ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Направление подготовки (специальность):
27. 03. 04 Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:
« Системы и средства автоматизации технологических процессов»

Форма обучения: **очная**

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1. 1 Лекция №1 (2 часа).

Тема: «Понятие о случайной функции»

1.1.1 Вопросы лекции:

1. Два подхода к понятию о случайной функции, примеры случайных функций.

2. Основные виды задач в теории случайных функций.

3. Закон распределения случайной функции.

2. Краткое содержание вопросов:

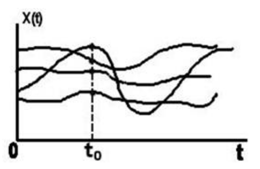
1. Два подхода к понятию о случайной функции, примеры случайных функций.

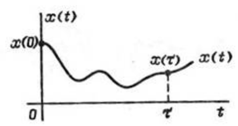
Случайным (стохастическим, вероятностным) процессом называется функция действительного переменного t, значениями которой являются соответствующие случайные величины X(t). В теории случайных процессов t трактуется как время, принимающее значения из некоторого подмножества T множества действительных чисел (tT, TR). В рамках классического математического анализа под функцией y=f(t) понимается такой тип зависимости переменных величин t и y, когда конкретному числовому значению аргумента t соответствует и притом единственное числовое значение функции y.

Для случайных процессов ситуация принципиально иная: задание конкретного аргумента t приводит к появлению случайной величины X(t) с известным законом распределения (если это дискретная случайная величина) или с заданной плотностью распределения (если это непрерывная случайная величина). Другими словами, исследуемая характеристика в каждый момент времени носит случайный характер с неслучайным распределением. Значения, которые принимает обычная функция y=f(t) в каждый момент времени, полностью определяет структуру и свойства этой функции.

Для случайных процессов дело обстоит иным образом: здесь совершенно не достаточно знать распределение случайной величины X(t) при каждом значении t, необходима информация об ожидаемых изменениях и их вероятностях, то есть информация о степени зависимости предстоящего значения случайного процесса от его предыстории.

Случайным процессом X(t) называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_o$ является случайной величиной $X(t_0)$. Случайная величина $X(t_o)$, в которую обращается с. п. при $t = t_0$, называется **сечением случайного процесса**, соответствующим данному значению аргумента t.





Реализацией случайного процесса X(t) называется неслучайная функция x(t), в которую превращается случайный процесс X(t) в результате опыта.

2. Основные виды задач в теории случайных функций.

В инженерных исследованиях решается два вида задач: задача анализа и синтеза. Задача анализа: известны характеристики входной функции и параметры системы, определить характеристики выходной функции. Задача синтеза: подобрать параметры системы так, чтобы функция на входе переходила в функцию на выходе с известными характеристиками.

3. Закон распределения случайной функции.

В рамках общего подхода к описанию случайных процессов характеристика сечений и любых их совокупностей осуществляется с помощью многомерных распределений. В частности, любое сечение характеризуется либо одномерной плотностью вероятности, либо одномерной функцией распределения $F(t; x)=P(X(t)\le x)$.

Взаимосвязь любой пары сечений характеризуется двумерной плотностью вероятности или двумерной функцией распределения $F(t_1; t_2; x_1; x_2)=P(X(t_1)\le x_1; X(t_2)\le x_2)$, где $t_{1,2}$-два фиксированных момента времени; $x_{1,2}$- возможные значения случайных величин, соответствующих этим сечениям. Аналогично вводятся плотности и функции распределения трёх и более сечений, однако для большого числа случайных процессов оказывается достаточным ограничиться одномерными и двумерными распределениями.

Наиболее общий подход в описании случайных процессов состоит в задании всех его многомерных распределений, когда определена вероятность одновременного выполнения следующих событий:
$t_1, t_2,\dots,t_n T,\ nN$: $X(t_i)\le x_i$; $i=1,2,\dots,n$;
$F(t_1;t_2;\dots;t_n;x_1;x_2;\dots;x_n)=P(X(t_1)\le x_1; X(t_2)\le x_2;\dots; X(t_n)\le x_n)$.
Такой способ описания случайных процессов универсален, но весьма громоздок.

Для получения существенных результатов выделяют наиболее важные частные случаи, допускающие применение более совершенного аналитического аппарата.

Если аргумент t принимает все действительные значения или все значения из некоторого интервала T действительной оси, то говорят о случайном процессе **с непрерывным временем**. Если t принимает только фиксированные значения, то говорят о случайном процессе **с дискретным временем**. Если сечение случайного процесса - дискретная случайная величина, то такой процесс называется **процессом с дискретными состояниями**. Если же любое сечение - непрерывная случайная величина, то случайный процесс называется **процессом с непрерывными состояниями**. В общем случае задать случайный процесс аналитически невозможно. Исключение составляют так называемые **элементарные случайные процессы**, вид которых известен.

1. 2 Лекция №2 (2 часа).

Тема: «Характеристики случайной функции»

1.2.1 Вопросы лекции:

1. Корреляционная теория случайной функции.

2. Математическое ожидание случайной функции, свойства.

3. Дисперсия случайной функции, свойства.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Корреляционная теория случайной функции.

Аппарат числовых характеристик представляет собой весьма гибкий и мощный аппарат, позволяющий сравнительно просто решать многие практические задачи. Совершенно аналогичным аппаратом пользуются и в теории случайных функций. Для случайных функций также вводятся простейшие основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин, и устанавливаются правила действий с этими характеристиками. Такой аппарат оказывается достаточным для решения многих практических задач.

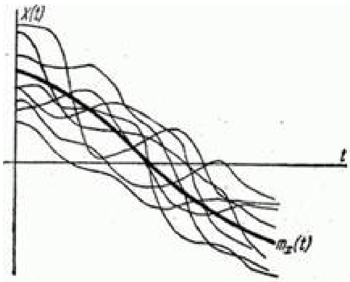
В отличие от числовых характеристик случайных величин, предоставляющих собой определённые числа, характеристики случайных функций представляют собой в общем случае не числа, а функции.

2. Математическое ожидание случайной функции, свойства.

Математическое ожидание случайной функции определяется следующим образом. Рассмотрим сечение случайной функции $X(t)$ при фиксированном t. В этом сечении мы имеем обычную случайную величину; определим ее математическое ожидание. Очевидно, в общем случае оно зависит от t, т. е. представляет собой некоторую функцию t: $m_x(t) = M[X(t)]$.

Таким образом, математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции.

По смыслу математическое ожидание случайной функции есть некоторая средняя функция, около которой различным образом варьируются конкретные реализации случайной функции.



3. Дисперсия случайной функции, свойства.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции: $D_x(t) = D[X(t)]$.

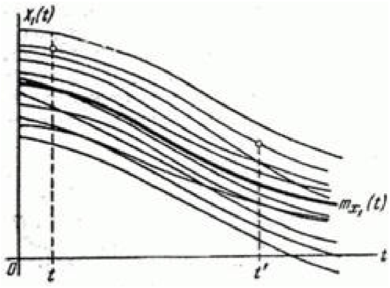
Дисперсия случайной функции при каждом t характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно среднего, иными словами, «степень случайности» случайной функции.

Очевидно, $D_x(t)$ есть неотрицательная функция. Извлекая из нее квадратный корень, получим функцию $\sigma_x(t)$ - среднее квадратическое отклонение случайной функции:

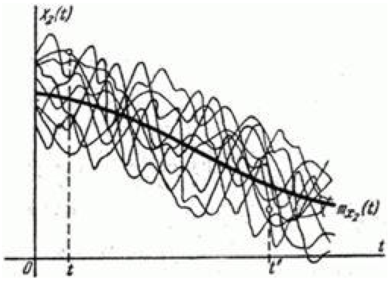
$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Математическое ожидание и дисперсия представляют собой весьма важные характеристики случайной функции; однако для описания основных особенностей случайной функции этих характеристик недостаточно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$, наглядно изображенные семействами реализаций на рис.

У случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ примерно одинаковые математические ожидания и дисперсии; однако характер этих случайных функций резко различен. Для случайной функции $X_1(t)$ характерно плавное, постепенное изменение.



Если, например, в точке t случайная функция $X_1(t)$ приняла значение, заметно превышающее среднее, то весьма вероятно, что и в точке t' она также примет значение больше среднего.



Для случайной функции $X_1(t)$ характерна ярко выраженная зависимость между ее значениями при различных t. Напротив, случайная функция $X_2(t)$ имеет резко колебательный характер с неправильными, беспорядочными колебаниями. Для такой случайной функции характерно быстрое затухание зависимости между ее значениями по мере увеличения расстояния по t между ними.

Очевидно, внутренняя структура обоих случайных процессов совершенно различна, но это различие не улавливается ни математическим ожиданием, ни дисперсией; для его описания необходимо вести специальную характеристику.

Эта характеристика называется корреляционной функцией (иначе - автокорреляционной функцией).

1. 3 Лекция №3 (2 часа).

Тема: «Характеристики случайной функции»

1.3.1 Вопросы лекции:

1. Корреляционная функция, свойства.
2. Нормированная корреляционная функция.
3. Взаимная корреляционная функция, свойства.

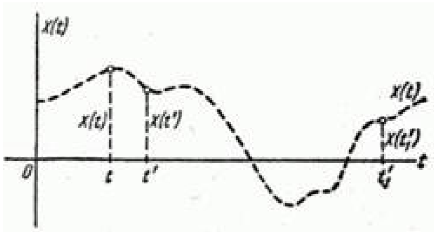
2. Краткое содержание вопросов:

1. Корреляционная функция, свойства.

Корреляционная функция характеризует степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к различным t.

Пусть имеется случайная функция $X(t)$; рассмотрим два ее сечения, относящихся к различным моментам: t и t', т. е. две случайные величины $X(t)$ и $X(t')$. Очевидно, что при близких значениях t и t' величины $X(t)$ и $X(t')$ связаны тесной зависимостью:

если величина $X(t)$ приняла какое-то значение, то и величина $X(t')$ с большой вероятностью примет значение, близкое к нему. Очевидно также, что при увеличении интервала между сечениями t, t' зависимость величин $X(t)$ и $X(t')$ вообще должна убывать.



Степень зависимости величин $X(t)$ и $X(t')$ может быть в значительной мере охарактеризована их корреляционным моментом; очевидно, он является функцией двух аргументов t и t'. Эта функция и называется корреляционной функцией.

Таким образом, корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t,t')$, которая при каждой паре значений t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t,t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')],$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$, $\overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m_x(t')$.

Вернёмся к примерам случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Мы видим теперь, что при одинаковых математических ожиданиях и дисперсиях случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ имеют совершенно различные корреляционные функции. Корреляционная функция случайной функции $X_1(t)$ медленно убывает по мере увеличения промежутка (t,t'); напротив, корреляционная функция случайной функции $X_2(t)$ быстро убывает с увеличением этого промежутка.

Выясним, во что обращается корреляционная функция $K_x(t,t')$, когда ее аргументы совпадают. Полагая $t' = t$, имеем:

$$K_x(t,t) = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2] = D_x(t),$$

т. е. при $t' = t$ корреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции.

Таким образом, необходимость в дисперсии как отдельной характеристике случайной функции отпадает: в качестве основных характеристик случайной функции достаточно рассматривать ее математическое ожидание и корреляционную функцию.

Так как корреляционный момент двух случайных величин $X(t)$ и $X(t')$ не зависит от последовательности, в которой эти величины рассматриваются, то корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, т. е. не меняется при перемене аргументов местами:

$$K_x(t,t') = K_x(t',t).$$

На практике, если требуется построить корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, обычно поступают следующим образом: задаются рядом равноотстоящих значений аргумента и строят корреляционную матрицу полученной системы случайных величин. Эта матрица есть не что иное, как таблица значений корреляционной функции для прямоугольной сетки значений аргументов на плоскости (t,t'). Далее, путем интерполирования или аппроксимации можно построить функцию двух аргументов $K_x(t,t')$.

2. Нормированная корреляционная функция.

Вместо корреляционной функции $K_x(t,t')$ можно пользоваться нормированной корреляционной функцией:

$$r_x(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')},$$

которая представляет собой коэффициент корреляции величин $X(t)$, $X(t')$. Нормированная корреляционная функция аналогична нормированной корреляционной матрице системы случайных величин. При $t' = t$ нормированная корреляционная функция равна единице:

$$r_x(t,t) = \frac{K_x(t,t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = \frac{D_x(t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = 1.$$

3. Взаимная корреляционная функция, свойства.

Выясним, как меняются основные характеристики случайной функции при элементарных операциях над нею: при прибавлении неслучайного слагаемого и при умножении на неслучайный множитель. Эти неслучайные слагаемые и множители могут быть как постоянными величинами, так в общем случае и функциями t.

Прибавим к случайной функции $X(t)$ неслучайное слагаемое $\varphi(t)$. Получим новую случайную функцию:

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t).$$

По теореме сложения математических ожиданий:

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t),$$

т. е. при прибавлении к случайной функции неслучайного слагаемого к ее математическому ожиданию прибавляется то же неслучайное слагаемое.

Определим корреляционную функцию случайной функции $Y(t)$:

$$\begin{aligned} K_y(t,t') &= M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] = M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = \\ &= M[(X(t) + \varphi(t) - m_x(t) - \varphi(t))(X(t') + \varphi(t') - m_x(t') - \varphi(t'))] = \\ &= M[(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))] = K_x(t,t'), \end{aligned}$$

т. е. от прибавления неслучайного слагаемого корреляционная функция случайной функции не меняется.

Умножим случайную функцию $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$:

$$Y(t) = \varphi(t)X(t).$$

Вынося неслучайную величину $\varphi(t)$ за знак математического ожидания, имеем:

$$m_y(t) = M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)m_x(t),$$

т. е. при умножении случайной функции на неслучайный множитель ее математическое ожидание умножается на тот же множитель.

Определяем корреляционную функцию:

$$K_y(t,t') = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] = M[(Y(t)-m_y(t))(Y(t')-m_y(t'))] =$$
$$= M[\varphi(t)\varphi(t')(X(t)-m_x(t))(X(t')-m_x(t'))] = \varphi(t)\varphi(t')K_x(t,t'),$$

т. е. при умножении случайной функции на неслучайную функцию $\varphi(t)$ ее корреляционная функция умножается на $\varphi(t)\varphi(t')$.

В частности, когда $\varphi(t) = c$ (не зависит от t), корреляционная функция умножается на c^2.

Пользуясь выведенными свойствами характеристик случайных функций, можно в ряде случаев значительно упростить операции с ними. В частности, когда требуется исследовать корреляционную функцию или дисперсию случайной функции, можно заранее перейти от нее к так называемой центрированной функции: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$

Математическое ожидание центрированной функции тождественно равно нулю, а ее корреляционная функция совпадает с корреляционной функцией случайной функции $X(t)$: $K_{\overset{\circ}{x}}(t,t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] = K_x(t,t')$.

При исследовании вопросов, связанных с корреляционными свойствами случайных функций, мы в дальнейшем всегда будем переходить от случайных функций к соответствующим центрированным функциям, отмечая это значком $^\circ$ вверху знака функции.

Иногда, кроме центрирования, применяется еще нормирование случайных функций. Нормированной называется случайная функция вида:

$$X_N(t) = \frac{\overset{\circ}{X}(t)}{\sigma_x(t)}.$$

Корреляционная функция нормированной случайной функции $X_N(t)$ равна

$$K_{x_N}(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')} = r_x(t,t'),$$

а ее дисперсия равна единице.

1. 4 Лекция №4 (2 часа).

Тема: «Динамическая система. Оператор динамической системы»

1.4.1 Вопросы лекции:

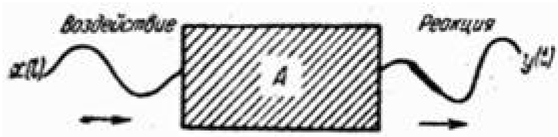
1. Понятие динамической системы, примеры.
2. Понятие оператора динамической системы, примеры.
3. Виды линейных операторов, примеры.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Понятие динамической системы, примеры.

Имеется некоторая динамическая система A; под «динамической системой» мы понимаем любой прибор, прицел, счетно-решающий механизм, систему автоматического управления и т. п. Эта система может быть механической, электрической или содержать любые другие элементы. Работу системы будем представлять себе следующим образом: на вход системы непрерывно поступают какие-то входные данные; система перерабатывает их и непрерывно выдает некоторый результат. Условимся называть поступающие на вход системы данные: «воздействием», а выдаваемый результат «реакцией» системы на это воздействие.

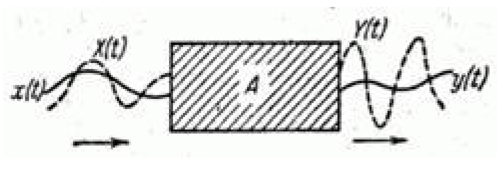
Рассмотрим самый простой случай: когда на вход системы A подается только одно воздействие, представляющее собой функцию времени $x(t)$: реакция системы на это воздействие есть другая функция времени $y(t)$. Схема работы системы A условно изображена на рис.



Будем говорить, что система A осуществляет над входным воздействием некоторое преобразование, в результате которого функция $x(t)$ преобразуется в другую функцию $y(t)$.

Преобразование A может быть любого вида и любой сложности. В наиболее простых случаях это, например, умножение на заданный множитель (усилители, множительные механизмы), дифференцирование или интегрирование (дифференцирующие или интегрирующие устройства). Однако на практике системы, осуществляющие в чистом виде такие простейшие преобразования, почти не встречаются; как правило, работа системы описывается дифференциальными уравнениями, и преобразование A сводится к решению дифференциального уравнения, связывающего воздействие $x(t)$ с реакцией $y(t)$.

При исследовании динамической системы в первую очередь решается основная задача: по заданному воздействию $x(t)$ определить реакцию системы $y(t)$. Однако для полного исследования системы и оценки ее технических качеств такой элементарный подход является недостаточным. В действительности воздействие $x(t)$ никогда не поступает на вход системы в чистом виде: оно всегда искажено некоторыми случайными ошибками (возмущениями), в результате которых на систему фактически воздействует не заданная функция $x(t)$, а случайная функция $X(t)$; соответственно этому система вырабатывает в качестве реакции случайную функцию $Y(t)$, также отличающуюся от теоретической реакции $y(t)$.



Естественно возникает вопрос: насколько велики будут случайные искажения реакции системы при наличии случайных возмущений на ее входе? И далее: как следует выбрать параметры системы для того, чтобы эти искажения были минимальными?

Из двух поставленных выше задач, естественно, более простой является первая - прямая - задача. Сформулируем ее следующим образом.

На вход динамической системы A поступает случайная функция $X(t)$; система подвергает ее известному преобразованию, в результате чего на выходе системы появляется, случайная функция:

$$Y(t) = A\{X(t)\}.$$

Известны характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание и корреляционная функция. Требуется найти аналогичные характеристики случайной функции $Y(t)$. Короче: по заданным характеристикам случайной функции на входе динамической системы найти характеристики случайной функции на выходе.

Поставленная задача может быть решена совершенно точно в одном частном, но весьма важном для практики случае: когда преобразование A принадлежит к классу так называемых линейных преобразований и соответственно система A принадлежит к классу линейных систем.

2. Понятие оператора динамической системы, примеры.

Понятие оператора является обобщением понятия функции. Когда мы устанавливаем функциональную связь между двумя переменными y и x и пишем:

$$y = f(x).$$

то под символом f мы понимаем правило, по которому заданному значению x приводится в соответствие вполне определенное значение y. Знак f есть символ некоторого преобразования, которому нужно подвергнуть величину x, чтобы получить y. Соответственно виду этого преобразования функции могут быть линейными и нелинейными, алгебраическими, трансцендентными и т. д.

Аналогичные понятия и соответствующая символика применяются в математике и в тех случаях, когда преобразованию подвергаются не величины, а функции. Рассмотрим некоторую функцию $x(t)$ и установим определенное правило A, согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в другую функцию $y(t)$. Запишем это преобразование в следующем виде:

$$y(t) = A\{x(t)\}.$$

Правило A, согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в функцию $y(t)$, мы будем называть оператором; например, мы будем говорить: оператор дифференцирования, оператор интегрирования, оператор решения дифференциального уравнения и т. д.

Если динамическая система преобразует поступающую на ее вход функцию $x(t)$ в функцию $y(t)$:

$$y(t) = A\{x(t)\},$$

то оператор A называется оператором динамической системы.

В более общем случае на вход системы поступает не одна, а несколько функций; равным образом на выходе системы могут появляться несколько функций; в этом случае оператор системы преобразует одну совокупность функций в другую. Однако в целях простоты изложения мы рассмотрим здесь лишь наиболее элементарный случай преобразования одной функции в другую.

3. Виды линейных операторов, примеры.

Преобразования или операторы, применяемые к функциям, могут быть различных типов. Наиболее важным для практики является класс так называемых линейных операторов. Оператор L называется линейным однородным, если он обладает следующими свойствами:

1) к сумме функций оператор может применяться почленно:

$$L\{x_1(t) + x_2(t)\} = L\{x_1(t)\} + L\{x_2(t)\};$$

2) постоянную величину c можно выносить за знак оператора:

$$L\{cx(t)\} = cL\{x(t)\}.$$

Из второго свойства между прочим, следует, что для линейного однородного оператора справедливо свойство

$$L\{0\} = 0,$$

т. е. при нулевом входном воздействии реакция системы равна нулю.
Примеры линейных однородных операторов:
1) оператор дифференцирования:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt};$$

2) оператор интегрирования:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau;$$

3) оператор умножения на определенную функцию $\varphi(t)$:

$$y(t) = \varphi(t)x(t),$$

и т. д.

Кроме линейных однородных операторов, существуют еще линейные неоднородные операторы. Оператор L называется линейным неоднородным, если он состоит из линейного однородного оператора с прибавлением некоторой вполне определенной функции $\varphi(t)$:

$$L\{x(t)\} = L_0\{x(t)\} + \varphi(t),$$

где L_0 - линейный однородный оператор.
Примеры линейных неоднородных операторов:

1) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} + \varphi(t)$,

2) $y(t) = \displaystyle\int_0^t x(\tau)\varphi(\tau)d\tau + \varphi_1(t)$,

3) $y(t) = \varphi_1(t)x(t) + \varphi_2(t)$.

где $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ - вполне определённые функции, а $x(t)$ - преобразуемая оператором функция.

Оператор дифференцирования часто обозначают буквой p: $p = \dfrac{d}{dt}$, помещаемой в виде множителя перед выражением, подлежащим дифференцированию. При этом запись

$$y(t) = px(t) \text{ равносильна записи } y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Двойное дифференцирование обозначается множителем p^2:

$$p^2 x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \text{ и т. д.}$$

Встречающиеся в технике динамические системы часто описываются линейными дифференциальными уравнениями. В этом случае, как нетрудно убедиться, оператор системы является линейным. Динамическая система, оператор которой является линейным, называется линейной динамической системой.

В противоположность линейным операторам и системам рассматриваются системы и операторы нелинейные. Примерами нелинейных операторов могут служить

$$y(t) = x^2(t), \quad y(t) = \int_0^t x^3(\tau)d\tau, \quad y(t) = \sin x(t),$$

а также решение нелинейного дифференциального уравнения, хотя бы

$$y'(t) + \alpha \cos y(t) = x(t).$$

Динамическая система, оператор которой не является линейным, называется нелинейной системой.

На практике линейные системы встречаются очень часто. В связи с линейностью этих систем к анализу их ошибок может быть с большой эффективностью применен аппарат теории случайных функций. Еще чаще, чем линейные системы, на практике встречаются системы не строго линейные, но в известных пределах допускающие линеаризацию.

1. 5 Лекция №5 (2 часа).

Тема: «Линейные преобразования случайной функции»

1.5.1 Вопросы лекции:

1. Постановка задачи.
2. Линейный оператор интегрирования.
3. Линейный оператор дифференцирования.
4. Сложение случайных функций.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Постановка задачи.

Пусть на вход линейной системы с оператором L воздействует случайная функция $X(t)$, причем известны ее характеристики: математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция $K_x(t,t')$. Реакция системы представляет собой случайную функцию $Y(t) = L\{X(t)\}$.

Требуется найти характеристики случайной функции $Y(t)$ на выходе системы: $m_y(t)$ и $K_y(t,t')$. Короче: по характеристикам случайной функции на входе линейной системы найти характеристики случайной функции на выходе.

Покажем сначала, что можно ограничиться решением этой задачи только для однородного оператора L. Действительно, пусть оператор L неоднороден и выражается формулой $L\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + \varphi(t)$,

где L_0 - линейный однородный оператор, $\varphi(t)$ - определенная неслучайная функция. Тогда

$$m_y(t) = M\left[L_0\{X(t)\}\right] + \varphi(t),$$

т. е. функция $\varphi(t)$ просто прибавляется к математическому ожиданию случайной функции на выходе линейной системы. Что же касается корреляционной функции, то, как известно, она не меняется от прибавления к случайной функции неслучайного слагаемого. Поэтому в дальнейшем изложении под «линейными операторами» будем разуметь только линейные однородные операторы. Решим задачу об определении характеристик на выходе линейной системы сначала для некоторых частных видов линейных операторов.

2. Линейный оператор интегрирования.

Дана случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t,t')$. Случайная функция $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейным однородным оператором интегрирования:

$$Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau .$$

Требуется найти характеристики случайной функции $Y(t)$, $m_x(t)$ и $K_x(t,t')$.

Представим интеграл как предел суммы:

$$Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i X(\tau_i)\Delta\tau$$

и применим к равенству операцию математического ожидания. По теореме сложения математических ожиданий имеем:

$$m_y(t)=M[Y(t)]=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i M[X(\tau_i)]\Delta\tau=$$

$$=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i m_x(\tau_i)\Delta\tau=\int_0^t m_x(\tau)d\tau .$$

Итак,

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(\tau)d\tau .$$

т. е. математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания. Иными словами: операцию интегрирования и операцию математического ожидания можно менять местами. Это и естественно, так как операция интегрирования по своей природе не отличается от операции суммирования, которую, как мы раньше убедились, можно менять местами с операцией математического ожидания.

Найдём корреляционную функцию $K_y(t,t')$. Для этого перейдём к центрированным случайным функциям:

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t),\quad \overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\int_0^t \overset{\circ}{X}(\tau)d\tau .$$

По определению корреляционной функции,

$$K_y(t,t')=M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')],$$

где

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\int_0^t \overset{\circ}{X}(\tau)d\tau;\quad \overset{\circ}{Y}(t')=\int_0^{t'} \overset{\circ}{X}(\tau')d\tau' .$$

Нетрудно убедиться, что произведение двух интегралов в правой части формулы равно двойному интегралу.

Следовательно,

$$\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t') = \int\limits_0^t\int\limits_0^{t'} \overset{\circ}{X}(\tau)\overset{\circ}{X}(\tau')d\tau d\tau'.$$

Применяя к равенству операцию математического оживления и меняя ее в правой части местами с операцией интегрирования, получим:

$$K_y(t,t') = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] = \int\limits_0^t\int\limits_0^{t'} M[\overset{\circ}{X}(\tau)\overset{\circ}{X}(\tau')]d\tau d\tau',$$

или окончательно:

$$K_y(t,t') = \int\limits_0^t\int\limits_0^{t'} K_x(\tau,\tau')d\tau d\tau'.$$

Таким образом, для того чтобы найти корреляционную функцию интеграла от случайной функции, нужно дважды проинтегрировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем - по другому.

3. Линейный оператор дифференцирования.

Дана случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t,t')$. Случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ линейным однородным оператором дифференцирования:

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

Требуется найти $m_y(t)$ и $K_y(t,t')$.

Представим производную в виде предела: $Y(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$.

Применяя к равенству операцию математического ожидания, получим:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_x(t+\Delta t)-m_x(t)}{\Delta t} = \frac{dm_x(t)}{dt}.$$

Итак,

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt},$$

т. е. математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания.

Следовательно, операцию дифференцирования, как и операцию интегрирования тоже можно менять местами с операцией математического ожидания.

Для определения $K_y(t,t')$ перейдём к центрированным случайным функциям $\overset{\circ}{Y}(t)$ и $\overset{\circ}{X}(t)$; очевидно: $\overset{\circ}{Y}(t) = \dfrac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}$.

По определению

$$K_y(t,t') = M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')].$$

Подставим вместо $\overset{\circ}{Y}(t)$ и $\overset{\circ}{Y}(t')$ их выражения:

$$K_y(t,t') = M\left[\frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}\frac{d\overset{\circ}{X}(t')}{dt'}\right].$$

Мы доказали, что математическое ожидание производной случайной функции равно производной от математического ожидания, т. е. знаки дифференцирования и математического ожидания можно менять местами. Следовательно,

$$K_y(t,t') = M\left[\frac{\partial^2 \overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')}{\partial t\partial t'}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] = \frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}K_x(t,t').$$

Таким образом,

$$K_y(t,t') = \frac{\partial^2 K_x(t,t')}{\partial t\partial t'}.$$

Итак, чтобы найти корреляционную функцию производной, нужно дважды продифференцировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем - по другому.

Можно доказать, что такое правило является общим для всех линейных однородных операторов: **если случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t,t')$ преобразуется линейным однородным оператором L в случайную функцию,**

$$Y(t) = L\{X(t)\},$$

то для нахождения математического ожидания случайной функции $Y(t)$ нужно применить тот же оператор к математическому ожиданию случайной функции $X(t)$:

$$m_y(t) = L\{m_x(t)\},$$

а для нахождения корреляционной функции нужно дважды применить тот же оператор к корреляционной функции случайной функции $X(t)$, сначала по одному аргументу, затем - по другому:

$$K_y(t,t') = L^{(t)}L^{(t')}\{K_y(t,t')\}.$$

Во многих задачах практики нас, в конечном счёте, интересует не корреляционная функция $K_y(t,t')$ на выходе линейной системы, а дисперсия $D_y(t)$ характеризующая точность работы системы в условиях наличия случайных возмущений.

Дисперсию $D_y(t)$ можно найти, зная корреляционную функцию:

$$D_y(t) = K_y(t,t).$$

При этом нужно подчеркнуть, что, как правило, для определения дисперсии на выходе линейной системы недостаточно знать дисперсию на ее входе, а существенно важно знать корреляционную функцию.

Действительно, линейная система может совершенно по-разному реагировать на случайные возмущения, поступающие на ее вход, в зависимости от того, какова внутренняя структура этих случайных возмущений; состоят ли они, например, по преимуществу из высокочастотных или низкочастотных колебаний.

Внутренняя же структура случайного процесса описывается не его дисперсией, а корреляционной функцией.

4. Сложение случайных функций.

Во многих задачах практики мы встречаемся с тем, что на вход динамической системы поступает не одна случайная функция $X(t)$, а две или более случайные функции, каждая из которых связана с действием отдельного возмущающего фактора. Возникает задача сложения случайных функций, точнее - задача определения характеристик суммы по характеристикам слагаемых.

Эта задача решается элементарно просто, если две складываемые случайные функции независимы (точнее, некоррелированные) между собой. В общем же случае для ее решения необходимо знание еще одной характеристики - так называемой взаимной корреляционной функции (иначе - корреляционной функции связи).

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t', которая при каждой паре значений t,t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции $X(t)$ и случайной функции $Y(t)$:

$$R_{xy}(t,t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')].$$

Взаимная корреляционная функция, так же как и обычная корреляционная функция, не изменяется при прибавлении к случайным функциям любых неслучайных слагаемых, а следовательно, и при центрировании случайных функций. Из определения взаимной корреляционной функции вытекает следующее ее свойство:

$$R_{xy}(t,t') = R_{xy}(t',t).$$

Вместо функции $R_{xy}(t,t')$ часто пользуются нормированной взаимной корреляционной функцией:

$$r_{xy}(t,t') = \frac{R_{xy}(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_y(t')}.$$

Если взаимная корреляционная функция равна нулю при всех значениях t,t', то случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются некоррелированными (несвязанными).

Зная математические ожидания и корреляционные функции двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, а также их взаимную корреляционную функцию, можно найти характеристики суммы этих двух случайных функций:

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

По теореме сложения математических ожиданий: $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)$,
т. е. при сложении двух случайных функций их математические ожидания складываются.

Для определения корреляционной функции $K_x(t,t')$ перейдём к центрированным случайным функциям $\overset{\circ}{Z}(t)$, $\overset{\circ}{X}(t)$, $\overset{\circ}{Y}(t)$. Очевидно,

$$\overset{\circ}{Z}(t) = \overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t).$$

По определению корреляционной функции

$$K_z(t,t') = M[\overset{\circ}{Z}(t)\overset{\circ}{Z}(t')] = M[(\overset{\circ}{X}(t)+\overset{\circ}{Y}(t))(\overset{\circ}{X}(t')+\overset{\circ}{Y}(t'))] =$$

$$= M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] + M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] + M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')] + M[\overset{\circ}{X}(t')\overset{\circ}{Y}(t)],$$

или

$$K_z(t,t') = K_z(t,t') + K_y(t,t') + R_{xy}(t,t') + R_{xy}(t',t).$$

В случае, когда случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированные, $R_{xy}(t,t') \equiv 0$, и формула принимает вид:

$$K_z(t,t') = K_x(t,t') + K_y(t,t'),$$

т. е. при сложении некоррелированных случайных функций их корреляционные функции складываются. Выведенные формулы могут быть обобщены на случай произвольного числа слагаемых.

1.6 Лекция № 6 (2 часа)

Тема: «Стационарный случайный процесс»

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Понятие случайного процесса, примеры, виды.

2. Стационарный случайный процесс: особенности и характеристики.

3. Преобразование стационарного случайного процесса стационарной линейной системой.

2. Краткое содержание вопросов:

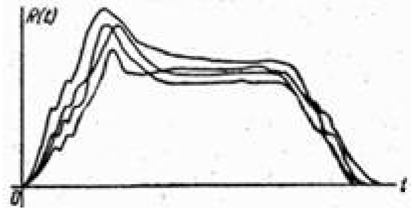
1. Понятие случайного процесса, примеры, виды.

На практике очень часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причём ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются стационарными. В качестве примеров стационарных случайных процессов можно привести: 1) колебания самолёта на установившемся режиме горизонтального полёта; 2) колебания напряжения в электрической осветительной сети; 3) случайные шумы в радиоприёмнике; 4) процесс качки корабля и т. п.

Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во времени неопределённо долго; при исследовании стационарного процесса в качестве начала отсчёта можно выбрать любой момент времени. Исследуя стационарный процесс на любом участке времени, мы должны получить одни и те же его характеристики. Образно выражаясь, стационарный процесс «не имеет ни начала, ни конца».

В противоположность стационарным случайным процессам можно указать другие, явно нестационарные случайные процессы, например: колебания самолета в режиме пикирования; процесс затухающих колебаний в электрической цепи; процесс горения порохового заряда в реактивной камере. Нестационарный процесс характерен тем, что он имеет определённую тенденцию развития во времени; характеристики такого процесса зависят от начала отсчёта, зависят от времени.

На рис. изображено семейство реализаций явно нестационарного случайного процесса - процесса изменения тяги двигателя реактивного снаряда во времени.



Заметим, что далеко не все нестационарные случайные процессы являются существенно нестационарными на всем протяжении своего развития. Существуют нестационарные процессы, которые (на известных отрезках времени и с известным приближением) могут быть приняты за стационарные.

Вообще, как правило, случайный процесс в любой динамической системе начинается с нестационарной стадии - с так называемого «переходного процесса». После затухания переходного процесса система обычно переходит на установившийся режим, и тогда случайные процессы, протекающие в ней, могут считаться стационарными.

2. Стационарный случайный процесс: особенности и характеристики.

Стационарные случайные процессы очень часто встречаются в физических и технических задачах. По своей природе эти процессы проще, чем нестационарные, и описываются более простыми характеристиками. Линейные преобразования стационарных случайных процессов также обычно осуществляются проще, чем нестационарных.

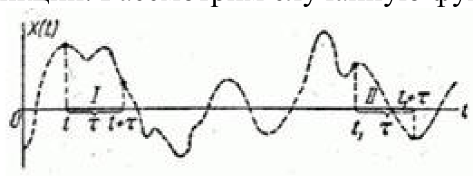
Так как изменение стационарной случайной функции должно протекать однородно по времени, то естественно потребовать, чтобы для стационарной случайной функции математическое ожидание было постоянным:

$$m_x(t) = m_x = \text{const}.$$

Заметим, однако, что это требование не является существенным: мы знаем, что от случайной функции $X(t)$ всегда можно перейти к центрированной случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, для которой математическое ожидание тождественно равно нулю и, следовательно, удовлетворяет условию. Таким образом, если случайный процесс нестационарен только за счёт переменного математического ожидания, это не мешает нам изучать его как стационарный процесс. Второе условие, которому, очевидно, должна удовлетворять стационарная случайная функция, - это условие постоянства дисперсии:

$$D_x(t) = D_x = \text{const}.$$

Установим, какому условию должна удовлетворять корреляционная функция стационарной случайной функции. Рассмотрим случайную функцию $X(t)$



Положим в выражении $K_x(t,t')$ $t' = t + \tau$ и рассмотрим $K_x(t, t+\tau)$ - корреляционный момент двух сечений случайной функции, разделённых интервалом времени τ. Очевидно, если случайный процесс $X(t)$ действительно стационарен, то этот корреляционный момент не должен зависеть от того, где именно на оси Ot мы взяли участок τ, а должен зависеть только от длины этого участка. Вообще, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна зависеть не от положения t первого аргумента на оси абсцисс, а только от промежутка τ между первым и вторым аргументами:

$$K_x(t, t+\tau) = k_x(\tau).$$

Следовательно, корреляционная функция стационарного случайного процесса есть функция не двух, а всего одного аргумента. Это обстоятельство в ряде случаев сильно упрощает операции над стационарными случайными функциями.

Заметим, что условие, требующее от стационарной случайной функции постоянства дисперсии, является частным случаем.

$$D_x(t) = K_x(t,t) = k_x(0) = \text{const}\ .$$

Таким образом, условие есть единственное существенное условие, которому должна удовлетворять стационарная случайная функция. Поэтому в дальнейшем мы под стационарной случайной функцией будем понимать такую случайную функцию, корреляционная функция которой зависит не от обоих своих аргументов t и t', а только от разности τ между ними. Чтобы не накладывать специальных условий на математическое ожидание, мы будем рассматривать только центрированные случайные функции.

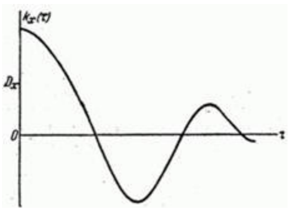
Мы знаем, что корреляционная функция любой случайной функции обладает свойством симметрии:

$$K_x(t,t') = K_x(t',t)\ .$$

Отсюда для стационарного процесса, полагая $t'-t=\tau$,

имеем: $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$,

т. е. корреляционная функция $k_x(\tau)$ есть чётная функция своего аргумента. Поэтому обычно корреляционную функцию определяют только для положительных значений аргумента.



На практике, вместо корреляционной функции $k_x(\tau)$, часто пользуются нормированной корреляционной функцией

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x}\ ,$$

где $D_x = k_x(0)$ - постоянная дисперсия стационарного процесса.

1.7 Лекция № 7 (2 часа)

Тема: «Стационарный случайный процесс с эргодическим свойством»

1.7.1 Вопросы лекции:

1. Стационарный процесс с эргодическим свойством и без него, примеры.

2. Характеристики стационарного процесса с эргодическим свойством.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Стационарный процесс с эргодическим свойством и без него, примеры.

Рассмотрим некоторую стационарную случайную функцию $X(t)$ и предположим, что требуется оценить ее характеристики: математическое ожидание m_x и корреляционную функцию $k_x(\tau)$.

Для этого нужно располагать известным числом реализаций случайной функции $X(t)$. Обрабатывая эти реализации, можно найти оценки для математического ожидания $\tilde{m}_x(t)$ и корреляционной функции $\tilde{K}_x(t,t')$. В связи с ограниченностью числа наблюдений функция $\tilde{m}_x(t)$ не будет строго постоянной; ее придется усреднить и заменить некоторым постоянным $\tilde{m}_x$; аналогично, усредняя значения $\tilde{K}_x(t,t')$ для разных $\tau = t' - t$, получим корреляционную функцию $\tilde{k}_x(\tau)$.

Этот метод обработки, очевидно, является довольно сложным и громоздким. Естественно возникает вопрос: нельзя ли для стационарной случайной функции этот сложный, двухступенчатый процесс обработки заменить более простым, который заранее базируется на предположении, что математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция - от начала отсчета?

Кроме того, возникает вопрос: при обработке наблюдений над стационарной случайной функцией является ли существенно необходимым располагать несколькими реализациями? Поскольку случайный процесс является стационарным и протекает однородно по времени, естественно предположить, что одна-единственная реализация достаточной продолжительности может служить достаточным опытным материалом для получения характеристик случайной функции. При более подробном рассмотрении этого вопроса оказывается, что такая возможность существует не для всех случайных процессов: не всегда одна реализация достаточной продолжительности оказывается эквивалентной множеству отдельных реализаций.

Для примера рассмотрим две стационарные случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$, представленные совокупностью своих реализаций на рис. 1 и 2.

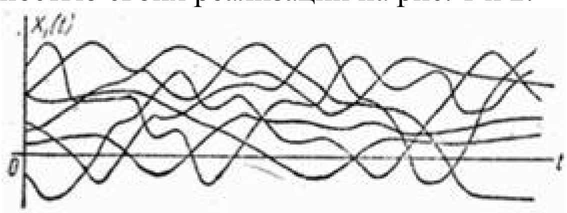


Рис. 1.

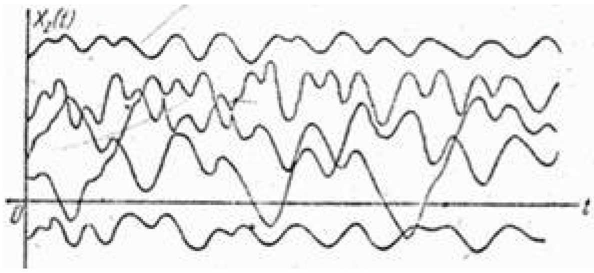


Рис.2.

Для случайной функции $X_1(t)$ характерна следующая особенность: каждая из ее реализаций обладает одними и теми же характерными признаками: средним значением, вокруг которого происходят колебания, и средним размахом этих колебаний. Выберем произвольно одну из таких реализаций и продолжим мысленно опыт, в результате которого она получена, на некоторый участок времени T.

Очевидно, что при достаточно большом T, эта реализация сможет дать нам хорошее представление о свойствах случайной функции в целом.

В частности, усредняя значения этой реализации вдоль оси абсцисс - по времени, мы должны получить приближенное значение математического ожидания случайной функции; усредняя квадраты отклонений от этого среднего, мы должны получить приближенное значение дисперсии, и т. д.

Про такую случайную функцию говорят, что она обладает эргодическим свойством. Эргодическое свойство состоит в том, что каждая отдельная реализация случайной функции является как бы «полномочным представителем» всей совокупности возможных реализаций; одна реализация достаточной продолжительности может заменить при обработке множество реализаций той же общей продолжительности.

Рассмотрим теперь случайную функцию $X_2(t)$. Выберем произвольно одну из ее реализаций, продолжим ее мысленно на достаточно большой участок времени и вычислим ее среднее значение по времени на всем участке наблюдения. Очевидно, это среднее значение для каждой реализации будет свое и может существенно отличаться от математического ожидания случайной функции, построенного как среднее из множества реализаций. Про такую случайную функцию говорят, что она не обладает эргодическим свойством.

Если случайная функция $X(t)$ обладает эргодическим свойством, то для неё среднее по времени (на достаточно большом участке наблюдения) приближённо равно среднему по множеству наблюдений.

То же будет верно и для $X^2(t)$, $X(t) \cdot X(t+\tau)$ и т. д. Следовательно, все характеристики случайной функции (математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию) можно будет приближённо определять по одной достаточно длинной реализации.

Какие же стационарные случайные функции обладают, а какие не обладают эргодическим свойством?

2. Характеристики стационарного процесса с эргодическим свойством.

Пусть для случайного процесса характерно то, что он как бы «разложим» на более элементарные случайные процессы; каждый из них осуществляется с некоторой вероятностью и имеет свои индивидуальные характеристики. Таким образом, разложимость, внутренняя неоднородность случайного процесса, протекающего с некоторой вероятностью по тому или другому типу, есть физическая причина неэргодичности этого процесса.

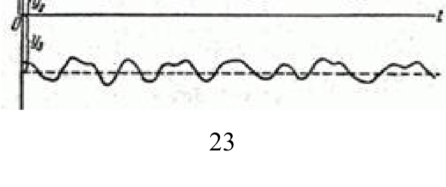
В частности, неэргодичность случайного процесса может быть связана с наличием в его составе слагаемого в виде обычной случайной величины (т. е. наличие в спектре случайного процесса, помимо непрерывной части, конечной дисперсии при частоте 0).

Действительно, рассмотрим случайную функцию $Z(t) = X(t) + Y$,

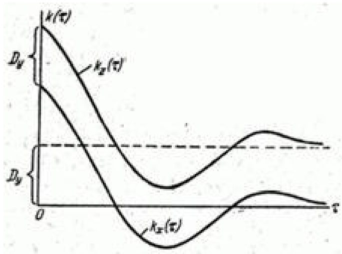
где $X(t)$ - эргодическая стационарная случайная функция с характеристиками m_x, $k_x(\tau)$; Y - случайная величина с характеристиками m_y и D_y; предположим к тому же, что $X(t)$ и Y некоррелированные. Определим характеристики случайной функции $Z(t)$. Согласно общим правилам сложения случайных функций имеем:

$$m_z = m_x + m_y, \qquad k_z(\tau) = k_x(\tau) + D_y.$$

Из формул видно, что случайная функция $Z(t)$ является стационарной. Но обладает ли она эргодическим свойством? Очевидно, нет. Каждая ее реализация будет по характеру отличаться от других, будет обладать тем или иным средним по времени значением в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина Y.



Об эргодичности или неэргодичности случайного процесса может непосредственно свидетельствовать вид его корреляционной функции. Действительно, рассмотрим корреляционную функцию неэргодической случайной функции. Она отличается от корреляционной функции случайной функции $X(t)$ наличием постоянного слагаемого D_y.



В то время как корреляционная функция $k_x(\tau)$ стремится к нулю при $\tau \to \infty$ (корреляционная связь между значениями случайной функции неограниченно убывает по мере увеличения расстояния между ними), функция $k_x(\tau)$ уже не стремится к нулю при $t \to \infty$, а приближается к постоянному значению D_y.

На практике мы не имеем возможности исследовать случайный процесс и его корреляционную функцию на бесконечном участке времени; участок значений τ, с которым мы имеем дело, всегда ограничен.

Пусть корреляционная функция стационарного случайного процесса при увеличении τ не убывает, а, начиная с некоторого τ, остается приблизительно постоянной. Это обычно есть признак того, что в составе случайной функции имеется слагаемое в виде обычной случайной величины и что процесс не является эргодическим. Стремление же корреляционной функции к нулю при $t \to \infty$ говорит в пользу эргодичности процесса. Во всяком случае, оно достаточно для того, чтобы математическое ожидание функции можно было определять как среднее по времени.

1.8 Лекция № 8 (2 часа)

Тема: «Определение характеристик эргодических стационарных случайных функций из опыта»

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Оценки характеристик стационарной эргодической функции по опытным данным: виды, качество.

2. Методика получения оценок, примеры.

3. Сравнительный анализ результатов оценивания.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Оценки характеристик стационарной эргодической функции по опытным данным: виды, качество.

Рассмотрим стационарную случайную функцию $X(t)$, обладающую эргодическим свойством, и предположим, что в нашем распоряжении имеется всего одна реализация этой случайной функции, но зато на достаточно большом участке времени T. Для эргодической стационарной случайной функции одна реализация достаточно большой продолжительности практически эквивалентна (в смысле объема сведений о случайной функции) множеству реализаций той же общей продолжительности; характеристики случайной функции могут быть приближенно определены не как средние по множеству наблюдений, а как средние по времени t. В частности, при достаточно большом T математическое ожидание m_x может быть приближённо вычислено по формуле

$$m_x \approx \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$
.

Аналогично может быть приближённо найдена корреляционная функция $k_x(\tau)$ при любом τ. Действительно, корреляционная функция, по определению, представляет собой не что иное, как математическое ожидание случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)$:

$$k_x(\tau) = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)]$$

Это математическое ожидание также, очевидно, может быть приближённо вычислено как среднее по времени. Фиксируем некоторое значение τ и вычислим указанным способом корреляционную функцию $k_x(\tau)$. Для этого удобно предварительно «центрировать» данную реализацию $x(t)$: $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x$.

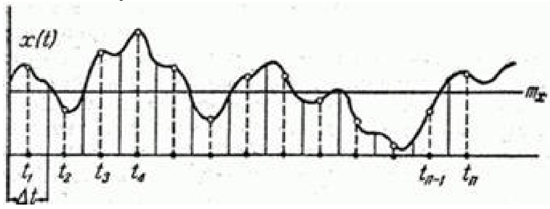
2. Методика получения оценок, примеры.

Вычислим при заданном τ математическое ожидание случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)$ как среднее по времени. При этом, очевидно, нам придётся учитывать не весь участок времени от 0 до T, а несколько меньший, так как второй сомножитель $\overset{\circ}{X}(t+\tau)$ известен нам не для всех t, а только для тех, для которых $t+\tau \le T$. Вычисляя среднее по времени указанным выше способом, получим:

$$k_x(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)dt$$
.

Вычислив интеграл для ряда значений τ, можно приближённо воспроизвести по точкам весь ход корреляционной функции.

На практике обычно интегралы заменяют конечными суммами. Покажем, как это делается. Разобьём интервал записи случайной функции на n равных частей длиной Δt и обозначим середины полученных участков $t_1, t_2, \ldots, t_n$.



.

Предоставим интеграл как сумму интегралов по элементарным участкам Δt и на каждом из них вынесем функцию $x(t)$ из-под знака интеграла средним значением, соответствующим центру интервала $x(t_i)$. Получим приближённо:

$$m_x = \frac{1}{T}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_i)$$,или $$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_i)$$.

Аналогично можно вычислить корреляционную функцию для значений τ, равных $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$.

Придадим, например, величине τ значение $\tau = m\Delta t = \frac{mT}{n}$

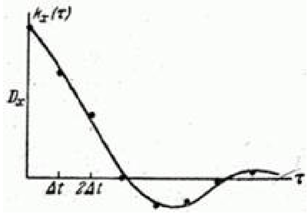
вычислим интеграл, деля интервал интегрирования $T - \tau = T - \frac{mT}{n} = \frac{n-m}{n}T$

на $n - m$ равных участков длиной Δt и выносоя на каждом из них функцию $\overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)$ за знак интеграла средним значением. Получим:

$$k_x\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m} \overset{\circ}{x}(t_i)\,\overset{\circ}{x}(t_{i+m})$$.

Вычисление корреляционной функции производят для $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно. Вплоть до таких значений m, при которых корреляционная функция становится практически равной нулю или начинает совершать небольшие нерегулярные колебания около нуля.

Общий ход функции $k_x(\tau)$ воспроизводится по отдельным точкам.



3. Сравнительный анализ результатов оценивания.

Для того чтобы математическое ожидание m_x и корреляционная функция $k_x(\tau)$ были определены с удовлетворительной точностью, нужно, чтобы число точек n было достаточно велико (порядка сотни, а в некоторых случаях даже нескольких сотен).

Выбор длины элементарного участка Δt определяется характером изменения случайной функции. Если случайная функция изменяется сравнительно плавно, участок Δt можно выбирать большим, чем когда она совершает резкие и частые колебания. Чем более высокочастотный состав имеют колебания, образующие случайную функцию, тем чаще нужно располагать опорные точки при обработке.

Ориентировочно можно рекомендовать выбирать элементарный участок Δt так, чтобы на полный период самой высокочастотной гармоники в составе случайной функции приходилось порядка 5-10 опорных точек.

Часто выбор опорных точек вообще не зависит от обрабатывающего, а диктуется темпом работы записывающей аппаратуры.

В этом случае следует вести обработку непосредственно полученного из опыта материала, не пытаясь вставить между наблюдёнными значениями промежуточные, так как это не может повысить точности результата, а излишне осложнит обработку.

1.9 Лекция № 9 (2 часа)

Тема: «Спектральное разложение стационарной случайной функции»

1.9.1 Вопросы лекции:

1. Характеристики внутренней структуры колебательных процессов.

2. Спектральное разложение стационарной случайной функции на конечном участке времени.

3. Спектр дисперсий.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Характеристики внутренней структуры колебательных процессов.

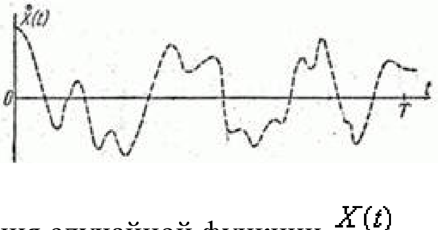
На различных примерах, приведённых ранее, мы наглядно убедились в том, что существует связь между характером корреляционной функции и внутренней структурой соответствующего ей случайного процесса. В зависимости от того, какие частоты и в каких соотношениях преобладают в составе случайной функции, ее корреляционная функция имеет тот или другой вид. Из таких соображений мы непосредственно приходим к понятию о спектральном составе случайной функции.

Понятие «спектра» встречается не только в теории случайных функций; оно широко применяется в математике, физике и технике.

Если какой-либо колебательный процесс представляется в виде суммы гармонических колебаний различных частот (так называемых «гармоник»), то спектром колебательного процесса называется функция, описывающая распределение амплитуд по различным частотам. Спектр показывает, какого рода колебания преобладают в данном процессе, какова его внутренняя структура.

Совершенно аналогичное спектральное описание можно дать и стационарному случайному процессу; вся разница в том, что для случайного процесса амплитуды колебаний будут случайными величинами. Спектр стационарной случайной функции будет описывать распределение дисперсий по различным частотам. Подойдём к понятию о спектре стационарной случайной функции из следующих соображений.

Рассмотрим стационарную случайную функцию $\overset{\circ}{X}(t)$, которую мы наблюдаем на интервале $(0,T)$.



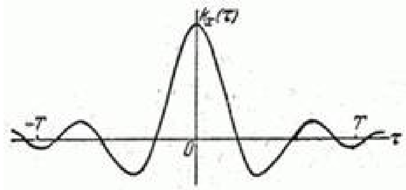
Задана корреляционная функция случайной функции $X(t)$

$$K_x(t,t+\tau) = k_x(\tau)\ .$$

Функция $k_x(\tau)$ есть чётная функция:

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau)$$

и, следовательно, на графике изобразится симметричной кривой .



При изменении t и t' от 0 до T аргумент $\tau = t' - t$ изменяется от $-T$ до $+T$.

Мы знаем, что чётную функцию на интервале $(-T, T)$ можно разложить в ряд Фурье, пользуясь только чётными (косинусными) гармониками:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau,$$

где

$$\omega_k = k\omega_1; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T},$$

а коэффициенты D_k определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)d\tau, \\ D_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)\cos \omega_k \tau d\tau, \quad \text{при } k \neq 0. \end{aligned}\right\}$$

Имея в виду, что функции $k_x(\tau)$ и $\cos \omega_k \tau$ чётные, можно преобразовать формулы к виду:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} k_x(\tau)d\tau, \\ D_k &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} k_x(\tau)\cos \omega_k \tau d\tau, \quad \text{при } k \neq 0. \end{aligned}\right\}$$

2. Спектральное разложение стационарной случайной функции на конечном участке времени.

Перейдём в выражении корреляционной функции $k_x(\tau)$ от аргумента τ снова к двум аргументам t и t'. Для этого положим

$$\cos \omega_k \tau = \cos \omega_k (t' - t) = \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + \sin \omega_k t' \sin \omega_k t$$

и подставим это выражение в формулу:

$$k_x(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} (D_k \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t' \sin \omega_k t).$$

Мы видим, что выражение есть не что иное, как каноническое разложение корреляционной функции $K_x(t, t')$. Координатными функциями этого канонического разложения являются попеременно косинусы и синусы частот, кратных ω_1:

$$\cos \omega_k t, \sin \omega_k t \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Мы знаем, что по каноническому разложению корреляционной функции можно построить каноническое разложение самой случайной функции с теми же координатными функциями и с дисперсиями, равными коэффициентам D_k в каноническом разложении корреляционной функции.

Следовательно, случайная функция $\overset{\circ}{X}(t)$ может быть представлена в виде канонического разложения:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

где U_k, V_k - некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, одинаковыми для каждой пары случайных величин с одним и тем же индексом k:

$$D[U_k] = D[V_k] = D_k.$$

Таким образом, мы получили на интервале $(0,T)$ каноническое разложение случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, координатными функциями которого являются функции $\cos \omega_k t$, $\sin \omega_k t$ при различных ω_k. Разложение такого рода называется спектральным разложением стационарной случайной функции. Спектральное разложение изображает стационарную случайную функцию разложенной на гармонические колебания различных частот:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots,$$

причём амплитуды этих колебаний являются случайными величинами.

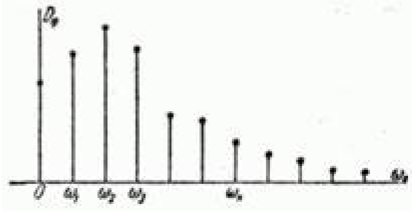
3. Спектр дисперсий.

Определим дисперсию случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, заданной спектральным разложением. По теореме о дисперсии линейной функции некоррелированных случайных величин

$$D_x = D[\overset{\circ}{X}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} (\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Таким образом, дисперсия стационарной случайной функции равна сумме дисперсий всех гармоник ее спектрального разложения. Формула показывает, что дисперсия функции $\overset{\circ}{X}(t)$ известным образом распределена по различным частотам: одним частотам соответствуют большие дисперсии, другим - меньшие.

Распределение дисперсий по частотам можно проиллюстрировать графически в виде так называемого спектра стационарной случайной функции (точнее - спектра дисперсий). Для этого по оси абсцисс откладываются частоты $\omega_0 = 0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots$, а по оси ординат - соответствующие дисперсии.



Очевидно, сумма всех ординат построенного таким образом спектра равна дисперсии случайной функции.

1.10 Лекция № 10 (2 часа)

Тема: «Спектральное разложение стационарной случайной функции (продолжение)»

1.10.1 Вопросы лекции:

1. Необходимость перехода от дискретного к непрерывному спектру.
2. Спектральное разложение стационарной случайной функции на бесконечном участке времени.
3. Спектральная плотность, ее свойства.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Необходимость перехода от дискретного к непрерывному спектру.

Строя спектральное разложение стационарной случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$ на конечном участке времени $(0,T)$, мы получили спектр дисперсий случайной функции в виде ряда отдельных дискретных линий, разделённых равными промежутками (так называемый «прерывистый» или «линейчатый» спектр).

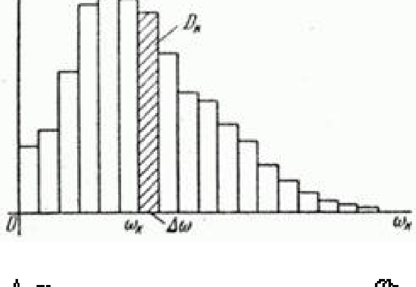
Очевидно, чем больший участок времени мы будем рассматривать, тем полнее будут наши сведения о случайной функции. Естественно поэтому в спектральном разложении попытаться перейти к пределу при $T \to \infty$ и посмотреть, во что при этом обратится спектр случайной функции.

При $T \to \infty$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{2T} \to 0$; поэтому расстояния между частотами ω_k, на которых строится спектр, будут при $T \to \infty$ неограниченно уменьшаться. При этом дискретный спектр будет приближаться к непрерывному, в котором каждому сколь угодно малому интервалу частот $\Delta\omega$ будет соответствовать элементарная дисперсия $\Delta D(\omega)$.

Попробуем изобразить непрерывный спектр графически. Для этого мы должны несколько перестроить график дискретного спектра при конечном T. А именно, будем откладывать по оси ординат уже не самую дисперсию D_k (которая безгранично уменьшается при $T \to \infty$), а среднею плотность дисперсии, т. е. дисперсию, приходящуюся на единицу длины данного интервала частот. Обозначим расстояние между соседними частотами $\Delta\omega$:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \Delta\omega$$

и на каждом отрезке $\Delta\omega$, как на основании, построим прямоугольник с площадью D_k. Получим ступенчатую диаграмму, напоминающую по принципу построения гистограмму статистического распределения.

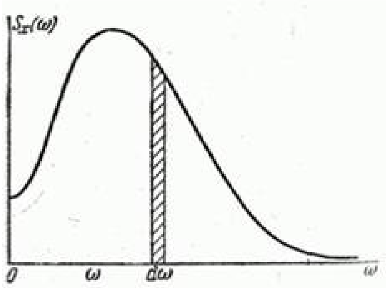


Высота диаграммы на участке $\Delta\omega$, прилежащем к точке ω_k, равна $S_x(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega}$

и представляет собой среднюю плотность дисперсии на этом участке. Суммарная площадь всей диаграммы, очевидно, равна дисперсии случайной функции.

2. Спектральное разложение стационарной случайной функции на бесконечном участке времени.

Будем неограниченно увеличивать интервал T. При этом $\Delta\omega \to 0$, и ступенчатая кривая будет неограниченно приближаться к плавной кривой $S_x(\omega)$. Эта кривая изображает плотность распределения дисперсии по частотам непрерывного спектра, а сама функция $S_x(\omega)$ называется спектральной плотностью дисперсии, или, короче, спектральной плотностью стационарной случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$.



Очевидно, площадь, ограниченная кривой $S_x(\omega)$, по-прежнему должна равняться дисперсии D_x случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$:

$$D_x = \int_0^\infty S_x(\omega)d\omega$$.

Формула есть не что иное, как разложение дисперсии D_x на сумму элементарных слагаемых $S_x(\omega)d\omega$, каждое из которых представляет собой дисперсию, приходящуюся на элементарный участок частот $d\omega$, прилежащий к точке ω.

Таким образом, мы ввели в рассмотрение новую дополнительную характеристику стационарного случайного процесса – спектральную плотность, описывающую частотный состав стационарного процесса. Однако эта характеристика не является самостоятельной; она полностью определяется корреляционной функцией данного процесса.

Подобно тому, как ординаты дискретного спектра D_k выражаются формулами через корреляционную функцию $k_x(\tau)$, спектральная плотность $S_x(\omega)$ также может быть выражена через корреляционную функцию. Выведем это выражение. Для этого перейдем в каноническом разложении корреляционной функции к пределу при $T \to \infty$ и посмотрим, во что оно обратится. Будем исходить из разложения корреляционной функции в ряд Фурье на конечном интервале $(-T, T)$:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau$$,

где дисперсия, соответствующая частоте ω_k, выражается формулой

$$D_k = \frac{2}{T}\int_0^T k_x \cos \omega_k \tau d\tau$$.

Перед тем как переходить к пределу при $T \to \infty$, перейдём от дисперсии D_k к средней плотности дисперсии $\frac{D_k}{\Delta\omega}$. Так как эта плотность вычисляется ещё при конечном значении T и зависит от T, обозначим ее:

$$S_x^{(T)}(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega}.$$

Разделим выражение на $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$; получим:

$$S_x^{(T)}(\omega_k) = \frac{2}{\pi}\int_0^T k_x(\tau)\cos\omega_k\tau d\tau. \qquad D_k = S_x^{(T)}(\omega_k)\Delta\omega$$

Подставим выражение в формулу, получим:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_x^{(T)}(\omega_k)\cos\omega_k\tau\Delta\omega.$$

Очевидно, при этом $\Delta\omega \to 0$; дискретный аргумент ω_k переходит в непрерывно меняющийся аргумент ω; сумма переходит в интеграл по переменной ω; средняя плотность дисперсии $S_x^{(T)}(\omega_k)$ стремится к плотности дисперсии $S_x(\omega)$, и выражение в пределе принимает вид:

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega,$$

где $S_x(\omega)$ - спектральная плотность стационарной случайной функции.

3. Спектральная плотность, ее свойства.

Переходя к пределу при $T \to \infty$, получим выражение спектральной плотности через корреляционную функцию:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Выражение этого типа известно в математике под названием интеграла Фурье. Интеграл Фурье есть обобщение разложения в ряд Фурье для случая непериодической функции, рассматриваемой на бесконечном интервале, и представляет собой разложение функции на сумму элементарных гармонических колебаний с непрерывным спектром.

Таким образом, корреляционная функция и спектральная плотность выражаются одна через другую с помощью преобразований Фурье.

На практике вместо спектральной плотности $S_x(\omega)$ часто пользуются нормированной спектральной плотностью:

$$s_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x},$$

где D_x - дисперсия случайной функции.

Нетрудно убедиться, что нормированная корреляционная функция $\rho_x(\tau)$ и нормированная спектральная плотность $s_x(\omega)$ связаны теми же преобразованиями Фурье:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \int_0^\infty s_x(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega, \\ s_x(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \rho_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \end{aligned}\right\}$$

Полагая в первом из равенств $\tau = 0$ и учитывая, что $\rho_x(0) = 1$, имеем:

$$\int_0^\infty s_x(\omega)\, d\omega = 1,$$

т. е. полная площадь, ограниченная графиком нормированной спектральной плотности, равна единице.

Характер изменения спектральной плотности $s_x(\omega)$ (быстрое или медленное убывание) зависит от параметра τ_0. Полная площадь, ограниченная кривой $s_x(\omega)$, постоянна и равна единице. Изменение τ_0 равносильно изменению масштаба кривой $s_x(\omega)$ по обеим, осям при сохранении ее площади. При увеличении τ_0 масштаб по оси ординат увеличивается, по оси абсцисс - уменьшается; преобладание в спектре случайной функции нулевой частоты становится более ярко выраженным.

1.11 Лекция № 11 (2 часа)

Тема: «Спектральное разложение случайной функции в комплексной форме»

1.11.1 Вопросы лекции:

1. Элементы теории комплексных чисел (обзорно).

2. Преимущество комплексной формы спектрального разложения случайной функции и ее характеристик.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Элементы теории комплексных чисел (обзорно).

В ряде случаев с точки зрения простоты математических преобразований оказывается удобным пользоваться не действительной, а комплексной формой записи как спектрального разложения случайной функции, так и ее характеристик: спектральной плотности и корреляционной функции.

Комплексная форма записи удобна, в частности, потому, что всевозможные линейные операции над функциями, имеющими вид гармонических колебаний (дифференцирование, интегрирование, решение линейных дифференциальных уравнений и т. д.), осуществляются гораздо проще, когда эти гармонические колебания записаны не в виде синусов и косинусов, а в комплексной форме, в виде показательных функций. Комплексная форма записи корреляционной функции и спектральной плотности применяется и в тех случаях, когда сама случайная функция (а следовательно, и ее корреляционная функция и спектральная плотность) действительна.

Покажем, как можно в спектральном разложении случайной функции чисто формально перейти от действительной формы к комплексной.

Рассмотрим спектральное разложение случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$ на участке $(0,T)$:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)$$,

где U_k, V_k - некоррелированные случайные величины, причем для каждой пары U_k, V_k с одинаковыми индексами дисперсии равны:

$$D[U_k] = D[V_k] = D_k.$$

Учитывая, что $\omega_k = k\omega_1$; $\omega_0 = 0$, перепишем выражение в виде:

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t).$$

Придадим спектральному разложению комплексную форму. Для этого воспользуемся известными формулами Эйлера:

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2}; \qquad \sin \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2i} = -i\frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу, имеем:

$$\overset{\circ}{X}(t) - U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_k \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2} - iV_k \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} \right),$$

т. е. разложение с координатными функциями $e^{i\omega_k t}, e^{-i\omega_k t}$.

Формула представляет собой разложение случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, в котором в качестве координатных функций фигурируют комплексные функции $e^{i\omega_k t}$, а коэффициенты представляют собой комплексные случайные величины. Обозначая эти комплексные случайные величины $W_k \ \ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, придадим разложению форму:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t},$$

где

$$\left.\begin{array}{ll} W_k = U_0 & \text{при } k = 0, \\ W_k = \dfrac{U_k - iV_k}{2} & \text{при } k > 0, \\ W_k = \dfrac{U_k + iV_k}{2} & \text{при } k < 0. \end{array}\right\}$$

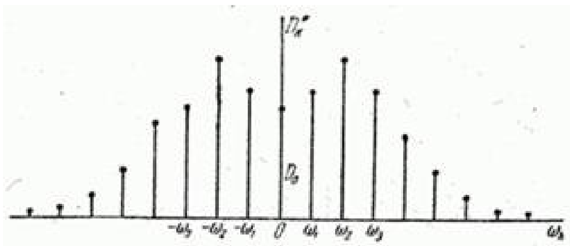
Найдем дисперсии этих коэффициентов. При $k = 0$ дисперсия D_0 осталась такой же как была при действительной форме спектрального разложения. Дисперсия каждой из комплексных величин W_k (при $k \neq 0$) равна сумме дисперсий ее действительной и мнимой частей:

$$D[W_k] = \frac{D[U_k]}{4} + \frac{D[V_k]}{4} = \frac{2D[U_k]}{4} = \frac{D_k}{2}.$$

Введем обозначение:

$$D_k^* = \frac{D_k}{2} \text{ при } k \neq 0; \quad D_k^* = D_0 \text{ при } k = 0$$

и построим дискретный спектр случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, распространённый на частоты от $-\infty$ до $+\infty$.



Этот спектр симметричен относительно оси ординат; от ранее построенного спектра он отличается тем, что определён не только для положительных, но и для отрицательных частот. Зато его ординаты при $k \neq 0$ вдвое меньше соответствующих ординат прежнего спектра; сумма всех ординат по-прежнему равна дисперсии случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$: $D_x = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} D_k$.

2. Преимущество комплексной формы спектрального разложения случайной функции и ее характеристик.

Определим корреляционную функцию случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, представленной в виде комплексного спектрального разложения:

$$k_x(t,t') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^* e^{i\omega_k t'} \overline{e^{i\omega_k t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^* e^{i\omega_k t'} e^{-i\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^* e^{i\omega_k (t'-t)},$$

или, переходя к аргументу $\tau = t' - t$,

$$k_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^* e^{i\omega_k \tau},$$

где

$$D_k^* = \frac{1}{2} D_k = \frac{1}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad \text{при } k \neq 0.$$

Придадим выражению также комплексную форму. Полагая

$$\cos \omega_k \tau = \frac{e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau}}{2},$$

получим:

$$D_k^* = \frac{1}{2T} \int_0^T k_x(\tau)(e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau}) d\tau = \frac{1}{2T} \left\{ \int_0^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau + \int_0^T k_x(\tau) e^{i\omega_k \tau} d\tau \right\}.$$

Полагая во втором интеграле $\tau = -u$, имеем:

$$\int_0^T k_x(\tau) e^{i\omega_k \tau} d\tau = -\int_0^{-T} k_x(u) e^{-i\omega_k u} du = \int_{-T}^0 k_x(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau,$$

откуда

$$D_k^* = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k_x(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau.$$

Таким образом, мы построили комплексную форму спектрального разложения случайной функции на конечном интервале $(0,T)$). Далее естественно перейти к пределу при $T \to \infty$, как мы делали для действительной формы, т. е. ввести в рассмотрение спектральную плотность

$$S_x^*(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{D_k^*}{\Delta\omega}$$

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Формулы представляют собой комплексную форму преобразований Фурье, связывающих корреляционную функцию и спектральную плотность.

Полагая $\tau = 0$, получим выражение дисперсии случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) d\omega.$$

Формула выражает дисперсию случайной функции в виде суммы элементарных дисперсий, распределённых с некоторой плотностью по всему диапазону частот от $-\infty$ до $+\infty$.

Иногда в качестве аргумента спектральной плотности рассматривают не круговую частоту (ω), а частоту колебаний f , выраженную в герцах:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

В этом случае подстановкой $\omega = 2\pi f$ формула приводится к виду:

$$k_x(\tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(2\pi f) e^{2\pi i f \tau} df,$$

или, вводя обозначение

$$G_x(f) = 2\pi S_x^*(2\pi f),$$

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) e^{2\pi i f \tau} df.$$

Функция $G_x(f)$ также может применяться как спектральная плотность дисперсии. Ее выражение через корреляционную функцию, очевидно, имеет вид:

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau.$$

Все приведённые нами и некоторые другие применяемые на практике выражения спектральной плотности, очевидно, отличаются друг от друга только масштабом. Каждую из них можно нормировать, деля соответствующую функцию спектральной плотности на дисперсию случайной функции.

1.12 Лекция № 12 (2 часа)

Тема: «Спектральное разложение случайной функции в комплексной форме (продолжение)»

1.12.1 Вопросы лекции:

1. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой.

2. Классификация случайных функций.

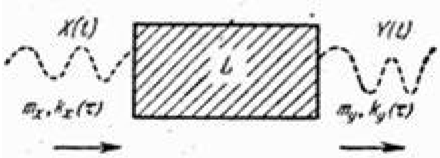
2. Краткое содержание вопросов:

1. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой.

Если и входное воздействие $X(t)$ и реакция системы $Y(t)$ стационарны, задачу преобразования случайной функции можно свести к преобразованию одной-единственной неслучайной функции - спектральной плотности $S_x(\omega)$.

Для того чтобы при стационарном воздействии реакция системы могла быть тоже стационарной, очевидно необходимо, чтобы параметры системы (например, входящие в неё сопротивления, ёмкости, индуктивности и т. п.) были постоянными, а не переменными. Условимся называть линейную систему с постоянными параметрами стационарной линейной системой.

Рассмотрим задачу о преобразовании стационарной случайной функции стационарной линейной системой. Пусть на вход линейной системы L поступает стационарная случайная функция $X(t)$; реакция системы есть случайная функция $Y(t)$.



Известны характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание m_x и корреляционная функция $k_x(\tau)$. Требуется определить характеристики случайной функции $Y(t)$ на выходе линейной системы.

Так как для решения задачи нам придётся преобразовывать неслучайные функции - математическое ожидание и координатные функции, рассмотрим прежде всего задачу об определении реакции системы L на неслучайное воздействие $x(t)$.

Реакцию системы L на воздействие $x(t)$ можно найти путём решения линейного дифференциального уравнения. Как известно из теории дифференциальных уравнений, это решение состоит из двух слагаемых: $y_I(t)$ и $y_{II}(t)$. Слагаемое $y_{II}(t)$ представляет собой решение уравнения без правой части и определяет так называемые свободные или собственные колебания системы.

Это - колебания, совершаемые системой при отсутствии входного воздействия, если система в начальный момент как-то была выведена из состояния равновесия. На практике чаше всего встречаются так называемые устойчивые системы; в этих системах свободные колебания с течением времени затухают.

Ограничимся рассмотрением участков времени, достаточно удаленных от начала процесса, когда все переходные процессы в системе можно считать законченными и система работает в установившемся режиме, можно отбросить второе слагаемое $y_{II}(t)$ и ограничиться рассмотрением только первого слагаемого $y_I(t)$. Это первое слагаемое определяет так называемые вынужденные колебания системы под влиянием воздействия на нее заданной функции $x(t)$.

Пусть на вход системы поступает гармоническое колебание вида:

$$x(t) = e^{i\omega t}.$$

Будем искать реакцию системы $y(t)$ также в виде гармонического колебания частоты ω, но умноженного на некоторый комплексный умножитель $\Phi(i\omega)$:

$$y(t) = \Phi(i\omega)e^{i\omega t}.$$

Функция $\Phi(i\omega)$ носит специальное название частотной характеристики линейной системы. Таким образом, если на вход линейной системы с постоянными параметрами поступает гармоническое колебание вида $e^{i\omega t}$, то реакция системы представляется в виде того же гармонического колебания, умноженного на частотную характеристику системы $\Phi(i\omega)$. Пусть на вход системы поступает воздействие вида

$$x(t) = Ue^{i\omega t},$$

где U - некоторая величина, не зависящая от t. В силу линейности системы величина U выходит за знак оператора, и реакция системы на воздействие будет равна:

$$y(t) = U\Phi(i\omega)e^{i\omega t}.$$

Очевидно, это свойство сохранится и в том случае, когда величина U будет случайной (лишь бы она не зависела от t).

Представим математическое ожидание m_x стационарной случайной функции $X(t)$ как гармоническое колебание нулевой частоты $\omega = 0$ и положим в формуле $\omega = 0$:

$$\Phi(0) = \frac{B_m(0)}{A_n(0)} = \frac{b_0}{a_0},$$

откуда получаем математическое ожидание на выходе системы:

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x.$$

Перейдём к преобразованию линейной системой существенно случайной части функции $X(t)$, а именно функции $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x$.

Для этого представим функцию $\overset{\circ}{X}(t)$ на участке $(0, T)$ в виде спектрального разложения:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{i\omega_k t},$$

где U_k - некоррелированные случайные величины, дисперсии которых образуют спектр случайной функции $X(t)$. Рассмотрим отдельное слагаемое этой суммы:

$$X_k(t) = U_k e^{i\omega_k t}.$$

Реакция системы на это воздействие будет иметь вид:

$$Y_k(t) = U_k \Phi(i\omega_k) e^{i\omega_k t}.$$

Согласно принципу суперпозиции реакция системы на сумму воздействия равна сумме реакций на отдельные воздействия. Следовательно, реакцию системы на воздействие можно представить в виде спектрального разложения:

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \Phi(i\omega_k) e^{i\omega_k t},$$

или, обозначая $U_k \Phi(i\omega_k) = W_k$,

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t},$$

где W_k - некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю. Определим спектр этого разложения, Для этого найдём дисперсию комплексной случайной величины W_k в разложении. Имея в виду, что дисперсия комплексной случайной величины равна математическому ожиданию квадрата ее модуля, имеем:

$$D[W_k] = M[|U_k \Phi(i\omega_k)|^2] = M[|U_k|^2 |\Phi(i\omega_k)|^2] =$$
$$= |\Phi(i\omega_k)|^2 M[|U_k|^2] = |\Phi(i\omega_k)|^2 D_k.$$

Мы приходим к следующему **выводу**: ***при преобразовании стационарной случайной функции стационарной линейной системой каждая из ординат ее спектра умножается на квадрат модуля частотной характеристики системы для соответствующей частоты.***

Таким образом, при прохождении стационарной случайной функции через линейную стационарную систему ее спектр определённым образом перестраивается: некоторые частоты усиливаются, некоторые, напротив, ослабляются (фильтруются). Квадрат модуля частотной характеристики (в зависимости от ω_k) и показывает, как реагирует система на колебания той или иной частоты.

Очевидно, спектральная плотность на выходе линейной системы получается из спектральной плотности на входе тем же умножением на $|\Phi(i\omega)|^2$, как и ординаты дискретного спектра:

$$S_y(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_x(\omega).$$

Таким образом, получено весьма **простое правило**:

При преобразовании стационарной случайной функции стационарной линейной системой ее спектральная плотность умножается на квадрат модуля частотной характеристики системы.

Пользуясь этим правилом, мы легко можем решить поставленную выше задачу: по характеристикам случайной функции на входе линейной системы найти характеристики случайной функции на ее выходе.

2. Классификация случайных функций.

Случайный процесс X(t) называется **гауссовским**, если все его конечномерные распределения являются нормальными. Случайный процесс X(t) называется **процессом с независимыми приращениями**, если его приращения на непересекающихся временных промежутках не зависят друг от друга.

Случайный процесс X(t) называется **процессом с некоррелированными**

приращениями, если выполняются следующие условия:
1) tT: $MX^2(t) < \infty$;
2) t_1, t_2, t_3, t_4T: $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$: $M((X(t_2)-X(t_1))\cdot(X(t_4)-X(t_3)))=0$.

Пусть система А может находиться в одном из несовместных состояний A_1; A_2;…;A_n, и при этом вероятность $P_{ij}(s)$ того, что в s-ом испытании система переходит в состояние A_j, не зависит от состояния системы в испытаниях, предшествующих s-1-ому. Случайный процесс данного типа называется **цепью Маркова**.

Случайный процесс X(t) называется **пуассоновским процессом с параметром *a*** *(a>0)*, если он обладает рядом свойств.
1) t€T; где T=[0, +∞);
2) X(0)=0;
3) $t_1, t_2, \ldots, tn$: $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < tn$, где случайные величины $X(t_2)-X(t_1)$; $X(t_3)-X(t_2)$; …; $X(tn)-X(tn_{-1})$ независимы;
4) случайная величина X(t)-X(s), $0 \le s \le t$ имеет распределение Пуассона с параметром $a\cdot(t-s)$: i=0;1;2;…

Случайный процесс X(t) называется **винеровским**, если он обладает свойствами:
1)-3) пуассоновского случайного процесса;
4) случайная величина X(t)-X(s), $0 \le s \le t$ имеет нормальное распределение.

1.13 Лекция № 13 (2 часа)

Тема: «Марковские процессы с дискретными состояниями»

1.13.1 Вопросы лекции:

1. Марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова).
2. Стационарный режим для цепи Маркова.
3. Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова).

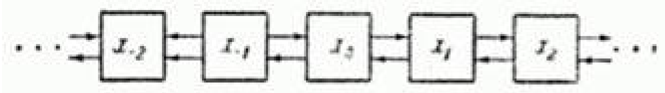
Процесс, протекающий в физической системе, называется **марковским** (или процессом без последействия), если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент (t_0) и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

Рассмотрим элементарный пример марковского случайного процесса. По оси абсцисс Ox случайным образом перемещается точка X. В момент времени $t=0$ точка X находится в начале координат $(x=0)$ и остаётся там в течение одной секунды. Через секунду бросается монета; если выпал герб - точка X перемещается на одну единицу длины вправо, если цифра - влево. Через секунду снова бросается монета и производится такое же случайное перемещение, и т. д.

Процесс изменения положения точки (или, как говорят, «блуждания») представляет собой случайный процесс с дискретным временем $(t=0,1,2,\ldots)$ и счетным множеством состояний

$$x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_{-1} = -1;\ x_2 = 2;\ x_{-2} = -2;\ \ldots$$

Схема возможных переходов для этого процесса показана на рис.



Покажем, что этот процесс - марковский. Действительно, представим себе, что в какой-то момент времени t_0 система находится, например, в состоянии x_1 - на одну единицу правее начала координат. Возможные положения точки через единицу времени будут x_0 и x_2 с вероятностями 1/2 и 1/2; через две единицы - x_{-1}, x_1, x_3 с вероятностями 1/4, ½, 1/4 и так далее. Очевидно, все эти вероятности зависят только от того, где находится точка в данный момент t_0 , и совершенно не зависят от того, как она пришла туда.

2. Стационарный режим для цепи Маркова.

Цепью Маркова называется последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий Ai из полной группы. При этом условная вероятность pij(s) того, что в s –ом испытании наступит событие Aj при условии, что в (s – 1) – ом испытании наступило событие Ai, не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. События называются **состояниями системы**, а испытания – **изменениями состояний системы**. По характеру изменений состояний цепи Маркова можно разделить на две группы.

Цепью Маркова с дискретным временем называется цепь, изменение состояний которой происходит в определённые фиксированные моменты времени.

Цепью Маркова с непрерывным временем называется цепь, изменение состояний которой возможно в любые случайные моменты времени.

Однородной называется цепь Маркова, если условная вероятность pij перехода системы из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания.

Вероятность pij называется **переходной вероятностью**. Допустим, число состояний конечно и равно k. Тогда матрица, составленная из условных вероятностей перехода будет иметь вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется **матрицей перехода системы**. Т.к. в каждой строке содержаться вероятности событий, которые образуют полную группу, то, очевидно, что сумма элементов каждой строки матрицы равна единице.

На основе матрицы перехода системы можно построить так называемый **граф состояний системы**, его ещё называют **размеченный граф состояний**. Это удобно для наглядного представления цепи. Порядок построения граф рассмотрим на примере.

Пусть Pij(n) – вероятность того, что в результате n испытаний система перейдет из состояния i в состояние j, r – некоторое промежуточное состояние между состояниями i и j. Вероятности перехода из одного состояния в другое pij(1) = pij.

Тогда вероятность Pij(n) может быть найдена по формуле, называемой **равенством Маркова**

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m)$$

Здесь т – число шагов (испытаний), за которое система перешла из состояния i в состояние r.

В принципе, равенство Маркова есть ни что иное как несколько видоизменная формула полной вероятности. Зная переходные вероятности (т.е. зная матрицу перехода

P1), можно найти вероятности перехода из состояния в состояние за два шага Pij(2), т.е. матрицу P2, зная ее – найти матрицу P3, и т.д.

3. Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем

Непосредственное применений полученной выше формулы не очень удобно, поэтому, можно воспользоваться приемами матричного исчисления (ведь эта формула по сути – не что иное как формула перемножения двух матриц). Тогда в общем виде можно записать: $P_n = P_1^n$

Пример. Задана матрица переходов P_1.

Найти матрицуP_3.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}244 & 0{,}756 \\ 0{,}252 & 0{,}748 \end{pmatrix}$$

Матрицы, суммы элементов всех строк которых равны единице, называются **стохастическими**. Если при некотором п все элементы матрицы $P^п$ не равны нулю, то такая матрица переходов называется **регулярной**. Другими словами, регулярные матрицы переходов задают цепь Маркова, в которой каждое состояние может быть достигнуто через п шагов из любого состояния. Такие цепи Маркова также называются **регулярными**.

Теорема (*теорема о предельных вероятностях*) Пусть дана регулярная цепь Маркова с *n*состояниями и P – ее матрица вероятностей перехода. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = P^{(\infty)}$ и матрица $P^{(¥)}$ имеет вид: $P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$ Т.е. матрица состоит из одинаковых строк.

Теперь о величинах *ui*. Числа u_1, u_2, …, u_n называются **предельными вероятностями.** Эти вероятности не зависят от исходного состояния системы и являются компонентами собственного вектора матрицы P^T (транспонированной к матрице P).

Этот вектор полностью определяется из условий:

$$P^T \cdot \vec{u} = \vec{u}; \qquad \sum u_i = 1;$$

Пример. Найдём предельные вероятности для рассмотренного выше примера. $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}; \quad P^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \; \begin{matrix} u_1 = 0{,}1u_1 + 0{,}3u_2 \\ u_2 = 0{,}9u_1 + 0{,}7u_2 \end{matrix}$

$0{,}9u_1 = 0{,}3u_2; \;\; u_2 = 3u_1;$

С учётом того, что $u_1 + u_2 = 1$, получаем: $u_1 + 3u_1 = 1; \qquad u_1 = 0{,}25; \qquad u_2 = 0{,}75;$

Получаем: $P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ Процесс гибели – размножения и циклический процесс.

Рассмотрим другой **пример.** Имеется техническое устройство X, состоящее из элементов (деталей) типов a и b, обладающих разной долговечностью. Эти элементы в случайные моменты времени и независимо друг от друга могут выходить из строя. Исправная работа каждого элемента безусловно необходима для работы устройства в целом. Время безотказной работы элемента - случайная величина, распределённая по показательному закону; для элементов типа a и b параметры этого закона различны и равны соответственно λ_a и λ_b. В случае отказа устройства немедленно принимаются меры для выявления причин и обнаруженный неисправный элемент немедленно заменяется новым. Время, потребное для восстановления (ремонта) устройства, распределено по показательному закону с параметром μ_a (если вышел из строя элемент типа a) и μ_b (если вышел из строя элемент типа b).

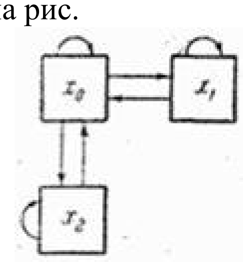
В данном примере случайный процесс, протекающий в системе, есть марковский процесс с непрерывным временем и конечным множеством состояний:

x_0 - все элементы исправны, система работает,

x_1 - неисправен элемент типа a, система ремонтируется,

x_2 - неисправен элемент типа b, система ремонтируется.

Схема возможных переходов дана на рис.



Действительно, процесс обладает марковским свойством.

1.14 Лекция № 14 (2 часа)

Тема: «Марковские процессы гибели и размножения с непрерывным временем»

1.14.1 Вопросы лекции:

1. Понятие марковского процесса гибели и размножения с непрерывным временем, условия существования стационарного режима.

2. Метод псевдо состояний.

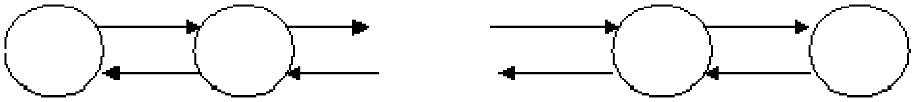
3. Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса гибели и размножения.

2. Краткое содержание вопросов:

1. Понятие марковского процесса гибели и размножения с непрерывным временем, условия существования стационарного режима.

В случае, когда процесс, протекающий в физической системе со счетным множеством состояний и непрерывным временем, является марковским, можно описать этот процесс с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \ldots$. Составление и решение таких уравнений мы продемонстрируем в следующем n° на примере простейшей системы массового обслуживания.

Марковский процесс с дискретными состояниями называют **процессом гибели – размножения**, если он имеет размеченный граф состояний следующего вида:



Т.е. каждое из состояний системы связано с двумя соседними состояниями прямой и обратной связью, крайние состояния имеют только по одному соседнему. Здесь *lij* – **плотность вероятности перехода** системы из состояния Si в состояние Sj в момент времени t. Эта плотность находится по формуле:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{P_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}$$

*D*t – время перехода из одного состояния в другое.

Вообще показательное распределение играет особую роль в теории марковских случайных процессов с непрерывным временем. Легко убедиться, что в стационарном марковском процессе время, в течение которого система остаётся в каком-либо состоянии, распределено всегда по показательному закону (с параметром, зависящим, вообще говоря, от этого состояния). Действительно, предположим, что в момент t_0 система находится в состоянии x_k и до этого уже находилась в нем какое-то время. Согласно определению марковского процесса, вероятность любого события в будущем не зависит от предыстории; в частности, вероятность того, что система уйдёт из состояния x_k в течение времени t, не должна зависеть от того, сколько времени система уже провела в этом состоянии. Следовательно, время пребывания системы в состоянии x_k должно быть распределено по показательному закону.

В случае, когда процесс, протекающий в физической системе со счетным множеством состояний и непрерывным временем, является марковским, можно описать этот процесс с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \dots$. Составление и решение таких уравнений продемонстрируем на примере простейшей системы массового обслуживания.

2. Метод псевдо состояний.

Системы массового обслуживания делятся на два основных типа: а) системы с отказами, б) системы с ожиданием. В системах с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. В системах с ожиданием заявка, заставшая все каналы занятыми, не покидает систему, а становится в очередь и ожидает, пока не освободится какой-нибудь канал. Рассмотрим систему с отказами как наиболее простую.

Пусть имеется n-канальная система массового обслуживания с отказами. Рассмотрим ее как физическую систему X с конечным множеством состояний:

x_0 - свободны все каналы,

x_1 - занят ровно один канал,

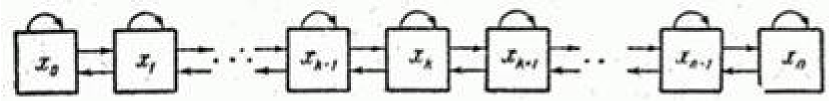
……………

x_k - занято ровно k каналов,

……………

x_n - заняты все n каналов.

Схема возможных переходов дана на рис.



Поставим задачу: определить вероятности состояний системы $p_k(t)$ $(k = 0,1,\dots,n)$ для любого момента времени t. Задачу будем решать при следующих допущениях:
1) поток заявок - простейший, с плотностью

2) время обслуживания $T_{об}$ - показательное, с параметром $\mu = \dfrac{1}{m_{t_{об}}}$

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

Заметим, что параметр μ в формуле полностью аналогичен параметру λ показательного закона распределения промежутка T между соседними событиями простейшего потока:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

Параметр λ имеет смысл «плотности потока заявок». Аналогично, величину μ можно истолковать как «плотность потока освобождений» занятого канала. Действительно, представим себе канал, непрерывно занятый (бесперебойно снабжаемый заявками); тогда, очевидно, в этом канале будет идти простейший поток освобождений с плотностью μ.
Так как оба потока - заявок и освобождений - простейшие, процесс, протекающий в системе, будет марковским. Рассмотрим возможные состояния системы и их вероятности

$$p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t).$$

Очевидно, для любого момента времени

$$\sum_{i=1}^{n} p_k(t) = 1.$$

3. Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса гибели и размножения.

Составим дифференциальные уравнения для всех вероятностей, начиная с $p_0(t)$. Зафиксируем момент времени t и найдём вероятность $p_0(t+\Delta t)$ того, что в момент $t+\Delta t$ система будет находиться в состоянии x_0 (все каналы свободны). Это может произойти двумя способами (рис.):

A - в момент t система находилась в состоянии x_0, а за время Δt не перешла из неёв x_1 (не пришло ни одной заявки),

B - в момент t система находилась в состоянии x_1, а за время Δt канал освободился, и система перешла в состояние x_0.

Возможностью «перескока» системы через состояние (например, из x_2 в x_0 через x_1) за малый промежуток времени можно пренебречь, как величиной высшего порядка малости по сравнению с $P(A)$ и $P(B)$.
По теореме сложения вероятностей имеем

$$p_0(t+\Delta t) \approx P(A)+P(B).$$

Найдём вероятность события A по теореме умножения. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии x_0, равна $p_0(t)$. Вероятность того, что за время Δt не придёт ни одной заявки, равна $e^{-\lambda\Delta t}$. С точностью до величин высшего порядка малости $e^{-\lambda\Delta t} \approx 1-\lambda\Delta t$.

Следовательно,

$$P(A) \approx p_0(t)(1-\lambda\Delta t).$$

Найдём $P(B)$. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии x_1, равна $p_1(t)$. Вероятность того, что за время Δt канал освободится, равна $1-e^{-\mu\Delta t}$ с точностью до малых величин высшего порядка

$$1-e^{-\mu\Delta t} \approx \mu\Delta t.$$

Следовательно,

$$P(B) \approx p_1(t)\mu\Delta t.$$

Отсюда

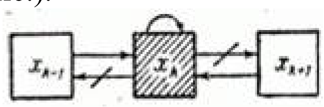
$$p_0(t+\Delta t) \approx p_0(t)(1-\lambda\Delta t)+\mu p_1(t)\Delta t.$$

Перенося $p_0(t)$ в левую часть, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение для $p_0(t)$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)+\mu p_1(t).$$

Аналогичные дифференциальные уравнения могут быть составлены и для других вероятностей состояний.

Возьмём любое $k(0<k<n)$ и найдем вероятность $p_k(t+\Delta t)$ того, что в момент $t+\Delta t$ система будет в состоянии x_k (рис.).



Эта вероятность вычисляется как вероятность суммы уже не двух, а трех событий (по числу стрелок, направленных в состояние x_k):

A - в момент t система была в состоянии x_k (занято k каналов), а за время Δt не перешла из него ни в x_{k+1}, ни в x_{k-1} (ни одна заявка не поступила, ни один канал не освободился);

B - в момент t система была в состоянии x_{k-1} (занято $k-1$ каналов), а за время Δt перешла в x_k (пришла одна заявка);

C - в момент t система была в состоянии x_{k+1} (занято $x+1$ каналов), а за время Δt один из каналов освободился. Найдём $P(A)$.

C Вычислим сначала вероятность того, что за время Δt не придёт ни одна заявка и не освободится ни один из каналов:

$$e^{-\lambda\Delta t}(e^{-\mu\Delta t})^k = e^{-(\lambda+k\mu)\Delta t}.$$

Пренебрегая малыми величинами высших порядков, имеем

$$e^{-(\lambda+k\mu)\Delta t} \approx 1-(\lambda+k\mu)\Delta t,$$

откуда

$$P(A) \approx p_k(t)\left[1-(\lambda+k\mu)\Delta t\right].$$

Аналогично

$$P(B) \approx p_{k-1}(t)\lambda\Delta t,$$

$$P(C) \approx p_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t$$

и

$$p_k(t+\Delta) \approx p_k(t)\left[1-(\lambda+k\mu)\Delta t\right]+p_{k-1}(t)\lambda\Delta t+p_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение для $p_k(t)$ $(0<k<n)$:

$$\frac{dp_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t).$$

Составим уравнение для последней вероятности $p_n(t)$ (рис.).

Имеем

$$p_n(t+\Delta t) \approx p_n(t)(1-n\mu\Delta t)+p_{n-1}(t)\lambda\Delta t,$$

где $1-n\mu\Delta t$ - вероятность того, что за время Δt не освободится ни один канал; $\lambda\Delta t$ - вероятность того, что за время Δt придет одна заявка. Получаем дифференциальное уравнение для $p_n(t)$:

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t).$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений для вероятностей $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)-\mu p_1(t),\\
&\frac{dp_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t) \quad (0<k<n),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t).
\end{aligned}\right\}$$

Уравнения называются **уравнениями Эрланга**. Интегрирование системы уравнений при начальных условиях

$$p_0(0)=1;\ p_1(0)=\ldots=p_n(0)=0$$

(в начальный момент все каналы свободны) даёт зависимость $p_k(t)$ для любого k. Вероятности $p_k(t)$ характеризуют среднюю загрузку системы и ее изменение с течением времени. Система линейных дифференциальных уравнений сравнительно легко может быть проинтегрирована при любом конкретном числе каналов n.

Заметим, что при выводе уравнений мы нигде не пользовались допущением о том, что величины λ и μ (плотности потока заявок и «потока освобождений») постоянны. Поэтому уравнения остаются справедливыми и для зависящих от времени $\lambda(t)$, $\mu(t)$, лишь бы потоки событий, переводящих систему из состоянии в состояние, оставались **пуассоновскимн** (без этого процесс не будет **марковским**).

1.15 Лекция № 15 (2 часа)

Тема: «Обзорная»

1.15.1 Вопросы лекции:

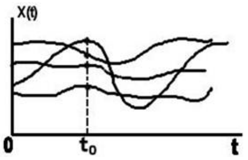
1. Случайная функция и ее характеристики.
2. Стационарный случайный процесс. Линейные преобразования случайной функции.
3. Спектральная теория случайных функций.
4. Спектральная теория случайных функций. Марковские процессы**.**

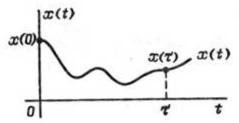
2. Краткое содержание вопросов:

1. Случайная функция и ее характеристики.

Случайным (стохастическим, вероятностным) процессом называется функция действительного переменного t, значениями которой являются соответствующие случайные величины X(t).
В теории случайных процессов t трактуется как время, принимающее значения из некоторого подмножества T множества действительных чисел (tT, TR).

Случайным процессом X(t) называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_o$ является случайной величиной $X(t_0)$. Случайная величина $X(t_o)$, в которую обращается с. п. при $t = t_0$, называется **сечением случайного процесса**, соответствующим данному значению аргумента t.





Реализацией случайного процесса X(t) называется неслучайная функция x(t), в которую превращается случайный процесс X(t) в результате опыта; другими словами, называют конкретный вид случайного процесса, который наблюдался на каком-то отрезке времени от 0 до τ.

Аппарат числовых характеристик представляет собой весьма гибкий и мощный аппарат, позволяющий сравнительно просто решать многие практические задачи.

Совершенно аналогичным аппаратом пользуются и в теории случайных функций. Для случайных функций также вводятся простейшие основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин, и устанавливаются правила действий с этими характеристиками. Такой аппарат оказывается достаточным для решения многих практических задач.

В отличие от числовых характеристик случайных величин, предоставляющих собой определённые числа, характеристики случайных функций представляют собой в общем случае не числа, а функции.

2. Стационарный случайный процесс. Линейные преобразования случайной функции.

На практике очень часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причём ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются стационарными. В качестве примеров стационарных случайных процессов можно привести: 1) колебания самолёта на установившемся режиме горизонтального полёта; 2) колебания напряжения в электрической осветительной сети; 3) случайные шумы в радиоприёмнике; 4) процесс качки корабля и т. п.

Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во времени неопределённо долго; при исследовании стационарного процесса в качестве начала отсчёта можно выбрать любой момент времени. Исследуя стационарный процесс на любом участке времени, мы должны получить одни и те же его характеристики. Образно выражаясь, стационарный процесс «не имеет ни начала, ни конца».

Понятие оператора является обобщением понятия функции. Когда мы устанавливаем функциональную связь между двумя переменными y и x и пишем:

$$y = f(x).$$

то под символом f мы понимаем правило, по которому заданному значению x приводится в соответствие вполне определенное значение y. Знак f есть символ некоторого преобразования, которому нужно подвергнуть величину x, чтобы получить y

Соответственно виду этого преобразования функции могут быть линейными и нелинейными, алгебраическими, трансцендентными и т. д.

Аналогичные понятия и соответствующая символика применяются в математике и в тех случаях, когда преобразованию подвергаются не величины, а функции. Рассмотрим некоторую функцию $x(t)$ и установим определенное правило A, согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в другую функцию $y(t)$. Запишем это преобразование в следующем виде:

$$y(t) = A\{x(t)\}.$$

Правило A, согласно которому функция $x(t)$ преобразуется в функцию $y(t)$, мы будем называть оператором; например, мы будем говорить: оператор дифференцирования, оператор интегрирования, оператор решения дифференциального уравнения и т. д.

Если динамическая система преобразует поступающую на ее вход функцию $x(t)$ в функцию $y(t)$:

$$y(t) = A\{x(t)\},$$

то оператор A называется оператором динамической системы.

3. Виды линейных операторов, примеры.

Преобразования или операторы, применяемые к функциям, могут быть различных типов. Наиболее важным для практики является класс так называемых линейных операторов. Оператор L называется линейным однородным, если он обладает следующими свойствами:

1) к сумме функций оператор может применяться почленно:

$$L\{x_1(t) + x_2(t)\} = L\{x_1(t)\} + L\{x_2(t)\};$$

2) постоянную величину c можно выносить за знак оператора:

$$L\{cx(t)\} = cL\{x(t)\}.$$

Из второго свойства следует, что для линейного однородного оператора справедливо свойство

$$L\{0\} = 0,$$

т. е. при нулевом входном воздействии реакция системы равна нулю.

Примеры линейных однородных операторов:

1) оператор дифференцирования:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt};$$

2) оператор интегрирования:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau;$$

3) оператор умножения на определенную функцию $\varphi(t)$:

$$y(t) = \varphi(t)x(t),$$

и т. д.

3. Спектральная теория случайных функций.

На различных примерах, приведённых ранее, мы наглядно убедились в том, что существует связь между характером корреляционной функции и внутренней структурой соответствующего ей случайного процесса. В зависимости от того, какие частоты и в каких соотношениях преобладают в составе случайной функции, ее корреляционная функция имеет тот или другой вид. Из таких соображений мы непосредственно приходим к понятию о спектральном составе случайной функции.

Понятие «спектра» встречается не только в теории случайных функций; оно широко применяется в математике, физике и технике.

Если какой-либо колебательный процесс представляется в виде суммы гармонических колебаний различных частот (так называемых «гармоник»), то спектром колебательного процесса называется функция, описывающая распределение амплитуд по различным частотам. Спектр показывает, какого рода колебания преобладают в данном процессе, какова его внутренняя структура.

Совершенно аналогичное спектральное описание можно дать и стационарному случайному процессу; вся разница в том, что для случайного процесса амплитуды колебаний будут случайными величинами. Спектр стационарной случайной функции будет описывать распределение дисперсий по различным частотам.

4. Спектральная теория случайных функций. Марковские процессы**.**

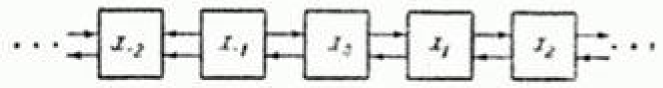
Процесс, протекающий в физической системе, называется **марковским** (или процессом без последействия), если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент (t_0) и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

Рассмотрим элементарный пример марковского случайного процесса. По оси абсцисс Ox случайным образом перемещается точка X. В момент времени $t = 0$ точка X находится в начале координат $(x = 0)$ и остаётся там в течение одной секунды. Через секунду бросается монета; если выпал герб - точка X перемещается на одну единицу длины вправо, если цифра - влево. Через секунду снова бросается монета и производится такое же случайное перемещение, и т. д.

Процесс изменения положения точки (или, как говорят, «блуждания») представляет собой случайный процесс с дискретным временем $(t = 0, 1, 2, ...)$ и счетным множеством состояний

$$x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_{-1} = -1;\ x_2 = 2;\ x_{-2} = -2;\ \ldots$$

Схема возможных переходов для этого процесса показана на рис.



Покажем, что этот процесс - марковский. Действительно, представим себе, что в какой-то момент времени t_0 система находится, например, в состоянии x_1 - на одну единицу правее начала координат. Возможные положения точки через единицу времени будут x_0 и x_2 с вероятностями 1/2 и 1/2; через две единицы - x_{-1}, x_1, x_3 с вероятностями 1/4, ½, 1/4 и так далее. Очевидно, все эти вероятности зависят только от того, где находится точка в данный момент t_0, и совершенно не зависят от того, как она пришла туда.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа № 1 (2 часа).

Тема: «Аппроксимация функций в среде MathCAD»

2.1.1 Цель работы: ознакомиться с возможностями аппроксимации опытных данных на примере метода наименьших квадратов; научиться решать задачу численной аппроксимации при работе с таблично заданными функциями.

2.1.2 Задачи работы:

1. Постановка задачи численной аппроксимации.
2. Аппроксимация таблично заданных функций методом наименьших квадратов.

2.1.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.1.4 Описание (ход) работы:

1. Производится *n* наблюдений (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)переменных *x* и *y*. Предполагая, что между *x* и *y* существует зависимость вида $y = f(x)$, найти значения параметров *a и b,* наилучшим образом согласованные с экспериментальными данными.

Согласно методу наименьших квадратов параметры функции следует выбирать так, чтобы сумма квадратов невязок была наименьшей.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i \right)^2$$

2. Если $f(x)$ — линейная функция, т.е. $y = ax + b$, то $S = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i \right)^2$, а неизвестные параметры *a* и *b* определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ \sum_{i-1}^{n} x_i \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

3. Если $f(x)$ — квадратичная функция, т.е. $y = ax^2 + bx + c$, то $S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$, а неизвестные параметры a, b, c определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot c = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i, \\ \sum_{i-1}^{n} x_i^3 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot c = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b + n \cdot c = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

4. Линейная регрессия

Для расчета линейной регрессии в MathCAD необходимо воспользоваться следующими операторами:

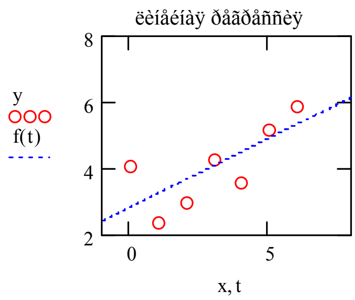
- line (x,y) - вектор из двух элементов (b,a) коэффициентов линейной регрессии $y = b + ax$;
- intercept (x, y) - коэффициент b линейной регрессии;
- slope (x, y) - коэффициент a линейной регрессии;
- x - вектор действительных данных аргумента;
- y - вектор действительных данных значений того же размера.

Пример 1. Линейная регрессия

$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$ $\qquad$ $y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$

$\mathrm{line}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.829 \\ 0.414 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{intercept}\,(x, y) = 2.829$ $\qquad$ $\mathrm{slope}\,(x, y) = 0.414$

$f(t) := \mathrm{line}(x, y)_0 + \mathrm{line}(x, y)_1 \cdot t$



Пример 2. Имеются следующие данные о расходах на рекламу x (тыс. усл. ед) и сбыте продукции y (тыс. ед):

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y_i	**1,6**	**4,0**	**7,4**	**12,0**	**18,0**

Методом наименьших квадратов найти эмпирические формулы прямой $y = ax + b$ и многочлена второй степени $y = ax^2 + bx + c$, аппроксимирующие функцию, заданную таблично. Найти значение многочленов первой и второй степеней в заданных точках, абсолютную погрешность в них и среднеквадратическую погрешность.

Выяснить, какая зависимость предпочтительнее. Построить графики. Для этой же функции построить многочлен первой степени, пользуясь встроенными функциями системы MathCAD для линейной регрессии. Графически сравнить полученные результаты.

Решение:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\,y_i$	$x_i^2\,y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4,0	4	8	16	8,0	16,0
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12,0	16	64	256	48,0	196,0
5	5	18,0	25	125	625	90,0	450,0
$\sum$	**15**	**43,0**	**55**	**225**	**979**	**169,8**	**680,2**

Система нормальных уравнений имеет вид: $\begin{cases} 55a + 15b = 169{,}8, \\ 15a + 5b = 43. \end{cases}$ Её решения a=4,08, b=-3,64. Таким образом, линейная зависимость имеет вид: $y = 4{,}08x - 3{,}64$.

Система нормальных уравнений имеет вид: $\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 680{,}2, \\ 225a + 55b + 15c = 168{,}8, \\ 55a + 15b + 5c = 49{,}0. \end{cases}$ Её решения a=0,3, b=0,48, c=5,06. Таким образом, искомая квадратичная зависимость имеет вид: $y = 0{,}3x^2 + 0{,}48x + 5{,}06$.

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)$ - абсолютная погрешность для линейной зависимости

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ - среднеквадратическая погрешность для линейной зависимости

$[4{,}08 \cdot 1 - 3{,}64 - 1{,}6]^2 = [-1{,}16]^2 = 1{,}3456$ $\quad [4{,}08 \cdot 2 - 3{,}64 - 4]^2 = [0{,}52]^2 = 0{,}2704$

$[4{,}08 \cdot 3 - 3{,}64 - 7{,}4]^2 = [1{,}2]^2 = 1{,}44$ $\quad [4{,}08 \cdot 4 - 3{,}64 - 12]^2 = [0{,}68]^2 = 0{,}4624$

$$[4{,}08 \cdot 5 - 3{,}64 - 18]^2 = [-1{,}24]^2 = 1{,}5376$$

$$\sum_{i=1}^{5}(4{,}08x_i - 3{,}64 - y_i) = -1{,}16 + 0{,}52 + 1{,}2 + 0{,}68 - 1{,}24 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5}(4{,}08x_i - 3{,}64 - y_i)^2 = 1{,}3456 + 0{,}2704 + 1{,}44 + 0{,}4624 + 1{,}5376 = 5{,}056$$

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)$ - абсолютная погрешность для квадратичной зависимости

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ - среднеквадратическая погрешность для квадратичной зависимости

$[0{,}3 \cdot 1^2 + 0{,}48 \cdot 1 + 5{,}06 - 1{,}6]^2 = [4{,}24]^2 = 17{,}9776$ $\quad [0{,}3 \cdot 2^2 + 0{,}48 \cdot 2 + 5{,}06 - 4]^2 = [3{,}22]^2 = 10{,}3684$

$[0{,}3 \cdot 3^2 + 0{,}48 \cdot 3 + 5{,}06 - 7{,}4]^2 = [1{,}8]^2 = 3{,}24$ $\quad [0{,}3 \cdot 4^2 + 0{,}48 \cdot 4 + 5{,}06 - 12]^2 = [-0{,}22]^2 = 0{,}0484$

$$[0{,}3 \cdot 5^2 + 0{,}48 \cdot 5 + 5{,}06 - 18]^2 = [-3{,}04]^2 = 9{,}2416$$

$$\sum_{i=1}^{5}(0{,}3x_i^2 + 0{,}48x_i + 5{,}06 - y_i) = 4{,}24 + 3{,}22 + 1{,}8 - 0{,}22 - 3{,}04 = 6$$

$$\sum_{i=1}^{5}(0{,}3x_i^2 + 0{,}48x_i + 5{,}06 - y_i)^2 = 17{,}9776 + 10{,}3684 + 3{,}24 + 0{,}0484 + 9{,}2416 = 40{,}876$$

Как видно $S_{лин}<S_{кв}$, следовательно, линейная зависимость предпочтительнее.

$$x := (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5)^T \qquad y := (1.6 \;\; 4 \;\; 7.4 \;\; 12 \;\; 18)^T$$

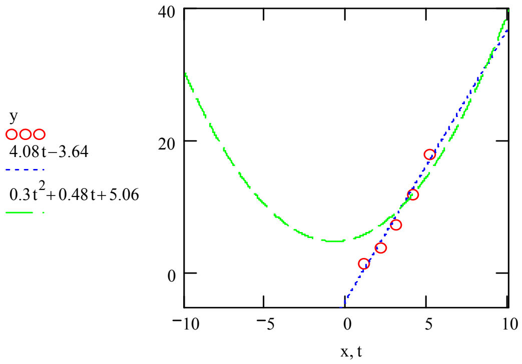


Рис. Изображение в ДСК опытных точек, линейной и квадратичной зависимостей

$$x := (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5)^T \qquad y := (1.6 \;\; 4 \;\; 7.4 \;\; 12 \;\; 18)^T$$

$$\mathrm{line}(x,y) = \begin{pmatrix} -3.64 \\ 4.08 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} \mathrm{intercept}(x,y) &= -3.64 \\ \mathrm{slope}(x,y) &= 4.08 \end{aligned}$$

$$f(t) := \mathrm{line}(x,y)_0 + \mathrm{line}(x,y)_1 \cdot t$$

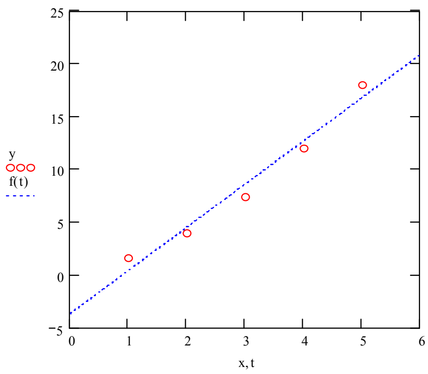


Рис. Изображение в ДСК опытных точек и графика линейной регрессии

Контрольные вопросы

1. Что значит аппроксимировать табличную функцию?
2. Какая функция называется эмпирической? Назовите этапы получения эмпирической формулы. Как определить общий вид эмпирической формулы?
3. В чём заключается принцип Лежандра?

2.2 Лабораторная работа № 2 (2 часа).

Тема: «Обработка опытов»

2.2.1 Цель работы: ознакомиться с возможностями математической статистики по обработке опытных данных; научиться решать задачу первичной обработки данных и статистического оценивания.

2.2.2 Задачи работы:

1. Особенности обработки ограниченного числа опытов.
2. Оценки характеристик выборки.
3. Оценки неизвестных параметров закона распределения.

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.2.4 Описание (ход) работы:

№1. В парке учебных машин в течении 30 дней проводились наблюдения над числом выездов в день. Получили следующие результаты:

3	1	3	1	4	5	2	4	0	7	0	2	2	0	2
5	4	3	7	1	4	2	2	1	7	2	1	0	3	6

Проведите первичную обработку выборочных данных и оцените параметры генеральной совокупности (точечно и используя метод доверительных интервалов).

А) К какому группировочному типу (дискретному или непрерывному) относится признак?

Б) Составьте ранжированный ряд:

____

В) Перечислите, какие значения принимает признак:________________________

Объем выборки_____ максимальное значение_____ минимальное значение____

Г) Составьте статистический ряд распределения данного признака,

⇐ подпишите заголовки столбцов

x_i	n_i

$x_i \cdot n_i$

$\sum =$

$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$

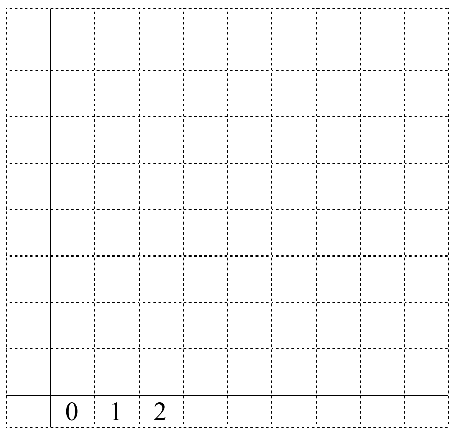
$\sum =$

Д) Постройте полигон частот

Вычислите и подпишите, что означают найденные вами значения

Е) $R =$ ________________________________

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} =$$ ______________________



$Mo =$ ______________________________

Ж) $$D = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} =$$

________________________________ ________

$\sigma = \sqrt{D} =$

____

Вывод:____

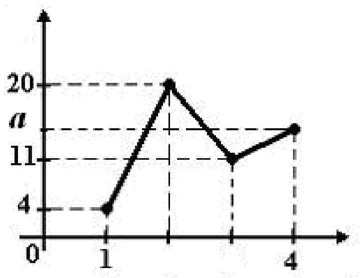
____

____

№2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=50, на рисунке изображен полигон частот изучаемого количественного признака.

Подписите название осей: ____

Постройте соответствующий ряд распределения.



Чему равно значение a? ________________
Чему равно значение R? ________________

2.3 Лабораторная работа № 3 (2 часа).

Тема: «Обработка опытов (продолжение)»

2.3.1 Цель работы: ознакомиться с возможностями математической статистики по обработке опытных данных; научиться решать задачу оценки неизвестных параметров закона распределения.

2.3.2 Задачи работы:

1. Оценки неизвестных параметров закона распределения.
2. Оценка вероятности по частоте.

2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.3.4 Описание (ход) работы:

№1. В результате взвешивания 50 клубней (гр.), получили следующие результаты:

93	209	135	216	206	80	197	134	145	183
251	53	142	120	147	159	111	185	200	191
96	206	138	213	209	77	200	131	148	180
253	50	145	117	180	156	113	181	203	188
152	150	110	118	140	81	120	135	220	144

Проведите выравнивание статистического ряда, методом моментов оцените параметры предполагаемого распределения.

А) К какому группировочному типу (дискретному или непрерывному) относится признак? ____

Б) Объем выборки____ максимальное значение____ минимальное значение___

В) На какое количество интервалов лучше разбить данные __________________.
Почему? ____
Рассчитайте ширину классового интервала

____

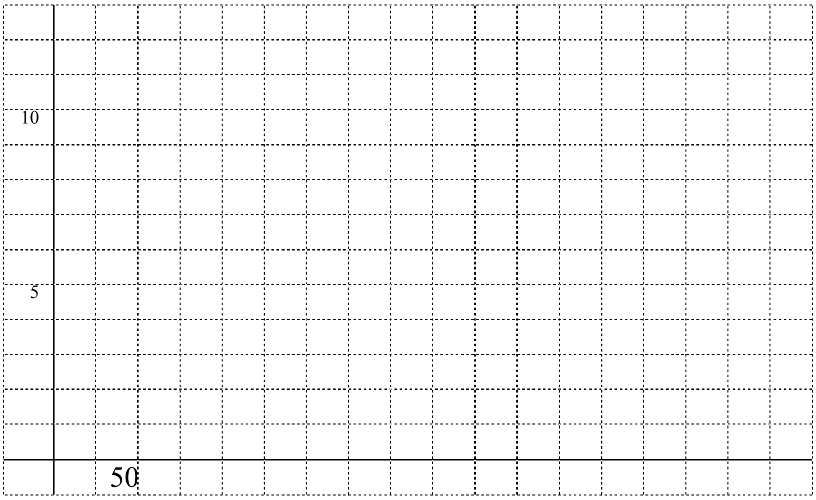
В) Составьте статистическую таблицу распределения данного признака, дайте название колонкам.

$x_i - x_{i+1}$	n_i

$\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$	$\frac{x_{i+1}+x_i}{2} n_i$

$\sum =$

Г) Постройте гистограмму. Проведите выравнивание статистического ряда.



Вычислите и подпишите, что означают найденные вами значения

Д) $R=$ ____

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} =$$ ____

$Mo=$____

Вывод:

____

____

2.4 Лабораторная работа № 4 (2 часа).

Тема: «Обработка опытов (продолжение)»

2.4.1 Цель работы: ознакомиться с возможностями математической статистики по обработке опытных данных; научиться решать задачу оценки неизвестных параметров системы случайных величин.

2.4.2 Задачи работы:

1. Способы задания и характеристики системы случайных величин.
2. Оценки характеристик системы случайных величин по опытным данным.

2.4.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.4.4 Описание (ход) работы:

Решите приведенные ниже задачи, используя теоретический материал соответствующей лекции.

Задача 1. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, У):

у / x	-1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

Найдите условное математическое ожидание М (Х/У=1); М(Х/У=0).

____
____
____
____

Задача 2.

у / x	2	5
8	0,15	0,10
10	0,22	0,23
12	0,10	0,20

Для данного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины (Х,У) найдите коэффициент корреляции.

____
____
____
____

Задача 3. Задан закон распределения двумерной случайной величины (Х, У):

у / x	0	1	2	3
-1	0,02	0,06	0,08	0,04
0	0,03	0,12	0,20	0,15
1	0,05	0,02	0,22	0,01

Найдите:

а) закон распределения и числовые характеристики СВ У; б) условное распределение случайной величины У при условии, что Х принимает значение, равное 0. Определите, являются ли случайные величины Х и У независимыми.

____
____
____
____

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры испытаний, результат которых определяется несколькими случайными величинами.
2. Дайте определение многомерной случайной величины и его геометрическое толкование.
3. Назовите виды многомерных случайных величин.
4. Запишите функцию распределения двумерной случайной величины.
5. Дайте геометрическую интерпретацию функции распределения двумерной случайной величины.
6. Как задается распределение двумерной дискретной и двумерной непрерывной случайной величины?
7. Что такое условное распределение? Запишите формулу условного распределения дискретной случайной величины (Х, У).
8. Запишите формулу для вычисления вероятности попадания значений двумерной случайной величины в прямоугольную область D.
9. Дайте определение плотности вероятности непрерывной двумерной случайной величины. Запишите формулу связи функции распределения и плотности вероятности.
10. Запишите теорему умножения плотности распределения двумерной случайной величины (Х, У).

2.5 Лабораторная работа № 5 (2 часа).

Тема: «Моделирование случайного процесса»

2.5.1 Цель работы:

2.5.2 Задачи работы:

1. Выборка случайных данных.
2. Генерация псевдослучайного процесса.
3. Огибающая и фаза нормального случайного процесса.

2.5.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.5.4 Описание (ход) работы:

Описание задачи

У вас есть 10 монет. Вы хотите увеличить свой капитал в два раза. Играя с маклером, вы делаете ставку и бросаете монету. Если выпадает “орел”, маклер выдает вам сумму вашей ставки, в противном случае вы ему отдаете эту сумму. Ставка может быть от 1 до 10 монет. Удвоение начального капитала или банкротство приводит к незамедлительному прекращению этого сеанса игры и расчету. Игра может продолжиться по вашему усмотрению.

Цель моделирования

-Варьируя ставки в игре, выяснить, какая тактика чаще приводит к результату (положительному или отрицательному).

- Предупредить излишне азартных игроков о невозможности обогащения за счет азартных игр и о степени связанного с ними риска.

Анализ объекта

Моделируем игру. Игра – это процесс, в котором участвуют три объекта: игрок, маклер и “случай”, который здесь представлен монетой. Игрок обладает начальным капиталом, который в дальнейшем увеличивается или уменьшается. Другой параметр игрока – величина ставки. Маклер определяет проигрыш или выигрыш игрока, выплачивая выигрыш. Параметром монеты является результат броска – “орел” или “решка”. Случай характеризуется угадываем того, на какую сторону ляжет монета, и имеет два значения -–“угадал” (1) или “не угадал” (0).
При этом вероятность выпадения той или иной стороны 0,5.

Разработка модели

Информационная модель

Объект “игрок” имеет *управляемые параметры*: Ставка – количество поставленных на бросок монет; Наличность – количество монет у игрока после очередного броска.
имеет *неуправляемые параметры (константы)*:Начальный капитал: 10 монет.
Действия над объектом: Выбор ставки; Вычисление наличности; Продолжение игры.
Объект “маклер” имеет *управляемые параметры*: Бросок – определение выигрыша или проигрыша после очередного броска; Выигрыш – прекращение игры после увеличения капитала игрока вдвое или больше; Проигрыш – прекращение игры после банкротства игрока.
имеет *неуправляемые параметры (константы)*: Нет.
Действия над объектом: Выплата проигранного; Прекращение игры по банкротству.
Объект “монета (случай)” имеет *управляемые параметры*: Положение при приземлении (“орел” или “решка”).
имеет *неуправляемые параметры (константы)*: Количество возможных вариантов падения: 2; Вероятность угадывания результата 1/2.
Действия над объектом: Подбрасывание монеты; Определение результата падения.

Логико-математическая модель

Имитировать угадывание результата броска монеты можно с помощью функции СЛЧИС(). Эта функция выдает случайные числа *x* в диапазоне 0<=*x*<1. Поскольку вероятность выпадения той или иной стороны S, то будем считать: если СЛЧИС<0,5 , то результат “угадал” (1), в противном случае – “не угадал” (0). В модели используется логическая функция ЕСЛИ (Условие; Знач Истина; Знач Ложь).
Функция угадывания результата при броске имеет вид:
Бросок = ЕСЛИ(СЛЧИС<0,5;1;0),
здесь “1” на выходе функции означает, что игрок угадал, а “0” – не угадал.
Функция изменения наличности игрока:
Наличность = ЕСЛИ(Бросок=1; Наличность + Ставка; Наличность – Ставка).
Функция определения выигрыша:
Выигрыш = ЕСЛИ(Наличность< 2*Начкапитал; “-“; “банк”),
здесь выдается сообщение “банк” при увеличении начального капитала вдвое или больше, что является условием прекращения игры.
Функция определения проигрыша:
Проигрыш = ЕСЛИ(Наличность>0; “-“; “банкрот”),
здесь выдается сообщение “банкрот” по окончании наличности, что также является условием прекращения игры.

Компьютерная модель

Для моделирования выберем среду электронной таблицы. В этой среде информационная и математическая модели объединяются в таблицу, которая содержит две области: исходные данные – константы и управляемые параметры; расчетные данные (результаты).

Задание

Ввести в таблицу исходные данные, а в расчетную часть – следующие формулы в ячейки:
A8: =ЕСЛИ(СЛЧИС()<0,5; 0; 1)
B8: =ЕСЛИ(A8=1; $B$5+$D$5; $B$5-$D$5)
C8: =ЕСЛИ(B8<2*$B$5; “-”; “банк”)

D8: =ЕСЛИ(B8>0; "-"; "банкрот")
B9: =ЕСЛИ(A9=1; B8+$D$5; B8-$D$5)
При записи формул вставки стандартных функций ЕСЛИ(…) и СЛЧИС(…).

Компьютерный эксперимент

План моделирования

1. Проверить правильность ввода формул.
2. Провести расчеты.
3. Результаты расчетов проанализировать.

Технология моделирования

1. Ввести в таблицу контрольные данные и расчетные формулы в первую строку.
2. Скопировать формулы в нижестоящие ячейки в обозримом пространстве экрана (20 попыток)

Появление в столбце "Выигрыш" сообщения "банк" означает удвоение наличности. Появление в столбце "Проигрыш" сообщения "банкрот" - нулевую наличность. И то и другое приводит к концу сеанса игры. Следующий сеанс игры проводится в тех же ячейках путем обновления данных 1-го столбца, для чего столбец следует выделить и выбрать команду **Заменить** по столбцам меню **Правка**.

Приведите статистику выигрышей и проигрышей, повторяя игру многократно, и сделайте выводы.

2.6 Лабораторная работа № 6 (2 часа).

Тема: «Характеристики случайной функции»

2.6.1 Цель работы: усвоить вероятностный смысл и назначение характеристик случайной функции; изучить методы оценки характеристик по опытным данным.

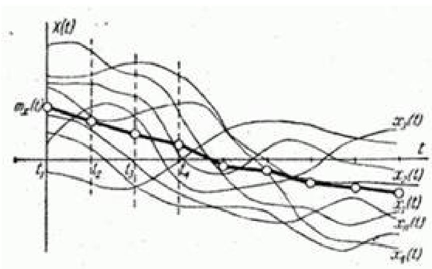
2.6.2 Задачи работы:

1. Свойства и вероятностный смысл характеристик.
2. Определение характеристик случайной функции из опыта.

2.6.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.6.4 Описание (ход) работы:

Пусть над случайной функцией $X(t)$ произведено n независимых опытов (наблюдений) и в результате получено n реализаций случайной функции .



Требуется найти оценки для характеристик случайной функции: ее математического ожидания $m_x(t)$, дисперсии $D_x(t)$ и корреляционной функции $K_x(t,t')$.

Для этого рассмотрим ряд сечений случайной функции для моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ и зарегистрируем значения, принятые функцией $X(t)$ в эти моменты времени. Каждому из моментов $t_1, t_2, \ldots, t_m$ будет соответствовать n значений случайной функции.

Значения $t_1, t_2, \ldots, t_m$ обычно задаются равноотстоящими точками: величина интервала между соседними значениями выбирается в зависимости от вида экспериментальных кривых так, чтобы по выбранным точкам можно было восстановить основной ход кривых. Зарегистрированные значения $X(t)$ заносятся в таблицу, каждая строка которой соответствует определенной реализации, а число столбцов равно числу опорных значений аргумента.

Таблица 1

t $X(t)$	t_1	t_2	$\ldots$	t_k	$\ldots$	t_l	$\ldots$	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	$\ldots$	$x_1(t_k)$	$\ldots$	$x_1(t_l)$	$\ldots$	$x_1(t_m)$
$x_1(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	$\ldots$	$x_2(t_k)$	$\ldots$	$x_2(t_l)$	$\ldots$	$x_2(t_m)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	$x_i(t_2)$	$\ldots$	$x_i(t_k)$	$\ldots$	$x_i(t_l)$	$\ldots$	$x_i(t_m)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	$\ldots$	$x_n(t_k)$	$\ldots$	$x_n(t_l)$	$\ldots$	$x_n(t_m)$

В таблице 1 в i-й строке помещены значения случайной функции, наблюденной в i-й реализации (i-м опыте) при значениях аргумента $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Символом $x_i(t_k)$ обозначено значение, соответствующее i-й реализации в момент t_k.Полученный материал представляет собой не что иное, как результаты n опытов над системой m случайных величин

$X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m)$,

Прежде всего находятся оценки для математических ожиданий по формуле

$$\tilde{m}_k(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(t_k)}{n},$$ затем - для дисперсий $$\tilde{D}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)\right]^2}{n-1}$$

и, наконец, для корреляционных моментов

$$\tilde{K}_x(t_k, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)\right]\left[x_i(t_l) - \tilde{m}_x(t_l)\right]}{n-1}.$$

После того, как эти характеристики вычислены, можно, пользуясь рядом значений $\tilde{m}_x(t_1), \tilde{m}_x(t_2), \ldots, \tilde{m}_x(t_m)$, построить зависимость $\tilde{m}_x(t)$. Аналогично строится зависимость $\tilde{D}_x(t)$. Функция двух аргументов $\tilde{K}_x(t, t')$ воспроизводится по ее значениям в прямоугольной сетке точек. В случае надобности все эти функции аппроксимируются какими-либо аналитическими выражениями.

Контрольные вопросы

1. Можно ли утверждать, что случайной называется функция случайного аргумента?
2. Можно ли рассматривать случайную функцию как совокупность всех ее возможных сечений?
3. Чему равно математическое ожидание центрированной случайной функции?
4. Дана случайная функция, найти ее характеристики. Так формулируется задача анализа или синтеза?
5. Дайте геометрическую интерпретацию математического ожидания случайной функции при фиксированном значении аргумента.
6. Что называется дисперсией случайной функции? Каковы основные свойства дисперсии?
7. Что называется корреляционной функцией случайной функции? Почему это функция двух аргументов? Каковы ее основные свойства?
8. Случайная функция всегда является функцией времени?

2.7 Лабораторная работа № 7 (2 часа).

Тема: «Характеристики случайной функции (продолжение)»

2.7.1 Цель работы: проанализировать влияние линейных операторов на характеристики входного воздействия; изучить методы определения характеристик преобразованных случайных функций по характеристикам исходных.

2.7.2 Задачи работы:

1. Линейные преобразования случайных функций.
2. Методы определения характеристик преобразованных случайных функций по характеристикам исходных случайных функций.

2.7.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.7.4 Описание (ход) работы:

Пусть на вход линейной системы с оператором L воздействует случайная функция $X(t)$, причем известны ее характеристики:

математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция $K_x(t,t')$. Реакция системы представляет собой случайную функцию $Y(t) = L\{X(t)\}$. Требуется найти характеристики случайной функции $Y(t)$ на выходе системы: $m_y(t)$ и $K_y(t,t')$.

Случайная функция $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейным однородным оператором интегрирования:

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau$$, тогда $$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau)d\tau$$

т. е. математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания

$$K_y(t,t')=\int_0^t\int_0^{t'} K_x(\tau,\tau')d\tau d\tau'$$.

Таким образом, для того чтобы **найти корреляционную функцию интеграла от случайной функции, нужно дважды проинтегрировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем - по другому.**

Для знакомства с методами определения характеристик преобразованных случайных функций по характеристикам исходных случайных функций, выполним несколько теоретических упражнений.

1. Если задана СФ $X(t)=Ue^{3t}\cos 2t$, где U–случайная величина и M(U)=5, D(U)=1, то математическое ожидание интеграла исходной функции имеет вид…

1) $5e^{3t}\cos 2t$; 2) $e^{3t}\cos 2t$; 3) $15e^{3t}\cos 2t$; 4) 1;

2. Задано математическое ожидание СФ $m_x(t)=t^2+7$, тогда математическое ожидание СФ $Y(t)= t X'(t)+ t^3$ имеет вид…

1) t^2+7; 2) $2t+7$; 3) $t^2(t+2)$; 4) 7;

3. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)=2e^{-0,5\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Дисперсия этой функции после воздействия оператора дифференцирования равна….

Дисперсия этой функции после воздействия оператора интегрирования равна….

Контрольные вопросы

1. Что называется динамической системой?
2. На какие классы делятся операторы динамических систем?
3. Что является суммой случайных функций? Может ли суммой случайных функций быть неслучайная функция?
4. Как меняются характеристики случайной функции после воздействия оператора дифференцирования?
5. Как меняются характеристики случайной функции после воздействия оператора интегрирования?

2.8 Лабораторная работа № 8 (2 часа).

Тема: «Динамические системы»

2.8.1 Цель работы: изучить основные понятия, связанные с теорией динамических систем; рассмотреть классические модели динамических систем

2.8.2 Задачи работы:

1. Постановка задачи.
2. Фазовый портрет динамической системы.
3. Классические динамические системы: автоколебания, аттрактор, брюсселятор

2.8.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

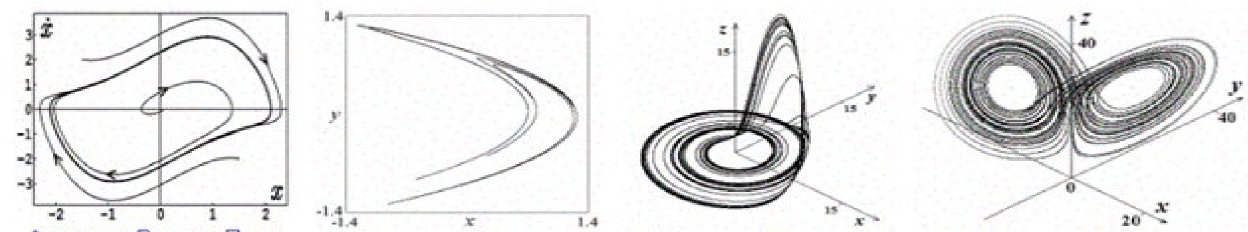
2.8.4 Описание (ход) работы:

Динамические системы можно классифицировать в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства. Если оператор предусматривает исключительно линейные преобразования начального состояния, то он называется линейным. Линейный оператор обладает свойством суперпозиции: T[x(t)+y(t)]=Tx(t)+Ty(t). Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется нелинейной. Различают непрерывные и дискретные операторы и соответственно системы с непрерывным и дискретным временем.

Способы задания оператора T также могут различаться. Оператор T можно задать в виде дифференциального или интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т.д.

В зависимости от того, какой ряд значений могут принимать фазовые координаты, определяющие состояние системы, различают непрерывные и дискретные фазовые пространства.

Поведение динамических систем изучают в «пространстве состояний». Точка в этом пространстве однозначно задает состояние системы. В простейшем случае, например, для маятника – это плоскость (координата, скорость). Притягивающие объекты в фазовом пространстве – аттракторы – определяют свойства установившегося с течением времени колебательного процесса в системе. Аттрактор (от английского to attract - притягивать) может иметь вид простой замкнутой кривой. Это предельный цикл, являющийся образом автоколебаний.



Аттрактор Ван-дер-Поля   Аттрактор Хенона   Аттрактор Рёсслера   Аттрактор Лоренца

Благодаря посещению различных областей в трехмерном пространстве фазовая траектория может «запутаться», что приводит к возникновению хаотических режимов. Основной атрибут хаоса – наличие очень сильной зависимости режима от начальных условий. В результате даже очень малое различие в начальных состояниях системы со временем приведет к существенному различию в поведении.

Задание

1. Дана функция $f(z)=z^2+c$, показать, что это множество не симметрично оси ординат. (Подсказка: c=-1 принадлежит множеству, c=1 не принадлежит множеству, далее исследовать орбиту нуля при обоих отображениях).

2. Дана функция $f(z)=z^2+0,1+0,1i$ найти неподвижные точки для этой функции и выяснить их характер двумя способами: 1) аналитический способ (через производную);
2) компьютерный эксперимент.

3. (Компьютерный эксперимент). Используйте компьютер для получения изображений множества Мандельброта для $f(z)=z^3+c$. Покажите, что если $|c|>2$, то $z \to \infty$.

4. Построить фазовые портреты динамических систем, заданные следующими операторами

1. $$y' = \frac{x-4y}{2y-3x}.$$

2. $$y' = \frac{y-2x}{y}.$$

Построение фазовых портретов динамических систем

1. Порядок построения фазового портрета линейной динамической системы

Для построения фазового портрета динамической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \tag{1}$$

необходимо выполнить следующие действия.

1. Выписать матрицу коэффициентов системы (1)

   $$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

   найти ее след $\operatorname{tr}\mathrm{M}$ и определитель $\det\mathrm{M}$.

2. Используя рис. 1, определить тип особой точки.

3. Найти уравнения особых направлений $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$.

   $$y = -\frac{a}{b}x,$$

   $$y = -\frac{c}{d}x.$$

4. Если особая точка является седлом или узлом, то найти асимптоты, используя подстановку $y = kx$.

5. Определить направление фазовых траекторий.

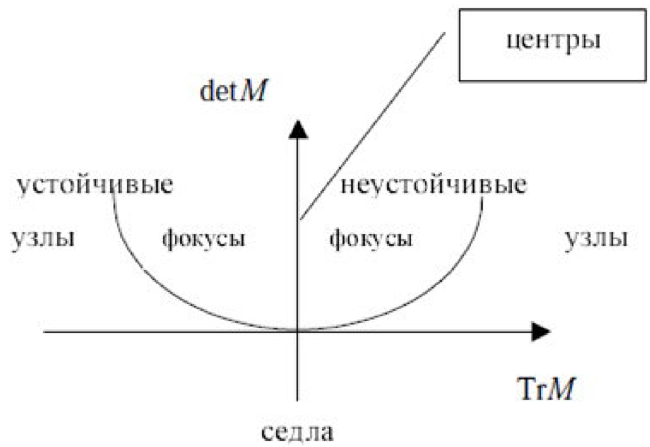


Рис. 1. Зависимость типа особой точки от определителя и следа матрицы коэффициентов динамической системы

2.9 Лабораторная работа № 9 (2 часа).

Тема: «Характеристики стационарной случайной функции»

2.9.1 Цель работы: усвоить вероятностный смысл, назначение и особенности характеристик стационарной случайной функции; изучить методы оценки характеристик по опытным данным.

2.9.2 Задачи работы:

1. Линейные преобразования стационарных случайных функций.
2. Методы определения характеристик преобразованных стационарных случайных функций по характеристикам исходных стационарных случайных функций.

2.9.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.9.4 Описание (ход) работы:

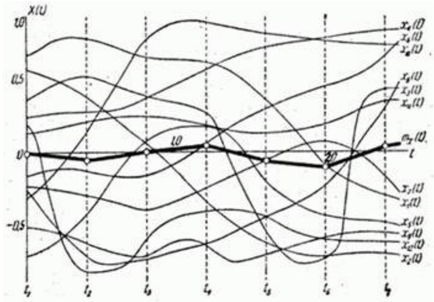
Случайная функция $X(t)$ называется стационарной, если все ее вероятностные характеристики не зависят от t (точнее, не меняются при любом сдвиге аргументов, от которых они зависят, по оси t). Так как изменение стационарной случайной функции должно протекать однородно по времени, то математическое ожидание должно быть постоянным.

Это требование не является существенным: мы знаем, что от случайной функции $X(t)$ всегда можно перейти к $\overset{\circ}{X}(t)$, для которой математическое ожидание тождественно равно нулю. Таким образом, если случайный процесс нестационарен только за счет переменного математического ожидания, это не мешает нам изучать его как стационарный процесс. Вообще, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна зависеть не от положения t первого аргумента на оси абсцисс, а только от промежутка τ между первым и вторым аргументами.

Поэтому в дальнейшем мы под стационарной случайной функцией будем понимать такую случайную функцию, корреляционная функция которой зависит не от обоих своих аргументов t и t', а только от разности τ между ними.

В качестве примеров рассмотрим два образца приблизительно стационарных случайных процессов и построим их характеристики.

Пример 1. Случайная функция $X(t)$ задана совокупностью 12 реализаций (рис. 1). а) Найти ее характеристики $m_x(t)$, $K_x(t,t')$, $D_x(t)$ и нормированную корреляционную функцию $r_x(t,t')$. б) Приближенно рассматривая случайную функцию $X(t)$ как стационарную, найти ее характеристики.



Решение. Так как случайная функция $X(t)$ меняется сравнительно плавно, можно брать сечения не очень часто, например через 0,4 сек. Тогда случайная функция будет сведена к системе семи случайных величин, отвечающих сечениям $t = 0;\ 0{,}4;\ 0{,}8;\ 1{,}2;\ 1{,}6;\ 2{,}0;\ 2{,}4$. Намечая эти сечения на графике и снимая с графика значения случайной функции в этих сечениях, получим таблицу (табл. 1).

Таблица 1

t / № реализации	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
1	0,64	0,74	0,62	0,59	0,35	-0,09	0,39
2	0,54	0,37	0,06	-0,32	-0,60	-0,69	-0,67
3	0,34	0,50	0,37	0,26	-0,52	-0,72	0,42
4	0,23	0,26	0,35	0,55	0,69	0,75	0,80
5	0,12	0,20	0,24	0,18	-0,20	-0,42	-0,46
6	-0,16	-0,12	-0,15	0,05	0,29	0,43	0,63
7	-0,22	-0,29	-0,38	-0,24	-0,06	0,07	-0,16
8	-0,26	-0,69	-0,70	-0,61	-0,43	-0,22	0,29
9	-0,50	-0,60	-0,68	-0,62	-0,68	-0,56	-0,54
10	-0,30	0,13	0,75	0,84	0,78	0,73	0,71
11	-0,69	-0,40	0,08	0,16	0,12	0,18	0,33
12	0,18	-0,79	-0,56	-0,39	-0,42	-0,58	-0,53

Таблицу рекомендуется заполнять по строчкам, передвигаясь все время вдоль одной реализации.

Далее находим оценки для характеристик случайных величин $X(0), X(0{,}4), \ldots, X(2{,}4)$. Суммируя значения по столбцам и деля сумму на число реализаций $n = 12$, найдем приближенно зависимость математического ожидания от времени:

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\tilde{m}_x(t)$	-0,007	-0,057	0,000	0,037	-0,057	-0,093	0,036

Далее находим оценки для элементов корреляционной матрицы: дисперсий и корреляционных моментов. Вычисления удобнее всего производить по следующей схеме. Для вычисления статистической дисперсии суммируются квадраты чисел, стоящих в соответствующем столбце; сумма делится на $n = 12$; из результата вычитается квадрат соответствующего математического ожидания. Для получения несмещенной оценки результат множится на поправку $\frac{n}{n-1}=\frac{12}{11}$. Аналогично оцениваются корреляционные моменты.

Для вычисления статистического момента, отвечающего двум заданным сечениям, перемножаются числа, стоящие в соответствующих столбцах; произведении складываются алгебраически; полученная сумма делится на $n=12$; из результата вычитается произведение соответствующих математических ожиданий; для получения несмещенной оценки корреляционного момента результат множится на $\frac{n}{n-1}$.

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\tilde{D}_x(t)$	0,1632	0,2385	0,2356	0,2207	0,2407	0,2691	0,278

Извлекая из этих величин квадратные корни, найдем зависимость среднего квадратического отклонения $\tilde{\sigma}_x$ от времени:

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\tilde{\sigma}_x(t)$	0,404	0,488	0,485	0,470	0,491	0,519	0,536

Деля полученные значения на произведения соответствующих средних квадратических отклонений, получим таблицу значений нормированной корреляционной функции $\tilde{r}_x(t,t')$ (табл. 2).

Таблица 2

t / t'	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
0	1	0,700	0,405	0,241	-0,053	-0,306	-0,299
0,4		1	0,856	0,707	0,345	0,090	0,095
0,8			1	0,943	0,643	0,390	0,344
1,2				1	0,829	0,612	0,524
1,6					1	0,923	0,650
2,0						1	0,760
2,4							1

Если судить непосредственно по данным, полученным в результате обработки, то можно прийти к выводу, что случайная функция $X(t)$ стационарной не является: ее математическое ожидание не вполне постоянно; дисперсия также несколько меняется со временем; значения нормированной корреляционной функции вдоль параллелей главной диагонали также не вполне постоянны. Однако, принимая во внимание весьма ограниченное число обработанных реализаций ($n=12$) и в связи с этим наличие большого элемента случайности в полученных оценках, эти видимые отступления от стационарности вряд ли можно считать значимыми, тем более, что они не носят сколько-нибудь закономерного характера. Поэтому вполне целесообразной будет приближенная замена функции $X(t)$ стационарной. Для приведения функции к стационарной прежде всего осредним по времени оценки для математического ожидания:

$$\tilde{m}_x = \frac{\tilde{m}_x(0)+\tilde{m}_x(0,4)+..+\tilde{m}_x(2,4)}{7} \approx -0,22.$$

Аналогичным образом осредним оценки для дисперсии:

$$\tilde{D}_x = \frac{\tilde{D}_x(0)+\tilde{D}_x(0,4)+..+\tilde{D}_x(2,4)}{7} \approx 0,236.$$

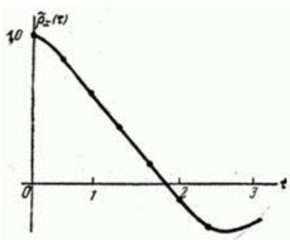
Извлекая корень, найдем осредненную оценку с. к. о.:

$$\tilde{\sigma}_x \approx 0,486.$$

Перейдем к построению нормированной корреляционной функции того стационарного процесса, которым можно заменить случайную функцию $X(t)$. Для стационарного процесса корреляционная функция (а значит, и нормированная корреляционная функция) зависит только от $\tau = t' - t$; следовательно, при постоянном τ корреляционная функция должна быть постоянной. В таблице 2 постоянному τ соответствуют: главная диагональ ($\tau = 0$) и параллели этой диагонали ($\tau = 0,4$; $\tau = 0,8$; $\tau = 1,2$ и т. д.). Осредняя оценки нормированной корреляционной функции вдоль этих параллелей главной диагонали, получим значения функции $\rho_x(\tau)$:

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\tilde{\rho}_x(\tau)$	1,00	0,84	0,60	0,38	0,13	-0,10	-0,30

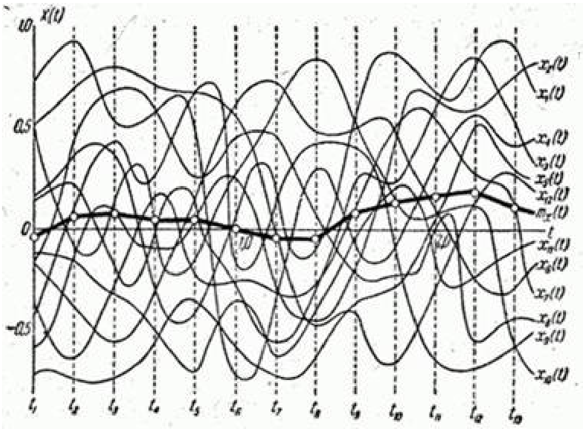
График функции $\tilde{\rho}_x(\tau)$ представлен на рис. 3



При рассмотрении рис. обращает на себя внимание наличие для некоторых τ отрицательных значений корреляционной функции. Это указывает на то, что в структуре случайной функции имеется некоторый элемент периодичности, в связи с чем на расстоянии по времени, равном примерно половине периода основных колебаний, наблюдается отрицательная корреляция между значениями случайной функции: положительным отклонениям от среднего в одном сечении соответствуют отрицательные отклонения через определенный промежуток времени, и наоборот.

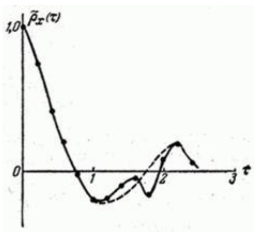
Такой характер корреляционной функции, с переходом на отрицательные значения, очень часто встречается на практике. Обычно в таких случаях по мере увеличения τ амплитуда колебаний корреляционной функции уменьшается и при дальнейшем увеличении τ корреляционная функция стремится к нулю.

Пример 2. Случайная функция $X(t)$ задана совокупностью 12 своих реализаций (рис. 4). Приближенно заменив функцию $X(t)$ стационарной, сравнить ее нормированную корреляционную функцию с функцией $\tilde{\rho}_x(\tau)$ предыдущего примера.



Решение. Так как случайная функция $X(t)$ отличается значительно менее плавным ходом по сравнению с функцией $X(t)$ предыдущего примера, промежуток между сечениями уже нельзя брать равным 0,4 сек, как в предыдущем примере, а следует взять по крайней мере вдвое меньше (например, 0,2 сек.). В результате обработки получаем оценку для нормированной корреляционной функции $\tilde{\rho}_x(\tau)$:

τ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$\tilde{\rho}_x(\tau)$	1,00	0,73	0,41	0,22	-0,01	-0,20	-0,19	-0,10	-0,06	-0,15	0,08	0,19	0,05



Из сравнения графиков видно, что корреляционная функция, изображенная убывает значительно быстрее. Это и естественно, так как характер изменения функции $X(t)$ в примере 1 гораздо более плавный и постепенный, чем в примере 2; в связи с этим корреляция между значениями случайной функции в примере 1 убывает медленнее.

При рассмотрении бросаются в глаза незакономерные колебания функции $\tilde{\rho}_x(\tau)$ для больших значений τ. Так как при больших значениях τ точки графика получены осреднением сравнительно очень небольшого числа данных, их нельзя считать надежными. В подобных случаях имеет смысл сгладить корреляционную функцию.

2.10. Лабораторная работа № 10 (2 часа).

Тема: «Стационарные случайные функции с эргодическим свойством»

2.10.1 Цель работы: проанализировать особенности процесса, обладающего эргодическим свойством, научиться определять характеристики таких процессов по одной реализации

2.10.2 Задачи работы:

1. Применение теории стационарных случайных процессов к решению задач, связанных с анализом и синтезом динамических систем.

2. Определение характеристик эргодической стационарной функции по одной реализации.

2.10.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

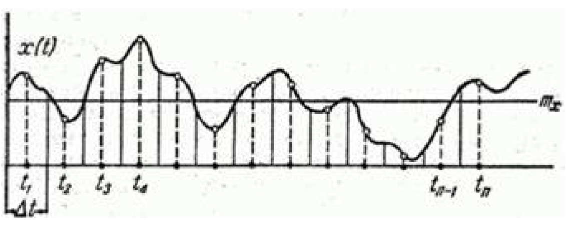
2.10.4 Описание (ход) работы:

Рассмотрим стационарную случайную функцию $X(t)$, обладающую эргодическим свойством, и предположим, что в нашем распоряжении имеется всего одна реализация этой случайной функции, но зато на достаточно большом участке времени T. Для эргодической стационарной случайной функции одна реализация достаточно большой продолжительности практически эквивалентна (в смысле объема сведений о случайной функции) множеству реализаций той же общей продолжительности; характеристики случайной функции могут быть приближенно определены не как средние по множеству наблюдений, а как средние по времени t. В частности, при достаточно большом T математическое ожидание m_x может быть приближенно вычислено по формуле $m_x \approx \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$.

Аналогично может быть приближенно найдена корреляционная функция $k_x(\tau)$ при любом τ.

$$k_x(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)dt.$$

Вычислив интеграл для ряда значений τ, можно приближенно воспроизвести по точкам весь ход корреляционной функции. На практике обычно интегралы заменяют конечными суммами. Покажем, как это делается. Разобьем интервал записи случайной функции на n равных частей длиной Δt и обозначим середины полученных участков $t_1, t_2, \dots, t_n$.



Предоставим интеграл как сумму интегралов по элементарным участкам Δt и на каждом из них вынесем функцию $x(t)$ из-под знака интеграла средним значением, соответствующим центру интервала $x(t_i)$. Получим приближенно: $m_x = \frac{1}{T}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_i)$, или $m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_i)$.

Аналогично можно вычислить корреляционную функцию для значений τ, равных $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$.

Придадим, например, величине τ значение $\tau = m\Delta t = \frac{mT}{n}$

вычислим интеграл , деля интервал интегрирования $T - \tau = T - \frac{mT}{n} = \frac{n-m}{n}T$

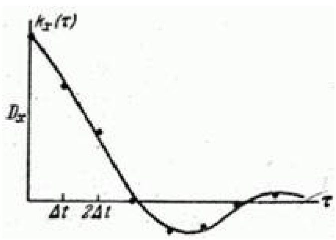
на $n-m$ равных участков длиной Δt и вынося на каждом из них функцию $\overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)$ за знак интеграла средним значением. Получим:

$$k_x\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{n}{(n-m)T}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n-m} \overset{\circ}{x}(t_i)\,\overset{\circ}{x}(t_{i+m}),$$

или окончательно

$$k_x\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m} \overset{\circ}{x}(t_i)\,\overset{\circ}{x}(t_{i+m}).$$

Вычисление корреляционной функции производят для $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно. Вплоть до таких значений m, при которых корреляционная функция становится практически равной нулю или начинает совершать небольшие нерегулярные колебания около нуля. Общий ход функции $k_x(\tau)$ воспроизводится по отдельным точкам.



Для того чтобы математическое ожидание m_x и корреляционная функция $k_x(\tau)$ были определены с удовлетворительной точностью, нужно, чтобы число точек n было достаточно велико (порядка сотни, а в некоторых случаях даже нескольких сотен). Выбор длины элементарного участка Δt определяется характером изменения случайной функции. Если случайная функция изменяется сравнительно плавно, участок Δt можно выбирать большим, чем когда она совершает резкие и частые колебания.

Чем более высокочастотный состав имеют колебания, образующие случайную функцию, тем чаще нужно располагать опорные точки при обработке. Ориентировочно можно рекомендовать выбирать элементарный участок Δt так, чтобы на полный период самой высокочастотной гармоники в составе случайной функции приходилось порядка 5-10 опорных точек.

Пример. В условиях работы экспериментального механизма произведена запись отклонений. Отклонения регистрировались на участке времени 200 сек с интервалом 2 сек. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

t (сек)	отклонение $N(t)$	t (сек)	отклонение $N(t)$	t (сек)	отклонение $N(t)$	t (сек)	отклонение $N(t)$
0	1,0	50	1,0	100	1,2	150	0,8
2	1,3	52	1,1	102	1,4	152	0,6
4	1,1	54	1,5	104	0,8	154	0,9
6	0,7	56	1,0	106	0,9	156	1,2
8	0,7	58	0,8	108	1,0	158	1,3
10	1,1	60	1,1	110	0,8	160	0,9
12	1,3	62	1,1	112	0,8	162	1,3
14	0,8	64	1,2	114	1,4	164	1,5
16	0,8	66	1,0	116	1,6	166	1,2
18	0,4	68	0,8	118	1,7	168	1,4
20	0,3	70	0,8	120	1,3	170	1,4
22	0,3	72	1,2	122	1,6	172	0,8
24	0,6	74	0,7	124	0,8	174	0,8
26	0,3	76	0,7	126	1,2	176	1,3
28	0,5	78	1,1	128	0,6	178	1,0
30	0,5	80	1,2	130	1,0	180	0,7
32	0,7	82	1,0	132	0,3	182	1,1
34	0,8	84	0,6	134	0,8	184	0,9
36	0,6	86	0,9	136	0,7	186	0,9
38	1,0	88	0,8	138	0,9	188	1,1
40	0,5	90	0,8	140	1,3	190	1,2
42	1,0	92	0,9	142	1,5	192	1,3
44	0,9	94	0,9	144	1,1	194	1,3
46	1,4	96	0,6	146	0,7	196	1,6
48	1,4	98	0,4	148	1,0	198	1,5

Считая процесс изменения отклонений стационарным, определить приближенно математическое ожидание m_N, дисперсию D_N и нормированную корреляционную функцию $\rho_N(\tau)$. Аппроксимировать $\rho_N(\tau)$ какой-либо аналитической функцией, найти и построить спектральную плотность случайного процесса.

Решение. По формуле имеем: $m_N = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} N(t_i)}{100} \approx 0,98$.

Центрируем случайную функцию.

Таблица 2

t (сек)	$\overset{\circ}{N}(t)$	t (сек)	$\overset{\circ}{N}(t)$	t (сек)	$\overset{\circ}{N}(t)$	t (сек)	$\overset{\circ}{N}(t)$
0	0,02	50	0,02	100	0,22	150	-0,18
2	0,32	52	0,12	102	0,42	152	-0,38
4	0,12	54	0,52	104	-0,18	154	-0,08

6	-0,28	56	0,02	106	-0,08	156	0,22
8	-0,28	58	-0,18	108	0,02	158	0,32
10	0,12	60	0,12	110	-0,18	160	-0,08
12	0,32	62	0,12	112	-0,18	162	0,32
14	-0,18	64	0,22	114	0,42	164	0,52
16	-0,18	66	0,02	116	0,62	166	0,22
18	-0,58	68	-0,18	118	0,72	168	0,42
20	-0,68	70	-0,18	120	0,32	170	0,42
22	-0,68	72	0,22	122	0,62	172	-0,18
24	-0,38	74	-0,28	124	-0,18	174	-0,18
26	-0,68	76	-0,28	126	0,22	176	0,32
28	-0,48	78	0,12	128	-0,38	178	0,02
30	-0,48	80	0,52	130	0,02	180	-0,28
32	-0,28	82	0,02	132	-0,38	182	0,12
34	-0,18	84	-0,38	134	-0,18	184	-0,08
36	-0,38	86	-0,08	136	-0,28	186	-0,08
38	0,02	88	-0,18	138	-0,08	188	0,12
40	-0,48	90	-0,18	140	0,32	190	0,22
42	0,02	92	-0,08	142	0,52	192	0,32
44	-0,08	94	-0,08	144	0,12	194	0,32
46	0,42	96	-0,38	146	-0,28	196	0,62
48	0,42	98	-0,58	148	0,02	198	0,52

Возводя в квадрат все значения $\overset{\circ}{N}(t)$ и деля сумму на $n = 100$ получим приближенно дисперсию случайной функции $N(t)$:

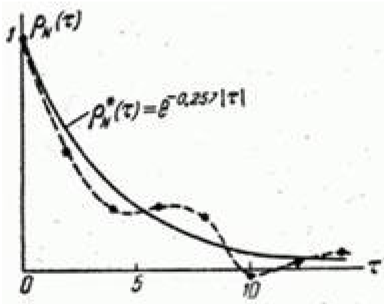
$$D_N = \frac{\sum_{i=1}^{100} \left[\overset{\circ}{N}(t_i)\right]^2}{100} \approx 0{,}1045$$

и среднее квадратическое отклонение: $\sigma_N \approx 0{,}323$.

Перемножая значения $\overset{\circ}{N}(t)$, разделенные интервалом $\tau = 2, 4, 6, \ldots$, и деля сумму произведений соответственно на $n-1=99$; $n-2=98$; $n-3=97$; …, получим значения корреляционной функции $k_N(\tau)$. Нормируя корреляционную функцию делением на $D_N = 0{,}1045$, получим таблицу значений функции $\rho_N(\tau)$.

Таблица 3

τ	$\rho_N(\tau)$	$\rho_N^*(\tau) = e^{-a\lvert\tau\rvert}$
отклонение 0	1,000	1,000
2	0,505	0,598
4	0,276	0,358
6	0,277	0,214
8	0,231	0,128
10	-0,015	0,077
12	0,014	0,046
14	0,071	0,027



Не вполне гладкий ход корреляционной функции может быть объяснен недостаточным объемом экспериментальных данных (недостаточной продолжительностью опыта), в связи с чем случайные неровности в ходе функции не успевают сгладиться. Вычисление $\rho_N(\tau)$ продолжено до таких значений при которых фактически корреляционная связь пропадает.

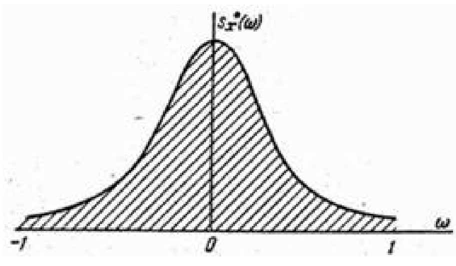
Для того чтобы сгладить явно незакономерные колебания экспериментально найденной функции $\rho_N(\tau)$, заменим ее приближенно функцией вида: $\rho_N^*(\tau)=e^{-a|\tau|}$,где параметр a подберем методом наименьших квадратов

Применяя этот метод, находим $a=0,257$. Вычисляя значения функции $\rho_N^*(\tau)$ при $\tau=0,2,4,\dots$, построим график сглаживающей кривой. На рис. он проведен сплошной линией. В последнем столбце таблицы 3 приведены значения функции $\rho_N^*(\tau)$.

Пользуясь приближенным выражением корреляционной функции, получим нормированную спектральную плотность случайного процесса в виде:

$$S_x^*(\omega)=\frac{a}{\pi(a^2+\omega^2)}=\frac{0,257}{\pi(0,257^2+\omega^2)}.$$

График нормированной спектральной плотности представлен на рис.



Контрольные вопросы:

1. Что, помимо корреляционной функции, характеризует внутреннюю структуру колебательного процесса? Что называется спектром колебательного процесса, представленного в виде суммы гармоник?

2. Как записывается каноническое разложение корреляционной функции стационарного случайного процесса? Как записывается спектральное разложение стационарного случайного процесса?

3. Какая функция называется спектральной плотностью дисперсии или спектральной плотностью стационарной случайной функции?

2.11. Лабораторная работа № 11 (2 часа).

Тема: «Метод канонических разложений случайных функций»

2.11.1 Цель работы: изучить теоретические основания метода канонических разложений, выявить и проанализировать особенности метода в ходе решения практических задач

2.11.2 Задачи работы:

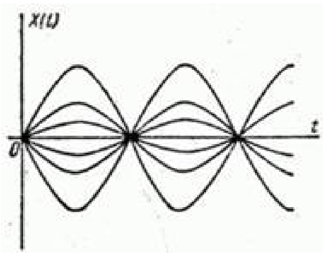
1. Представление случайной функции в виде суммы элементарных случайных функций.
2. Каноническое разложение случайной функции.
3. Линейные преобразования случайных функций, заданных каноническими разложениями.

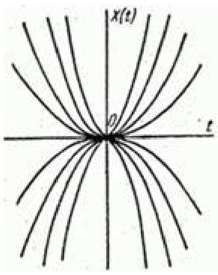
2.11.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.11.4 Описание (ход) работы:

Элементарной случайной функцией называется функция вида:
$X(t) = V\varphi(t)$, где V - обычная случайная величина, $\varphi(t)$ - обычная (неслучайная) функция. Элементарная случайная функция является наиболее простым типом случайной функции. Все возможные реализации элементарной случайной функции $X(t)$ могут быть получены из графика функции $x = \varphi(t)$ простым измерением масштаба по оси ординат

При этом ось абсцисс $(x = 0)$ также представляет собой одну из возможных реализаций случайной функции $X(t)$, осуществляющуюся, когда случайная величина V принимает значение 0 (если это значение принадлежит к числу возможных значений величины V). В качестве примеров элементарных случайных функций приведем функции $X(t) = V\sin t$ и $X(t) = Vt^2$.





Элементарная случайная функция характерна тем, что в ней разделены две особенности случайной функции: случайность вся сосредоточена в коэффициенте V, а зависимость от времени - в обычной функции $\varphi(t)$.

Когда элементарная случайная функция поступает на вход линейной системы, то задача ее преобразования сводится к простой задаче преобразования одной неслучайной функции $\varphi(t)$. Отсюда возникает идея: представить случайную функцию на входе - точно или приближенно - в виде суммы элементарных случайных функций и только затем подвергать преобразованию. Такая идея разложения случайной функции на сумму элементарных случайных функций и лежит в основе **метода канонических разложений**.

Пусть имеется случайная функция: $X(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t)$. Допустим, что нам удалось - точно или приближенно - представить ее в виде суммы

$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t)$, где V_i - случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю;

$\varphi_i(t)$ - неслучайные функции; $m_x(t)$ - математическое ожидание функции $X(t)$.

Обозначая $Y(t)$ реакцию системы на случайное воздействие $X(t)$, имеем:

$Y(t) = L\{X(t)\} = L\{m_x(t)\} + \sum_{i=1}^{m} V_i L\{\varphi_i(t)\}$. Придадим выражению несколько иную форму.

$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i \psi_i(t)$. Выражение представляет собой не что иное, как разложение случайной функции $Y(t)$ по элементарным функциям. Коэффициентами этого разложения являются те же случайные величины $V_1, V_2, \ldots, V_m$, а математическое ожидание и координатные функции получены из математического ожидания и координатных функций исходной случайной функции тем же линейным преобразованием L, какому подвергается случайная функция $X(t)$.

Если случайная функция $X(t)$, заданная разложением по элементарным функциям, подвергается линейному преобразованию Z, то коэффициенты разложения остаются неизменными, а математическое ожидание и координатные функции подвергаются тому же линейному преобразованию L.

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$, заданную разложением

$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t)$,

где коэффициенты $V_1, V_2, \ldots, V_m$ представляют собой систему случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю и с корреляционной матрицей $\|K_{ij}\|$.

Найдем корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $X(t)$.

$K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\varphi_i(t')D_i - \sum_{i \neq j} \varphi_i(t)\varphi_j(t')K_{ij}$. Полагая в выражении $t' = t$ получим дисперсию случайной функции $X(t)$:

$D_x(t) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(t)]^2 D_i + \sum_{i \neq j} \varphi_i(t)\varphi_j(t)K_{ij}$.

Очевидно, эти выражения приобретают особенно простой вид, когда все коэффициенты V_i разложения некоррелированны, т. е. $K_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В этом случае разложение случайной функции называется «каноническим».

$K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\varphi_i(t')D_i$. $D_x(t) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(t)]^2 D_i$

Рассмотрим несколько подробнее применение метода канонических разложений к определению реакции динамической системы на случайное входное воздействие, когда работа системы описывается линейным дифференциальным уравнением, в общем случае - с переменными коэффициентами. Запишем это уравнение в операторной форме:

$$A_n(p,t)Y(t) = B_m(p,t)X(t) \; .$$

Согласно вышеизложенным правилам линейных преобразований случайных функций математические ожидания воздействия и реакции должны удовлетворять тому же уравнению:

$$A_n(p,t)m_y(t) = B_m(p,t)m_x(t)$$

. Аналогично каждая из координатных функций должна удовлетворять тому же дифференциальному уравнению:

$$A_n(p,t)\psi_i(t) = B_m(p,t)\varphi_i(t) \; , \; (i = 1, 2, \ldots, k) \; .$$

Таким образом, задача определения реакции линейной динамической системы на случайное воздействие свелась к обычной математической задаче интегрирования $k+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих обычные, не случайные функции. Остается осветить вопрос о начальных условиях, при которых следует интегрировать уравнения.

Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда начальные условия для данной динамической системы являются неслучайными. В этом случае при $t = 0$ должны выполняться условия:

$$\left.\begin{array}{l} Y(0) = y_0, \\ Y'(0) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y^{(r)}(0) = y_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \end{array}\right\}$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ - неслучайные числа.

Следует заметить, что на практике весьма часто встречаются случаи, когда для моментов времени, достаточно удаленных от начала случайного процесса, начальные условия уже не оказывают влияния на его течение: вызванные ими переходные процессы успевают затухнуть. Системы, обладающие таким свойством, называются асимптотически устойчивыми. Если нас интересует реакция асимптотически устойчивой динамической системы на участках времени, достаточно удаленных от начала, то можно ограничиться исследованием решения $Y_I(t)$, полученного при нулевых начальных условиях.

Для закрепления теоретического материала предлагаются следующие задачи:

1. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс X(t) с математическим ожиданием $\boldsymbol{m_X}$ и спектральной плотностью $\boldsymbol{S_X(\omega)}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса Y(t) на выходе системы в установившемся режиме: **$y''+4y'+4y = 3x'$, $m_X = 14$, $S_X(\omega) = 2(\sin 4\omega)/\omega$.**

2. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс X(t) с корреляционной функцией $\boldsymbol{k_X(\tau)}$. Найти спектральную плотность $\boldsymbol{S_Y(\omega)}$ случайного процесса Y(t) на выходе системы в установившемся режиме: ***$y''+6y'+5y = x''+7x'+10x$, $k_X(\tau) = 18/(9+\tau\ 2)$***

3. Является ли фильтром следующее линейное преобразование: $\eta(n) = (\xi(n+1) + \xi(n-1))/2$, $n \in Z$? Найти спектральную плотность $s\eta(\lambda)$, если ξ — стандартный белый шум. Какое физически реализуемое преобразование дает «на выходе» ту же спектральную плотность?

2.12. Лабораторная работа № 12 (2 часа).

Тема: «Спектральный анализ методом Фурье»

2.12.1 Цель работы: изучить теоретические основания метода Фурье, выявить и проанализировать особенности метода в ходе решения практических задач

2.12.2 Задачи работы:

1. Фурье-спектр действительных данных.
2. Обратное преобразование Фурье.
3. Преобразование Фурье комплексных данных.
4. Артефакты дискретного преобразования Фурье.

2.12.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.12.4 Описание (ход) работы:

Одним из фундаментальных положений математики, нашедшим широкое применение во многих прикладных задачах является возможность описания любой периодической функции $f(t)$ с периодом T с помощью тригонометрического ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t\right),$$

Этот ряд содержит бесконечное число косинусных или синусных составляющих - гармоник, причем амплитуды этих составляющих a_k и b_k являются коэффициентами Фурье, определяемыми интегральными выражениями:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_1 t\,dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_1 t\,dt.$$

Помимо упомянутой формы ряд Фурье можно представить в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\omega_1 t + \varphi_k\right),$$

где амплитуда A_k и фаза j_k гармоник определяются выражениями:

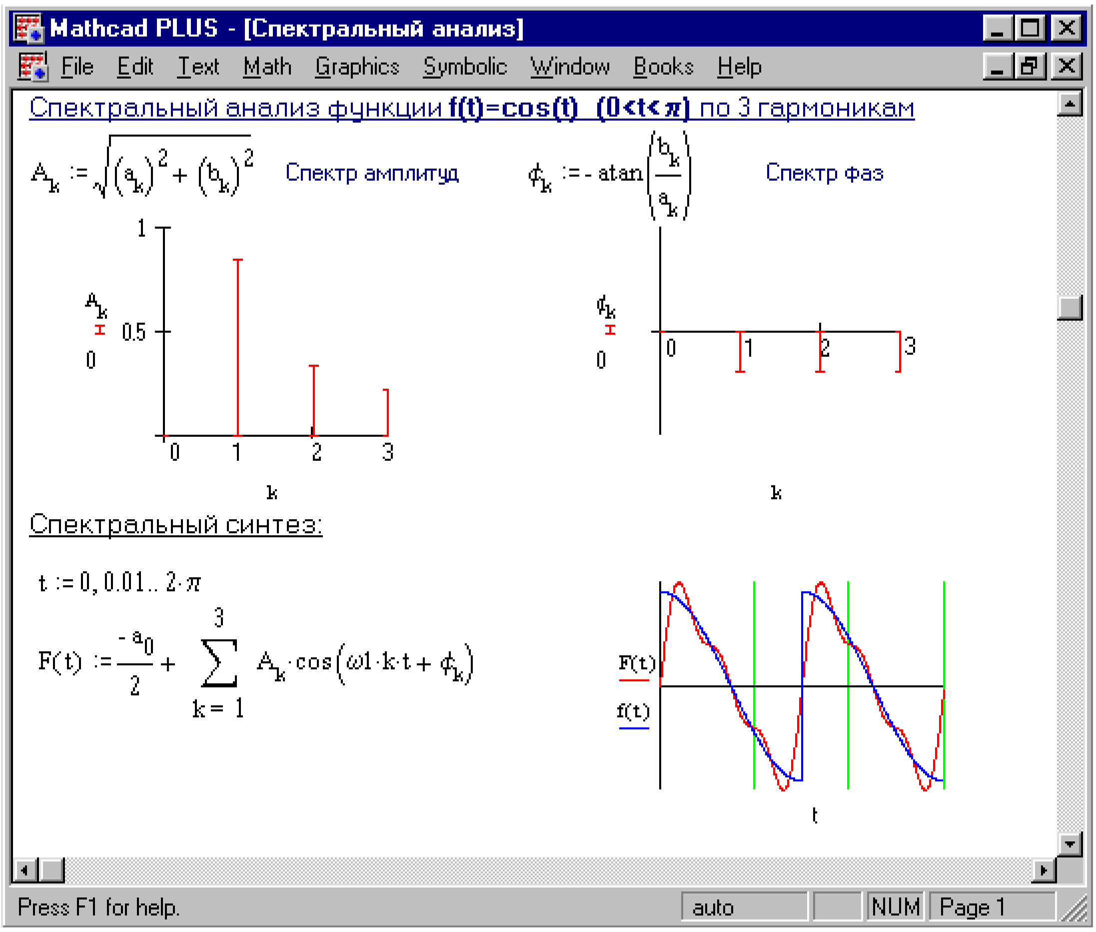
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

$$\varphi_k = -arctg\frac{b_k}{a_k}.$$

Классический спектральный анализ

Спектром временной зависимости (функции) $f(t)$ называется совокупность ее гармонических составляющих, образующих ряд Фурье. Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью A_k (*спектр амплитуд*) и j $_k$ (*спектр фаз*) от частоты $w_k = kw_1$.

Спектральный анализ периодических функций заключается в нахождении амплитуды A_k и фазы j $_k$ гармоник (косинусоид) ряда Фурье (4). Задача, обратная спектральному анализу, называется *спектральным синтезом.*



Численный спектральный анализ

Численный спектральный анализ заключается в нахождении коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ (или $A_1, A_2, ..., A_k, j_1, j_2, ..., j_k$) для периодической функции $y = f(t)$, заданной на отрезке [0, T] дискретными отсчетами. Он сводится к вычислению коэффициентов Фурье по формулам численного интегрирования для метода прямоугольников

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos k\omega_1 i\Delta t,$$

$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin k\omega_1 i\Delta t,$$

Спектральный анализ на основе быстрого преобразования Фурье

Встроенные в Mathcad средства быстрого преобразования Фурье (БПФ) существенно упрощают процедуру приближенного спектрального анализа. БПФ - быстрый алгоритм переноса сведений о функции, заданной 2^m (m - целое число) отсчетами во временной области, в частотную область.

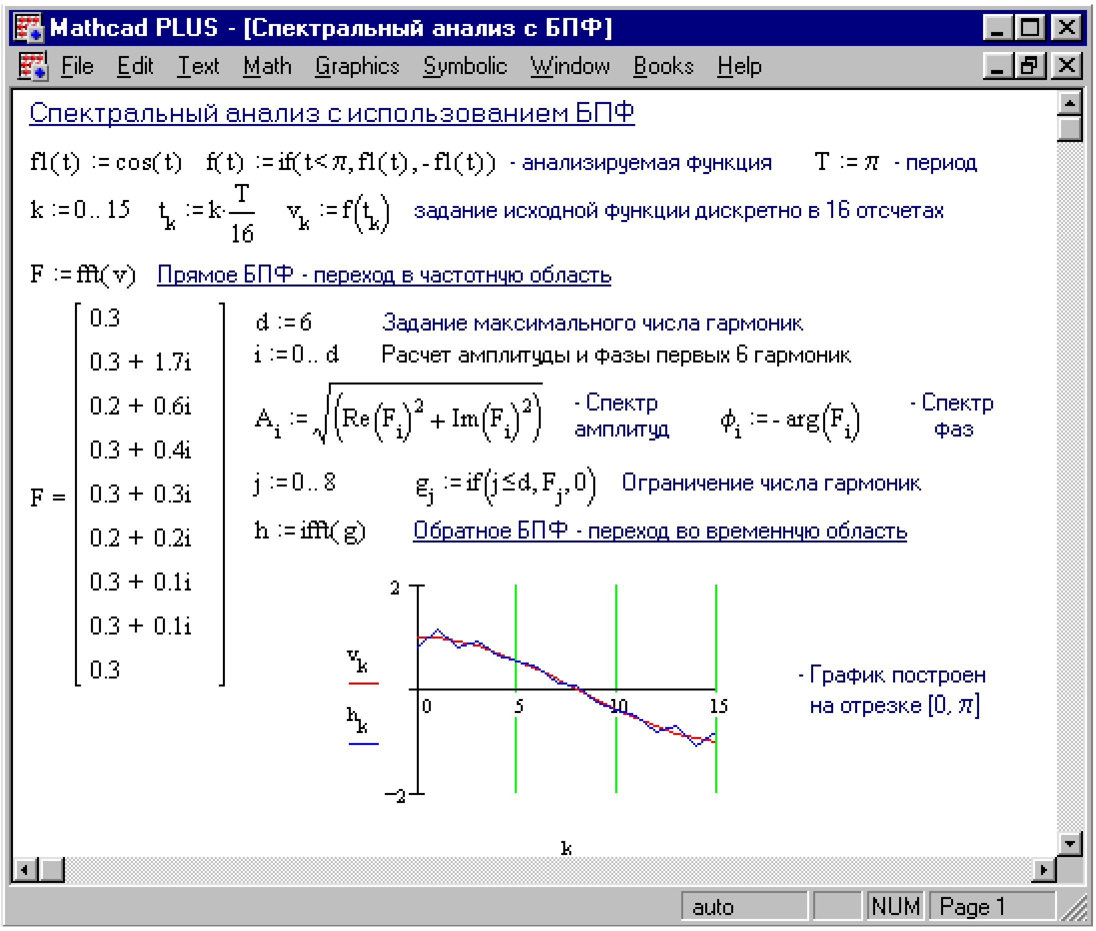
Если речь идет о функции $f(t)$, заданной действительными отсчетами, следует использовать функцию *fft*.

fft(v)	Возвращает прямое БПФ 2^m-мерного вещественнозначного вектора v, где v - вектор, элементы которого хранят отсчеты функции $f(t)$.

Результатом будет вектор A размерности $1 + 2^{m-1}$ с комплексными элементами - отсчетами в частотной области. Функция *ifft* реализует обратное БПФ:

ifft(v)	Возвращает обратное БПФ для вектора v с комплексными элементами. Вектор v имеет $1 + 2^{m-1}$ элементов.

Результатом будет вектор A размерности 2^m с действительными элементами.



Задание 1. Вычислить первые шесть пар коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $f(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Построить графики 1, 2 и 3 гармоник.

№ вар-та	$f(t)$	№ вар-та	$f(t)$	№ вар-та	$f(t)$
1	$\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 2t}$	**6**	$\cos t \cos \lvert \sin t \rvert$	**11**	$\sin\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
2	$\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 2t}$	**7**	$\mathrm{arctg}\left(\cos\frac{1}{2}t\right)$	**12**	$\cos\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
3	$\dfrac{\sin 2t+\sin^2 3t}{3+\sin t+\cos 2t}$	**8**	$e^{\sin\frac{1}{3}t}$	**13**	$e^{-10(t-\pi)^2}$
4	$\dfrac{\sin 3t}{\lvert\sin t\rvert+\lvert\cos t\rvert}$	**9**	$\lvert \sin t \rvert + \lvert \sin 2t \rvert$	**14**	$e^{\cos\frac{1}{3}t}$
5	$\cos e^{\lvert\sin 3t\rvert}$	**10**	$\sin\left(\frac{1}{2}t\right)^2$	**15**	$e^{-\cos\frac{1}{2}t}$ $\cos(\sin t)$

Задание 2. Выполнить классический спектральный анализ и синтез функции *f*(*t*). Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции *f*(*t*).

Задание 3. Выполнить численный спектральный анализ и синтез функции *f*(*t*). Для этого необходимо задать исходную функцию *f*(*t*) дискретно в 32 отсчетах. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции *f*(*t*).

Задание 4. Выполнить спектральный анализ и синтез функции *f*(*t*) с помощью БПФ. Для этого необходимо:

- задать исходную функцию *f*(*t*) дискретно в 128 отсчетах;
- выполнить прямое БПФ с помощью функции *fft* и отобразить графически найденные спектры амплитуд и фаз первых шести гармоник;
- выполнить обратное БПФ с помощью функции *ifft* и отобразить графически результат спектрального синтеза функции *f*(*t*).

2.13. Лабораторная работа № 13 (2 часа).

Тема: «Сглаживание и фильтрация опытных данных в среде MathCAD»

2.13.1 Цель работы: изучить возможности математического пакета MathCAD, которые могут быть использованы для обработки входных реализаций (сигналов) линейных динамических систем

2.13.2 Задачи работы:

1. Скользящее усреднение.
2. Устранение тренда.
3. Полосовая фильтрация.
4. Спектральная фильтрация.

2.13.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

спецификой дисциплины не предусмотрены

2.13.4 Описание (ход) работы:

В процессе сглаживания из исходного набора данных получается новый набор данных, более гладкий, чем исходной. В Mathcad имеются три встроенные функции, позволяющие произвести сглаживание некоторой выборки данных:

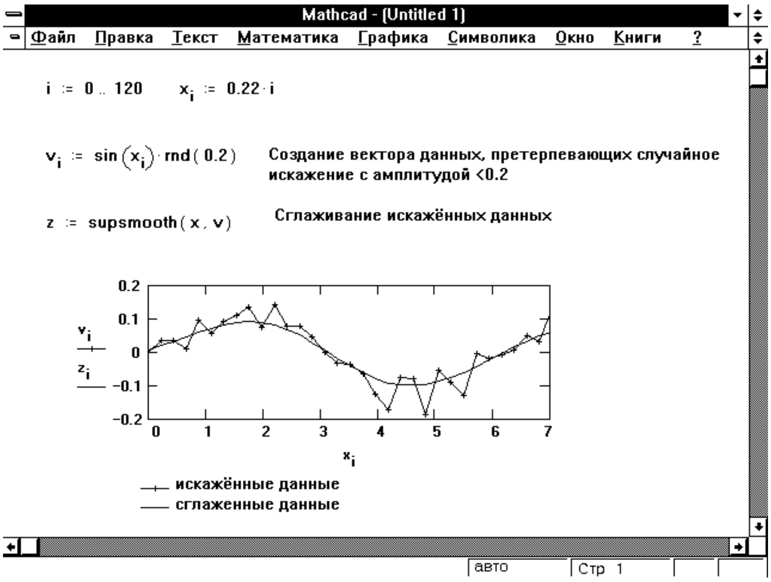
medsmooth(y,n), где y — вектор значений сигнала, n — параметр, определяющий количество¬ окон сглаживания, на которое будет разбит интервал при обработке данных (n может быть только нечетным целым числом, строго меньшим, чем количество элементов в выборке). Эта функция реализует популярный алгоритм «бегущих» медиан **(running medians).** Обязательным условием при ее применении является то, что эмпирические точки должны быть равномерно распределены на промежутке. Из всех встроенных функций сглаживания Mathcad medsmooth является наиболее надежной, однако и наименее универсальной функцией;

ksmooth(x,y,b), где x и y — векторы данных, b— ширина окна сглаживания (этот параметр по¬ величине должен равняться общей величине нескольких промежутков, разделяющих в данной выборке соседние точки). Данная встроенная функция реализует сглаживание на основании алгоритма Гаусса. Лучше всего функция ksmooth подходит для устранения шумов в стационарном сигнале, т.е. для фильтрации опытных данных;

supsmooth(x,y), где x и y — векторы данных. Осуществляет сглаживание с помощью¬ адаптивного алгоритма (в основе которого лежит метод наименьших квадратов), основанного на анализе взаимного расположения рассматриваемой точки и ближайших к ней (их количество зависит от особенностей поведения графика зависимости). Данная функция лучше всего подходит для сглаживания сложных нестационарных сигналов.

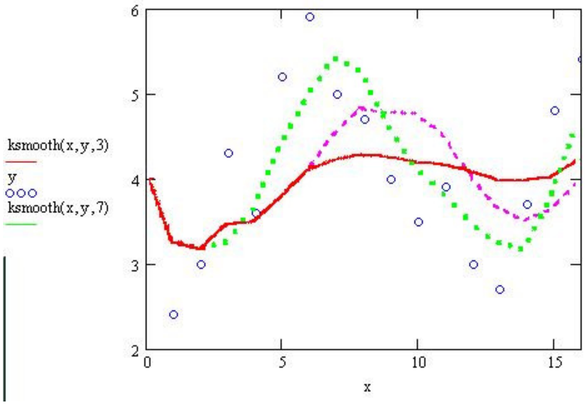
Все описанные выше функции возвращают в качестве ответа вектор из такого же количества элементов, как в исходных выборках. Поэтому если эмпирических точек было обработано немного, то при построении графика, для получения корректной кривой, стоит использовать возможности **сплайн-интерполяции** Mathcad (если же сглаживалась зависимость, образованная более чем 50–100 точками, то этого, скорее всего, делать не потребуется).

Пример 1. Сглаживание зашумленных данных с помощью supsmooth.



Скользящее усреднение*

Помимо встроенных в MathCAD, существует несколько популярных алгоритмов сглаживания. Самый простой и очень эффективный метод - это скользящее усреднение. Его суть состоит в расчете для каждого значения аргумента среднего значения по соседним w данным. Число w называют окном скользящего усреднения; чем оно больше, тем больше данных участвуют в расчете среднего, тем более сглаженная кривая получается.



Чтобы реализовать в MathCAD скользящее усреднение, достаточно очень простой программы. Она использует только значения y, оформленные в виде вектора, неявно предполагая, что они соответствуют значениям аргумента к, расположенным через одинаковые промежутки.

$$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15\ \ 16)^T$$

$$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9\ \ 5\ \ 4.7\ \ 4\ \ 3.5\ \ 3.9\ \ 3\ \ 2.7\ \ 3.7\ \ 4.8\ \ 5.4)^T$$

$$w := 15$$

$$N := \mathrm{rows}(y) \qquad N = 17$$

$$i := 0 .. N-1$$

$$m_i := \mathrm{if}\left(i < w, \frac{\sum_{j=0}^{i} y_j}{i+1}, \frac{\sum_{j=i-w+1}^{i} y_j}{w}\right)$$

Устранение тренда*

Еще одна типичная задача возникает, когда интерес исследований заключается не в анализе медленных (или низкочастотных) вариаций сигнала y(x) (для чего применяется сглаживание данных), а в анализе быстрых его изменений. Часто бывает, что быстрые (или высокочастотные) вариации накладываются определенным образом на медленные, которые обычно называют трендом. Часто тренд имеет заранее предсказуемый вид,

$$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15\ \ 16)^T$$

$$y := (5.1\ \ 4.4\ \ 5.7\ \ 5.3\ \ 5.6\ \ 5.2\ \ 5.9\ \ 7.7\ \ 6.7\ \ 7\ \ 6.5\ \ 5.9\ \ 8.1\ \ 8.7\ \ 9.7\ \ 9.8\ \ 10.4)^T$$

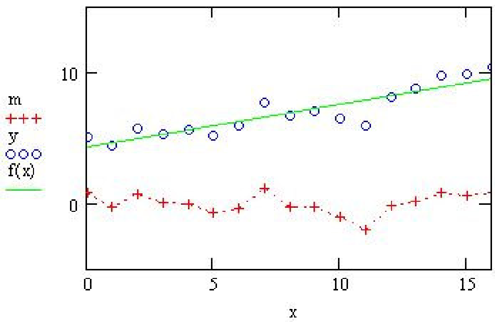
$$N := \mathrm{rows}(y) \qquad N = 17$$

$$i := 0 .. N-1$$

$$f(t) := \mathrm{line}(x, y)_0 + \mathrm{line}(x, y)_1 \cdot t$$

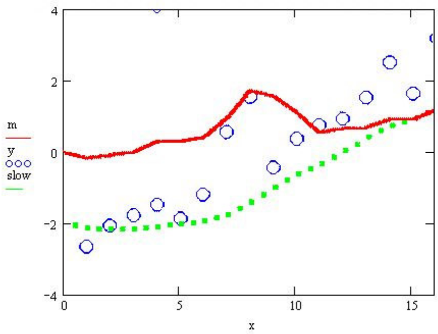
например линейный. $m_i := y_i - f(x_i)$

На рис. показаны исходные данные (кружками), выделенный с помощью регрессии линейный тренд (сплошной прямой линией) и результат устранения тренда (пунктир, соединяющий крестики).



Полосовая фильтрация*

В предыдущих разделах была рассмотрена фильтрация быстрых вариаций сигнала (сглаживание) и его медленных вариаций (снятие тренда). Иногда требуется выделить среднемасштабную составляющую сигнала, уменьшив как более быстрые, так и более медленные его компоненты. Одна из возможностей решения этой задачи связана с применением полосовой фильтрации на основе последовательного скользящего усреднения.



Алгоритм полосовой фильтрации:

- приведение массива данных y к нулевому среднему значению путем его вычитания из каждого элемента y;
-устранение из сигнала y высокочастотной составляющей, имеющее целью получить сглаженный сигнал middle, например, с помощью скользящего усреднения с малым окном w ;
-выделение из сигнала middle низкочастотной составляющей slow, например, путем скользящего усреднения с большим окном w, либо с помощью снятия тренда.
- вычесть из сигнала middle тренд slow , тем самым выделяя среднемасштабную составляющую исходного сигнала y.

$x := (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)^T$

$y := (5.1\ 4.4\ 5\ 5.3\ 5.6\ 5.2\ 5.9\ 7.7\ 8.7\ 6.7\ 7.5\ 7.9\ 8.1\ 8.7\ 9.7\ 8.8\ 10.4)^T$

$meanY := mean(y)$

$y := y - meanY$

$N := rows(y) \qquad N = 17$

$i := 0 .. N-1$

$w := 3$

$$middle_i := if\left(i < w, \frac{\sum_{j=0}^{i} y_j}{i+1}, \frac{\sum_{j=i-w+1}^{i} y_j}{w}\right)$$

$w := 7$

$$slow_i := if\left(i < w, \frac{\sum_{j=0}^{i} middle_j}{i+1}, \frac{\sum_{j=i-w+1}^{i} middle_j}{w}\right)$$

$m := middle - slow$

2.14. Лабораторная работа № 14 (2 часа).

Тема: «Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса»

2.14.1 Цель работы: изучить основные понятия, связанные с марковскими процессами, получить дифференциальные уравнения характеристик

2.14.2 Задачи работы:

1. Возможности MathCAD для решения обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка.

2. Решение систем дифференциальных уравнений методами MathCAD.

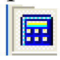
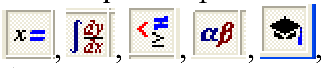
3. Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.14.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе: спецификой дисциплины не предусмотрены

2.14.4 Описание (ход) работы:

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение в полных дифференциалах $\left(1 + x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)y\cdot dy = 0$

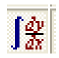
1) Установите автоматический режим вычислений.

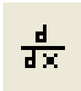
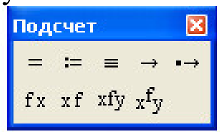
2) Запишите дифференциальное уравнение, используя клавиатуру и различные кнопки панели "Математика" (Если не открыта, выполнить следующие действия: выбрать меню просмотр – панели – математика) В выпавшей панели щелкнуть на кнопках , , вызвав необходимые меню:

$$\left(1 + x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)y\cdot dy = 0$$

3) Определить и записать M(x,y) и N(x,y):

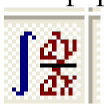
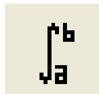
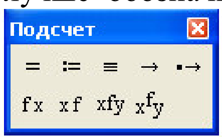
$M(x,y) := 1 + x\cdot\sqrt{x^2+y^2}$, $N(x,y) := \left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot y$.

4) Найдите частные производные этих функции. Для этого в панели  - 

выбрать кнопку . И ввести необходимые параметры. Затем щелкните на кнопке меню  

, а затем по рабочему документу вне выделенной рамки:

$$\frac{d}{dy}\left(1 + x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right) \to \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot x\cdot y \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot y \to \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot x\cdot y \; .$$

Сравнить полученные частные производные аналитически. Если они равны, найти интегралы, записанные в левой части формулы. Для того чтобы вычислить определенный интеграл, щелкните в панели  по кнопке  и введите необходимые параметры. Следует запомнить, что параметр интегрирования лучше обозначить за t. Чтобы вычислить интегралы щелкните на кнопке меню  

, а затем по рабочему документу вне выделенной рамки.

$$\int_{x_0}^{x}\left(1 + t\cdot\sqrt{t^2+y^2}\right)dt \to x + \frac{1}{3}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} - x_0 - \frac{1}{3}\cdot\left[\left(x_0\right)^2+y^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\int_{y_0}^{y}\left[-1+\sqrt{\left(x_0\right)^2+t^2}\right]\cdot t\,dt \to \frac{-1}{2}\cdot y^2 + \frac{1}{3}\cdot\left[\left(x_0\right)^2+y^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cdot\left(y_0\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left[\left(x_0\right)^2+\left(y_0\right)^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)} ,$$

Чтобы ввести нижний индекс, нажмите "[". Затем с помощью стрелок вернитесь в исходное положение. Остальные выкладки провести аналитически вручную.

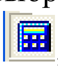
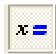
Задание для лабораторной работы. Решить дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

№ в-та		№ в-та	
1.	$(x^2+y-4)dx+(x+y+e^y)dy=0$	11	$\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$
2.	$\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$	12	$2x\cos^2 y dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$
3.	$y'=\dfrac{y-3x^2}{4y-x}$	13	$\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$
4.	$(e^x+y+\sin x)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$	14	$(x\sin y+y\cos y)dx+$ $+(x\cos y-y\sin y)dy=0$
5.	$(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0$	15	$(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0$
6.	$2x\cos^2 y dx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$	16	$(x^2+\sin y)dx+(1+x\cos y)dy=0$
7.	$(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$	17	$ye^x dx+(y+e^x)dy=0$
8.	$(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2y dy=0$	18	$\left(y+\frac{2}{x^2}\right)dx+\left(x-\frac{3}{y^2}\right)dy=0$
9	$(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$	19	$(2x-ye^{-x})dx+e^{-x}dy=0$
10	$(10xy-8y+1)dx+(5x^2-8x+3)dy=0$	20	$(y+x\ln y)dx+\left(\frac{x^2}{2y}+x+1\right)dy=0$

Пример 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения
$x'' + 3x' = e^{-3t}$ $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ операторным методом.

Решение:

1) Установите режим автоматических вычислений.

2) Введите уравнение, используя клавиатуру и различные кнопки панели "Математика" (Если не открыта, выполнить следующие действия: выбрать меню просмотр - панели – математика). В выпавшей панели щелкнуть на кнопках , , , , , , вызвав необходимые меню:

$x'' + 3x' = e^{-3t}$ $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$.

3) Найдите изображение для правой части уравнения. (Введите правую часть уравнения, выделите переменную и нажмите последовательно "символика" – "трансформация" – "Лаплас")

4) Составьте вручную операторное уравнение. Введите его:

$$s^2X - s + 3s \cdot X = \frac{1}{s+3}$$

Затем разрешите его относительно переменной X.(Выделите переменную X и нажмите последовательно "символика" – "разрешить").

$$\frac{\left(s^2 + 3 \cdot s + 1\right)}{\left[(s + 3)^2 \cdot s\right]}$$

Полученное выражение является изображением частного решения дифференциального уравнения.

5) Найдите оригинал для полученного изображения. (Выделите переменную и нажмите последовательно "символика" – "трансформация" – "инверсия Лапласа").

$$\frac{-1}{3} \cdot t \cdot \exp(-3 \cdot t) + \frac{8}{9} \cdot \exp(-3 \cdot t) + \frac{1}{9}.$$

Задание для лабораторной работы

№ в-та	1 задание	2 задание	3 задание
1	x´´+3x´=e^{-3t} x(0)=1; x´(0)=0.	$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,$ $y(0) = -1, y'(0) = 1$	$y'' - 8y' + 16y = \cos 4x + 2\sin 4x$ $y(0) = 1, y'(0) = -2$
2	x´´+4x =2cos t; x(0)=0; x´(0)=1	$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,$ $y(0) = 1, y'(0) = 4$	$y'' - 6y' + 9y = 4\cos x,$ $y(0) = 2, y'(0) = -2$
3	x´´+4x´=1 x(0)=-1; x´(0)=0.	$y'' - 14y' + 53y = 53x^3 42x^2 + 59x -$ $(0) = 0, y'(0) = 7$	$5y'' - 6y' + y = \cos x - \sin x,$ $y(0) = 1, y'(0) = -8$
4	x´´+9x=sin2t; x(0)=0; x´(0)=-1	$y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},$ $y(0) = 1, y'(0) = 2$	$y'' - y' - 6y = 9\cos x - \sin x,$ $y(0) = 1, y'(0) = -2$
5	x´´-4x´=e^{4t}; x(0)=0 x´(0)=0	$y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10,$ $y(0) = 2, y'(0) = 3$	$y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$ $y(0) = 2, y'(0) = 4$
6	x´´+16x=3cos 2t; x(0)= 1; x´ (0) = 0	$y'' - y' = (14 - 16x)e^{-x},$ $y(0), y'(0) = -1$	$y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$ $y(0) = 2, y'(0) = 4$
7	x´´+x=2; x(0)=0; x´(0)=-3	$y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},$ $y(0) = 0, y'(0) = 6$	$y'' - 2y' + 37y = 36\cos 6x$ $y(0) = 0, y'(0) = 6$
8	x´´+4x´=3t x(0)=0; x´(0)=2	$y'' - 6y' + 25y = 16x^2 - 16x + 66,$ $y(0) = 3, y'(0) = 0$	$y'' - 2y' + 37y = 36\cos 6x$ $y(0) = 0, y'(0) = 6$
9	x´´-3x´=2e^{3t}; x(0)=0; x´(0)=1	$y'' - 10y' + 25y = e^{5x},$ $y(0) = 1, y'(0) = 0$	$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,$ $y(0) = -2, y'(0) = 0$
10	x´´+16x=3cos4t; x(0)=1; x´(0)=-1	$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,$ $y(0) = 0, y'(0) = 2$	$y'' - 2y' + 37y = 36\cos 6x$ $y(0) = 0, y'(0) = 6$