ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика**»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Математическая логика и теория алгоритмов

Направление подготовки 27.03.04 Управление в технических системах

Профиль подготовки «Системы и средства автоматизации технологических процессов»

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1.Лекция № 1 (2 часа)

Тема: «Введение в математическую логику»

1.1.1. Вопросы лекции:
1. Предмет математической логики.
2. Исторические сведения.
3. Синтаксис.
4. Классификация суждений.
5. Множества. Функции. Отношения.

1.1.2. Краткое содержание вопросов

1. Предмет математической логики.
2. Исторические сведения.

Математическая логика в сущности является формальной логикой, которая использует математические методы. Формальная логика изучает акты мышления (понятия, суждения, умозаключения, доказательства) с точки зрения их формы, логической структуры, абстрагируясь от конкретного содержания. Создателем формальной логики является Аристотель, а первую завершенную систему математической логики на базе строгой логико-математического языка - алгебру логики, - предложил Джордж Буль (1815 - 1864). Логико-математические языки и теория их смысла развиты в работах Готлоб Фреге (одна тысячу восемьсот сорок-восемь - одна тысячу девятьсот двадцать-пять), который ввел понятие предикату и кванторов. Это позволило применить логико-математические языки к вопросам основ математики. Изложение целых разделов математики на языке математической логики и аксиоматизации арифметики сделаны Джузеппе Пеано (1858 - 1932). Грандиозная попытка Г. Фреге и Бертран Рассел (тысячу восемьсот семьдесят-два - 1 970) сведение всей математики к логике не достигла основной цели, но привела к созданию богатого логического аппарата, без которого оформление математической логики как полноценного раздела математики было бы невозможно.

На рубеже 19 века - 20 в. были открыты парадоксы, связанные с основными понятиями теории множеств (самым известным является парадоксы Георг Кантор и Б. Рассела). Для выхода из кризиса Л. Брауэр (тысячу восемьсот восемьдесят-одна - один тысячу девятьсот шестьдесят-шесть) выдвинул интуиционистской программу, в которой предложил отказаться от актуальной бесконечности и логического закона исключенного третьего, считая допустимыми в математике только конструктивные доказательства.

Другой путь предложил Давид Гильберт (1862 - тысяча девятьсот сорок-три), который в 20-х годах 20 в. выступил с программой обоснования математики на базе математической логики. Программа Гильберта предусматривала построение формально-аксиоматических моделей (формальных систем) основным разделам математики и дальнейшее доведение их непротиворечивости надежными финитным средствами. Непротиворечивость означает невозможность одновременного вывода некоторого утверждения и его отрицания. Таким образом, математическая теория, непротиворечивость которой хотим доказать, становится предметом изучения определенной математической науки, которую Давид Гильберт назвал метаматематики, или теорией доказательств. Именно с разработки Д. Гильбертом и его учениками теории доказательств на базе развитой в работах Готлоб Фреге и Бертран Рассел логического языка начинается становление математической логики как самостоятельной математической дисциплины.

3. Синтаксис.

Высказывание – исходное понятие логики высказываний. Формой существования высказывания является предложение предметного языка, в большинстве случаев повествовательное. Само высказывание – смысл, содержание предложения. Соотнесение содержания предложений, выражающих высказывание, с объективной действительностью приводит к разной оценке высказываний: если содержание предложения соответствует действительности, его оценивают как истинное, если такого соответствия нет, то как ложное.

Поэтому естественно считать, что каждое высказывание или истинно, или ложно и не может быть одновременно истинно и ложно. Таким образом все высказывания разбиваются на два класса: класс И (истинных высказываний) и класс Л (ложных высказываний).

Допустим, что в предметном языке имеются предложения, внутренняя структура которых безразлична, требуется только их распознавать и различать. Такие предложения называют элементарными формулами, или атомами. Атомы обозначают прописными буквами латинского алфавита (при необходимости с индексами), разные буквы обозначают разные атомы (по содержанию). В предметном языке есть и такие предложения, что некоторая их часть тоже является предложением. Например: "Если три стороны треугольника равны между собой, то треугольник является равносторонним" – это предложение имеет части "три стороны треугольника равны между собой" и "треугольник является равносторонним", каждая из которых сама является предложением. Такие предложения предметного языка в алгебре высказываний описываются сложными формулами или молекулами. Молекулы строятся из атомов с помощью некоторых слов и оборотов предметного языка, которым в алгебре высказываний соответствуют логические операторы.

Пусть имеются следующие простые высказывания: "на улице светит солнце", "в аудитории идут занятия". Можно построить сложные высказывания типа:
"на улице светит солнце и в аудитории идут занятия";
"на улице светит солнце, а в аудитории идут занятия";
"если на улице светит солнце, то в аудитории идут занятия";
"на улице не светит солнце, однако в аудитории идут занятия ";

Можно продолжить список этих высказываний и нет сомнений, что удастся получить еще более абсурдные, чем последний. В связи с этим отметим первую особенность алгебры высказываний: *в ней допускаются любые грамматически правильные способы образования сложных высказываний и игнорируется смысловая характеристика получившегося высказывания.*

В алгебре высказываний интересуются лишь истинностью или ложностью высказываний, точнее, истинностью сложного высказывания в зависимости от истинности входящих в него простых высказываний. Кроме того, необходимо ещё фиксировать ситуацию. Существуют высказывания истинные (ложные) во всех возможных ситуациях. "Волга впадает в Каспийское море", "через две точки евклидовой плоскости проходит единственная прямая" – это высказывания абсолютно истинные. Абсолютно истинные (абсолютно ложные) высказывания называют логическими константами. Возможны такие конструкции сложных высказываний, для которых не удается найти истинностные значения. Например: "то, что я сейчас говорю, неправда". Попытки считать это высказывание истинным или ложным одинаково приводят к противоречию. Причина возникающих парадоксов в том, что высказывание в целом неявно содержится само в себе как простое высказывание. И при определении значения истинности высказывания нужно заранее знать это значение.

4. Классификация суждений.

Учение о высказываниях, называемое алгеброй высказываний является первой из формальных логических теорий. Возьмем следующее рассуждение: "Дикари раскрашивают свое тело. Некоторые современные люди раскрашивают свое тело. Следовательно, некоторые современные люди – дикари." Данное рассуждение неправильно, несмотря на то, что используемые посылки и сделанное из них заключение можно признать истинными. Анализируя рассуждения, следует отличать два их типа: есть рассуждения достоверные, или дедуктивные, и рассуждения правдоподобные, или вероятностные.

Заключения, полученные с помощью дедуктивного рассуждения, достоверны, они носят необходимый характер. Результаты правдоподобных рассуждений являются лишь гипотетическими, верными с некоторой степенью вероятности. Правильное рассуждение всегда гарантирует истинность заключения при условии, что истинны посылки. Характерной чертой дедуктивных рассуждений является их формальный характер. Т.е. правильность рассуждения зависит от структуры, логической формы посылок и заключения. *Посылки и заключения* – это высказывания, или предложения, в которых содержится какая-то информация о предметах, явлениях, положениях дел и которые могут быть оценены как истинные или ложные. В классической логике высказывание называется истинным тогда и только тогда, когда оно соответствует описываемому положению дел, в противном случае оно считается ложным.

Рассуждения могут проводиться на различных языках. Однако, рассуждая мы применяем некоторые стандартные способы записи и преобразования информации. Это обстоятельство впервые было использовано Аристотелем. Он рассматривал в качестве стандартных форм четыре вида категорических утверждений: "Все S суть P" – общеутвердительное высказывание; "Некоторые S суть P" – частично-утвердительное высказывание; "Все S не суть P" – общеотрицательное высказывание; "Некоторые S не суть P" – частично-отрицательное высказывание.

Например: "Все сороки – птицы" – общеутвердительное высказывание; "Некоторые люди – жулики" – частично-утвердительное высказывание; "Все лошади – не хищники" – общеотрицательное высказывание; "Некоторые люди не знают логики" – частично-отрицательное высказывание.

Аристотель разработал теорию рассуждений, в которой посылки и заключения формулируются в виде вышеперечисленных категорических утверждений. В дальнейшем логика стала исследовать способы рассуждений, основанные на более сложной структуре высказываний. Формальная логика называется формальной именно потому, что она изучает лишь формы человеческих рассуждений, отвлекаясь от их конкретного содержания.

5. Множества. Функции. Отношения.

1.2.Лекция № 2 (2 часа)

Тема: «Операции над высказываниями».

1.2.1. Вопросы лекции:
1. Логические операции.
2. Формулы алгебры логики.
3. Равносильные формулы и равносильные преобразования формул.

1.2.2. Краткое содержание вопросов
1. Логические операции.

Рассмотрим логические операторы (операции).

1) Оператор, соответствующий союзу "и", называется *конъюнкцией*. Высказывание $A\&B$ истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B (табл. 1).

Таблица 1

A	B	A & B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

2) Оператор, соответствующий частице "не", называется *отрицание* (табл.2.)

Таблица 2

A	¬A
И	Л
Л	И

Эта операция одноместна – в том смысле, что из одного данного простого высказывания строится новое высказывание $\neg A$.

3) Операция, соответствующая союзу "или", называется *дизъюнкцией* (табл.3).

Таблица 3

A	B	A ∨ B
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Абсолютная истинность $A \vee B$ означает, что в каждой ситуации, хотя бы одно из высказываний − истинно.

4) Операция, соответствующая обороту "если..., то...", называется *импликацией*. A называется посылкой импликации, B – её заключением (табл.4).

Таблица 4

A	B	A → B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

В случае импликации несоответствие между обычным пониманием истинности и идеализированной точкой зрения алгебры высказываний еще заметнее, чем для других логических операций. Главное отличие в том, что при учете смыслового содержания высказываний оборот "если..., то..." подразумевает причинную связь между посылкой и заключением. С точки же зрения алгебры высказываний истинность импликации в некоторой ситуации означает лишь, что если в этой ситуации истинна посылка, то истинно заключение.

5) Операция, соответствующая оборотам типа "тогда и только тогда", "для того чтобы...", "необходимо и достаточно", называется *эквивалентностью* (табл.5). К эквивалентности в той же мере относится замечание о том, что её использование в алгебре высказываний не учитывает смыслового содержания высказываний.

Таблица 5

A	B	A ~ B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Таким образом, имеется некоторое количество логических операций, позволяющих получать из простых высказываний сложные. При этом вместо простых высказываний можно брать уже построенные сложные. Т.е. появляется возможность применять многоступенчатые конструкции, многократно используя введенные логические операции.

2. Формулы алгебры логики.

Алфавитом алгебры высказываний называется множество, элементы которого называются буквами.

Алфавит (язык исчисления высказываний) состоит из переменных высказываний *A, B, C,...;* знаков логических связок $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ и скобок (,).

Конечные последовательности букв алфавита называются словами в этом алфавите. Некоторые слова в алфавите являются формулами алгебры высказываний.

Формулами называют логические операции, которые получаются комбинированием конечного числа введенных операций. Для всякой формулы можно построить истинностную таблицу, последовательно используя истинностные таблицы основных операций.

Строгое определение формулы алгебры высказываний дается по индукции:

Формулы: а) переменное высказывание – есть формула;

б) если $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{R}$ – формулы, то $(\mathfrak{I}\& \mathfrak{R}), (\mathfrak{I} \vee \mathfrak{R}), (\mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{R}), \overline{(\mathfrak{I})}$ тоже формулы;

в) других формул нет.

3. Равносильные формулы и равносильные преобразования формул.

Пусть F_1 и F_2 – две формулы алгебры высказываний, а $A_1, A_2, \ldots A_n$ – набор простых высказываний, входящих, по крайней мере, в одну из формул F_1, F_2. Формулы называются *равносильными*, если при всех значениях истинности $A_1, A_2, \ldots A_n$, значения истинности F_1 и F_2 совпадают. Очевидно, что равносильные формулы имеют одинаковые истинностные таблицы, и, наоборот, если истинностные таблицы формул совпадают, то они равносильны. Отношение равносильности формул является отношением эквивалентности:

1. $A \equiv A$ для любой формулы A.
2. Если $A \equiv B$, то $B \equiv A$ для любых формул A и B.
3. Если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$ для любых формул A, B, C.

Поэтому множество всех формул разбивается на классы эквивалентности – классы равносильных формул. Все формулы из одного класса характеризуются одной истинностной таблицей.

Если $A \rightarrow B$ является тавтологией (тождественно истинной), то говорят, что A логически влечет B, или, что B является логическим следствием A. Если $A \equiv B$ есть тавтология, то говорят, что A и B логически эквивалентны. Истинностные таблицы дают эффективную процедуру для решения вопроса о том, является ли данная формула тавтологией.

1.3.**Лекция № 3 (2 часа)**

Тема: «Функции алгебры логики»

1.3.1. Вопросы лекции:
1. Закон двойственности.
2. Дизъюнктивная нормальная форма.
3. Конъюнктивная нормальная форма.
4. Приложения алгебры логики: релейно-контактные схемы, решение логических задач.

1.3.2. Краткое содержание вопросов
1. Закон двойственности.
2. Дизъюнктивная нормальная форма.
3. Конъюнктивная нормальная форма.

Элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией) назовём дизъюнкцию (конъюнкцию) переменных и отрицаний этих переменных. Важно: отрицание относится к переменным, но не к операциям. Каждая элементарная дизъюнкция (конъюнкция)

является тавтологией (противоречием), если одновременно содержит переменную и отрицание этой переменной.

ДНФ формулы алгебры высказываний назовём дизъюнкцию элементарных конъюнкций. КНФ формулы алгебры высказываний назовём конъюнкцию элементарных дизъюнкций. Каждая ДНФ (КНФ) формулы АВ является противоречием (тавтологией), если содержит одновременно переменную и отрицание этой переменной.

СДНФ (СКНФ) формулы АВ назовём ее ДНФ (КНФ), если выполняются условия:

- различны все элементарные дизъюнкции (конъюнкции), входящие в формулу;
- различны все члены каждой элементарной дизъюнкции (конъюнкции);
- никакая элементарная дизъюнкция (конъюнкция) не содержит одновременно переменную и отрицание этой переменной;
- каждая элементарная дизъюнкция (конъюнкция) зависит от всех переменных, входящих в состав исходной формулы.

Совершенные нормальные формы позволяют решать положительно проблему разрешимости АВ, которая формулируется следующим образом: возможно ли за конечное число шагов выяснить, является данная формула тавтологией или нет.

4. Приложения алгебры логики: релейно-контактные схемы, решение логических задач.

Под **релейно-контактной схемой** понимается Устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: замыкающие и размыкающие. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов — как замыкающих, так и размыкающих. Технически реле представляет собой катушку с металлическим сердечником (магнитопроводом), вблизи которого находится соответствующий контакт.

Когда через катушку пропускается электрический ток, металлический сердечник намагничивается и замыкает все находящиеся при нем замыкающие контакты. Одновременно все размыкающие контакты, относящиеся к данному реле, размыкаются. Поскольку замыкающие контакты при отсутствии в реле электрического тока разомкнуты, то они называются также нормально разомкнутыми. Аналогично, размыкающие контакты называются также нормально замкнутыми. При обесточивании обмоток реле (т.е. когда реле отключается) все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие, замыкаются.

Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x_1 или $x_2, \cdots$, или x_n, которая принимает значение 1, когда реле срабатывает, и принимает значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются тем же символом x, а все размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются отрицанием x'. Это означает, что при срабатывании реле x все его замыкающие контакты х проводят ток и им сопоставляется значение 1, а все размыкающие контакты x' не проводят электрический ток и им сопоставляется значение 0. При отключенном реле x создается противоположная ситуация: все его замыкающие контакты x разомкнуты, т. е. в этот момент им сопоставляется (переменная x принимает) значение 0, а все его размыкающие контакты x' замкнуты, т. е. в этот момент им сопоставляется (другими словами, переменная x' принимает) значение 1.

Всей релейно-контактной схеме тогда ставится в соответствие булева переменная y, зависящая от булевых переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$, сопоставленным тем реле, которые участвуют в схеме. Если при данном наборе состояний реле $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (некоторые из этих реле находятся в рабочем состоянии под током, остальные отключены, т.е. "обесточены") вся релейно-контактная схема проводит электрический ток, то переменной y ставится в соответствие (другими словами, переменная y принимает) значение 1. Если же при этом наборе состояний реле $x_1, x_2, \cdots, x_n$ схема не проводит электрический ток, то считаем, что переменная у принимает значение 0. Поскольку каждый набор состояний реле $x_1, x_2, \cdots, x_n$ характеризуется набором, составленным из нулей и единиц и имеющим длину n, то данная релейно-контактная схема определяет некоторое правило, по которому каждому такому набору длины n, составленному из нулей и единиц, сопоставляется либо 0, либо 1. Таким образом, каждая релейно-контактная схема, в которой занято n независимых реле (контактов в ней может быть n или больше), определяет некоторую булеву функцию y от n аргументов. Она принимает значение 1 на тех и только тех наборах значений аргументов $x_1, x_2, \cdots, x_n$, которые соответствуют тем состояниям реле $x_1, x_2, \cdots, x_n$, при которых данная схема проводит электрический ток. Такая булева функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***функцией проводимости*** данной релейно-контактной схемы.

Таким образом, теория булевых функций предоставляет математические модели реальных физических релейно-контактных схем.

1.4.Лекция № 4 (2 часа)
Тема: «Исчисление высказываний»

1.4.1. Вопросы лекции:
1. Понятие формулы.
2. Определение доказуемой формулы.
3. Производные правила вывода.
4. Понятие выводимости и правила выводимости.
5. Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний.

1.4.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие формулы.
Формальная теория или исчисление строится следующим образом:
Определяется множество формул, или правильно построенных выражений, образующее *язык теории*. Это множество задается конструктивными средствами (как правило, индуктивным определением) и, следовательно, оно перечислимо, обычно оно и разрешимо. Выделяется подмножество формул, называемых *аксиомами теории*, задаются правила вывода теории. Правило вывода $R(F_1,\dots,F_n,G)$ – это вычислимое отношение на множестве формул. Формулы $F_1,\dots,F_n$ называются *посылками правила R*, а *G* – его *следствием* или заключением.

Интерпретацией формулы А алгебры высказываний называется всякий набор истинностных значений атомов, входящих в формулу А. В каждой своей интерпретации формула принимает одно из двух истинностных значений: И или Л. Иначе говоря, она задает функцию вида $B^n \to B$. Функция вида $B^n \to B$ называется *n*–местной истинностной функцией или функцией алгебры высказываний. Две равносильные формулы определяют одну и ту же истинностную функцию.

Исходя из данного набора *n* атомов, можно составить счетное множество формул. Однако все эти формулы описывают лишь конечное множество истинностных функций. Число *n* –местных истинностных функций равно 2^{2^n}.

Для некоторых классов формул применяют специальные названия:

Формула *A* называется *общезначимой* (тождественно истинной, ***тавтологией***), если во всех своих интерпретациях она принимает значение И.

Формула *A* называется *невыполнимой* (тождественно ложной, ***противоречием***), если во всех своих интерпретациях она принимает значение Л.

Формула *A* называется *нейтральной*, если она не является ни общезначимой, ни невыполнимой.

Формула *A* называется *выполнимой*, если она общезначимая или нейтральная.

Формула *A* называется *необщезначимой*, если она невыполнимая или нейтральная.

Если $A \to B$ является тавтологией, то говорят, что *A* логически влечет *B*, или, что *B* является логическим следствием *A*. Если $A \equiv B$ есть тавтология, то говорят, что *A* и *B* логически эквивалентны. Истинностные таблицы дают эффективную процедуру для решения вопроса о том, является ли данная формула тавтологией.

Имеют место следующие свойства общезначимых формул:

1. Если *E* общезначимая формула, содержащая атомы $A_1,\dots, A_n$, то формула *E* , получающаяся из *E* одновременной подстановкой формул $F_1,\dots, F_n$ вместо атомов $A_1,\dots, A_n$ соответственно, также общезначимая.

2. Если $\Rightarrow A$ и $\Rightarrow A \to B$, то $\Rightarrow B$.

3. $\Rightarrow E$ тогда и только тогда, когда $\neg E$ – противоречие.

Таблица, содержащая всевозможные интерпретации формулы и соответствующие этим интерпретациям значения формулы, называется истинностной таблицей.

2. Определение доказуемой формулы.

Выводом формулы *B* из формул $A_1, \ldots, A_n$ называется последовательность формул $F_1,...,F_m$ такая, что $F_m = B$, а любая F_i есть либо аксиома, либо одна из исходных формул $A_1, \ldots, A_n$, либо непосредственно выводима из $F_1, \ldots, F_{i-1}$ по одному из правил вывода. *B* выводима из $A_1, \ldots, A_n$, если существует вывод *B* из $A_1, \ldots, A_n$. Этот факт обозначается $A_1, \ldots, A_n \mapsto B$. $A_1, \ldots, A_n$ называются *гипотезами* или посылками вывода.

Доказательством формулы *B* в теории *T* называется вывод *B* из пустого множества формул, т.е. вывод, в котором в качестве исходных формул используются только аксиомы. Формула *B*, для которой существует доказательство, называется формулой, доказуемой в теории *T* или теоремой теории *T*. Факт доказуемости формулы *B* обозначается $\mapsto B$. Очевидно, что присоединение формул к гипотезам не нарушает выводимости. Поэтому, если $\mapsto B$ (*B* – доказуема), то $A \mapsto B$ (то есть *B* – доказуема и с некоторой формулой *A*).

Особое внимание уделяется тождественно-истинным высказываниям, поскольку они должны включаться в любую теорию в качестве общелогических законов. Их порождение и является задачей исчисления высказываний.

Аксиомы: используют две системы аксиом, одна использует все логические связки

I1. $A \to (B \to A)$

I2. $(A \to B) \to (A \to (B \to C)) \to (A \to C)$

I3. $(A \& B) \to A$

I4. $(A \& B) \to B$

I5. $A \to (B \to (A \& B))$

I6. $A \to (A \vee B)$

I7. $B \to (A \vee B)$

I8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

I9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

I10. $\neg\neg A \to A$

Другая система аксиом использует только две связки $\to$ и $\neg$. При этом сокращается алфавит исчисления и соответственно определение формулы. В результате система аксиом становится компактнее:

II1. $A \to (B \to A)$

II2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

II3. $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$

Эти две системы равносильны в том смысле, что порождают одно и то же множество формул. Это утверждение нуждается в доказательстве, которое заключается в том, что показывается выводимость всех аксиом II из аксиом I, и наоборот, с учетом того, что $\vee$ и & рассматриваются в II не как связки, а как сокращения для некоторых его формул: $A \vee B$ заменяет $\neg A \to B$, $A \& B$ заменяет $\neg(A \to \neg B)$. Возможны и другие системы аксиом, равносильные приведенным.

3. Производные правила вывода.

4. Понятие выводимости и правила выводимости.

Правила вывода: правило подстановки. Если $\Im$ – выводимая формула, содержащая *А*, то выводима формула $\Im(B)$, получающаяся из заменой всех вхождений *А* на произвольную формулу *В* $\frac{\Im(A)}{\Im(B)}$.

Правило заключения Если $\Im$ и $\Im \to \Re$ выводимые формулы, то выводима $\Re$ $\frac{\Im, \Im \to \Re}{\Re}$.

В этом описании исчисления высказываний аксиомы являются формулами исчисления. Формулы использующиеся в правилах вывода это схемы формул или метаформулы.

Например: 1) Формула А→А выводима из II .

Подставим в II2 А→А вместо В и А вместо С (А→((А→А)→А))→((А→(А→А))→(А→А).

Подставим в II1 А→А вместо В: А→((А→А)→А).

По правилу заключения из шагов 1 и 2 следует (А→(А→А))→(А→А).

Подставим в II1 А вместо В: А→(А→А).

По правилу заключения из шагов 3 и 4 следует А→А.

То есть $\mapsto A \to A$.

2) $A \mapsto B \to A$.

Пусть А - выводима, тогда из А и II1 по правилу заключения получаем $\frac{A, A \to (B \to A)}{B \to A}$, что и доказывает искомую выводимость.

Всякую доказанную выводимость вида $\Gamma \mapsto \Im$, где Г - список формул, $\Im$- формула, можно рассматривать как правило вывода $\frac{\Gamma}{\Im}$, которое можно присоединить к уже имеющимся.

Полученную выводимость $A \mapsto B \to A$ вместе с правилом подстановки можно рассматривать как правило $\frac{\Im}{\Re \to \Im}$, если $\Im$ выводима, то выводима и $\Re \to \Im$, где $\Re$ любая формула.

3) $A \to B, B \to C \mapsto A \to C$.

$B \to C \mapsto A(B \to C)$ по новому правилу $\frac{\Im}{\Re \to \Im}$.

Из А→(В→С) и II2 по правилу заключения следует (А→В)→(А→С), следовательно $B \to C \mapsto (A \to B) \to (A \to C)$.

Из (А→В) и (А→В)→(А→С) по правилу заключения следует А→С, учитывая 2., получим искомую выводимость.

При переходе от первого шага ко второму неявно использовалось следующее свойство выводимости: если $\Gamma \mapsto \Im$ (Г – список формул), а $\Im \to \Re$, то $\Gamma \to \Re$. Это свойство следует из определения выводимости.

5. Связь между алгеброй высказываний и исчислением высказываний.

В алгебре высказываний были введены два важнейших понятия – общезначимости и логического следования. В исчислении высказываний (в форме теории L) подобную роль играют понятия доказуемости и выводимости:

(1) $\Rightarrow A \to B$ означает, что формула $A \to B$ общезначима, т.е., что при всех наборах значений атомов, входящих хотя бы в одну из формул *A* или *B*, формула $A \to B$ принимает только значение И.

(2) $A \Rightarrow B$ означает, что из формулы *A* следует формула *B*, т.е., что при всех наборах значений атомов, входящих хотя бы в одну из формул *A* или *B*, при которых формула *A* имеет значение И, формула *B* также имеет значение И.

(3) $\mapsto A \to B$ означает, что формула $A \to B$ доказуема, т.е., что существует конечная последовательность формул, заканчивающаяся формулой $A \to B$, причем каждая формула этой последовательности либо аксиома, либо получена из некоторых двух предшествующих формул последовательности по правилу MP.

(4) $A \mapsto B$ означает, что из формулы *A* выводима формула *B*, т.е. существует конечная последовательность формул, заканчивающаяся формулой *B*, причем каждая из формул этой последовательности либо формула *A*, либо аксиома, либо получена из некоторых двух предшествующих формул по правилу MP.

Эти понятия связаны между собой. Так предложением 1а)б) установлена связь между общезначимостью и следованием: $\Rightarrow A \to B$ тогда и только тогда, когда $A \Rightarrow B$.

Следующие утверждения устанавливают связь между доказуемостью и выводимостью, между общезначимостью и доказуемостью.

MT2. Пусть Г – любое множество формул. Тогда: а) если $\Gamma \mapsto A \to B$, то $\Gamma, A \mapsto B$. В частности, б) если $\mapsto A \to B$, то $A \mapsto B$.

MT3. Теорема дедукции. Пусть Г – любое множество формул. Тогда: а) если $\Gamma, \Im \mapsto \Re$, то $\Gamma \mapsto \Im \to \Re$. В частности, б) если $\Im \mapsto \Re$, то $\mapsto \Im \to \Re$.

Доказательство. Будем исходить из второй системы аксиом и рассматривать их как схемы аксиом. Пусть $\Gamma, \Im \mapsto \Re$, тогда существует вывод $\Re_1, \dots, \Re_n$ из $\Gamma, \Im$ такой, что $\Re_n = \Re$. Докажем по индукции, что для любого $k \le n$ $\Gamma \mapsto \Im \to \Re_k$.

Рассмотрим $\Re_1$. $\Re_1$ как первая формула вывода должна быть либо аксиомой, либо содержаться в Г, либо совпадать с $\Im$. Из схемы II1 следует, что $\Re_1 \to (\Im \to \Re_1)$ является аксиомой. Если $\Re_1$- аксиома или содержится в Г, то по правилу заключения $\Im \to \Re_1$ выводима из Г. Если $\Re_1 \equiv \Im$, то из примера 1 имеем $\Im \to \Im$, то есть $\Im \to \Re_1$. В любом случае получаем $\Gamma \mapsto \Im \to \Re_1$.

Предположим, что $\Gamma \mapsto \Im \to \Re_i$ для $i < k$. Возможны 4 случая:

$\Re_k$ – аксиома;

$\Re_k \in \Gamma$;

$\Re_k = \Im$;

$\Re_k$ выводима из некотрых предшествующих $\Re_j, \Re_l$ по правилу заключения, (но тогда $\Re_l$ должна иметь вид $\Re_l \to \Re_k$).

Для случаев 1, 2 доказательство проводится с помощью схемы II1 аналогично *i=1*, для случая 3 доказательство с помощью примера 1.

Для случая 4 по индуктивному предположению имеем

$\Gamma \mapsto \Im \to \Re_j$ и $\Gamma \mapsto \Im \to \Re_l$.

$\Gamma \mapsto \mathfrak{I} \to \left(\mathfrak{R}_j \to \mathfrak{R}_k\right)$.

Подставим в схему II2 $\mathfrak{R}_j$ вместо B и $\mathfrak{R}_k$ вместо C $\left(\mathfrak{I} \to \left(\mathfrak{R}_j \to \mathfrak{R}_k\right)\right) \to \left(\left(\mathfrak{I} \to \mathfrak{R}_j\right) \to \left(\mathfrak{I} \to \mathfrak{R}_k\right)\right)$.

Применив правило заключения к 2 и 3 получим $\Gamma \mapsto \left(\mathfrak{I} \to \mathfrak{R}_j\right) \to \left(\mathfrak{I} \to \mathfrak{R}_k\right)$.

Применив правило заключения к 1 и 4 имеем $\Gamma \mapsto \mathfrak{I} \to \mathfrak{R}_k$.♦

Например: В качестве первого применения теоремы дедукции покажем, что II3 выводима из I.

Подставим в I9 ¬ A вместо A (¬A→B)→((¬A→¬B)→¬¬A).

Двойное применение правила заключения дает ¬A→B, ¬A→¬B ↦ ¬¬A.

Из I10 по правилу заключения следует, что ¬¬A ↦ A, то по транзитивности выводимости ¬A→B, ¬A→¬B ↦ A.

Переставим гипотезы (из определения выводимости следует, что их порядок не имеет значения) ¬A→¬B, ¬A→B ↦ A.

Применяя дважды к шагу 4 теорему дедукции получим II3 (¬A→¬B)→((¬A→B)→A).

Распространенным методом математических доказательств является метод доказательства от противного: “Если $\Gamma, \mathrm{A} \mapsto \mathrm{B}$ и $\Gamma, \mathrm{A} \mapsto \neg\mathrm{B}$, то $\Gamma \mapsto \neg\mathrm{A}$”.

Действительно, по теореме дедукции, если $\Gamma, \mathrm{A} \mapsto \mathrm{B}$ и $\Gamma, \mathrm{A} \mapsto \neg\mathrm{B}$, то $\Gamma \mapsto \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ и $\Gamma \mapsto \mathrm{A} \to \neg\mathrm{B}$.Из этих импликаций и аксиомы I9 двойным применением правила заключения получаем $\Gamma \mapsto \neg\mathrm{A}$.

Обобщая результаты MT2 и MT3 можно утверждать, что $\mapsto A \to B$ тогда и только тогда, когда $A \mapsto B$. Тем самым установлена связь между доказуемостью и выводимостью.

1.5.Лекция № 5 (2 часа)
Тема: «Основные понятия логики предикатов».

1.5.1. Вопросы лекции:
1. Понятие предиката.
2. Логические и квантовые операции над предикатами.
3. Формулы логики предикатов. Равносильные формулы.
4. Применение языка логики предикатов.
1.5.2. Краткое содержание вопросов
1. Понятие предиката.

При изучении логических операций высказывания рассматриваются при одной фиксированной ситуации. Все высказывания делились на истинные и ложные (в данной ситуации) и мы имели дело с двухзначной булевой алгеброй $\{0,1\}$. В логике предикатов исследуется зависимость высказываний от ситуации. При этом фиксируется уже не единственная ситуация, а некоторое множество допустимых ситуаций. В каждой ситуации мы по-прежнему интересуемся лишь истинностью или ложностью высказывания. Различными конкретными предикатами широко пользуются в математике, других дисциплинах, да и в повседневной жизни. Предложение русского языка "Некто написал роман "Война и мир" – это предикат. Если "некто" заменить именем человека. получится высказывание – истинное или ложное. Если "некто" – это Л.Н.Толстой, то получится истинное высказывание, если А.С.Пушкин, то ложное. Местоимение "некто" играет роль, аналогичную роли переменных в математике. То есть, предложение "x написал роман "Война и мир" это предикат одной переменной x, или одноместный (унарный) предикат, осуществляющий отображение множества людей на некоторое множество высказываний.

Предикатом $P(x_1,...x_n)$ называется функция $P:M^n \to B$, где M – произвольное множество, а B – множество $\{0,1\}$. M – называется предметной областью предиката, а $x_1,...x_n$ – предметными переменными. Для любых M и n существует взаимно-однозначное соответствие между n-местными отношениями и n-местными предикатами на M:

а) каждому n-местному отношению R соответствует предикат P, такой, что $P(a_1,...a_n)=1$, если и только если $(a_1,...a_n) \in R$

б) всякий предикат $P(x_1,...x_n)$ определяет отношение R, такое, что $(a_1,...a_n) \in R$, если и только если $P(a_1,...a_n)=1$.

При этом R задает область истинности предиката P. Константы 0 и 1 называют нульместными предикатами.

Например: "прямая проходит через точки А и В" – трехместный предикат, у которого предметными областями двух переменных (А и В) являются множества точек, а третьей - множество прямых; "если тетрадь лежит в папке, а папка – в портфеле, то тетрадь лежит в портфеле" – это трехместный тождественно истинный предикат.

Поскольку предикаты принимают два значения и интерпретируются как высказывания, из них можно образовывать выражения алгебры высказываний, т.е. формулы. Элементарные формулы можно связывать операциями алгебры высказываний $\&, \vee, \to, \neg$, сохраняя за операциями те определения, которые давались в алгебре высказываний.

2. Логические и квантовые операции над предикатами.
3. Формулы логики предикатов. Равносильные формулы.

Кроме операций алгебры высказываний употребляют еще две операции, которые относятся уже не к одной фиксированной ситуации, а ко всему множеству ситуаций.

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на M. Высказывание "для всех x из M – $P(x)$ истинно" обозначается $\forall xP(x)$. Знак $\forall$ называется квантором общности. Высказывание "существует такой X из M, что P истинно" обозначается $\exists xP(x)$. Знак $\exists$ называется квантором существования.

Переход от P к $\forall xP(x)$ или $\exists xP(x)$ называется *связыванием* переменной x, или навешиванием квантора на переменную x. Предметную переменную, не связанную никаким квантором, называют *свободной* переменной. Смысл связанных и свободных переменных в предикатных выражениях различен. Свободная переменная – это обычная переменная, которая может принимать значения из M; P – переменное высказывание, зависящее от x. Выражение $\forall xP(x)$ не зависит от переменной x и при фиксированных P и M имеет вполне определенное значение. Это, в частности, означает, что переименование связанной переменной не меняет истинности выражения.

Переменные, являющиеся по существу связанными, встречаются не только в логике. В выражениях $\sum_{x=1}^{10} f(x)$ или $\int_a^b f(x)dx$ переменная $\boldsymbol{x}$ связана, при фиксированной f первое выражение становится равно определенному числу, а второе становится функцией a и b. Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты и вообще на любые логические выражения, которые при этом заключаются в скобки. Навешивание квантора на многоместный предикат уменьшает в нем число свободных переменных.

Строгое определение формулы логики предикатов дается по индукции:

1. Все отдельно взятые предикаты, в которых все места замещены предметными переменным или предметными постоянными из соответствующих предметных областей являются формулами. При этом все входящие в предикат предметные переменные считаются свободными.

2. Если F – формула логики предикатов, содержащая свободную переменную x, то $\forall xF$ и $\exists xF$ – также формулы, в которых x связанная переменная, а все остальные переменные те же и того же характера, что и в F.

3. Если F – формула, то и $\neg F$ – формула, все переменные которой те же и того же характера что и в F.

Если F и J формулы, причем нет такой переменной, которая в одну из них входит свободно, а в другую связанно, то FJ, $F \vee J$, $F \to J$,$F \sim J$ – формулы, причем в них входят все переменные из формул F и J и все вхождения те же и того же характера, что и в F и J.

4. Каждая формула получается за конечное число шагов из элементарных формул п.1 при помощи операций п.п. 2 и 3.

Предикаты F и J называются *равными*, если их значения совпадают при всех значениях входящих в них переменных. Множество истинных формул логики предикатов входит в любую теорию. В исследовании этого множества возникает две проблемы: 1 – получение истинных формул; 2 – проверка формулы на истинность. Прямой перебор всех значений невозможен, т.к. предметные и предикатные переменные имеют в большинстве случаев бесконечные области определения.

Часто используют метод интерпретаций: когда в формулу, требующую доказательства подставляют константы. Подстановка констант позволяет интерпретировать формулу, как осмысленное утверждение об элементах конкретного множества $\boldsymbol{M}$. Этот метод удобен для доказательства выполнимости формул или их неэквивалентности.

Свойства кванторов

$$\forall x\left(A(x)\& B(x)\right)=\forall xA(x)\&\forall yB(y)$$

$$\exists x\left(A(x)\vee B(x)\right)=\exists xA(x)\vee\exists yB(y)$$

$$\forall x\left(A(x)\vee B\right)=\forall xA(x)\vee B$$

$$\forall x\left(A(x)\& B\right)=\forall xA(x)\& B$$

$$\exists x\left(A(x)\vee B\right)=\exists xA(x)\vee B$$

$$\exists x\left(A(x)\& B\right)=\exists xA(x)\& B$$

$$\forall x\forall yA(x,y)=\forall y\forall xA(x,y)$$

$$\exists x\exists yA(x,y)=\exists y\exists xA(x,y)$$

$$\overline{\forall xA(x)}=\exists x\overline{A(x)}$$

$$\overline{\exists xA(x)}=\forall x\overline{A(x)}$$

Эти равносильности и закон двойственности позволяют преобразовать любую формулу логики предикатов в равносильную формулу, в которой символ отрицания стоит только над элементарными предикатами. Получающуюся в результате формулу называют *почти нормальной формой исходной формулы***.** Формулы, содержащие кванторы как по предметным, так и по предикатным переменным, используют для характеристики какого-либо множества предметных областей с фиксированными индивидуальными предикатами на них. Система таких формул называется системой аксиом, а удовлетворяющие этим аксиомам множества с индивидуальными предикатами – интерпретациями системы аксиом.

4. Применение языка логики предикатов.

1.6.Лекция № 6 (2 часа)

Тема: Числовые теории

1.6.1. Вопросы лекции:

1. Арифметика Пеано.
2. Теория целых чисел.
3. Рациональные и действительные числа.

1.6.2.. Краткое содержание вопросов

1. Арифметика Пеано.

Арифметика Пеано — теория первого порядка с равенством, описывающая свойства натуральных чисел. Впервые неформально была предложена итальянским математиком Джузеппе Пеано.

Язык этой теории содержит предикатный символ равенства =, константу 0, одноместный функциональный символ S, и двуместные функциональные символы + и ×. Символ S обозначает функцию «следующее натуральное число»: $S(x) = x + 1$.

Термы языка арифметики определяются индуктивно: всякая переменная x есть терм; константа 0 есть терм; и если t и s есть термы, то $S(t)$, $(t + s)$, $(t \times s)$ есть термы.

Формулы языка арифметики определяются индуктивно: если t и s есть термы, то выражение $(t = s)$ есть формула; если A и B есть формулы, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $\neg A$ являются формулами; наконец, если A есть формула, а x есть переменная, то и являются формулами.

Аксиомами арифметики Пеано являются аксиомы логики первого порядка с равенством (в описанном выше языке), а также следующие аксиомы:

(1) $\neg S(x) = 0$

(2) $S(x) = S(y) \to (x = y)$

(3) $x + 0 = x$

(4) $x = S(y) = S(x + y)$

(5) $x \times 0 = 0$

(6) $x \times S(y) = x \times y + x$

Основные факты об арифметике Пеано и об арифметическом языке:

- Все аксиомы PA истинны в *стандартной модели*, то есть на множестве натуральных чисел с операциями «следующее натуральное число», сложение и умножение.

- Арифметика Пеано PA *неразрешима* — то есть не существует алгоритма, который по всякой замкнутой формуле определял бы, выводится ли она из аксиом PA. Этот результат был получен А. Чёрчем (1936) и А. Тьюрингом (1937).

- Арифметика Пеано PA *неполна* — то есть существует такая замкнутая формула, что ни она, ни её отрицание не доказуемы в PA. Значит, существует утверждение, истинное в стандартной модели, но не доказуемое в PA. Это первая теорема Гёделя о неполноте (1931).

- В арифметике Пеано PA недоказуемо утверждение о её *непротиворечивости*. Это вторая теорема Гёделя о неполноте (1931). В своей работе Гёдель показал, каким образом в арифметическом языке можно записать утверждение «PA непротиворечива».

- Формально непротиворечивость PA доказал Г. Генцен (1936), пользуясь гораздо более сильными средствами, чем доступны в PA (трансфинитной индукцией).

2. Теория целых чисел.

Раздел математики, занимающийся изучением целых чисел и их свойств, называется теория чисел или высшая арифметика.

Среди целых чисел особое место занимают натуральные числа, которые можно разделить на два класса: простые и составные. К первому классу относятся числа, имеющие своими делителями два числа: единицу и само себя. Ко второму классу относятся все остальные числа.

Простые числа, их свойства и связь со всеми натуральными числами изучались Евклидом (3 век до нашей эры). Он считал, что любое число натурального ряда может быть единственным образом представлено как произведение простых чисел. В «Началах» Евклид указал способ нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел, следствием из которого является теорема об однозначном разложении натуральных чисел на простые сомножители. С понятием наименьшего общего делителя двух чисел связано понятие их наименьшего общего кратного (НОК).

К теории чисел также относится вопрос о целочисленных решениях различных видов уравнений. Диофантово уравнение вида $aX + bY = c$, где a,b,c — целые числа, X и Y — неизвестные числа, является простейшим уравнением в целых числах. Если c делится на $НОД(a,b)$, то уравнение имеет целочисленные решения. В этом случае с помощью алгоритма Евклида находится решение уравнения $aX + bY = 1$, из которого потом получаются все решения диофантова уравнения. Если же c не делится на $НОД(a,b)$, то исходное уравнение не имеет решений в целых числах. Другим целочисленным уравнением является уравнение $X^2+Y^2=Z^2$ (уравнение Пифагора). Вавилонским математикам было известно, что оно имеет бесконечное множество решений, а древнегреческий математик Диофант (около 250 года нашей эры) описал способ нахождения всех решений данного уравнения.

Большой вклад в развитие теории чисел внес Пьер Ферма (1601-1665), которому принадлежат открытия связанные с теорией делимости целых чисел, и теорией диофантовых уравнений. Им было сформулировано утверждение о «невозможности» — Великая теорема Ферма, доказана Малая теорема Ферма, которая в дальнейшем была обобщена Л. Эйлером. В феврале 1657 года Ферма предложил найти общее правило решение уравнения Пелля $ax^2 + 1 = y^2$ в целых числах. Решение этого уравнения для $a = 2$ было описано Евклидом в «Началах», а полное решение найдено Эйлером в 1759 году.

В 18 веке Л. Эйлер (1707-1783) первым из математиков стал создавать общие методы и применять другие разделы математики к решению задач теории чисел. Применение методов математического анализа положили начало **аналитической теории чисел**, в которой важное место занимают методы тригонометрических сумм, позволяющие оценивать число решений уравнений или систем уравнений в целых числах.

В аналитической теории чисел так же применяется комплексный анализ для доказательства теоремы о распределении простых чисел. Однако остается открытым вопрос, существует ли бесконечно много пар «простых близнецов», т. е. простых чисел разность, между которыми равна двум, например, 17 и 19 или101 и 103.

Аналитические методы широко применяются и в **аддитивной теории чисел**, в которой изучается разложение натуральных чисел на слагаемые определённого вида:

представление числа в виде суммы простых чисел, суммы двух квадратов (об этих вопросах упоминалось ранее) и т.д., представление в виде четырех квадратов, девяти кубов и т.д. Так же к этому разделу теории чисел относится проблема Варинга представления числа N в виде суммы k слагаемых, каждое из которых есть n степень натурального числа , т.е $N = a_1^n + ... + a_k^n$, где k зависит только от n.

Алгебраическая теория чисел расширяет понятие числа. Здесь рассматриваются алгебраические целые числа, корни многочленов с рациональными коэффициентами и старшим членом равным единице.

Элементарная теория чисел изучает целые числа без использования методов других разделов математике. Здесь рассматриваются такие вопросы как делимость целых чисел, числа Фибоначчи, построение магических квадратов, алгоритм нахождения наименьшего общего делителя и наибольшего общего кратного, малая теорема Ферма.

Многие вопросы теории чисел легко сформулировать, но трудно доказать, а ряд вопросов остаются открытыми, например, еще не найдена формулы по которой выводятся все простые числа. Великая теорема Ферма, сформулированная в 1637 году, оставалась без доказательства более 3 столетий и была доказана Уалсом в 1995 году.

3. Рациональные и действительные числа.

Числа, с которыми обычно приходится иметь дело — натуральные, целые (положительные и отрицательные), рациональные и иррациональные, - составляют множество действительных чисел.

Система аксиом действительных чисел.

Множество R действительных чисел может быть охарактеризовано следующими шестнадцатью аксиомами.

Аксиомы сложения.

1.Для любых чисел $a, b \in R$, определено единственное число $a+b \in R$, называемое *суммой* чисел a и b.

2. Для любых $a, b \in R$ имеет место соотношение $a+b=b+a$ *(коммутативность).*

3. Для любых $a,b,c \in R$ имеет место соотношение $a+(b+c)=(a+b)+c$ *(ассоциативность).*

4. Существует число $0 \in R$ такое, что $a+0=a$ для всех $a \in R$. Число 0 носит название *нуль.*

5. Для любого числа $a \in R$ существует число $b \in R$ такое, что $a+b=0$.

Аксиомы умножения.

6. Для любых чисел $a, b \in R$ определено единственное число $a \cdot b \in R$ называемое *произведением* a и b чисел.

7. Для любых $a, b \in R$ имеет место соотношение $a \cdot b = b \cdot a$ *(коммутативность).*

8. Для любых $a,b,c \in R$ имеет место соотношение $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (*ассоциативность).*

9. Существует число $1 \in R$ такое, что $1 \cdot a = a$ для всех $a \in R$. Число 1 носит название *единица.*

10 Дня любого $a \in R, a \neq 0$, существует $b \in R$, такое что $a \cdot b = 1$

11. Для любых $a,b,c \in R$ имеем $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(дистрибутивность).*

Таким образом, множество R образует относительно сложения коммутативную группу, а множество R без нуля образует коммутативную группу относительно умножения.

Следствия из аксиом сложения и умножения.

1) Для двух действительных чисел a и b имеется ровно одно действительное число x, такое, что $a+x=b$. Число x называется *разностью* чисел b и a обозначается $b-a$. При этом говорят, что b - *уменьшаемое,* a *- вычитаемое и* a *вычитается* из b. *В* случае $0-a$ пишут $-a$. Таким образом, число b из аксиомы 5 однозначно определено.

2) Для любого $a \in R$ имеем: $a=-(-a), -0=0$.

3) Для любых $a,b,c,d \in R$ имеем: $b-a=d-c$ эквивалентно тому, что $a+b=b+c$; $(b+d)-(a+c)=(b-a)+(d-c)$; $(b+c)-(a+d)=(b-a)-(d-c)$.

4) Из $a \cdot b=0$ следует, что либо $a=0$. либо $b=0$.

5) Для действительных чисел a и b, где $a=0$. существует единственное действительное число x такое, что $a \cdot x=b$.. Число x называется *частным (дробью)* от деления b на a и обозначается $\frac{b}{a}$ или b/a При этом b называется *делимым (числителем),* а a *— делителем (знаменателем).*

6) Для любого $a \in R/\{0\}$ имеем $\frac{1}{1/a}=a$.

7} Для любых $a,b,c,d \in R/\{0\}$ равенство $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ эквивалентно том, что $a \cdot d=b \cdot c$; крометого, $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}=\frac{d \cdot c}{a \cdot c}$, $\frac{b/a}{d/c}=\frac{b \cdot c}{a \cdot d}$

8) Для любых a, $b \in R$ и любого $c \in R/\{0\}$ выполняется соотношение $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

9) Для любого $a \in R$ справедливо равенство $-a=(-1) \cdot a$.

10) Для любых $a,\ b \in R$ выполняется равенство $-(a \cdot b)=(-a) \cdot b$.

11) $(-1) \cdot (-1)=1$ Множество R действительных чисел обладает вследствие указанных свойств алгебраической с грук-турой поля (коммутативного тела].

Кроме того, в R вводится отношение порядка (“больше”, “меньше”, “равно”), удовлетворяющее следующим аксиомам.

Аксиомы порядка.

12. Для двух чисел $a, b \in R$ имеет место одно (и только одно) из трех соотношений: $a<b, a=b$ и $a>b$.

13. Для любых $a,b,c \in R$ таких, что $a<b$ и $b<c$, справедливо соотношение $a<c$ *(транзитивность).*

14. Для любых $a,b,c \in R$ таких, что $a<b$, справедливо соотношение $a+c<b+c$.

15. Для любых $a,b,c \in R$ таких, что $a<b$ и, справедливо соотношение $a \cdot c<b \cdot c$.

Если $a<b$, то говорят, что а *меньше* b (или b больше a); в этом случае пишут также $b>a$. Если или $a<b$, или $a=b$, то пишут $a \le b$. Действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a>0$, называются *положительными;* действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a<0$, называются *отрицательными.*

Следствия из аксиом порядка.

1) Если $a<b,\ mo\ -a>-b$

2) Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

3) Если $a < b$ и $c < d$ причем $b > 0$ и $c > 0$ то $a \cdot c < b \cdot d$.

4) $1 > 0$.

5) Если $a > 0$, то $1/a > 0$.

16. *Принцип непрерывности Дедекинда.* Пусть множество R действительных чисел разделено на два класса K_1 и K_2 так, что: а) классы K_1 и K_2 не пусты; б) каждое действительное число относится только к одному классу; в) из условий $a \in K_1$ и $b < a$ следует, что $b \in K_1$.

Тогда существует единственное действительное число s такое, что все действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a' < s$, принадлежат классу K_1, а все действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a'' > s$, принадлежат классу K_2. Число s называется *сечением* множества действительных чисел.

Множество R действительных чисел полностью определяется указанными аксиомами 1 — 16.

Геометрическое изображение действительных чисел.

Если на прямой g заданием точки *O* и единичного вектора введена система координат, то каждая точка *M* прямой g однозначно определяется своей координатой x. Таким образом, каждой точке *M* прямой *g* соответствует одно действительное число x, и обратно: каждому действительному числу, x соответствует одна точка *M* прямой g. Прямая g называется *числовой прямой.* Таким образом, точки прямой g и соответствующие им действительные числа могут употребляться равнозначно. При этом говорят: точка *a лежит левее* b (или *b лежит правее a)* в случае, если $a < b$. В частности, отрицательные числа лежат левее нулевой точки *O,* а положительные числа — правее точки *O.*

Из принципа непрерывности Дедекинда вытекает ***Аксиома Архимеда*. Для каждого действительного числа a существует натуральное число n такое, что $a < n$.**

Каждое действительное число может быть записано в виде десятичной дроби. При этом рациональным числам и только им соответствуют периодические десятичные дроби. Однако, например, разложение в десятичную дробь действительного числа $\sqrt{2}$, т. е. такого однозначно определенного положительного действительного числа, квадрат которого равен 2, не является периодическим. Таким образом, $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Множество рациональных чисел бесконечно и счетно, а множество иррациональных чисел несчетно. Множества *Q* и *R**Q* всюду плотны в *R*, т. е. в каждом интервале $\{x / a < x < b\}$ существует как рациональные, так и иррациональные числа.

1.7.Лекция № 7 (2 часа)

Тема: «Геометрические теории»

1.7.1. Вопросы лекции:

1. Аксиомы Гильберта.
2. Евклидова и неевклидовы геометрии.
3. Аксиомы Тарского для элементарной планиметрии.

1.7.2. Краткое содержание вопросов

1. Аксиомы Гильберта.

Настойчивая и углублённая работа над созданием прочного логического фундамента геометрии получила своё наиболее полное завершение в вышедшей в 1899 г. знаменитой работе выдающегося немецкого математика Давида Гильберта – «Основания геометрии».

Являясь известным завершением работ Лобачевского в области исследований взаимной независимости аксиом геометрии, книга Гильберта содержит важнейшие идеи по аксиоматическому обоснованию геометрии, явившиеся исходным пунктом дальнейших изысканий как в области геометрии, так и в области других математических наук.

Работа Гильберта в основном разрешила вопрос о построении полной аксиоматики геометрии. В ней изложена первая полная система аксиом Евклида.

I группа состоит из восьми аксиом принадлежности (соединения), к-рые описывают отношение «принадлежит». I_1. Для любых двух точек существует прямая, проходящая через каждую из этих двух точек. I_2. Для двух различных точек существует не более одной прямой, проходящей через каждую из этих двух точек. I_3. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой. I_5. Для любых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует плоскость, проходящая через каждую из этих трех точек. На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка. I_5. Для любых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих трех точек. I_6. Если две точки А, В прямой а лежат в плоскости α, то всякая точка прямой а лежит в плоскости α. I_7. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку. I_8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

II группа содержит четыре аксиомы порядка, описывающие отношение «между». II_1. Если точка В лежит между точкой А и точкой С. то А, В, С - различные точки одной прямой и В лежит также между С и А. II_2. Для любых двух точек А и В на прямой АВ существует по крайней мере одна точка С такая, что точка В лежит между А и С. II_3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими. II_4 (аксиома Паша). Пусть А, В, С - три точки, не лежащие на одной прямой, и а - прямая в плоскости АВС, не проходящая ни через одну из точек А, В, С. Тогда, если прямая а проходит через внутреннюю точку отрезка АВ, то она проходит также через внутреннюю точку отрезка АС или через внутреннюю точку отрезка ВС.

III группа содержит пять аксиом конгруэнтности, к-рые описывают отношение «конгруэнтен» (это отношение Гильберт обозначает знаком ≡). III_1. Если даны отрезок А В и луч ОХ, то на луче ОХ существует точка В' такая, что отрезок АВ конгруэнтен отрезку ОВ', то есть АВ ≡ ОВ'. III_2. Если А'В' ≡ АВ и А"В" = АВ, то А'В' = А"В". III_3. Пусть АВ и ВС - два отрезка на прямой, не имеющие общих внутренних точек, а А'В' и В'С' - два отрезка на той же или на другой прямой, тоже не имеющие общих внутренних точек. Тогда, если АВ ≡ А'В' и ВС ≡ В'С', то АС ≡ А'С'. III_4. Пусть даны угол АОВ, луч О'А' и полуплоскость П', ограниченная прямой О'А'. Тогда в полуплоскости П' существует один и только один луч О'В' такой, что ∠АОВ = ∠А'О'В'. Кроме того, каждый угол конгруэнтен самому себе. III_5. Если для двух треугольников АВС и А'В'С' имеем: АВ ≡ А'В', АС ≡ А'С', ∠ВАС ≡ ∠В'А'С', то ∠АВС ≡ ∠А'В'С'.

IV группа состоит из двух аксиом непрерывности. IV_1 (аксиома Архимеда). Пусть АВ и CD -два каких-нибудь отрезка. Тогда на прямой АВ существует конечное множество точек A_1, A_2, ..., A_n таких, что точка A_1 лежит между A и A_2, точка A_2 лежит между A_1 и A_3 и т. д., причем отрезки AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и B лежит между A и A_1. IV_2 (аксиома Кантора). Пусть на какой-либо прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., удовлетворяющая двум условиям: а) каждый последующий отрезок есть часть предыдущего, б) для любого наперед заданного отрезка CD найдется натуральное число n такое, что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

V группа содержит одну аксиому о параллельных. Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой прямой a и точкой, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a.

(У Д. Гильберта IV группа - аксиома о параллельных, V группа - аксиомы непрерывности.)

Г. с. а. обладает свойством полноты; она непротиворечива, если непротиворечива арифметика действительных чисел. Если в Г. с. а. заменить аксиому о параллельных ее отрицанием, то полученная новая система аксиом тоже непротиворечива (система аксиом геометрии Лобачевского), т. е. аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом Г. с. а. Можно установить независимость некоторых других аксиом Г. с. а. от остальных аксиом этой системы.

2. Евклидова и неевклидовы геометрии.

Неевклидовы геометрии, в буквальном понимании — все геометрические системы, отличные от геометрии Евклида; однако обычно термин "Н. г." применяется лишь к геометрическим системам (отличным от геометрии Евклида), в которых определено движение фигур, причём с той же степенью свободы, что и в геометрии Евклида. Степень свободы движения фигур в евклидовой плоскости характеризуется тем, что каждая фигура без изменения расстояний между её точками может быть перемещена так, чтобы любая выбранная её точка заняла любое заранее назначенное положение; кроме того, каждая фигура может вращаться вокруг любой своей точки. В евклидовом трёхмерном пространстве каждая фигура может быть перемещена так, чтобы любая выбранная её точка заняла любое заранее назначенное положение; кроме того, каждая фигура может вращаться вокруг любой оси, проходящей через любую её точку.

Среди Н. г. особое значение имеют Лобачевского геометрия и Римана геометрия, которые чаще всего и подразумевают, когда говорят о Н. г. Геометрия Лобачевского — первая геометрическая система, отличная от геометрии Евклида, и первая более общая теория (включающая евклидову геометрию как предельный случай).

Геометрия Римана, открытая позднее, в некоторых отношениях противоположна геометрии Лобачевского, но вместе с тем служит ей необходимым дополнением. Совместное исследование геометрий Евклида (см. Евклидова геометрия), Лобачевского и Римана позволило в должной мере выяснить особенности каждой из них, а также их связи друг с другом и с другими геометрическими системами. Ниже обе Н. г. и геометрия Евклида сопоставляются как синтетические теории, затем в плане дифференциальной геометрии и, наконец, в виде проективных моделей.

Н. г. как синтетические теории. Геометрия Лобачевского строится на основе тех же аксиом, что и евклидова, за исключением только одной аксиомы о параллельных. Именно, согласно аксиоме о параллельных евклидовой геометрии, через точку, не лежащую на данной прямой *a,* проходит только одна прямая, которая лежит в одной плоскости с прямой *a* и не пересекает эту прямую; в геометрии Лобачевского принимается, что таких прямых несколько (затем доказывается, что их бесконечно много).

В геометрии Римана принимается аксиома: каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую. Эта аксиома противоречит системе аксиом евклидовой геометрии с исключением аксиомы о параллельных. Т. о., система аксиом, лежащая в основе геометрии Римана, необходимо должна отличаться от системы аксиом евклидовой геометрии не только заменой одной аксиомы о параллельных другим утверждением, но и в части остальных аксиом.

Различными в этих геометриях являются аксиомы, которые служат для обоснования так называемых отношений порядка геометрических элементов. Сущность в следующем: в евклидовой геометрии и в геометрии Лобачевского порядок точек на прямой является линейным, т. е. подобным порядку в множестве действительных чисел; в геометрии Римана порядок точек на прямой является циклическим, т. е. подобным порядку в множестве точек на окружности.

Кроме того, в геометриях Евклида и Лобачевского каждая прямая, лежащая в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две части; в геометрии Римана прямая не разделяет плоскость на две части, т. е. любые две точки плоскости, не лежащие на данной прямой, можно соединить в этой плоскости непрерывной дугой, не пересекая данную прямую (топологической моделью плоскости Римана служит проективная плоскость).

Требования аксиом, определяющих движение фигур, для всех трёх геометрий одинаковы.

Н. г. имеют существенные приложения в математике (теории аналитических функций, теории групп и др.) и смежных с нею областях (например, в теории относительности). Эти приложения основаны на том, что разнообразные конкретные модели Н. г. связаны с различными объектами и понятиями указанных разделов математики и смежных с нею областей.

3. Аксиомы Тарского для элементарной планиметрии.

ТАРСКИЙ (Tarski) Альфред — (14 января 1902, Варшава — 27 октября 1983, Беркли) — представитель Львовско-Варшавской школы, польский математик и философ. Окончил Варшавский университет, с 1926 преподавал в том же университете, в 1939 эмигрировал в США, преподавал в Гарвардском университете, Принстонском институте высших исследований, с 1946 — профессор Калифорнийского университета (Беркли). Философские взгляды Тарского сформировались под влиянием С. Лесьневского, Я. Лукасевича и Т. Котарбиньского.

В начале 20-х гг. получил ряд результатов в области пропозициональной логики, в частности аксиоматическую формулировку импликативного фрагмента классической логики высказываний. В 1925—29 Тарский дал точное определение дедуктивной системы и доказал ряд теорем, устанавливающих свойства дедуктивных систем. В сер. 30-х гг. Тарский разработал исчисление дедуктивных теорий. К числу метаматематических результатов Тарского относятся также разработка метода элиминации кванторов, доказательство разрешимости элементарной теории действительных чисел и элементарной геометрии. Тарский внес значительный вклад в разработку моделей теории (обобщение теоремы Лёвенгейма—Скулема) и в теорию определимости понятий. В историю математики Тарский вошел как основатель т. н. “западной” (калифорнийской) школы теории моделей.

Наиболее известным результатом Тарского является разработанная им семантическая концепция истинности, выдвинувшая его в число ведущих логиков и философов 20 в. Тарский показал, что для любого из языков мы можем определить предикат истинности, который доказуемо применим ко всем истинным предложениям языка, и, более того, что мы можем определить этот предикат, используя достаточно простые синтаксические и теоретико-множественные понятия. Философское значение разработанной Тарским концепции заключается в установлении границ и познавательной ценности формализации, в уточнении языковых выражений, удовлетворяющих классической (аристотелевской) концепции истинности.

Результаты Тарского оказали влияние на формирование известных философско-методологических теорий, предложенных в 30—50-х гг., в частности на концепции К. Айдукевича, К. Поппера, Р. Карнапа. В логике эти методы Тарского, так же как его теоретико-модельная техника, стали частью современного логического аппарата, их изложение можно встретить на страницах практически каждой современной книги по логике.

1.8.Лекция № 8 (2 часа)

Тема: «Основные понятия теории алгоритмов»

1.8.1. Вопросы лекции:

1. Понятие алгоритма.
2. Характерные черты.
3. Вычислимые функции.

1.8.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие алгоритма.
2. Характерные черты.

С алгоритмами, т.е. эффективными процедурами, однозначно при-водящими к результату, математика имела дело всегда. Например: школьные методы умножения столбиком, деление углом многозначных чисел, метод исключения неизвестных при решении системы линейных уравнений, правило дифференцирования сложной функции – это все алгоритмы. То есть алгоритм – это однозначно трактуемая процедура, осуществляемая черным ящиком для получения выхода из входа. Этим черным ящиком может быть вычислительная машина, человек или устройство. Процедура – это конечная последовательность точно определённых шагов или операций, для выполнения каждой из которых требуется конечный объем оперативной памяти и конечное время. Одно из неудобств этого определения состоит в том, что термин "однозначная трактовка" весьма неоднозначен. Ничто не является абсолютно ясным или абсолютно неясным, должен быть указан, хотя бы неявно, исполнитель.

Чтобы создать алгоритм необходимо знать:

1. какую работу должен выполнять алгоритм.
2. какими должны быть входные данные.
3. какими должны быть выходные данные.

Рассмотрим некоторые основные принципы, по которым строятся алгоритмы, и выясним, что же именно в понятии алгоритма нуждается в уточнении.

<u>Первое</u>, что следует отметить в любом алгоритме – это то, что он применяется к исходным данным и выдает результаты. В технических терминах это означает, что алгоритм имеет входы и выходы. Кроме того, в ходе работы алгоритма появляются промежуточные результаты, которые используются в дальнейшем. Т.о. каждый алгоритм имеет дело с данными – входными, промежуточными и выходными.

<u>Второе</u>, данные для своего размещения требуют памяти. Память обычно считается однородной и дискретной, то есть состоит из одинаковых ячеек, причем каждая ячейка может содержать один символ алфавита данных. Т.о. единицы измерения объема данных и памяти согласованы. При этом память может быть бесконечной.

<u>Третье</u>, алгоритм состоит из отдельных элементарных шагов, причем множество различных шагов, из которых составлен алгоритм – конечно. Обычно элементарный шаг имеет дело с фиксированным числом символов, однако это требование не всегда выполняется.

<u>Четвертое</u>, последовательность шагов алгоритма детерминирована, т.е. после каждого шага указывается, какой шаг делать дальше, либо дается команда останова, после чего работа алгоритма считается законченной.

<u>Пятое</u>, естественно для алгоритма потребовать результативности, т.е. остановки после конечного числа шагов с указанием того, что считать результатом. Однако, проверить результативность (сходимость) гораздо труднее, чем предыдущие требования. Сходимость обычно не удается установить простым просмотром алгоритма. Общего метода проверки сходимости пригодного для любого алгоритма и любых данных вообще не существует.

Шестое, следует различать:

описание алгоритма (программу);

механизм реализации, включающий средства пуска,останова, реализации элементарных шагов, выдачи результатов и обеспечения управления ходом вычисления (ЭВМ);

процесс реализации алгоритма, то есть последовательность шагов, которая будет порождена при применении алгоритма к конкретным данным.

3. Вычислимые функции.

Первоначальной целью теории вычислимости (рекурсии) было придать строгость интуитивной идее вычислимой функции, т.е. функции, значения которой могут быть вычислены или автоматически или каким-либо другим эффективным способом

Рекурсивные функции, уже в силу характера своего определения, оказываются вычислимыми, т.к. каждая рекурсивная функция задается конечной системой равенств точно охарактеризованного типа в том смысле, что ее значения вычисляются с помощью этой системы равенств по точно формулируемым правилам, причем таким образом, что в итоге для вычисления значений заданной рекурсивной функции получается алгоритм определенного типа.

Очевидно, что к вычислимым функциям следует отнести все константы, т.е. все натуральные числа 0,1,2... . Нет необходимости включать в базис бесконечное множество констант. Достаточно 0 и функции следования $\boldsymbol{f(x)=} x+1,\ (x')$.

Кроме того в базис включается семейство функций тождества (или введения фиктивных переменных)

$$I_m^n\,(x_1,...x_n)=x_m \qquad (m<=n)$$

Мощным средством получения новых функций из уже имеющихся является суперпозиция. Оператором суперпозиции называется подстановка

$$S_m^n\,(h,g_1,...g_m)=h(g_1(x_1,...x_n)...g_m(x_1,...x_n)).$$

Если заданы функции I_m^n и операторы S_m^n, то можно считать заданными всевозможные операторы подстановки функций в функции, а также переименования, перестановки и отождествления переменных.

Оператором примитивной рекурсии R_n называются подстановки, удовлетворяющие системе уравнений

$$f(x_1,...,x_n)= g(x_1,...,x_n)$$

$$f(x_1,...,x_n,y+1)= h(x_1,...,x_n,y,f(x_1,...,x_n,y)),$$

которая называется схемой примитивной рекурсии.

Функция называется примитивно-рекурсивной, если она может быть получена из константы 0, функции следования и функций I_m^n с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции S_m^n и примитивной рекурсии R_n.

В формально-индуктивном виде это определение выглядит следующим образом:

1. Функции 0, X', I_m^n для всех натуральных m и n являются примитивно-рекурсивными.

2. Если $h,g_1,...g_m$ – примитивно-рекурсивные функции, то S_m^n – примитивно-рекурсивная функция.

3. Если $g(x_1,...x_n),h(x_1,...x_m,y,z)$ – примитивно-рекурсивные функции, то R_n – примитивно-рекурсивная функция.

4. Других примитивно-рекурсивных функций нет.

Примерами примитивно-рекурсивных функций являются

1. $f(x,y) = x + y$.
2. $f_{*}(x,y) = x * y$.
3. $f_{\exp}(x,y) = x^{y}$.

Оператор называется примитивно-рекурсивным (ПР), если он сохраняет примитивную рекурсивность функций, т.е. если результат его применения дает снова примитивно-рекурсивную функцию.

Подведем некоторые итоги. Из простейших функций - константы 0, функции следования и функций тождества с помощью операторов суперпозиции и примитивной рекурсии может быть получено огромное разнообразие функций, включающих основные функции арифметики, алгебры и анализа (с поправкой на целочисленность). Следует сделать два замечания

1. Все примитивно-рекурсивные функции всюду определены. Это следует из того, что простейшие функции всюду определены, а S_m^n и R_n это свойство сохраняют.

2. Строго говоря, мы имеем дело не с функциями, а с их примитивно-рекурсивным описанием. Различие здесь имеет тот же смысл, что и различие между функциями и их представлением в виде формул.

Возникает вопрос: все ли функции являются примитивно-рекурсивными? Простые теоретико-множественные соображения показывают, что нет.

Функция называется частично-рекурсивной, если она может быть построена из простейших функций: 0, x\`, I_m^n с помощью конечного числа применений S_m^n, R_n и μ-оператора.

По определению μ-оператор применяется к предикатам. Поскольку в теории рекурсивных функций истинность предиката всегда связана со справедливостью некоторого равенства, то μ-оператору можно придать стандартную форму:

$f(x_1,\dots x_n) = \mu y(g(x_1,\dots x_{n-1}, y) = x_n)$ ЏʻЏ

$f(x_1,\dots x_n) = \mu y(g(x_1,\dots x_n, y) = 0)$

Будучи применен к вычислимой функции μ-оператор снова дает вычислимую функцию.Однако эта процедура может не привести к результату: когда на данном наборе уравнение $g(x_1,\dots x_n, y) = 0$ не имеет решения. В таком случае функция считается неопределенной.

Т.о. среди рекурсивных функций появляются неполностью определенные, т.е. частичные функции. Операторы над частичными функциями порождают новые частичные функции. При этом характер неопределенности может оказаться довольно сложным, а именно: для данного набора не найдется способа установить определена ли на этом наборе и придется продолжать процесс вычисления неопределенное время, не зная, остановится он или нет.

Частично-рекурсивная функция называется общерекурсивной, если она всюду определена.Понятие частично-рекурсивных функций оказалось исчерпывающей формализацией понятия вычислимой функции. Это обстоятельство выражено тезисом Черча: всякая функция, вычислимая некоторым алгоритмом, частично-рекурсивна.

1.9.Лекция № 9 (2 часа)
Тема: «Машинная реализация алгоритмов»

1.9.1. Вопросы лекции:

1. Машины Тьюринга.
2. Реализация алгоритма в машине Тьюринга.
3. Нормальные алгоритмы Маркова.
4. Неразрешимые алгоритмические проблемы.

1.9.2. Краткое содержание вопросов

1. Машины Тьюринга.
2. Реализация алгоритма в машине Тьюринга.

Можно выделить три основных типа универсальных алгоритмических моделей:

1- й тип связывает понятие алгоритма с наиболее традиционными понятями математики – вычислениями и числовыми функциями;

2- й тип основан на представлении об алгоритме как о некотором детерминированном устройстве, способном выполнять в каждый отдельный момент времени лишь весьма примитивные операции. Такое представление не оставляет сомнений в однозначности алгоритма и элементарности его шагов. Кроме того эвристика этих моделей близка к ЭВМ. Основной теоретической моделью этого типа является машина Тьюринга.

3- й тип – это преобразования слов в произвольных алфавитах, в которых элементарными операциями являются подстановки, т.е. замены куска слова другим словом. Преимущества этого типа – в его максимальной абстрактности и возможности применить понятие алгоритма к объектам произвольной природы.

Понятие машины Тьюринга возникло в результате прямой попытки разложить известные нам вычислительные процедуры на элементарные операции. Тьюринг привел ряд доводов в пользу того, что повторения его элементарных операций было бы достаточно для проведения любого возможного вычисления. До сих пор все вычислительные машины в некотором смысле базируются на идее Тьюринга: их память физически состоит из битов, каждый из которых содержит либо 0 либо 1. Более того, т.н. микропрограммное управление унаследовало от этих абстрактных машин и программу, помещенную в "постоянную память", и в значительной мере структуру команды.

Машина Тьюринга представляет собой автомат, с конечным числом состояний, соединенный с внешней памятью – лентой, разбитой на ячейки, в каждой из которых записан один из символов конечного алфавита

$A= \{ a_1, ... a_m\}$.

Автомат связан с лентой с помощью головки, которая в каждый момент времени обозревает одну ячейку ленты, и в зависимости от символа в этой ячейке и состояния управляющего устройства записывает в ячейку символ (совпадающий с прежним или пустой), сдвигается на ячейку вправо или влево или остается на месте.

Среди состояний управляющего устройства выделим начальное состояние q_1 и заключительное состояние q_z. В начальном состоянии машина находится перед началом работы. Попав в заключительное состояние, машина останавливается.

Т.о. память машины T – это конечное множество состояний (внутренняя память) и лента (внешняя память). Лента бесконечна в обе стороны, однако в любой момент времени лишь конечный отрезок ленты будет заполнен символами. Поэтому важна не фактическая бесконечность ленты, а ее неограниченность, т.е. возможность писать на ней сколь угодно длинные, но конечные слова.

Данные в машине T – это слова в алфавите ленты; на ленте записываются и исходные данные и окончательные результаты. Элементарные шаги – это считывание и запись символов, сдвиг головки на ячейку влево или вправо, а также переход управляющего устройства в следующее состояние.

Детерминированность машины *T* определяется следующим образом: для любого внутреннего состояния q_i и символа a_j однозначно заданы

а) следующее состояние q_i\`

б) символ a_j\`, который надо записать в ту же ячейку вместо a_j (стирание – это запись пустого символа λ)

в) направление сдвига головки d_k (*L* – влево, *R* – вправо, *E* – на месте).

Это задание может описываться либо системой правил

$$q_i\, a_j \;\to\; q_i`\, a_j`\, d_k$$

либо таблицей, строкам которой соответствуют состояния, столбцам – входные символы, а на пересечении записана тройка символов $q_i`\, a_j`\, d_k$.

либо блок-схемой (диаграммой переходов), в которой состояниям соотвествуют вершины, а правилу вида ($q_i\, a_j \;\to\; q_i`\, a_j`\, d_k$) – ребро, ведущее из q_i в $q_i`$.

Полное состояние машины *T*, по которому однозначно можно определить ее дальнейшее поведение, определяется ее внутренним состоянием, состоянием ленты (т.е. символом, записанным на ленте) и положением головки на ленте.

Полное состояние будем называть конфигурацией или машинным словом. Стандартной начальной конфигурацией называется конфигурация вида $q_1\ \alpha$, то есть конфигурацию, содержащую начальное состояние, в котором головка обозревает крайний левый символ слова, написанного на ленте. Аналогично, стандартной заключительной конфигурацией называется конфигурация вида $q_z\alpha$. Ко всякой незаключительной конфигурации *K* машины *T* применима ровно одна команда вида

$$q_i\, a_j \;\to\; q_i`\, a_j`\, d_k,$$

которая конфигурацию *K* переводит в конфигурацию *K'*. По-следовательность $K_1 \to K_2 \to K_3 \to \ldots$ однозначно определяется исходной конфигурацией K_1 и полностью описывает работу машины *T*, начиная с K_1.

Для того чтобы говорить о том, что могут делать машины *T*, уточним как будет интерпретироваться их поведение и как будут представляться данные.

Исходными данными машины *T* будем считать записанные на ленте слова в алфавите исходных данных и векторы из таких слов. Для любого набора *V* над $A_{исх}$ машина *T* либо работает бесконечно, либо перерабатывает его в совокупность слов в алфавите результатов ($A_{исх}$ и $A_{рез}$ могут пересекаться и даже совпадать).

Пусть *f* – функция, отображающая множество векторов над $A_{исх}$ в множество векторов над $A_{рез}$. Машина *T* правильно вычисляет функцию *f* , если

1) для любых *V* и *W* таких, что $f(V)=W\ q_1V^* \Rightarrow q_{1z}W^*$, где V^* и W^*– правильные записи *V, W*.

2) для любого *V* такого, что *f(V)* не определена, машина *T*, запущенная в стандартной начальной конфигурации q_1V^*, работает бесконечно долго.

Если для *f* существует машина *T*, которая ее правильно вычисляет, *f* называется *правильно вычислимой по Тьюрингу*. С другой стороны, любой правильно вычисляющей машине *T* можно поставить в соответствие вычисляемую ею функцию.

Пусть $f(\alpha)$ задана описанием: "если $P(\alpha)$ истинно, то $f(\alpha)=g_1(\alpha)$, иначе $f(\alpha)=g_2(\alpha)$". Функция называется условным переходом к $g_1(\alpha)$ и $g_2(\alpha)$ по условию $P(\alpha)$.

Благодаря вычислимости композиции и разветвления словесные описания и язык блок-схем можно сделать вполне точным языком для описания работы машин Тьюринга.

Систему команд машин Тьюринга можно интерпретировать и как описание работы конкретного механизма и как программу. Естественно поставить задачу построения машины Тьюринга, реализующей алгоритм воспроизведения работы машины Тьюринга – такая машина называется универсальной. Существование универсальной машины Тьюринга означает, что систему команд любой машины Тьюринга можно представить двояко: либо как описание работы конкретного устройства машины *T*, либо как программу для универсальной машины *U*. Это естественно: для инженера, проектирующего систему управления, любой алгоритм управления может быть реализован либо аппаратурно – построением соответствующей схемы, либо программно – написанием программы для универсальной управляющей ЭВМ.

Такая интерпретация на абстрактном уровне сохраняет основные плюсы и минусы инженерной реализации: конкретная машина *T* работает гораздо быстрее; управляющее устройство *U* довольно громоздко, однако его величина постоянна и, будучи раз построено, оно годится для реализации сколь угодно больших алгоритмов. Кроме того, при смене алгоритма не понадобится строить новых устройств, нужно будет лишь написать новую программу.

Тезис Тьюринга: Всякий алгоритм может быть реализован машиной Тьюринга. Доказать тезис нельзя, поскольку само понятие алгоритма является неточным. Подтверждением тезиса являются, во-первых, математическая практика, а во-вторых, то, что описание алгоритма в терминах любой другой известной алгоритмической модели может быть сведено к его описанию в виде машины Тьюринга.

В числе общих требований, предъявляемых к алгоритмам, упоминалось требование результативности. В наиболее радикальном виде: по любому алгоритму *A* и данным определить, приведет ли работа *A* при исходных данных α к результату или нет. Иначе говоря, нужно построить алгоритм *B* такой, что $B(A,\alpha)=И$, если $A(\alpha)$ дает результат, и $B(A,\alpha)=Л$, если нет.

В силу тезиса Тьюринга эту задачу можно сформулировать как задачу о построении машины Тьюринга. Эта задача называется проблемой остановки.

Теорема: Не существует машины Тьюринга, решающей проблему остановки для произвольной машины Тьюринга.

Эта теорема дает первый пример алгоритмически неразрешимой проблемы. Следует иметь в виду, что речь идет об отсутствии *единого* алгоритма, решающего данную проблему, при этом не исключается возможность решения в частном случае. И неразрешимость общей проблемы остановки не снимает необходимости доказывать сходимость предлагаемых алгоритмов.

3. Нормальные алгоритмы Маркова.
4. Неразрешимые алгоритмические проблемы.

Множество всех алгоритмов счетно. Это означает наличие взаимно-однозначного соответствия между алгоритмами и числами натурального ряда, т.е. функции типа

$$\varphi: A_l \to N$$

Такая функция называется нумерацией алгоритмов, а ее значение $\varphi(A)$ – номером алгоритма *A* при нумерации φ. Из взаимной однозначности отображения φ следует, что существует обратная функция $\varphi^{-1}(n)= A_n$, восстанавливающая по номеру *n* описание алгоритма A_n. Очевидно, что различных нумераций много. Существование нумераций позволяет работать с алгоритмами как с числами. Это удобно при исследовании алгоритмов над алгоритмами. Такие алгоритмы уже рассматривались при построении универсальной машины

Тьюринга и в связи с проблемой остановки. По существу, вычислимая нумерация служит языком программирования для универсального алгоритма.

Теорема 1. Не существует алгоритма *B(x,y)* такого, что для любого алгоритма *Ax* (с номером $\varphi(A)=x$)

$$B(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } A_x(y) \text{ определен}, \\ 0, \text{ если } A_x(y) \text{ не определен}. \end{cases}$$

Иначе говоря, не существует алгоритма, который по номеру ***x*** любого алгоритма и исходным данным ***y*** определял бы остановится алгоритм ***Ax*** при этих данных или нет.

Эта теорема – переформулировка в инвариантном виде теоремы о неразрешимости проблемы остановки.

Теорема 2. Проблема самоприменимости алгоритмов аналитически неразрешима.

Т.е. не существует алгоритма $B_1(x)$ такого, что для любого *Ax*

$$B_1(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } A_x \text{ определен}, \\ 0, \text{ если } A_x \text{ не определен}. \end{cases}$$

Эти две теоремы являются мощным средством для доказательства разных неразрешимостей.

Решение задачи перечисления всех алгоритмов (в частности, всех рекурсивных функций) в принципе ясно. Может показаться, что перечисление примитивно-рекурсивных или общерекурсивных функций окажется более легким делом.

Теорема 3. Для любого перечисления любого множества всюду определенных вычислимых (т.е. общерекурсивных) функций существует общерекурсивная функция не входящая в это перечисление.

Если в перечислении допускаются частичные функции, то определение *B* не приводит к противоречию, а лишь означает, что в точке *Хв* функция *В(Хв)* не определена.

Теорема 4. Проблема определения общерекурсивности алгоритмов неразрешима.

Не существует алгоритма *B(x)* такого, что для любого алгоритма *Ax*

$$B(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } A_x \text{ всюду определен}, \\ 0, \text{ если } A_x \text{ не всюду определен}. \end{cases}$$

Среди требований к алгоритмам говорилось о желательности такого требования, как результативность. Первым ударом по этому требованию была неразрешимость проблемы остановки, означающая, что если алгоритм может быть частичным, то по алгоритму *A* и данным *x* нельзя узнать, даст *A* результат на данных *x* или нет.

Теорема 5. Существует такая частично-рекурсивная функция *f*, что никакая общерекурсивная функция *g* не является ее доопределением.

Следовательно, существуют частичные алгоритмы, которые нельзя доопределить до всюду определенного алгоритма.

Еще одна идея: построить язык, описывающий все всюду определенные алгоритмы и только их. Осуществить ее нельзя потому, что описания в этом языке можно упорядочить и следовательно, наличие такого языка означало бы существование полного перечисления всех всюду определенных функций, что противоречит теореме 3.

Таким образом, возникает дилемма: либо определение алгоритма должно быть достаточно общим, чтобы в число объектов, удовлетворяющих этому определению заведомо вошли все объекты, которые естественно считать алгоритмами, либо требование об обязательной результативности сохраняется.

Просматривая весь запас алгоритмически неразрешимых проблем, можно заметить, что все они так или иначе связаны с самоприменимостью. Понятие самоприменимости весьма далеко от алгоритмической практики, следовательно, можно предположить, что и неразрешимость в этой практике никогда не встречается.

Теорема Райса. Никакое нетривиальное свойство вычислимых функций не является алгоритмически разрешимым.

Отсюда следует, что по номеру вычислимой функции нельзя узнать, является ли эта функция постоянной, периодической, ограниченной и т.д. Чтобы разобраться в смысле теоремы Райса, следует вспомнить, что номер x функции f – это номер алгоритма Ax, вычисляющего f; по номеру алгоритма однозначно восстанавливается его описание, и разным номерам соответствуют разные алгоритмы.

Можно ли по тексту сколько-нибудь сложной программы (не запуская ее в работу) понять, что она делает (не имея гипотез о том, что она должна делать)? В этом тексте алгоритмическим путем можно отыскать так называемые синтаксические ошибки – те или иные свойства описания алгоритма (и это делают трансляторы и компиляторы с алгоритмических языков программирования).

Хорошо известно, что в процессе отладки программ синтаксические ошибки обнаруживаются очень быстро; все неприятности связаны с анализом семантики программы, т.е. с попытками установить, что же собственно программа делает, вместо того, чтобы делать задуманное.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1. Практическое занятие 1 (ПЗ-1) (2 ч)

Тема: «Введение в математическую логику».

2.1.1 Задание для работы:

1. История развития математической логики.
2. Логические парадоксы. Апории Зенона.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Ахилл и черепаха. Ахилл — герой и, как бы мы сейчас сказали, выдающийся спортсмен. Черепаха, как известно, одно из самых медлительных животных. Тем не менее Зенон утверждал, что Ахилл проиграет черепахе состязание в беге. Примем следующие условия. Пусть Ахилла отделяет от финиша расстояние 1, а черепаху — ½. Двигаться Ахилл и черепаха начинают одновременно. Пусть для определенности Ахилл бежит в 2 раза быстрее черепахи. Тогда, пробежав расстояние ½, Ахилл обнаружит, что черепаха успела за то же время преодолеть отрезок ¼ и по-прежнему находится впереди героя. Далее картина повторяется: пробежав четвертую часть пути, Ахилл увидит черепаху на одной восьмой части пути впереди себя и т. д. Следовательно, всякий раз, когда Ахилл преодолевает отделяющее его от черепахи расстояние, последняя успевает уползти от него и по-прежнему остается впереди. Таким образом, Ахилл никогда не догонит черепаху. Начав движение, Ахилл никогда не сможет его завершить.

Знающие математический анализ обычно указывают, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$$

сходится к 1. Поэтому, дескать, Ахилл преодолеет весь путь за конечный промежуток времени и, безусловно, обгонит черепаху

2.1.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.2.Практическое занятие 2 (ПЗ-2) (2 ч)
Тема: «Множества и функции».
2.2.1 Задание для работы:
1. Виды множеств.
2. Диаграммы Венна.
3. Взаимно-однозначные соответствия.
4. Изоморфизм.

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример 1. Задать различными способами множество N всех натуральных чисел: 1,2, 3,...

'/*■ Списком множество N задать нельзя ввиду его бес конечности.

Порождающая процедура содержит два правила: а)le7V; б)

если $n\&N$, то $n+1$ GN.

Описание характеристического свойства элементов множества N:

N = {jc: x - целое положительное число}.

Пример 2. Задать различными способами множество M всех четных чисел 2,**4**, 6,..., не превышающих 100.

▶ M_2 = {2,4,6,..., 100}.

а) 2еЛ/$_{2я}$; б) если neN, то $(n+2)sM_{2n}{}^{1}$, в) n <98.

M_2 = $\{n \backslash n$- целое положительное число, не превышающее 100} или M_{2n} = $\{n$: n e N u $n/2$ e N, n < 100}.

Пример 3. Пусть U= $\{a$, b, $c\}$. Определить в явном виде (перечислением своих элементов) *булеан* Р(£У) - множество всех подмножеств, состоящих из элементов множества U. Какова мощность множества Р([7) ?

▶ (ад= {0 , {a}, $\{b\}$, {c}, {a, $b\}$, {a, c}, $\{b$, c}, {a, b, c}}.
Мощность |Р(£/)|⁼ 8.

Пример 4. Какие из приведенных определений множеств A, B, C, D являются корректными:

$a)$ A = {1, 2, 3}, в) C-{*: $xeA]$,
б) B ={5, 6, 6, 7}, r)D= $\{A$, С}?

Принадлежит ли число 1 множеству £>?

^ а) Определение множества A = $\{1,2,3\}$ **списком своих** элементов формально корректно.

2.2.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.3.Практическое занятие 3 (ПЗ-3) (2 ч)
Тема: «Операции над высказываниями».

2.3.1 Задание для работы:
1. Истинные и ложные высказывания.
2. Составление таблиц истинности для высказываний.
3. Элементарные и составные высказывания.

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.

Пример 1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны:

1) река Волхов впадает в озеро Ильмень;
2) всякий человек имеет брата;
3) пейте томатный сок!;
4) существует человек, который моложе своего отца;
5) который час?;
6) ни один человек не весит более 1000 кг;
7) $23<5$;

2.. Составить таблицу истинности для высказывания $(A \Rightarrow B) \sim (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$

2.3.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.4. Практическое занятие 4 (ПЗ-4) (2 ч)

Тема: «Равносильные формулы алгебры логики».

2.4.1 Задание для работы:

1. Доказательство равносильности.

2.Доказтельство истинности или ложности формул.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.12. Проверить, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1) $p \to p$;
2) $p \vee \overline{p}$;
3) $\overline{p \wedge \overline{p}}$;
4) $p \leftrightarrow \overline{p}$;
5) $\overline{p} \to p$;
6) $p \leftrightarrow p$;
7) $(p \vee p) \to p$;
8) $\overline{p \& (p \leftrightarrow \overline{p})}$;
9) $(p \to p) \vee \overline{p}$;
10) $p \leftrightarrow p \& (\overline{p} \to p \& p)$;
11) $p \vee (p \leftrightarrow \overline{p})$;
12) $\overline{p \to \overline{p}}$;
13) $\overline{p \leftrightarrow \overline{p}}$;
14) $(p \vee p) \to (p \wedge p)$.

1.20. Доказать равносильность:

1) $(x \vee y) \& (x \vee \overline{y}) \equiv x$;

2) $x \vee (\overline{x} \& y) \equiv x \vee y$;

3) $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$;

2.4.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.5.Практическое занятие 5 (ПЗ-5) (2 ч)
Тема: «Функции алгебры логики».

2.5.1 Задание для работы:
1. Нахождение формулы по заданной таблице истинности.
2. Нахождение СКНФ и СДНФ.

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.39. Для следующих формул найти СДНФ и СКНФ, каждую двумя способами (путем равносильных преобразований и используя таблицы истинности):

1) $x\&(x \to y)$;

2) $(\overline{xy} \to \bar{x})\&(\overline{xy \to \bar{y}})$;

3) $(x \to y) \to (y \to x)$;

4) $(x \vee \bar{z}) \to y\& z$;

5) $(x \vee \bar{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \bar{x}}) \vee y \wedge \bar{z}$;

6) $(ab \to bc) \to ((a \to b) \to (c \to b))$;

7) $(\bar{a} \to c) \to (\overline{\bar{b} \to \bar{a}})$;

8) $(\bar{a} \to \bar{b}) \to (bc \to ac)$;

9) $x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_{n-1} \to x_n)\ldots))$;

10) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \to y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$.

1.40. Найдите СДНФ для всякой тождественно истинной формулы, содержащей: 1) одно переменное, 2) два переменных, 3) три переменных.

2.5.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.6.Практическое занятие 6 (ПЗ-6) (2 ч)
Тема: «Приложения алгебры логики».

2.6.1 Задание для работы:
1. Релейно-контактные схемы.
2. Решение логических задач.

2.6.2 Краткое описание проводимого занятия:

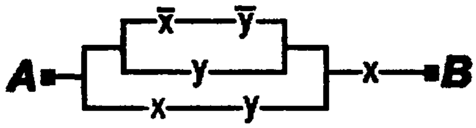
1.45. Составить РКС для формулы:

1) $x(\bar{y}z \vee x \vee y)$;
2) $xyz \vee \overline{xyz} \vee \bar{x}y$;
3) $x(yz \vee \overline{yz}) \vee \bar{x}(\bar{y}z \vee y\bar{z})$;
4) $(\bar{x} \vee y)\&(zy \vee x) \vee u$;
5) $(x \to y)\&(y \to z)$;
6) $(x \to y) \to (\bar{x}\&(y \vee z))$;
7) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;
8) $(x \to (y \to z)) \to (y \to x)$.

1.46. Построить схемы, реализующие следующие булевы операции:

1) импликацию $x \to y$;
2) эквивалентность $x \leftrightarrow y$;

1.48. Упростить РКС:

1) 

1.52. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1. Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев – 7-ой».

2. Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев – 8-ой».

3. Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин – 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

2.6.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.7.Практическое занятие 7 (ПЗ-7) (2 ч)

Тема: «Итоговое занятие»
2.7.1 Задание для работы:
1. Контрольная работа по теме «Семантика»

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

Контрольная работа № 1 «Алгебра логики»
1. Составить РКС для формулы:
а) $x(yz \vee \overline{y}\,\overline{z}) \vee \overline{x}\,(\overline{y}\,z \vee y\,\overline{z})$;
б) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$.

2. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

2.7.3 Результаты и выводы:
В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.8.Практическое занятие 8 (ПЗ-8) (2 ч)
Тема: «Правила вывода».

2.8.1 Задание для работы:
1. Формулы и подформулы.
2. Доказательство формул.

2.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

2.2. Выписать все подформулы формул:

1) $x \to (y \to x)$; 2) $\overline{a \vee b} \to c$;

3) $a \& \overline{c \vee b}$; 4) $x \to y \& z$;

5) $x \vee yz \to x$; 6) $\overline{x \to y} \vee x \& y$;

7) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (\overline{x} \vee z)$;

8) $(x \to y) \to ((x \to \overline{y}) \to \overline{y})$.

2.7. Доказать, что

1) $H = \{A\} \vdash B \to A$;

2) $H = \{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$;

3) $H = \{A \to C\} \vdash \overline{C} \to \overline{A}$;

4) $H = \{A \to B, \overline{B}\} \vdash \overline{A}$;

5) $H = \{A, \overline{\overline{A}} \to B\} \vdash B$;

6) $H = \{A \to B\} \vdash A \& C \to B \& C$;

7) $H = \{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;

8) $H = \{A \to B\} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$;

9) $H = \{A \to (B \to C)\} \vdash B \to (A \to C)$;

10) $H = \{A \to B\} \vdash A \vee C \to B \vee C$.

2.8.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.9.Практическое занятие 9 (ПЗ-9) (2 ч)
Тема: «Выводимость формул».
2.9.1 Задание для работы:

1. Доказуемость формул.
2. Применение производных правил вывода.

2.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

2.4. Применяя правило подстановки, доказать, что доказуема формула:

1) $(A \to B) \& B \to B$;

2) $A \& B \to A \& B \vee C$;

3) $(\overline{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\overline{A} \vee C \to B))$;

4) $\overline{\overline{C \vee D}} \to C \vee D$;

5) $(A \& B \to (C \to B \& C)) \to ((A \& B \to C) \to (A \& B \to B \& C))$.

2.5. Применяя правило подстановки и правило заключения, установить доказуемость формул:

1) $A \vee A \to A$;
2) $A \to A \& A$;
3) $A \& B \to B \& A$;
4) $A \vee B \to B \vee A$;
5) $(A \to B) \to (A \to A)$;
6) $\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}$.

2.6. Применяя производные правила вывода, показать, что доказуемы формулы:

1) $\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \& B}$;
2) $A \to R$;
3) $(A \to B) \to (A \to A \vee B)$;
4) $F \to A$;
5) $(A \to B) \to (A \to A)$;
6) $A \& \overline{A} \to F$;
7) $(A \to B) \& \overline{B} \to \overline{A}$;
8) $\overline{A} \& \overline{B} \to \overline{A \vee B}$.

2.9.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.10.Практическое занятие 10 (ПЗ-10) (2 ч)
Тема: «Операции над предикатами».
2.10.1 Задание для работы:

1. Нахождение области истинности предиката.
2. Использование кванторных операций.

2.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

3.2. Даны предикаты $P(x)$: «$x^2 - 4 = 0$» и $Q(x)$: «$3x - 2 < 17$». Найдите области истинности этих предикатов, если их область определения есть: 1) R; 2) N.

3.3. На множестве $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ заданы два предиката $P(x)$: «x – простое число», $Q(x)$: «x – нечетное число». Составьте их таблицы истинности. Равносильны ли предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множестве $L = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

3.11. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов M совпадает с R:

1) $\exists x\ (x + 5 = x + 3)$;
2) $\exists x\ \left(x^2 + x + \frac{1}{2} = 0\right)$;
3) $\forall x\ (x^2 + x + 1 > 0)$;
4) $\forall x\ (x^2 - 5x + 6 \geq 0)$;
5) $\exists x\ \left((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \& (x^2 - 2x + 1 > 0)\right)$;
6) $\exists x\ \left((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \& (x^2 - 6x + 8 \leq 0)\right)$;
7) $\forall x\ \left((x^2 - 6x + 8 \geq 0) \vee (x^2 - 6x + 8 < 0)\right)$;
8) $\exists x\ \left((x \in \{2,\ 5\}) \to (x^2 - 6x + 8 = 0)\right)$;
9) $\forall x\ \left((x \in \{3,\ 5\}) \to (x^2 - 6x + 8 < 0)\right)$.

2.10.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.11.Практическое занятие 11 (ПЗ-11) (2 ч)
Тема: «Применение языка логики предикатов».
2.11.1 Задание для работы:

1. Запись математических предложений в виде формул логики предикатов.
2. Построение противоположных утверждений.
3. Прямая, обратная и противоположная теоремы.

2.11.2 Краткое описание проводимого занятия:

3.39. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо, но недостаточно» или «достаточно, но не необходимо» или же «не необходимо и недостаточно», а где возможно «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное утверждение:

1. Для того, чтобы четырехугольник был прямоугольным ..., чтобы длины его диагоналей были равны.

2. Для того, чтобы $x^2 - 5x + 6 = 0$ ..., чтобы $x = 3$.

3. Для того, чтобы сумма четного числа натуральных чисел была четным числом, ..., чтобы каждое слагаемое было четным.

4. Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на сегменте $[a,b]$, ..., чтобы $f(x)$ была ограничена.

3.41. Папа сказал детям: «Если мы с мамой поедем летом в дом отдыха, то вы все поедете в детский лагерь.» В школе детей спросили, куда они поедут летом. Петя ответил: «Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха.» Галя сказала: «Если папа с мамой не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь.» «Нет, не так, – вмешался Коля. – Если мы не поедем в лагерь, то кто-то из родителей не поедет в дом отдыха.»

Чей ответ равносилен тому, что сказали родители?

2.11.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.12.Практическое занятие 12 (ПЗ-12) (2 ч)
Тема: «Применение языка логики предикатов».

2.12.1 Задание для работы:
1. Необходимые и достаточные условия.
2. Контрольная работа № 2 «Логика предикатов»

2.12.2 Краткое описание проводимого занятия:

Контрольная работа № 2 «Логика предикатов»

1. Запишите на языке логики предикатов определение: функция f называется четной, если область ее определения симметрична относительно начала координат, и для каждого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

2. Для теоремы: «Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» сформулируйте обратную и противоположную теоремы.

3. Сформулируйте: а) необходимый и достаточный признак параллелограмма; б) необходимый, но недостаточный признак параллелограмма; в) достаточный, но не необходимый признак параллелограмма.

2.12.3 Результаты и выводы:
В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.13.Практическое занятие 13 (ПЗ-13) (2 ч)
Тема: «Множество натуральных и целых чисел».
2.13.1 Задание для работы:

1. Понятие группы.
2. Метод математической индукции.
3. Теория колец.

2.13.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.

Метод математической индукции — специальный метод доказательства, применяемый для доказательства истинности утверждений типа $(\forall x \in \mathbb{N})(P(x))$, то есть $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \to P(x))$. Такие утверждения выражают тот факт, что некоторое свойство P присуще каждому натуральному числу. Сейчас изложим суть этого метода. Формальной основой метода математической индукции служит одна из аксиом, называемая аксиомой индукции (или математической индукции) и выражающая свойство естественного отношения порядка, имеющегося на множестве всех натуральных чисел. Эта аксиома такова. Если свойством P обладает число 1 и для всякого натурального числа из того, что оно обладает этим свойством, следует, что и непосредственно следующее за ним натуральное число также обладает им, то и всякое натуральное число обладает свойством P. Символически, на языке логики предикатов, эта аксиома записывается так:

$$\big(P(1) \wedge (\forall x)(P(x) \to P(x+1))\big) \to (\forall y)(P(y)).$$

Эта аксиома дает следующий метод доказательства утверждений, выражающих некоторые свойства всех натуральных чисел. Если нужно доказать утверждение $(\forall y)(P(y))$, где $y \in \mathbb{N}$ ("Всякое натуральное число обладает свойством P"), достаточно установить истинность высказывания $P(1)$ ("Число 1 обладает свойством P") и доказать, что $(\forall x)(P(x) \to P(x+1))$, т.е. "Если x обладает свойством P, то этим свойством обладает и число $x+1$, непосредственно следующее за x".

Таким образом, логическая схема доказательства методом математической индукции может быть представлена следующим образом:

(1): $P(1)$ — устанавливается проверкой;
(2): $(\forall x)(P(x) \to P(x+1))$ — доказывается;
(3): $P(1) \wedge (\forall x)(P(x) \to P(x+1))$ - из (1), (2) по правилу введения конъюнкции;
(4): $\big(P(1) \wedge (\forall x)(P(x) \to P(x+1))\big) \to (\forall y)(P(y))$ — **аксиома индукции**;
(5): $(\forall y)(P(y))$ — из (3), (4) по правилу *modus ponens*.

При этом установление истинности утверждения $P(1)$ называется основанием или базой индукции; предположение об истинности утверждения $P(x)$ — предположением индукции; последующее доказательство истинности утверждения $P(x+1)$ — шагом индукции.

Методом математической индукции доказано утверждение о том, что число двоичных наборов длины n (упорядоченных n-ок), составленных из нулей и единиц, равно 2^n (теорема 10.3), о представлении булевых функций (теорема 10.5), теорема 15.4 о дедукции. Неоднократно применялась индукция по числу логических связок, входящих в формулу логики высказываний или предикатов (см. теоремы 2.2, 22.3, 22.5).

2.13.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.14.Практическое занятие 14 (ПЗ-14) (2 ч)
Тема: «Теория поля».

2.14.1 Задание для работы:
1. Поле рациональных чисел.
2. Поле действительных чисел.
3. Поле комплексных чисел.

2.14.2 Краткое описание проводимого занятия:
Лемма 1. $\forall n \in N \ \langle a,b\rangle = \langle na, nb\rangle$.

Теорема 3. $\langle Z \times N /_{\approx}, +, \cdot\rangle$ **- поле.**
Доказательство.

Непосредственной проверкой легко устанавливается, что сложение и умножение являются коммутативными и ассоциативными операциями, а также дистрибутивность сложения относительно умножения.

$\exists [x, y] \in Z \times N /_{\approx} \ \langle a,b\rangle + \langle x,y\rangle = \langle a,b\rangle$ **(*существование* 0) (?)**

Покажем, что класс $\langle x,y\rangle = \langle 0,n\rangle$, $\forall n \in N$:

$\langle a,b\rangle + \langle 0,n\rangle = \langle a\cdot n + b\cdot 0, b\cdot n\rangle = \langle an, bn\rangle = \langle a,b\rangle$.

$\exists \langle x,y\rangle \in Z \times N /_{\approx} \ \langle a,b\rangle \cdot \langle x,y\rangle = \langle a,b\rangle$ **(*существование* 1) (?)**

Покажем, что класс $\langle x,y\rangle = \langle n,n\rangle$, $\forall n \in N$:

$\langle a,b\rangle \cdot \langle n,n\rangle = \langle an, bn\rangle = \langle a,b\rangle$.

$\exists \langle x,y\rangle \in Z \times N /_{\approx} \ \langle a,b\rangle + \langle x,y\rangle = \langle 0,n\rangle$

(*существование противоположного*) (?)

Проверим, что $\langle x,y\rangle = -\langle a,b\rangle = \langle -a,b\rangle$:

$\langle a,b\rangle + \langle -a,b\rangle = \langle -ab - ab, bb\rangle = \langle 0, b^2\rangle = \langle 0,n\rangle$.

$\exists \langle x,y\rangle \in Z \times N /_{\approx}, \ \langle a,b\rangle \neq \langle 0,n\rangle \ \langle a,b\rangle \cdot \langle x,y\rangle = \langle a,b\rangle$

(*существование обратного для каждого ненулевого*) (?)

Проверим, что $\langle x,y\rangle = \langle ab, aa\rangle$:

$\langle a,b\rangle \neq \langle 0,n\rangle \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow aa \in N \Rightarrow \langle ab, aa\rangle \in Z \times N /_{\approx}$ **- обратный к** $\langle a,b\rangle$.

$\langle a,b\rangle \cdot \langle ab, aa\rangle = \langle aab, baa\rangle = \langle n,n\rangle \Rightarrow \langle a,b\rangle^{-1} = \langle ab, aa\rangle$.

что и требовалось доказать.

2.14.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.15.Практическое занятие 15 (ПЗ-15) (2 ч)

Тема: «Аксиомы планиметрии».

2.15.1 Задание для работы:

1. Аксиомы Тарского.
2. Евклидова геометрия.

2.15.2 Краткое описание проводимого занятия:

Фундаментальные отношения

Эти аксиомы - более изящная версия набора Тарский, созданный в 1920-х как часть его расследования метаматематических свойств Евклидовой геометрии самолета. Эта цель потребовала переформулировки что геометрия как теория первого порядка. Тарский сделал так, установив вселенную пунктов с письмами о нижнем регистре, обозначающими переменные, передвигающиеся на ту вселенную. Равенство обеспечено основной логикой (см. Первого порядка logic#Equality и ее аксиомы). Тарский тогда установил два примитивных отношения:

- *Betweenness*, triadic отношение. Атомный *Bxyz* предложения обозначает, что *y* «между» *x* и *z*, другими словами, что *y* - пункт на линейном сегменте *xz*. (Это отношение интерпретируется включительно, так, чтобы *Bxyz* был тривиально верен каждый раз, когда $x=y$ или $y=z$).
- *Соответствие* (или «equidistance»), tetradic отношение. Атомное предложение $wx \equiv yz$ может интерпретироваться, поскольку *wx* подходящий *yz*, другими словами, что продолжительность линейного сегмента *wx* равна продолжительности линейного сегмента *yz*.

Бетвиннесс захватил аффинный аспект Евклидовой геометрии; соответствие, его метрический аспект. Второстепенная логика включает идентичность, бинарное отношение. Аксиомы призывают идентичность (или ее отрицание) в пяти случаях.

Аксиомы ниже сгруппированы типами отношения, которое они призывают, затем сортированный, сначала числом экзистенциальных кванторов, затем числом атомных предложений. Аксиомы должны быть прочитаны как универсальные закрытия; следовательно любые свободные переменные должны быть взяты, как молчаливо универсально определено количественно.

2.15.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.16.Практическое занятие 16 (ПЗ-16) (2 ч)
Тема: «Геометрия Лобачевского».
2.16.1 Задание для работы:

1. Аксиомы Гильберта.
2. Аксиома о параллельных.
3. Теоремы геометрии Лобачевского.

2.16.2 Краткое описание проводимого занятия:

2.16.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.17.Практическое занятие 17 (ПЗ-17) (2 ч)
Тема: «Рекурсивные функции».
2.17.1 Задание для работы:
1. Частично рекурсивные функции.
2. Общерекурсивные функции.
2.17.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример

Функция

$$g(x) = \begin{cases} x-1, \ x > 0, \\ \text{не определено}, \ x = 0 \end{cases}$$

частично рекурсивна.

Действительно,

$$g(x) = \mu_y \{ s(y) = y + 1 = x \}.$$

Следовательно, она получена из простейшей функции с помощью оператора минимизации.

2.17.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.

2.18.Практическое занятие 18 (ПЗ-18) (2 ч)
Тема: «Машина Тьюринга».
2.18.1 Задание для работы:
1. Устройство машины.
2. Определение функции по программе команд.
2. Построение машины Тьюринга для алгоритма.
2.18.2 Краткое описание проводимого занятия:

Пример

Найти результат применения машины Тьюринга, заданной программой, к записям на ленте

$$P_1 = 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0 \quad \text{и} \quad P_2 = 0\,1\,1\,1\,1\,0:$$

$$\begin{aligned} &q_1 0 \to q_1 0R, \\ &q_1 1 \to q_2 0R, \\ &q_2 0 \to q_0 1S, \\ &q_2 1 \to q_1 0R. \end{aligned}$$

Решение. Имеем

$$P_1:\ \underset{q_1}{0}\,1\,1\,1\,0\,1\,0 \to 0\,0\,\underset{q_2}{1}\,1\,0\,1\,0 \to 0\,0\,0\,\underset{q_1}{1}\,0\,1\,0 \to$$

$$\to 0\,0\,0\,0\,\underset{q_2}{0}\,1\,0 \to 0\,0\,0\,0\,\underset{q_0}{1}\,1\,0,$$

$$P_2:\ \underset{q_1}{0}\,1\,1\,1\,1\,0 \to 0\,0\,\underset{q_2}{1}\,1\,1\,0 \to 0\,0\,0\,\underset{q_1}{1}\,1\,0 \to$$

$$\to 0\,0\,0\,0\,\underset{q_2}{1}\,0 \to 0\,0\,0\,0\,0\,\underset{q_1}{0} \to 0\,0\,0\,0\,0\,0\,\underset{q_1}{0} \to \ldots.$$

В последнем случае машина никогда не остановится, и будет работать вечно. Таким образом, она неприменима ко второй записи на ленте.

2.18.3 Результаты и выводы:

В результате проведения практического занятия студент освоит основные понятия математической логики и теории алгоритмов, формальный язык логики, методы логического вывода и оценки сложности алгоритмов, научится применять язык математической логики для представления знаний о предметных областях, доказывать логическое следование формул с использованием метода резолюций, овладеет навыками анализа выполнимости и логической общезначимости формул логики высказываний; доказательства логического следования.