблюдений или варианты; если это интервальный ряд, то x_1, x_2, …, x_ν– центры интервалов;

- «игреки» группируют в вариационный ряд, число групп которого обозначим q: y_1, y_2, …, y_q – это либо варианты, если ряд дискретный, либо середины интервалов, если ряд интервальный;

- подсчитывают числа m_{ji} таких наблюдавшихся пар чисел (x, y), у которых x попадает в группу x_i, а y – в группу y_j, i = 1, 2, …, ν, j = 1, 2, …, q; например, m_{12} – число пар чисел (x, y), у которых x попало в группу x_2, а y – в группу y_1. Числа m_{11}, m_{12}, …, $m_{q\nu}$ называются **частотами**.

2. Вычисление коэффициента корреляции

Рассмотрим следующую задачу. Была проведена серия измерений двух случайных величин X и Y, причем измерения проводились попарно: т.е. за одно измерение мы получали два значения - x_i и y_i. Имея выборку, состоящую из пар $(x_i,\ y_i)$, мы хотим определить, имеется ли между этими двумя переменными зависимость.

Зависимость между случайными величинами может иметь функциональный характер, т.е. быть строгим функциональным отношением, связывающим их значения. Однако при обработке экспериментальных данных гораздо чаще встречаются зависимости другого рода: статистические зависимости. Различие между двумя видами зависимостей состоит в том, что функциональная зависимость устанавливает строгую взаимосвязь между переменными, а статистическая зависимость лишь говорит о том, что распределение случайной величины Y зависит от того, какое значение принимает случайная величина X.

Одной из мер статистической зависимости между двумя переменными является коэффициент корреляции. Он показывает, насколько ярко выражена тенденция к росту одной переменной при увеличении другой. Коэффициент корреляции находится в диапазоне *[-1, 1]*. Нулевое значение коэффициента обозначает отсутствие такой тенденции (но не обязательно отсутствие зависимости вообще). Если тенденция ярко выражена, то коэффициент корреляции близок к *+1* или *-1* (в зависимости от знака зависимости), причем строгое равенство единице обозначает крайний случай статистической зависимости - функциональную зависимость. Промежуточные значения коэффициента корреляции говорят, что хотя тенденция к росту одной переменной при увеличении другой не очень ярко выражена, но в какой-то мере она все же присутствует.

Замечание

Коэффициент корреляции, рассчитанный на основе выборки конечного размера, лишь приближенно равен истинному значению коэффициента корреляции между двумя случайными величинами. В частности, если две случайные величины не зависят друг от друга, коэффициент корреляции между ними равен нулю. Но рассчитав его на основе конечной выборки, мы скорее всего получим ненулевое значение. Чтобы определить, насколько значимо отличие коэффициента корреляции от ноля, можно воспользоваться соответствующим методом проверки гипотез.

Существует несколько различных коэффициентов корреляции, к каждому из которых относится сказанное выше. Наиболее широко известен коэффициент корреляции Пирсона, характеризующий степень линейной зависимости между переменными. Он определяется, как $r = \dfrac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$

3. Определение параметров линейной регрессии.

Следующим этапом является *регрессионный анализ*, с помощью которого корреляционную зависимость между признаками приближенновыражают в виде линейного уравнения регрессии вида $\bar{y}_x \approx a_0 + a_1 \bar{x}$. Неизвестные параметры a_0 и a_1 находятся методом наименьших квадратов. Применяя этот метод, получаем следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \bar{x} = \bar{y} \\ a_0 \bar{x} + a_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}.$$

Решая систему, находят оценки параметров a_0 и a_1. Уравнение регрессии можно записать в таком виде:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2}\,(x - \bar{x}).$$

Параметр $a_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2}$ – *коэффициент регрессии* – показывает, как изменится в среднем результативный признак, если факторный признак увеличится на единицу своего измерения. Уравнение регрессии можно использовать для *прогнозирования*(предсказания).

1.53.Лекция 53. (2ч)

Тема: «Проверка гипотез».

1.53.1. Вопросы лекции

1.Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.

2. Статистические критерии проверки гипотез. Мощность критерия.

3. Параметрические и непараметрические критерии. Условия применимости.

1.53.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.

Во многих практических задачах точный закон распределения исследуемого признака X генеральной совокупности неизвестен. В этом случае необходимо проверить *гипотезу* о предполагаемом законе распределения. Выдвигаются *нулевая* гипотеза H_0 и ей *конкурирующая*H_1.

H_0: признак X имеет нормальный закон распределения.

H_1: признак X имеет закон распределения, отличный от нормального.

Нулевая гипотеза проверяется с помощью *критериясогласия*.

2. Статистические критерии проверки гипотез. Мощность критерия.

Возможны случаи:

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	*Ошибка первого рода*
Неверна	*Ошибка второго рода*	Правильное решение

Вероятность допустить ошибку первого рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна) называется *уровнем значимости критерия*.

Вероятность не допустить ошибку второго рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она неверна) называется *мощностью критерия.*

Критерий χ^2 Пирсона («хи-квадрат») – наиболее часто употребляемый критерий, может применяться для проверки гипотезы о любом законе распределения. Независимо от того, какое распределение имеет X, распределение случайной величины χ^2: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i^{э} - m_i^{т})^2}{m_i^{т}}$,

где $m_i^{э}$ – эмпирические частоты, $m_i^{т}$ – теоретические частоты; при $n \to \infty$ стремится к χ^2 – распределению с k степенями свободы.

Теоретические частоты определяются, исходя из предположения о законе распределения генеральной совокупности, в данном случае о нормальном законе. Так как $p_i = \frac{m_i}{n}$, где p_i – теоретическая вероятность, то $m_i^{т} = n \cdot p_i$.

Для дискретного ряда: $p_i = \frac{h}{\sigma_{в}} \cdot f(u_i)$, где $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_{в}}$, $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ –дифференциальная функция нормированного нормального распределения, шаг $h = x_i - x_{i-1}$, $\bar{x}_{в}$ – выборочная средняя, $\sigma_{в}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение.

Для интервального ряда: $p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\dfrac{x_i - \bar{x}_\text{в}}{\sigma_\text{в}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_{i-1} - \bar{x}_\text{в}}{\sigma_\text{в}}\right)$,
где $\Phi(t)$–функция Лапласа.

Рассчитав теоретические частоты, находят $\chi^2_\text{набл}$. Из таблицы *критических точек* распределения χ^2 по заданному уровню значимости α(достаточно малая вероятность) и числу степеней свободы k находят $\chi^2_\text{крит}$ (α, k) – границу правосторонней критической области. Здесь $k = s - r - 1$, где s – число различных значений x_i дискретного или число интервалов $(x_{i-1} - x_i)$ непрерывного признака X, r – число параметров предполагаемого закона распределения, для нормального распределения $r = 2$, отсюда $k = s - 3$. Затем сравнивают $\chi^2_\text{набл}$ и $\chi^2_\text{крит}(\alpha, k)$ и делают вывод.

При формулировке вывода руководствуются следующим правилом:

- если *наблюдаемое значение* критерия $\chi^2_\text{набл}$ попало в *областьпринятия гипотезы* ($\chi^2_\text{набл} < \chi^2_\text{крит}(\alpha, k)$), как показано на рисунке (Рисунок 3а.), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, по данным наблюдения признак X имеет нормальный закон распределения, расхождениемежду эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^\text{э}$ и $m_i^\text{т}$) случайное;
- если наблюдаемое значение критерия $\chi^2_\text{набл}$ попало в *критическую область* ($\chi^2_\text{набл} > \chi^2_\text{крит}(\alpha, k)$), как показано на рисунке (Рисунок 3б.), то нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая гипотеза, то есть признак X имеет закон распределения, отличный от нормального, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^\text{э}$ и $m_i^\text{т}$) значимо.

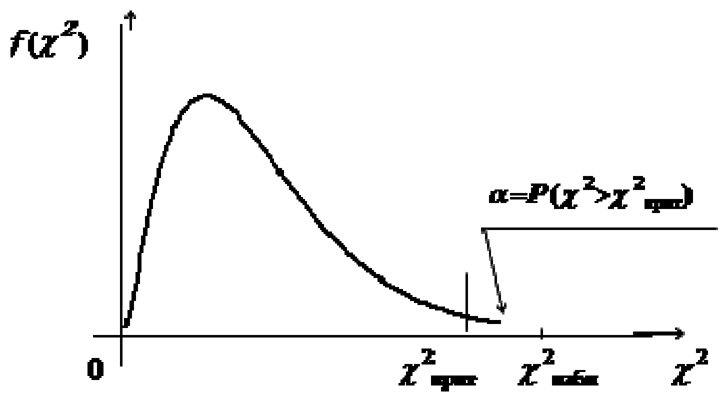


Рисунок 3а – Область принятия гипотезы

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1.Практическое занятие №1

Тема: «Вводное занятие» (2ч)

2.1.1 Задание для работы:

1. Входной контроль.
2. Решение систем двух уравнений с двумя неизвестными.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{17}{19}$.

2. Найти a, если $\frac{a}{600}=\frac{1{,}25+\frac{1}{4}}{0{,}4\cdot 4{,}5}$

3. Из равенства $(x-a)(y-b)=x$ выразить x.

4. Решить неравенство: $x^2(1+3x)\le 0$.

5. Преобразовать: $\left(-\frac{2}{3}a^4b^3c^2\right)^3:\left(-\frac{1}{3}a^2bc^3\right)^2$.

6. Вычислить: $\frac{-2^4\cdot 2^{-2}-5^5\cdot(25^{-1})^2+12^0}{2^{-1}}$

7. Определить знак $\cos(\lg 600)$.

Решение систем уравнений

1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-3y=-7\\5x+y=8\end{cases}$; б) $\begin{cases}8x-5y=3\\7x+3y=10\end{cases}$

2. Сколько решений имеет система линейных уравнений?

а) $\begin{cases}2x-3y=-7\\8x-12y=8\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x-3y=-7\\8x-12y=-28\end{cases}$

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач,овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.2. Практическое занятие №2

Тема: «Матрицы» (2ч)

2.2.1 Задание для работы:

1. Действия над матрицами.

2. Приведение матрицы к ступенчатому виду.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти: $A+B;\ A-B;\ 3A-2B;\ A\cdot B;\ B\cdot A$.

2. Решите системы уравнений с помощью матриц:

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=6 \\ 3x-y+2z=7 \\ x-y+z=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4=4 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 4x_1-2x_2-6x_3=2 \\ 5x_1+4x_2-5x_3+2x_4=1 \end{cases}$.

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.3. Практическое занятие №3

Тема: «Определители.»(2ч)

2.3.1 Задание для работы:

1. Вычисление определителей второго и третьего порядков.

2. Определение ранга матрицы.

3. Нахождение обратной матрицы.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}$.

2. Для определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ найти: а) миноры M_{23}, M_{11}, M_{31}; б) алгебраические дополнения A_{12}; A_{13}; A_{32}; в) значение определителя.

3. Вычислить: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & -7 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

4. Определить ранг матриц: а) $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.4.Практическое занятие №4

Тема : «Решение систем линейных уравнений»(2ч)

2.4.1 Задание для работы:

1. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
3. Решение систем линейных уравнений матричным способом.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить: а) $\begin{cases} 5x+4y-7z=-4 \\ 3x+5y-9z=10 \\ 2x-y+2z=-12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x+4y-7z=-4 \\ 3x+5y-9z=8 \\ 2x-y+2z=-12 \end{cases}$

2. Определить, при каких значениях a и b система $\begin{cases} 3x-2y+z=b \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$: 1) имеет единственное решение; 2) не имеет решений; 3) имеет бесконечно много решений.

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.5.Практическое занятие №5

Тема : «Векторы.»(2ч)

2.5.1 Задание для работы:

1. Действия над векторами в геометрической форме.

2. Нахождение координат вектора.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Изобразить произвольно вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построить векторы $\vec{\kappa} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot 5 - 4\vec{c} - 3\vec{b} - 1{,}5\vec{a}$ и $\vec{m} = (\vec{b} - 3\vec{c}) \cdot 2 + 4\vec{c} - 3{,}5\vec{b} + 2(\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b})$.

2.. В $\Delta\, ABC$ сторона AB разделена точкой M в отношении $4:3$,считая от точки A. Найти разложение вектора $\overrightarrow{CM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

3.. Даны три точки $A(2;-1), B(4;3), C(-2;1)$. Найти координаты векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$, их длины, периметр треугольника ABC.

4.. Расстояние от точки *M*, лежащей на оси Ox, до точки $K(4;9)$ равно 15. Найти координаты точки *M*.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.6.Практическое занятие №6

Тема : «Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения.»(2ч)

2.6.1 Задание для работы:

1. Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
а) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 30^0$; б) $\vec{a} = (7; -5; 4)$, $\vec{b} = (0; 2; 8)$; в) $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

2. Определить углы треугольника ABC с вершинами $A(2; -1; 3)$; $B(1; 1; 1)$; $C(0; 0; 5)$.

3. Даны три силы $\vec{F}_1(9; -3; 4)$, $\vec{F}_2(5; 6; -2)$, $\vec{F}_3(-4; -2; 7)$, приложенные к точке $A(-5; 4; -2)$. Вычислить работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; 6; -5)$.

2.6.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.7.Практическое занятие №7

Тема : «Векторное произведение векторов.»(2ч)

2.7.1 Задание для работы:

1. Векторное произведение векторов, его свойства, приложения

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Даны вектора $\vec{a}(1;-1;2)$, $\vec{b}(0;1;-5)$, $\vec{c}(-8;9;0)$. Вычислить: а) векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Вычислить площадь и высоту AD треугольника с вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$, $C(4;5;-2)$.

2.7.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.8.Практическое занятие №8

Тема : «Смешанное произведение векторов.»(2ч)

2.8.1 Задание для работы:

1. Смешанное произведение векторов, его свойства, приложения

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Вершины пирамиды находятся в точках $A(2;3;4)$, $B(4;7;3)$, $C(1;2;2)$, $D(-2;0;-1)$. Вычислить площадь грани ABC и объем пирамиды $ABCD$.

2. Сила $\vec{F}\,(2;2;9)$ приложена к точке $A(4;2;-3)$. Вычислить модуль и направляющие косинусы момента силы $\vec{F}$ относительно точки $B(2;4;0)$.

2.8.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.9.Практическое занятие №9

Тема : «Прямая на плоскости.»(2ч)

2.9.1 Задание для работы:

1. Способы задания прямой.

2. Взаимное расположение двух прямых.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Составить уравнение прямой, если: а) ее угловой коэффициент $\kappa = -5$ и она проходит через точку $A(7;-3)$; б) она проходит через точки $A(-3;5)$ и $B(1;7)$; в) проходит через точки $M(-1;8)$ и $N(-1;-4)$.

2. Даны вершины треугольника $A(-2;1), B(2;3), C(3;-4)$. Составить уравнения: а) стороны AC; б) медианы BM; в) наименьшей высоты.

3. Среди прямых указать параллельные и перпендикулярные: $5x-8y+7=0$, $8x+5y-5=0$, $5x+3y-8=0$, $8x-y-5=0$, $10x+6y-13=0$.

4. Даны две прямые $4x-ay=7$ и $20x-12y=15$. При каком условии они будут параллельны? При каких значениях*a* они будут пересекаться?

2.9.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа.

2.10.Практическое занятие №10

Тема : «Кривые второго порядка.» (2ч)

2.10.1 Задание для работы:

1. Окружность.

2. Эллипс.

3. Гипербола.

4. Парабола.

2.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты $A(-4;5)$ и $B(8;9)$.
2. Составьте уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ и $x^2+y^2+4x+12y+4=0$.
3. Составьте уравнение эллипса, если он проходит через точки $A(4;\,0)$ и $B(2;\,3)$. Найти большую и малую полуоси, расстояние между фокусами и эксцентриситет эллипса.
4. Составьте уравнение эллипса, один из фокусов которого находится в точке $(\sqrt{3}\,;\,0)$, а эксцентриситет равен $\frac{1}{3}$.
5. Найти координаты фокусов, расстояние между ними, длины действительной и мнимой осей, эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{22}=1$.
6. Составить уравнение гиперболы, если длина действительной полуоси равна 8, и гипербола проходит через точку $(-10;-3)$.
7. Даны уравнения асимптот $y=\pm\,2x$ и точка $M(5;8)$, лежащая на гиперболе. Составить ее уравнение.

2.10.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.11.Практическое занятие №11

Тема : «Кривые второго порядка.» (2ч)

2.11.1 Задание для работы:

1. Уравнения кривых второго порядка.

2. Взаимное расположение прямой и кривой на плоскости.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы для параболы $y = 0{,}5x^2$.

2. Составить уравнение параболы, если ее фокус находится в точке: а) $F(5;0)$; б) $F(0;-3)$.

3. Найти координаты точек пересечения кривой второго порядка и прямой: а) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ и $x+3y-21=0$; б) $16x-y^2=0$ и $2x-y+2=0$. Сделать чертеж.

2.11.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.12.Практическое занятие №12

Тема : «Плоскость в пространстве.» (2ч)

2.12.1 Задание для работы:

1. Способы задания плоскости в пространстве.

2. Взаимное расположение плоскостей.

2.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Для плоскости записать координаты нормального вектора, двух точек, лежащих в плоскости, направляющего вектора: а) $5x-2y+3z-10=0$;
б) $2x+3y+6z-12=0$. Написать уравнение «в отрезках» данных плоскостей.

2. Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей и определить угол между ними:

а) $x-3y+z+1=0$ и $2x+y-4z+2=0$;

б) $3x+y-z+2=0$ и $6x+2y-2z+3=0$;

в) $\sqrt{2}x-y+6z+5=0$ и $4x+\sqrt{8}y-\dfrac{\sqrt{2}}{3}z+7=0$.

2.12.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.13.Практическое занятие №13

Тема : «Прямая в пространстве.» (2ч)

2.13.1 Задание для работы:

1. Способы задания прямой в пространстве.

2. Взаимное расположение прямой и плоскости.

2.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Для прямой записать координаты направляющего вектора, трех точек, лежащих на прямой: а) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{-3}$; б) $\begin{cases} x=3t \\ y=4t-5 \\ z=-t+3 \end{cases}$.

2. Даны четыре точки $A_1\,(4;7;8)$, $A_2\,(-1;13;0)$, $A_3\,(2;4;9)$, $A_4\,(1;8;9)$. Составить уравнения прямой: а) A_1A_2; б) A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$. Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

3. Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

а) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases}$ и $2x-y+z+1=0$; б) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ и $x-2y+5z-6=0$;

в) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$ и $x-2y+5z-6=0$.

2.13.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.14.Практическое занятие №14

Тема : «Поверхности.» (2ч)

2.14.1 Задание для работы:

1. Цилиндрические поверхности.

2. Поверхности вращения

2.14.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.
2.Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.
3. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.
4.Найти уравнения проекций сечения эллиптического параболоида $y^2+z^2=x$ плоскостью $x+2y-z=0$ на координатные плоскости.

5., какая линия является сечением эллипсоида $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ плоскостью $2x-3y+4z-11=0$, и найти ее центр.

2.14.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.15.Практическое занятие №15

Тема : «Функция.» (2ч)

2.15.1 Задание для работы:

1. Основные элементарные функции, их свойства, графики.

2. Построение графиков элементарных и неэлементарных функций.

2.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{1}{x+5}$; б) $y=\sqrt[7]{3-x^2}$; в) $y=\log_5(4-x^2)$; г) $y=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\ln(4+x)}$.

2. Найдите $E(y)$ двумя способами: а) $y=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)$; б) $y=x^2-6x+5$.

3. Исследовать функцию на четность:

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=x^5\cdot\cos x$; в) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$; г) $f(x)=\lg\dfrac{x+2}{x-2}$.

4. Для функции $f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{49} & при \quad 0<x\le 7\\ 1 & при \quad x>7\end{cases}$ найти $f(-2), f(0), f(5), f(8)$

2.15.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.16.Практическое занятие №16

Тема : «Предел последовательности.» (2ч)

2.16.1 Задание для работы:

1. Вычисление предела числовой последовательности.

2.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Начиная с какого номера, значения числовой последовательности $x_n = \frac{5n+3}{2n}$ будут отличаться от числа $2{,}5$ на величину, меньшую: а) $\varepsilon = 0{,}2$; б) $\varepsilon = 0{,}01$?

2. Определить число, к которому стремится числовая последовательность:

а) $x_n = \frac{3n-6}{2n}$; б) $x_n = \frac{1}{2n+1}$.

2.16.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.17.Практическое занятие №17

Тема : «Предел функции.» (2ч)

2.17.1 Задание для работы:

1. Вычисление предела функции.

2.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+6x}{5x^3-12x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{7-x^2-6x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-49}{\sqrt{9+x}-4}$.

2.Вычислить: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-9}{7x^2+x-11}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-9}{7x^2+x^5-11}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x-9}{7x^2+x-11}$.

3. Найти значение: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{12}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

2.17.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.18.Практическое занятие №18

Тема : «Правила раскрытия неопределенностей.» (2ч)

2.18.1 Задание для работы:

1. Сравнение бесконечно малых функций.

2. Применение замечательных пределов.

2.18.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+6x}{5x^3-12x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{7-x^2-6x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-49}{\sqrt{9+x}-4}$.

2.Вычислить: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-9}{7x^2+x-11}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-9}{7x^2+x^5-11}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x-9}{7x^2+x-11}$.

3. Найти значение: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{12}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

4. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 11x}{arctg 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{arctg^3 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} tg^2 9x\cdot ctg 5x$.

2.18.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.19.Практическое занятие №19

Тема : «Второй замечательный предел.» (2ч)

2.19.1 Задание для работы:

1. Сравнение бесконечно малых функций.

2. Применение замечательных пределов.

2.19.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{8x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{\frac{4}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+1}\right)^{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x^2+6}\right)^{x}$.

2.19.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.20.Практическое занятие №20

Тема : «Непрерывность функции.» (2ч)

2.20.1 Задание для работы:

1. Исследование функции на непрерывность.

2. Определение точек разрыва.

3. Нахождение асимптот графика функции.

2.20.2 Краткое описание проводимого занятия:

а) $y=\frac{4x^2-1}{x-3}$; б) $y=\frac{x^3}{1+x^2}$; в) $y=\frac{4}{(x-3)(x+1)}$.

Исследовать на непрерывность функции и построить их графики: а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & при\ x\le 1 \\ x+1 & при\ x>1 \end{cases}$; б) $y=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x^2-1, & 0\le x<1, \\ -x, & x\ge 1, \end{cases}$; в) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & при\ x\le 1 \\ \frac{1}{x-1} & при\ x>1 \end{cases}$.

2. Исследовать на непрерывность $f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}+1$ в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$.

3. При каком значении a $f(x)=\begin{cases} \cos x & при\ x\le 0 \\ a(x-1) & при\ x>0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0=0$?

4. Сколько точек разрыва (и какого рода) имеет функция: а) $y=\frac{x+2}{x^2+8x+12}$;

2.20.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.21.Практическое занятие №21

Тема : «Производная.» (2ч)

2.21.1 Задание для работы:

1. Нахождение производной.

2. Геометрический и механический смыслы производной.

2.21.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти производную: а) $y=\frac{2x-7}{3}$; б) $y=x^4-\frac{1}{12x^4}+6\cdot\sqrt[5]{x^2}+\sin 4$; в) $y=\frac{5}{x^7}-\sqrt[9]{x^4}+3^x$; г) $y=(x^3+2)\cdot\sin x$; д) $y=\frac{\ln x}{x-4}$.

2. Найти производную от функции и упростить полученное выражение: а) $x\cdot\sin x+\cos x-8$; б) $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; в) $x\cdot arctg\frac{x}{3}-\frac{3}{2}\ln(x^2+9)$.

3. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{x+2}$ в точке его пересечения с осью ординат. Сделать рисунок.

4. Найти скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)=2\sin\frac{\pi t}{3}$ в момент времени $t=1\,c$. Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 3 с после начала движения.

2.21.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.22.Практическое занятие №22

Тема : «Производная.» (2ч)

2.22.1 Задание для работы:

1. Нахождение производной сложной функции.

2. Логарифмическое дифференцирование

2.22.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти производную: а) $y = \frac{2x-7}{3}$; б) $y = x^4 - \frac{1}{12x^4} + 6 \cdot \sqrt[5]{x^2} + \sin 4$;
в) $y = \frac{5}{x^7} - \sqrt[9]{x^4} + 3^x$; г) $y = (x^3 + 2) \cdot \sin x$; д) $y = \frac{\ln x}{x-4}$.

2. Найти производную от функции и упростить полученное выражение: а) $x \cdot \sin x + \cos x - 8$; б) $x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; в) $x \cdot arctg\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\ln(x^2+9)$.

2.22.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.23.Практическое занятие №23

Тема : «Производные высших порядков. Дифференциал.» (2ч)

2.23.1 Задание для работы:

1. Производные высших порядков.

2. Вычисление дифференциала.

2. Геометрический смысл дифференциала.

3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

2.23.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $y^{(15)}$, если $y = e^x(x+4)$; б) $y^{(2009)}$, если $y = \cos x$.

2. Проверить, является ли решением уравнения $y'' + 2y' - 8y = 0$ функция $y = e^{2x} + 9e^{-4x}$.

3. Вычислить: а) $d(4x-6)$; б) $d\left(\frac{3}{1+x^2}\right)$; в) $d(\ln(x+6))$; г) $d(\cos 8x)$.

4. Внести функцию под знак дифференциала: а) xdx; б) $\cos xdx$; в) $\frac{dx}{x}$; г) $\frac{dt}{\cos^2 t}$.

5. Пользуясь приближенным равенством $f(x) \approx f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$, вычислить приближенно указанные величины:

а) $\cos 61^0$; б) $tg 44^0$; в) $e^{0,2}$; г) $\sqrt[3]{7,76}$; д) $arctg 1,05$; е) $\arcsin 0,54$.

2.23.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.24.Практическое занятие №24

Тема : «Приложения производной.» (2ч)

2.24.1 Задание для работы:

1. Вычисление пределов по правилу Лопиталя.

2. Исследование функции на монотонность, нахождение точек экстремума.

3. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.

2.24.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить предел функции: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3-2}{\ln(x+7)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{7+e^x}-2}{x}$.

2. Исследовать функцию $y=-x^3+6x^2-4$ и построить ее график.

3. Построить график функции: а) $y=\frac{1}{x^2+1}$; б) $y=e^{-x^2}$.

4. На параболе найти точку, наименее удаленную от прямой $y=2x-4$.

5. Требуется выгородить прямоугольное пастбище площадью $1\,км^2$ и разделить его на два прямоугольных участка. Какой наименьшей длины забор при этом может получиться?

2.24.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.25.Практическое занятие №25

Тема : «Полное исследование функции.» (2ч)

2.25.1 Задание для работы:

1. Исследование функции на вогнутость и выпуклость, нахождение точек перегиба.

2. Построение графиков функции.

2.25.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Исследовать функцию $y = -x^3 + 6x^2 - 4$ и построить ее график.

2. Построить график функции: а) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; б) $y = e^{-x^2}$.

2.25.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.26.Практическое занятие №26

Тема : «Кривизна кривой.» (2ч)

2.26.1 Задание для работы:

1. Определение кривизны, радиуса и круга кривизны кривой.

2. Составление уравнения эволюты.

2.26.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Определить радиус кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой в указанной точке: а) $y = e^x$, $(0;1)$; б) $y = \cos x$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Найти максимальную кривизну кривой $y = e^x$.

3. Написать уравнение эволюты кривой $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ и построить кривую и ее эволюту.

4. Определить радиус кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой в указанной точке: а) $y = \ln x$, $(1;0)$; б) $y = x^3$, $(-1;-1)$.

2.26.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.27.Практическое занятие №27

Тема : «Функция двух переменных.» (2ч)

2.27.1 Задание для работы:

1. Нахождение ОДЗ функции двух переменных.
2. Вычисление производных первого и второго порядков

2.27.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти область определения функции двух переменных: а) $z = \dfrac{1}{3y - x}$; б) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$; в) $z = \dfrac{\ln x}{25 - x^2 - y^2}$; г) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; д) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

2. Вычислить: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

3. Найти частные производные данных функций по каждой независимой переменной: а) $z = x^2 - y$; б) $z = \dfrac{x}{y} + 3xy^4$; в) $z = \sin(e^x - 5y^3)$.

4. Найти значения частных производных: а) $f(x;y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(3;\,4)$; б) $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$ в точке $(1;\,2)$.

5. Вычислить частные производные второго порядка и проверить равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функций: а) $z = e^x \cdot y^4$; б) $z = arctg(x-2) + \dfrac{y}{3} - 7x^6 y$.

2.27.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.28.Практическое занятие №28

Тема : «Приложения производных ФНП.» (2ч)

2.28.1 Задание для работы:

1. Нахождение дифференциала, его приложение.
2. Производная по направлению. Градиент.
3. Касательная плоскость и нормаль.

2.28.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти частные дифференциалы функции: а) $z = \sin xy$; б) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Найти значение полного дифференциала функции $z = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ при $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$.

3. Найти производную функции $u = x^2 + 3y^2$ в точке $M(2;-1)$ в направлении вектора $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$.

4. Найти $grad\ z$ в точке $M(3;2)$, если $z = x^2 + y^2$.

5. Найти точки, в которой градиент функции $z = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$ равен $\vec{i} - \dfrac{16}{9}\vec{j}$.

6. Для поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(2;1;4)$.

2.28.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.29.Практическое занятие №29

Тема : «Экстремум функции двух переменных.» (2ч)

2.29.1 Задание для работы:

1. Исследование функции двух переменных на экстремум.
2. Нахождение наименьшего и наибольшего значений в замкнутой области.

2.29.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Исследовать на экстремум функции:

а) $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

б) $z = x^2 - xy + y^2 + 8x - 4y + 15$;

в) $z = 2x^2 - 14xy + y^2 + 2x - 9y + 1$.

2.29.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.30.Практическое занятие №30

Тема : «Комплексные числа.» (2ч)

2.30.1 Задание для работы:

1.Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.

3. Извлечение корня из комплексного числа.

2.30.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = -4 - 3i, \quad z_3 = 7 - i$. Вычислить:

а) $z_1 + z_2 \cdot z_3$; б) $(z_2 - z_1) \cdot 2z_3$; в) $\dfrac{z_2 + z_3}{z_1}$; г) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$.

2. Следующие комплексные числа изобразить векторами, определить их модули и аргументы и записать в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3, \quad z_2 = -4, \quad z_3 = 2i, \quad z_4 = -6i$;

б) $z_1 = 7 - 7i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i, \quad z_4 = -\sqrt{3} + i$.

3. Вычислить: а) $(-1+i)^7$; б) $(-\sqrt{3}+i)^5$; в) $\sqrt[6]{-64}$; г) $\sqrt[3]{1+i}$.

2.30.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.31.Практическое занятие №31

Тема : «Многочлены.» (2ч)

2.31.1 Задание для работы:

1. Разложение многочлена на множители.

2. Решение уравнений во множестве комплексных чисел.

2.31.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить уравнения во множестве комплексных чисел:

а) $x^2+16=0$; б) $x^2-2x+4=0$;

в) $x^2+4x+13=0$; г) $3x^2-2x+17=0$;

д) $x^3-125=0$; е) $x^3+216=0$.

2. Записать приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются комплексно-сопряженные числа:

а) $\pm 7i$; б) $5\pm 2i$; в) $-1\pm\sqrt{5}\,i$; г) $-9\pm 4\sqrt{2}\,i$.

2.31.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.32.Практическое занятие №32

Тема : «Многочлены.» (2ч)

2.32.1 Задание для работы:

1. Разложение многочлена на множители.

2. Решение уравнений во множестве комплексных чисел.

2.32.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить уравнения во множестве комплексных чисел:

а) $x^2+16=0$; б) $x^2-2x+4=0$;

в) $x^2+4x+13=0$; г) $3x^2-2x+17=0$;

д) $x^3-125=0$; е) $x^3+216=0$.

2. Записать приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются комплексно-сопряженные числа:

а) $\pm 7i$; б) $5\pm 2i$; в) $-1\pm\sqrt{5}\,i$; г) $-9\pm 4\sqrt{2}\,i$.

2.32.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.33.Практическое занятие №33

Тема : «Первообразная и неопределенный интеграл» (2ч)

2.33.1 Задание для работы:

1. Нахождение первообразной функции.

2. Вычисление неопределенного интеграла по таблице.

3. Геометрический смысл неопределенного интеграла.

2.33.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Дано уравнение скорости движения тела $v(t)=2t+5$. Найти уравнение пути, если за первые $3\ с$ движения тело прошло $32\ м$.

2. Найти интегралы: а) $\int\left(x^4+\frac{4}{x^3}-5\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int 4^x\left(3+\frac{4^{-x}}{\sqrt[7]{x}}\right)dx$; в) $\int(7\cos x-10^x)dx$; г) $\int\left[\frac{2}{9+x^2}-\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{3}{x}\right]dx$; д) $\int\frac{dx}{\cos 2x-\cos^2 x}$; е) $\int\frac{dx}{9x^2+1}$; ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; з) $\int\frac{dv}{\sqrt{v^2-17}}$.

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(-2;8)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания x равен $2x-4$.

2.33.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.33.Практическое занятие №33

Тема : «Первообразная и неопределенный интеграл» (2ч)

2.33.1 Задание для работы:

1. Нахождение первообразной функции.

2. Вычисление неопределенного интеграла по таблице.

3. Геометрический смысл неопределенного интеграла.

2.33.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Дано уравнение скорости движения тела $v(t)=2t+5$. Найти уравнение пути, если за первые $3\ с$ движения тело прошло $32\ м$.

2. Найти интегралы: а) $\int\left(x^4+\frac{4}{x^3}-5\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; б) $\int 4^x\left(3+\frac{4^{-x}}{\sqrt[7]{x}}\right)dx$; в) $\int(7\cos x-10^x)dx$; г) $\int\left[\frac{2}{9+x^2}-\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{3}{x}\right]dx$; д) $\int\frac{dx}{\cos 2x-\cos^2 x}$; е) $\int\frac{dx}{9x^2+1}$; ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; з) $\int\frac{dv}{\sqrt{v^2-17}}$.

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(-2;8)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания x равен $2x-4$.

2.33.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.34.Практическое занятие №34

Тема : «Методы интегрирования» (2ч)

2.34.1 Задание для работы:

1. Непосредственное интегрирование.

2. Замена переменной.

3. Интегрирование по частям.

2.34.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить интеграл: а) $\int (5x-1)^7 dx$; б) $\int e^{-5x} dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}$.

2. Преобразовать и вычислить: а) $\int \frac{3tg^2 x+4}{\sin^2 x} dx$; б) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x} dx$.

3. Вычислить: а) $\int arccrgx dx$; б) $\int (6x+1)\cdot \sin\frac{x}{3} dx$; в) $\int e^x \sin 2x dx$.

4. Вычислить: а) $\int e^{2x} \cos x dx$; б) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; в) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; г) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} dx$.

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(-2;8)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания x равен $2x-4$.

2.34.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.35.Практическое занятие №35

Тема : «Интегрирование рациональных функций» (2ч)

2.35.1 Задание для работы:

1. Интегрирование простейших рациональных дробей.

2. Интегрирование рациональных функций.

2.35.2 Краткое описание проводимого занятия:

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{4dx}{x+7}$; б) $\int \frac{dx}{x-11}$; в) $\int \frac{12dx}{4x+9}$.

а) $\int \frac{8dx}{x^3}$; б) $\int \frac{8dx}{(x+9)^3}$; в) $\int \frac{5dx}{x^2-4x+4}$.

а) $\int \frac{(4x+5)dx}{x^2-8x+17}$; б) $\int \frac{(2-x)dx}{x^2+4x+20}$; в) $\int \frac{7dx}{x^2-2x+5}$.

а) $\int \frac{(4x+41)dx}{x^2+3x-4}$; б) $\int \frac{(6x+23)dx}{x^2+6x+9}$; в) $\int \frac{(x^3-57x+157)dx}{x^2-9x+20}$.

2.35.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.36.Практическое занятие №36

Тема : «Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций» (2ч)

2.36.1 Задание для работы:

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

2. Частные случаи тригонометрических подстановок.

3. Интегрирование иррациональных функций.

2.36.2 Краткое описание проводимого занятия:

Интегрировать тригонометрические функции

1. Вычислить: $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$; $\int \frac{tgxdx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$; $\int \sqrt[7]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 xdx$;

2. Найти: $\int \cos 7x \cdot \cos 5xdx$; $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 xdx$; $\int tg^3 xdx$.

Интегрировать иррациональные функции

3. Найти: $\int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2 - x + 5}}$; $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{15 - 2x - x^2}}$

4. Вычислить: $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x-8}}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$; $\int \frac{\sqrt{x+3}\, dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}}$

2.36.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.37.Практическое занятие №37

Тема : «Определенный интеграл» (2ч)

2.37.1 Задание для работы:

1. Вычисление по формуле Ньютона – Лейбница.

2. Свойства определенного интеграла.

3. Замена переменной в определенном интеграле.

4. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

2.37.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $\int_2^3 3x^2 dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int_1^4 (x^2+3)dx$.

2. Найти: а) $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$; б) $\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)dt$; в) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

3. Найти: а) $\int_0^1 \frac{3x^2 dx}{x^3+1}$; б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. Вычислить определенный интеграл: а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x dx$; б) $\int_0^{0,25} arctg 4x dx$.

2.37.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.38.Практическое занятие №38

Тема : «Геометрические приложения определенного интеграла» (2ч)

2.38.1 Задание для работы:

1. Приближенное вычисление определенных интегралов.
2. Вычисление площадей плоских кривых.
3. Нахождение объема тела вращения.
4. Вычисление длины дуги кривой.

2.38.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = e^x$, $y = 0, \quad x = -2, \quad x = 1$; б) $y = x^2 - 4, \quad y = 0$, $x = -3$;

в) $y = -x^2 + 4x + 6$, $y = 6 - x$; г) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

2. Найти длину дуги кривой $y = 1 + \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

3. Вычислить длину дуги кривой $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$.

5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

6. Найти площадь поверхности конуса, образуемого вращением вокруг оси Ox отрезка прямой $y = 2x$ от $x = 0$ до $x = 2$.

2.38.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.39.Практическое занятие №39

Тема : «Физические приложения определенного интеграла» (2ч)

2.39.1 Задание для работы:

1. Вычисление работы переменной силы.
2. Нахождение давления.
3. Вычисление пути при неравномерном движении.

2.39.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 7 см, если для сжатия ее на 1 см. нужно приложить силу 4 Н. Определить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара, представляющего собой лежащий на боку круговой цилиндр длиной l и радиусом основания R, через находящееся вверху отверстие. Удельный вес воды $\gamma = 9{,}81 kH / м^3$. Вычислить работу в случае, когда $l = 5м$, $R = 1м$.

2. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота 140 м, ребро основания (квадрата) 200 м. Плотность камня, из которого она сделана, приблизительно равна $2{,}5 \cdot 10^3 кг / м^3$. Вычислить работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести.

3. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h. Подсчитать силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

4. Найти путь, пройденный телом за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 6$, если скорость движения $v(t) = 3t^2 + 5$.

5. Найти путь, пройденный телом при свободном падении за пятую секунду от начала падения, если $\upsilon(t) = gt$.

6. Скорость тела задается формулой $v = \sqrt{1+t}$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за первые $10\ c$ после начала движения.

2.39.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.40.Практическое занятие №40

Тема : «Несобственные интегралы» (2ч)

2.40.1 Задание для работы:

1. Несобственные интегралы первого рода.
2. Несобственные интегралы второго рода.
3. Геометрический смысл несобственных интегралов, его применение.

2.40.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить несобственные интегралы и дать геометрическую интерпретацию:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} 4^x\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{1} 4^x\,dx$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{1} \left(\frac{1}{4}\right)^x dx$.

2. Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{3} \frac{1}{x-3}dx$; б) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1}{(x-2)^2}dx$; в) $\int\limits_{5}^{6} \frac{1}{\sqrt{x-5}}dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы или доказать расходимость:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$; в) $\int\limits_{1}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

4. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y=\frac{1}{1+x^2}$ и ее асимптотой.

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью получающейся при вращении линии $y=x^2e^{-x^2}$ вокруг своей асимптоты.

6. Фигура, ограниченная линией $y=e^{-x^2}$ и ее асимптотой, вращается вокруг оси ординат. Вычислить объем тела, которое при этом получается.

2.40.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.41.Практическое занятие №41

Тема : «Двойной интеграл» (2ч)

2.41.1 Задание для работы:

1. Способы вычисления двойного интеграла.
2. Вычисление площади плоской кривой.
3. Нахождение объема пространственного тела.
4. Нахождение координат центра тяжести однородной пластины

2.41.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, если область D ограничена прямыми $y = x,\ y = 2x$, $x = 2,\ x = 3$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле:

а) $\int\limits_1^e dy \int\limits_0^{\ln y} f(x;y)\,dx$; б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{(3-x)/2} f(x;y)\,dy$.

3. Найти двойным интегрированием площадь области, ограниченной параболами $y=\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и прямой $x = 4$.

4. Найти среднее значение функции $z = 2x + y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $y + x = 3$.

5. Найти объем тела, ограниченного с боков круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 8$, снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $x + y + z = 4$, расположенного в первом октанте.

6. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ и прямой $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$.

2.41.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.42.Практическое занятие №42

Тема : «Кратные интегралы» (2ч)

2.42.1 Задание для работы:

1. Вычисление работы силового поля.
2. Вычисление потока векторного поля.
3. Нахождение дивергенции поля.

2.42.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить тройные интегралы:

а) $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$; б) $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^3 z dz$.

2. Вычислить $\iiint_\Omega xydxdydz$, $\Omega -$ область, ограниченная гиперболическим параболоидом $z = xy$ и плоскостями $x + y = 1$ и $z = 0$ ($z \geq 0$).

3. Вычислить тройным интегрированием объем тела, ограниченного цилиндрами $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ и плоскостями $x = -1$, $x = 2$.

4. Вычислить криволинейные интегралы:

а) $\int_L \frac{ds}{x - y}$, где $L -$ отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками $A(0;-2)$, $B(4;0)$.

б) $\int_L xyds$, где $L -$ контур прямоугольника с вершинами $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$, $D(0;2)$.

2.42.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.43.Практическое занятие №43

Тема : «Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными» (2ч)

2.43.1 Задание для работы:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Частные и общие решения.
3. ДУ первого порядка. Задача Коши.
4. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.

2.43.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Скорость распада радия пропорциональна количеству радия в данный момент времени. Вычислить, через сколько лет от 100 г радия останется 65 г, если период полураспада равен 1600 лет.

2. Найти общий интеграл ДУ: а) $\sqrt{y}dy = x^3 dx$; б) $y^3 dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Найти частное решение ДУ $x^2 dy + (y-1)dx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1,\ y_0 = 2$.

4. Известно, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \dfrac{3}{2+x} \cdot y$ и $y(-3) = 5$. Найти $y(1)$.

5. Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру $70^0 C$, через 10 минут температура воды стала $65^0 C$, температура окружающей резервуар среды $15^0 C$. Определить температуру воды в резервуаре через 30 минут от начального момента. (Скорость охлаждения воды пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде).

2.43.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.44.Практическое занятие №44

Тема : «Дифференциальные уравнения первого порядка» (2ч)

2.44.1 Задание для работы:

1. ЛДУ первого порядка. Методы Лагранжа и Бернулли

2. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

3. Однородные ДУ и приводящиеся к ним.

4. ДУ в полных дифференциалах.

2.44.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$; б) $y'-4xy=x$.

2. Найти частное решение: $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$, $y_0=5, x_0=-2$

3. Решить: а) $xy'+y=2x^2y^2$, б) $y'+yctgx=y^2\sin x\cos x$.

4. Решить задачу Коши:

а) $xy'-2y=x^2\sqrt{y}$, $y(1)=1$; б) $y'-\dfrac{3y}{x}=y^2$, $y_0=-4, x_0=1$.

5. Решить дифференциальные уравнения первого порядка

а) $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$; б) $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$; в) $\left(1-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(y^2+\dfrac{1}{x}\right)dy=0$.

6. Решить: а) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; б) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$; в) $y'=\dfrac{y-3x^2}{4y-x}$.

7. Найти частное решение ДУ $e^{-y}dx+\left(2y-xe^{-y}\right)dy=0$, удовлетворяющее условию $y(-3)=0$.

8. Решить задачу Коши: $x+ye^x+\left(y+e^x\right)y'=0$, $y(0)=4$.

2.44.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.45.Практическое занятие №45

Тема : «Дифференциальные уравнения первого порядка» (2ч)

2.45.1 Задание для работы:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

2.45.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру $70^0 C$, через 10 минут температура воды стала $65^0 C$, температура окружающей резервуар среды $15^0 C$. Определить температуру воды в резервуаре через 30 минут от начального момента. (Скорость охлаждения воды пропорциональна разности температур воды в резервуаре и в окружающей его среде).

2.45.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.46.Практическое занятие №46

Тема : «ДУ высших порядков» (2ч)

2.46.1 Задание для работы:

1. Повторение ДУ первого порядка

2. Решение ДУ, допускающие понижение порядка.

2.46.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y^5 dy = 6^x dx$; б) $x^2 y' - 2xy = 1$; в) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \cdot \frac{y}{x} + 4$; г) $y' = \frac{10 - 2xy}{2y + x^2}$.

2. Опытным путем установлено, что при брожении кормов скорость изменения массы (прироста) действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. За 4 часа после начала брожения масса фермента уменьшилась с 12 г до 9 г. Найти массу фермента после 10 часов брожения.

3. Решить: а) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, при $x = \frac{\pi}{4}$ $y = \frac{\ln 2}{2}$, $y' = 1$; б) $y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' = \frac{x^3}{1+x^2}$

в) $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$; г) $y'' = y' \cdot e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2.46.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.47.Практическое занятие №47

Тема : «ЛОДУ второго порядка» (2ч)

2.47.1 Задание для работы:

1. Линейно зависимые и линейно независимые функции.
2. ФСР. Определитель Вронского.
3. Решение ЛОДУ второго порядка. Различные случаи.

2.47.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Проверить, что функции $y = x^3$ и $y = x^4$ линейно независимые. Убедиться, что они образуют ФСР и составить его уравнение.

2. Функции $y = x^3$ и $y = x^2$ удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению второго порядка. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

3. Решить ДУ:

1. $y'' + y' - 2y = 0$.
2. $y'' - 2y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' - 5y = 0$.
4. $y'' + 5y' = 0$
5. $y'' - 2y' = 0$.
6. $y'' - 3y' + 2y = 0$
7. $y'' - 2y' = 0$.
8. $y'' + 3y' + 2y = 0$.
9. $y'' - 4y = 0$
10. $y'' - y' - 2y = 0$

2.47.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.48.Практическое занятие №48

Тема : «ЛНДУ второго порядка» (2ч)

2.48.1 Задание для работы:

1. Решение ЛНДУ по методу Лагранжа.

2. Подбор частного решения ЛНДУ второго порядка с правой частью специального вида.

2.48.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить ДУ второго порядка:

а) $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 1$; б) $y'' + 8y' - 9y = \sin x$; в) $y'' - 5y' - 6y = 4xe^{-x}$;

г) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$; д) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}(\sin x + \cos x)$.

2. Решить ДУ: а) $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 1$; б) $y'' - 5y' - 6y = 4xe^{-x}$

3. Записать структуру частного решения ЛНДУ по виду функции $f(x)$: $y'' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = 4x^3 + 1$; б) $f(x) = 10e^{-x}\cos 2x$; в) $f(x) = x \cdot \sin x$.

2.48.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.49.Практическое занятие №49

Тема : «ЛНДУ второго порядка» (2ч)

2.49.1 Задание для работы:

1. Метод вариации произвольных постоянных

2.49.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Решить ДУ второго порядка:

а) $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 1$; б) $y'' + 8y' - 9y = \sin x$; в) $y'' - 5y' - 6y = 4xe^{-x}$;

г) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$; д) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}(\sin x + \cos x)$.

2. Решить ДУ: а) $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 1$; б) $y'' - 5y' - 6y = 4xe^{-x}$

3. Записать структуру частного решения ЛНДУ по виду функции $f(x)$:
$y'' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = 4x^3 + 1$; б) $f(x) = 10e^{-x}\cos 2x$; в) $f(x) = x \cdot \sin x$.

2.49.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.50.Практическое занятие №50

Тема : «Знакоположительные ряды» (2ч)

2.50.1 Задание для работы:

1. Нахождение общего члена ряда.

2. Исследование на сходимость знакоположительных рядов.

2. Признаки сравнения знакоположительных рядов

2.50.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти формулу для общего члена ряда:

а) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$; б) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+\ldots$; в) $\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+\ldots$

2. Найти частичную сумму первых четырех членов ряда и сумму ряда:

а) $1+8+27+\ldots$; б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

3. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n+3}$; в) $0{,}6+0{,}51+0{,}501+\ldots+\left[0{,}5+0{,}1^n\right]+\ldots$.

4. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$; г) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$

$f(x)=x\cdot\sin x$.

2.50.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.51.Практическое занятие №51

Тема : «Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.» (2ч)

2.51.1 Задание для работы:

1. Признак Даламбера.

2. Радикальный признак Коши.

3. Интегральный признак Коши.

2.51.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\ldots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$;

г) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$

2.51.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.52.Практическое занятие №52

Тема : «Знакочередующиеся ряды.» (2ч)

2.52.1 Задание для работы:

1. Признак Лейбница.

2. Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.

2.52.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. По признаку Лейбница исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots$$

2. Исследовать сходимость ряда $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$

2.52.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.53.Практическое занятие №53

Тема : «Исследование рядов на абсолютную и условную сходимость.» (2ч)

2.53.1 Задание для работы:

1. Исследование рядов на абсолютную и условную сходимость

2.53.2 Краткое описание проводимого занятия:

13. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n^{2}$; б) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+...$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{4}}$

2. Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная):

а) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+...$; б) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^{2}}-\frac{13}{10^{3}}+\frac{19}{10^{4}}+\frac{25}{10^{5}}-\frac{31}{10^{6}}+...$; в) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+...$

2.53.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.54.Практическое занятие №54

Тема : «Степенные ряды.» (2ч)

2.54.1 Задание для работы:

1. Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена.

2. Применение рядов.

2.54.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Написать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

2. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на концах интервала. Найти сумму ряда при $x=-1$.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{8^n\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n n^2}$.

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$:

а) $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)$; б) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$; в) $f(x)=\sqrt{x}\cos 2x$

4. Вычислить определенный интеграл с точностью до $0{,}001$ путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

1. $\int_0^{0,5}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$. 2. $\int_0^{0,5}e^{-4x^2}dx$. 3. $\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$. 4. $\int_0^{1}\cos\sqrt{x}\,dx$.

5. Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y''-xy'+y-1=0$ при $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

2.54.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.55.Практическое занятие №55

Тема : «Комбинаторика.» (2ч)

2.55.1 Задание для работы:

1. Комбинаторика.

2. Виды событий.

2.55.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычислить: а) $C_{11}^{2} \cdot C_{12}^{11}$;

б) $C_{16}^{3} - P_{6} + A_{7}^{3}$.

2.55.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.56.Практическое занятие №56

Тема : «Вероятность события.» (2ч)

2.56.1 Задание для работы:

1. Алгебра событий.

3. Классическое определение вероятности.

2.56.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. В ящике 20 исправных предохранителей и 5 с дефектом. Необходимо заменить 3 предохранителя. Найти вероятность того, что: а) только 2 предохранителя исправны; б) меньше, чем 2 предохранителя исправны; в) хотя бы 1 предохранитель исправен.

2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет: а) одну окрашенную грань; б) три окрашенных грани.

3.Среди 10 микрокалькуляторов лишь 4 новых, остальные – бывшие в употреблении. Наугад взято три микрокалькулятора. Какова вероятность того, что все они окажутся новыми?

2.56.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.57.Практическое занятие №57

Тема : «Основные теоремы теории вероятностей.» (2ч)

2.57.1 Задание для работы:

1. Сумма и произведение событий.

2. Теоремы сложения и умножения.

3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

2.57.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Игральная кость налита свинцом, в результате чего вероятность выпадения каждого числа очков пропорциональна этому числу. Найдите указанные вероятности.

2. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка поразят мишень; 2) хотя бы один стрелок поразит мишень; 3) ни один стрелок не поразит мишень.

3. Студент выучил 16 из 20 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответ: а) на два вопроса; б) только на один вопрос из двух, содержащихся в его экзаменационном билете.

4. Магазин получил две, равные по количеству, партии телевизоров одной и той же марки. Известно, что в среднем 14% телевизоров в первой партии и 8% во второй имеют скрытый брак. Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор без брака.

5. Изделие проверяется на стандартность одним из трех товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,25, ко второму – 0,26 и к третьему – 0,49. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,95, вторым – 0,98, третьим – 0,97. найти вероятность того, что изделие проверено вторым товароведом.

2.57.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.58.Практическое занятие №58

Тема : «Повторные испытания.» (2ч)

2.58.1 Задание для работы:

1. Схема Бернулли. Формула Бернулли.

2. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

3. Формула Пуассона.

4. Интегральная теорема Лапласа.

2.58.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вероятность прорастания семян данного сорта растений равна $0{,}75$. Посеяно 10 семян. Найти наиболее вероятное число всходов.

2. По статистическим данным в некотором районе в течение летнего сезона вероятность выпадения дождя равна $0{,}2$. Найти наиболее вероятное число не дождливых дней, если длительность летнего сезона считать равной 90 дням.

3. Вероятность того, что зерно заражено вредителями, равна $0{,}002$. Найти вероятность того, что из 2000 зерен окажется не более двух зараженных зерен.

4. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,003. Найти вероятность того, что после облучения из 300 бактерий останется не менее трех.

5. Посредническая фирма заключает договоры с автосалонами на доставку автомобилей. Известно, что от каждого салона заявка на очередной месяц может поступить на фирму с вероятностью 0,4. Определить минимальное количество автосалонов, с которыми фирма должна заключить договоры, чтобы с вероятностью не менее 0,9 от них поступала хотя бы одна заявка на доставку автомобилей на очередной месяц. При найденном значении определить наиболее вероятное число заявок на доставку на очередной месяц и вероятность поступления такого количества заявок.

2.58.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.59.Практическое занятие №59

Тема : «ДСВ.» (2ч)

2.59.1 Задание для работы:

1. Составление закона распределения, построение многоугольника распределения ДСВ.

2. Функция распределения вероятности.

2.59.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Задан закон распределения случайной величины Х.

X	2	3	6	7	8	10
p	0,1	0,2		0,2	0,15	0,1

Найти: 1) математическое ожидание М (*X*); 2) дисперсию D (*X*); 3) среднее квадратическое отклонение σ (*X*); 4) построить многоугольник распределения.

2. Известно, что $M(X)=5, M(Y)=8, D(X)=2, D(Y)=6$. Найти: а) $M(X-3)$; б) $M(9X-4Y)$; в) $M(3Y-2X+5)$; г) $D(Y+4)$; д) $D(X-7)$; е) $D(-2X)$; ж) $D(3X-2Y)$; з) $D(3X+4Y-5)$.

3. Даны законы распределения случайных величин Х и У:

X	1	2		*У*	0,5	1
p	0,2	0,8		*p*	0,3	0,7

Найти $M(X+У)$, $M(X\cdot У)$.

4. ДСВ Х принимает только два возможных значения x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$. Известно, что $P(X=x_1)=0{,}6$. Найти закон распределения ДСВ *X*, если $M(X)=1{,}4,\ D(X)=0{,}24$..

2.59.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.60.Практическое занятие №60

Тема : «НСВ.» (2ч)

2.60.1 Задание для работы:

1. Интегральная функция распределения, ее свойства

2. Дифференциальная функция распределения НСВ, ее свойства.

2.60.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале $(0;1)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 1 \\ a\,x, & при \quad 1 < x < 3 \\ 0, & при \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Найти: 1) параметр a; 2) $D(X)$; 3) $P(2 < X < 2{,}5)$.

3. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0 \\ 3x^2 + 2x, & при \quad 0 < x < \frac{1}{3} \\ 1, & при \quad x \ge \frac{1}{3} \end{cases}$$

Найти плотность вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2.60.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.61.Практическое занятие №61

Тема : «Числовые характеристики.» (2ч)

2.61.1 Задание для работы:

1. Числовые характеристики ДСВ

2. Числовые характеристики НСВ.

2.61.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны законы распределения случайных величин X и У:

X	1	2		*У*	0,5	1
p	0,2	0,8		*p*	0,3	0,7

Найти $M(X+У)$, $M(X \cdot У)$.

2. ДСВ X принимает только два возможных значения x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$. Известно, что $P(X = x_1) = 0{,}6$. Найти закон распределения ДСВ *X*, если $M(X) = 1{,}4,\ D(X) = 0{,}24$..

3. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0 \\ 3x^2 + 2x, & при \quad 0 < x < \dfrac{1}{3} \\ 1, & при \quad x \ge \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Найти плотность вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2.61.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.62.Практическое занятие №62

Тема : «Виды распределений ДСВ.» (2ч)

2.62.1 Задание для работы:

1. Биномиальное распределение.

2. Распределение Пуассона.

3. Геометрическое и гипергеометрическое распределение

2.62.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. В энергосистеме имеется группа из четырех однотипных агрегатов, находящихся в независимых и одинаковых условиях. Вероятность исправного состояния каждого агрегата в течение времени T одинакова и равна $0{,}6$. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа агрегатов, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

2. Студент – второкурсник решил помочь библиотеке университета. Ему поручили заполнить 500 книжных формуляров. Вероятность ошибки при заполнении формуляра равна 0,002. Составить закон распределения случайной величины – число формуляров, заполненных студентом верно.

3. В партии 20 изделий, среди них имеются 5 бракованных. Для проверки выбирают случайно 3 изделия. Составить закон распределения числа бракованных изделий в выборке. Найти математическое ожидание и дисперсию.

4. Производятся многократные испытания некоторого элемента на надежность до тех пор, пока элемент не откажет. Найти математическое ожидание и дисперсию ДСВ – числа опытов, которые надо произвести. Вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,1.

2.62.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.63.Практическое занятие №63

Тема : «Виды распределений НСВ.» (2ч)

2.63.1 Задание для работы:

1. Равномерное распределение.

2. Показательное распределение.

2.63.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2;8)$.

2. Эколог изучает процесс рассеивания семян определенного растения. Допустим, что семена рассеиваются в среднем на расстояние в 1м от материнского растения и что распределение вероятностей для этого расстояния экспоненциальное. Какая доля семян рассеивается более чем на 2 м от растения?

2.63.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.64.Практическое занятие №645

Тема : «Нормальный закон распределения.» (2ч)

2.64.1 Задание для работы:

1. Нормальный закон распределения, его параметры.

2. Кривая Гаусса. Ее свойства и график

2.64.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Нормально распределенная случайная величина задана плотностью вероятностей $f(x) = C \cdot e^{-\frac{(x-13)^2}{32}}$. Найти: 1) значение коэффициентаC; 2) произведение $M(X) \cdot D(X)$; 3) промежутки вогнутости функции $f(x)$; 4) ось симметрии нормальной кривой; 5) значение функции $f(x)$ в точках перегиба; 6) вероятность попадания в интервал $(10;14)$.

2. Для некоторого вида млекопитающих масса взрослой особи является нормально распределенной случайной величиной со средним 100 кг и стандартным отклонением 8 кг. Чему равны вероятности того, что животное имеет массу: а) меньше 90 кг; б) от 95 до 110 кг?

3. Случайная величина X – масса одного зерна – распределена нормально с $a = 0{,}18$ г и $\sigma = 0{,}05$ г. Хорошие всходы дают зерна, масса которых больше 0,15 г. Найдите: а) процент семян, которые дадут хорошие всходы; б) величину, которую с вероятностью 0,95 не превысит масса отобранного зерна.

2.64.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.65.Практическое занятие №65

Тема : «Основные выборочные характеристики.» (2ч)

2.65.1 Задание для работы:

1. Генеральная совокупность и выборка.

2. Выборочные характеристики.

2.65.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны измерения 100 обработанных деталей. В таблице указаны значения отклонений от заданного размера и соответствующие им частоты.

$(x_{i-1}; x_i]$	$(-2;-1,5]$	$(-1,5;-1]$	$(-1;-0,5]$	$(-0,5;0]$	$(0;0,5]$	$(0,5;1]$	$(1;1,5]$	$(1,5;2]$
n_i	2	4	9	18	23	20	15	9

Считая, что признак X – отклонение от проектного размера – подчиняется нормальному закону распределения, 1) построить гистограмму относительных частот; 2) записать дискретное распределение признака X; 3) найти основные выборочные характеристики, взяв в качестве вариант середины интервалов

2.65.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.66.Практическое занятие №66

Тема : «Основные выборочные характеристики.» (2ч)

2.66.1 Задание для работы:

1. Нахождение выборочных характеристик.

2.66.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Даны измерения 100 обработанных деталей. В таблице указаны значения отклонений от заданного размера и соответствующие им частоты.

$(x_{i-1}; x_i]$	$(-2;-1{,}5]$	$(-1{,}5;-1]$	$(-1;-0{,}5]$	$(-0{,}5;0]$	$(0;0{,}5]$	$(0{,}5;1]$	$(1;1{,}5]$	$(1{,}5;2]$
n_i	2	4	9	18	23	20	15	9

Считая, что признак X – отклонение от проектного размера – подчиняется нормальному закону распределения, 1) построить гистограмму относительных частот; 2) записать дискретное распределение признака X; 3) найти основные выборочные характеристики, взяв в качестве вариант середины интервалов

2.66.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.67.Практическое занятие №67

Тема : «Точечные и интервальные оценки.» (2ч)

2.67.1 Задание для работы:

1. Точечные оценки. Несмещенные и состоятельные оценки.

2. Доверительный интервал. Надежность.

2.67.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания и дисперсии случайной величины X, заданной статистическим распределением выборки:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

2. По выборке объема $n = 16$ из генеральной совокупности определены выборочная средняя $\overline{x} = 41{,}7$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 4$. Найти 95-процентный доверительный интервал для генеральной средней и генерального среднего квадратического отклонения.

3. Проведено 25 равноточных измерений некоторой физической величины и найдено среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x} = 42{,}5$. Все измерения проведены одним и тем же прибором с известным средним квадратическим отклонением ошибок измерений $\sigma = 2{,}1$. Найти с надежностью $\gamma = 0{,}9$ доверительный интервал для оценки истинного значения измеряемой физической

2.67.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.68.Практическое занятие №68

Тема : «Точечные и интервальные оценки.» (2ч)

2.68.1 Задание для работы:

1. Нахождение точечных оценок.

2. Определение доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения

2.68.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Найти несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания и дисперсии случайной величины X, заданной статистическим распределением выборки:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

2. По выборке объема $n = 16$ из генеральной совокупности определены выборочная средняя $\bar{x} = 41{,}7$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 4$. Найти 95-процентный доверительный интервал для генеральной средней и генерального среднего квадратического отклонения.

3. Проведено 25 равноточных измерений некоторой физической величины и найдено среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42{,}5$. Все измерения проведены одним и тем же прибором с известным средним квадратическим отклонением ошибок измерений $\sigma = 2{,}1$. Найти с надежностью $\gamma = 0{,}9$ доверительный интервал для оценки истинного значения измеряемой физической

2.68.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.69.Практическое занятие №69

Тема : «Корреляция.» (2ч)

2.69.1 Задание для работы:

1. Составление корреляционной таблицы.

2. Вычисление коэффициента корреляции.

3. Определение параметров линейной регрессии.

2.69.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Получены данные между длиной колоса (X) и числом зерен (Y) в нем:

X	7	8	11	12	9	7	9	10	7	8	10	13	13	14	12	7	9	8	9	10
Y	15	20	28	28	23	17	23	25	16	21	23	28	31	32	30	16	25	20	23	25

По данным составить корреляционную таблицу; построить эмпирическую линию регрессии и записать уравнение теоретической линии регрессии.

2.Методом наименьших квадратов найти уравнение прямой регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице:

Y / X	16	26	36	46	56	n_x
20	4					4
25	6	8				14
30		10	32	4		46
35			3	12	1	16
40			9	6	5	20
n_y	10	18	44	22	6	100

2.69.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа

2.70.Практическое занятие №70

Тема : «Проверка гипотез.» (2ч)

2.70.1 Задание для работы:

1. Определение нулевой и альтернативной гипотез.

2. Применение статистических критериев проверки гипотез.

2.70.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением.

интервалы	3 – 5	5 – 7	7 – 9	9 – 11	11 – 13	13 –15	15 – 17	17 – 19	19 – 21
частоты	5	8	10	18	20	16	11	7	5

2. Дано статистическое распределение

варианты	0	1	2	3	4	5	6	7
частоты	7	21	26	21	13	7	3	2

Оценить степень согласованности статистического распределения с распределением Пуассона.

2.70.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит методы основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, теории вероятностей и теории математической статистики и случайных процессов, дискретной математики, научится применять математические методы для решения практических задач, овладеет навыками решения дифференциальных и алгебраических уравнений , дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, математической логики, функционального анализа