ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Направление подготовки *27.03.04 Управление в технических системах*

Профиль образовательной программы *Системы и средства автоматизации технологических процессов*

Форма обучения *очная*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Конспект лекций
1. 1 Лекция №1 (2 часа)
Тема: «Введение. Математическое моделирование и исследования операций»

1.1.1 Вопросы лекции:
1. Моделирование как метод выбора и обоснования решений в экономике и менеджменте.
2. История развития исследования операций.
3. Оптимизационные задачи. Содержательная и математическая постановка.

1.1.2 Краткое содержание вопросов:
1 Моделирование как метод выбора и обоснования решений в экономике и менеджменте.
Описание экономических систем математическими методами дает заключение о реальных объектах и связях по результатам выборочного обследования или моделирования. Чем сложнее ситуация принятия решения, чем больше альтернатив и неопределенных факторов, тем важнее спрогнозировать результат, проиграть возможные варианты действий. Это и достигается путем моделирования.
Под *моделированием* понимают научный метод исследования, основанный на наличии определенного соответствия (аналогии) между исследуемым объектом и другим вспомогательным объектом и позволяющий по результатам исследования второго объекта делать обоснованные выводы о первом объекте. Изучаемый объект называют оригиналом (натурой), а вспомогательный – *моделью*. Таким образом, моделирование дает возможность результаты исследования модели переносить на оригинал, замещать при исследовании оригинал моделью.
Среди признаков, по которым классифицируют модели, выделяют два основных: по характеру подобия и по характеру использования.
По характеру подобия различают модели геометрического подобия, модели аналоги и математические модели.
Пример модели геометрического подобия – модель самолета в аэродинамической трубе.
Пример модели-аналога – глобус.
Под *математической моделью* понимают систему математических и логических соотношений, описывающих при определенных ограничениях и допущениях структуру и процессы, протекающие в моделируемом объекте. С помощью математической модели можно по известным исходным данным получить новые, заранее неизвестные данные об исследуемом объекте или явлении. Математическая модель является наиболее общей и абстрактной моделью.
Модели без управления являются *описательными и не содержат управляемых параметров.*
Например, известно, что с ростом цены на инновацию объем спроса сокращается. Опираясь на это утверждение, на этапе представления гипотезы о связи двух данных величин в математической форме (или, как говорят математики, спецификации модели) можно предложить несколько зависимостей, отражающих данный факт. Это и будут описательные модели.
Под *оптимизационными моделями* понимают те модели, которые содержат управляемые параметры и позволяют исследовать, как влияют на эффективность системы или операции изменения управляемых параметров, и найти оптимальные значения этих параметров (оптимальное решение). Именно такими моделями и занимается дисциплина «Математические методы исследования операций».
2 История развития исследования операций.
До середины 19-го века промышленные предприятия ныне индустриальных стран представляли собой мелкие мастерские с небольшим числом рабочих. Хозяин мастерской обычно справлялся со всеми административными обязанностями.
Современное производство—это большие коллективы людей и сложные комплексы оснащения и оборудования. Обеспечение согласованной работы и эффективного взаимодействия людей и техники требует новых идей и методов, синтезирующих выводы многих дисциплин и основанных на тщательном изучении фактов, явлений и тенденций их развития. Так потребности практики вызвали к жизни новый научный метод, получивший название „исследование операций".
Морз и Кимбелл понимают под исследованием операций научный метод, дающий в распоряжение исполнительного органа количественные основания для принятия решения.

Канторович и Романовский определяют исследование операций как область науки, изучающую вопросы выбора решений по организации и управлению целенаправленными процессами (операциями).
Т. Саати [приводит следующее определение: „Исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые другие способы дают еще худшие ответы".
Опубликованные и систематизированные к настоящему времени работы по исследованию операций позволяют сформулировать в качестве **основной задачи** этой области науки **разработку научных методов анализа целенаправленных действий и объективную (в частности, количественную) сравнительную оценку решений.**
Предметом исследования операций являются целенаправленные системы. Изучая их методами исследования операций, формулируют задачи и выявляют элементы, действия которых создают помехи, устраняют препятствия на пути целенаправленной технической и административной деятельности.
Исследование операций изучает хозяйственные, военные, производственные системы теми же научными методами, которыми исследуются физические, химические и биологические системы в естественных науках. Цель изучения—добиться такого понимания систем, чтобы легче было управлять ими.
Исследование операций как научное направление возникло в конце 30-х годов XX века, но по-настоящему возможности этого научного направления были раскрыты только в период второй мировой войны, поскольку:
1) неотложные нужды обороны отодвигали на задний план соображения о расходах на проведение необходимых исследований;
2) прогресс в области математики предоставил исследователям новые приемы анализа и быстродействующие вычислительные машины, без которых нельзя обойтись, когда число переменных какой-либо задачи становится достаточно большим.
Продолжая непрерывно развиваться, исследования операций применяются при решении самых разнообразных задач. Для этих методов не существует чисто военных, экономических и тому подобных задач, а есть задачи определенного типа, которые встречаются в самых различных областях, но могут быть решены с помощью одних и тех же приемов. Таким образом, **исследование операций — это совокупность методов, предлагаемых для подготовки и нахождения самых эффективных, или самых экономичных, решений.**
Широкое внедрение исследования операций в менеджменте преследует две цели:

- способствовать решению практических задач;
- выработать определенный образ мышления у менеджеров и экономистов.

Убедившись в целесообразности строить стратегию на количественно обоснованной и рациональной основе, менеджер неизбежно приходит к использованию строгих методов. В любом случае исследование операций обеспечивает более глубокий анализ экономической проблемы. Поэтому все изучающие экономику должны владеть соответствующими методами.
3 Оптимизационные задачи. Содержательная и математическая постановка.
Проблема эффективности является центральной в управлении большими (сложными) системами. Целью менеджмента в конечном итоге является достижение высокой эффективности функционирования сложной экономической системы.
Под **эффективностью** понимают характеристику, которая отражает приспособленность системы к выполнению свойственных ей задач.
Оценку эффективности производят, как правило, математическими методами, которые позволяют получить количественное выражение данной характеристики системы. Естественно, что используемые при этом понятия также должны быть представлены количественно, или как говорят - квантифицированы. Для этого были введены понятия «*показатель*» и «*критерий*» эффективности.
Под **показателем** понимают количественное выражение какого-либо свойства системы или процесса. Например, важнейшим свойством сложной технической системы является ее надежность. В качестве показателя надежности принимают вероятность того, что система будет правильно функционировать в требуемых условиях дольше, чем некоторое заданное время.
С понятием эффективности органически связана *проблема оптимизации*, заключающаяся в том,

чтобы *выбрать одно из альтернативных решений*, а именно то, которое является *наилучшим в некотором смысле*, или, как говорят, *оптимальное решение*.

Если мы поставили в соответствие цели некоторый численный показатель (например, надежности - вероятность), то он и будет измерителем эффективности. Граничное же значение показателя, отвечающее достижению цели, будет **критерием** эффективности.

Выбор критерия эффективности имеет решающее значение для принятия правильного решения и является одним из самых ответственных этапов организационного менеджмента.

При математической формализации цель функционирования организации *представляется через количественный показатель* в виде функции, называемой *целевой функцией*. Экстремум данной функции, который подлежит найти на области ограничений, отвечающих реальным ресурсным возможностям организации, и будет критерием ее эффективности.

Ресурсные возможности выражают через переменные, входящие в целевую функцию.

Набор переменных, при котором целевая функция достигает экстремума, представляет собой оптимальное решение и доставляет максимальную эффективность организации.

Максимальная эффективность в зависимости от конкретных условий может означать:

- получение максимального эффекта (результата) при заданных затратах.
- достижение заданного эффекта при минимальных затратах.
- максимальное отношение результата к затратам, т.е. максимальный эффект на единицу затрат.

Задача оптимизации точно может быть решена математически только для одного критерия оптимальности.

В общем случае применяются следующие способы выделения критерия оптимальности при наличии нескольких показателей:

- часть показателей превращают в ограничения;
- несколько показателей свертывают (объединяют) в один обобщенный показатель (путем постановки общей цели, введением весовых коэффициентов и др.;
- варьируют постановку задачи, т.е. производят оптимизацию при разных критериях оптимальности и решение принимают по оптимизируемым требованиям на основании полученных результатов (метод уступок).

Пример. (Определение оптимального плана выпуска продукции).

Имеется *m* видов резервов в количестве, определяемом вектором $A=(a_1, a_2, .., a_m)$, которые могут использоваться для производства *n* видов продукции. Норма расхода *i*-го ресурса на производство одной единицы *j*-й продукции определяется величиной a_{ij}, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Эффективность выпуска единицы *j*-й продукции характеризуется показателем удельного дохода c_j, $j=\overline{1,n}$.

Цель моделирования состоит в том, чтобы определить такой план выпуска продукции (расхода ресурсов), при котором общий эффект (суммарный доход) от проведения данной операции окажется максимальным.

Построим математическую модель процесса. Для этого планируемый выпуск продукции обозначим через $\tilde{o}_{\mathrm{j}}$, $j=\overline{1,n}$.

Целевая функция в этом случае может быть записана в виде $\Phi=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Учитывая имеющееся количество ресурсов, запишем ограничения, которые определяют допустимую область решений: $\sum_{j=1}^{n} \grave{a}_{\mathrm{ij}}\tilde{o}_{\mathrm{ij}} < \grave{a}_{\mathrm{i}}$, $i=\overline{1,m}$.

Задача такого исследования состоит в поиске неотрицательных значений переменных $c_1, c_2, ..., c_n$, которые удовлетворяют ограничениям и обращают в максимум критерий эффективности.

На практике часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда операция не может быть оценена с помощью единственного критерия эффективности. Тогда операция описывается с помощью вектора $\Phi=(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n)$ критериев эффективности, причем, как правило, одни показатели необходимо обратить в максимум, а другие — в минимум.

Для сравнения двух и более решений должно быть сформулировано правило сравнения векторов, на основании которого можно выбрать одно.

Задача теперь может быть сформулирована следующим образом: имеется некоторая операция *O*, эффективность которой оценивается с помощью векторного критерия эффективности $Ф = (Ф_1, \dots Ф_3, \dots, Ф_n)$. Необходимо найти такую стратегию *X* по управлению операцией *O*, чтобы она удовлетворяла следующим условиям: стратегия *X* должна быть осуществимой, т. е. принадлежать области допустимых значений Ω', стратегия *X* должна быть наилучшей в смысле принятого в операции правила сравнения двух векторов, которое в дальнейшем будем называть *правилом компромисса.*

Проблема 1— определение области компромисса. При решении задачи векторной оптимизации между некоторыми локальными критериями возникает противоречие. Суть этого противоречия состоит в том, что стремление улучшить какой-либо один локальный критерий ведет, как правило, к ухудшению другого (например, стремление повысить надежность технического устройства и одновременно снизить его стоимость является противоречивым).

Проблема 2 — выбор схемы компромисса.

Проблема 3 — нормализация критериев. Эта проблема встречается только в тех задачах, в которых локальные критерии имеют различные единицы измерения. Решение этой проблемы состоит в нормализации критериев, т. е. в сведении всех критериев к единому, обычно безразмерному масштабу измерения.

Проблема 4 — учет приоритета критериев. Часто локальные критерии имеют различную степень важности, которую необходимо учитывать при решении задачи. Эта степень обычно задается в виде вектора приоритетов при постановке задачи.

Способы свертки критериев в задачах векторной оптимизации

Пусть некоторая операция *O* состоит из ряда более мелких операций $O_1, 0_2, \dots, O_n$, каждая из которых имеет свой единственный критерий эффективности ($Ф_1, Ф_2, \dots, Ф_n$) соответственно.

Для исследования операции *O* необходимо выбрать некоторую схему компромисса, позволяющую при поиске оптимального решения иметь дело с некоторым единственным критерием эффективности, причем этот обобщенный критерий эффективности операции *O* получается как функция частных критериев эффективности, т. е. $Ф_e = F(Ф_1, Ф_2, \dots, Ф_n)$. Такую процедуру получения критерия объединенной операции называют *сверткой векторного критерия эффективности.*

Будем для простоты предполагать, что все частные критерии и $Ф_e$ необходимо обратить в максимум.

1. *Суммирование, или «экономический» способ свертки.*

Сущность этого способа состоит в том, что максимизируется критерий объединенной операции *O*, получающийся в результате суммирования всех частных критериев: $Ф_e = \sum \alpha_i Ф_i$

При данном способе свертки критериев могут возникать трудности, связанные с обоснованным выбором удельных весов α_i.

2. *Способ свертки, основанный на представлении обобщенного критерия в виде качественного путем разбиения компонентов вектора $Ф_e = (Ф_ь, Ф_2, \dots, Ф_n)$ на удовлетворительные и неудовлетворительные.*

В этом случае вводят в рассмотрение вектор $Ф° = (Ф^o_1, Ф°_2, -.., Ф°_n)$, компоненты которого определяют необходимые уровни достижения частных критериев. При этом $Ф_e$ запишется следующим образом: $Ф_e = 1$, если $Ф_i > Ф^o_i$, $i = 1, \dots, n$; $Ф_e = 0$ в противном случае.

Трудность этого способа свертки состоит в объективности и обоснованности вектора $Ф°$ в том случае, когда он неизвестен.

3. *Способ свертки, основанный на последовательном достижении частных целей.*

При этом способе свертки каждая последующая операция учитывается лишь тогда, когда достигнуты абсолютные максимумы критериев предыдущих операций.

4. *Логическое свертывание критериев.*

При этом способе предполагается, что все частные критерии являются качественными, т. е. принимают значения 0 или 1. Тогда обобщенный критерий можно получить, например, способом логического умножения, когда обобщенная цель объединенной операции состоит в достижении целей всех частных операций или способом логического сложения, когда обобщенная цель объединенной операции состоит в достижении цели хотя бы одной частной операции.

1.2 Лекция № 2 (2 часа)
Тема: «Основы теории графов и методы сетевого планирования и управления»

1.2.1 Вопросы лекции:
1.1 Основные понятия теории графов
1.2. Сетевой график и правила его построения

1.2.2 Краткое содержание вопросов
1 Основные понятия теории графов
Теория графов сформировалась в 30-е годы XX в. и широко применяется во многих разделах науки и техники. Ее методы успешно используются в теории информации и коммуникационных сетей, планировании производства, генетике и химии, на транспорте и т. д.
Геометрически граф – это набор вершин (точек), определенные пары которых соединены линиями. Например, сеть дорог между городами можно представить в виде графа следующим образом. Города обозначим точками (вершинами), а дороги - неориентированными линиями (рис. 1).

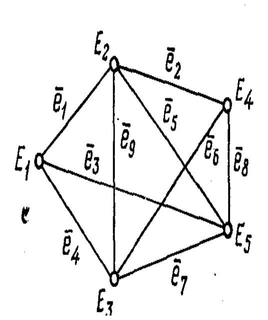


Рис. 1.

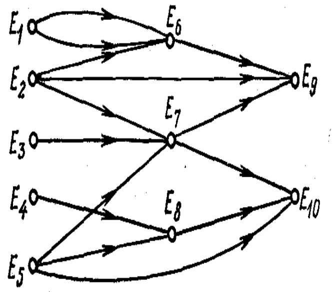
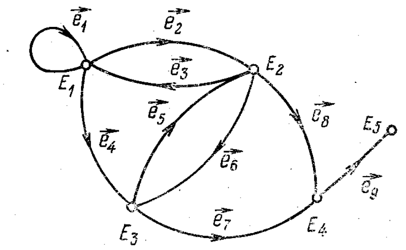


Рис. 2.

Рассмотрим другой пример.
Производственный участок изготовляет два вида изделий E_9 и E_{10}. Изделие E_9 собирается из узлов E_6, E_7 и детали E_2, а изделие E_{10} — из узлов E_7, E_8 и детали E_5. В свою очередь узел E_6 собирается из двух деталей E_1 и одной детали E_2, узел E_7 — из деталей E_2, *Ез* и E_5. а узел E_8 — из деталей E_4 и E_5.
Применяемость узлов и деталей при сборке можно изобразить в виде графа (рис. .2). Вершинам графа ставят в соответствие узлы, детали и изделия, а связи между ними (вхождение деталей в узлы и изделия и узлов в изделия) отображают ориентированными линиями.
Математически конечным графом G называется пара (E, e), где E — непустое конечное множество элементов (вершин), а e—конечное (возможно, пустое) множество пар элементов из E (дуг или ребер). Символически граф можно записать $G =(E,e)$.
Дугой называется ориентированная пара (E_i, E_j) вершин графа, где E_i — начальная вершина дуги, а — E_j конечная. При графическом отображении порядок вершин указывает стрелка на дуге.
Дуга вида (Ej, Ej) называется *петлей.* Дуги называются *кратными,* если их начальные и конечные вершины совпадают. В некоторых случаях дугу обозначают одной буквой с индексом. Пару дуг с одинаковыми номерами вершин и противоположной ориентацией объединяют и изображают линией без стрелки (см. рис. 1.1). Такое объединение дуг называют *ребром*.
Два ребра (две дуги) называются *смежными,* если они имеют хотя бы одну общую вершину. Ребра (одинаково направленные дуги) называются *кратными,* если их концевые точки совпадают.
Различают графы *ориентированные, неориентированные (реберные)* и *смешанные.* Граф называется *ориентированным* или кратко *орграфом,* если связи между его вершинами заданы дугами (рис. 3). *Путем* в орграфе называется конечная последовательность дуг, в которой начало каждой последующей дуги совпадает с концом предыдущей. При отсутствии кратных дуг путь можно записать в виде последовательности вершин, через которые он проходит. *Контуром* называется путь, начальная вершина которого совпадает с конечной. *Длина пути* или *контура* — число дуг, входящих в путь или контур.



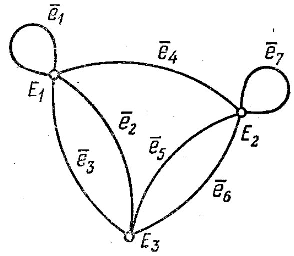


Рис. 3.

Под *смешанным графом* понимается такой, в котором вершины соединены как ребрами, так и дугами.

Граф называется *связным,* если между каждой парой его вершин существует такая последовательность элементов (дуг или ребер или же и дуг, и ребер), что любая пара соседних элементов в этой последовательности имеет общую вершину. Связный неориентированный граф называется *деревом,* если он не имеет циклов. В дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

В случаях обработки информации на компьютере, граф удобно задавать в виде матрицы смежности или матрицы инциденций.

Матрицей смежности вершин орграфа называется квадратная матрица *A,* каждый *ij*-й элемент которой численно равен количеству дуг, идущих из *Ei* вершины в *Ej.* Если мы имеем неориентированный граф, то ему соответствует симметрическая матрица смежности, так как дуги *(Ei, Ej)* и *(Ej, Ei)* существуют одновременно. Для орграфа соответствующая ему матрица смежности может не являться симметрической.

Матрица смежности вершин графа, изображенного на рис. 1, представлена в табл. 1.

Таблица 1 Матрица смежности для графа, изображенного на рисунке 1

E_i \ E_j	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1	1	1	1	0	0
E_2	1	0	1	1	0
E_3	0	1	0	1	0
E_4	0	0	0	0	1
E_5	0	0	0	0	0

Матрицей смежности дуг (ребер) орграфа (графа) называется квадратная матрица *A*, каждый *ij*-й элемент которой равен единице, если конечная вершина дуги e_i, является начальной вершиной дуги e_j (если ребра имеют общую вершину), и нулю во всех остальных случаях.

Матрицей инциденций орграфа называют прямоугольную матрицу, строки которой соответствуют вершинам, столбцы – дугам, а элементы равны 1, -1 или 0. При этом на пересечении вершин *E* и *e* ставится 1, если *E* начальная вершина дуги *e*. Если же *E* – конечная вершина, то данный элемент матрицы будет равен –1. Если *E* и *e* не связаны между собой (т.е. не инцидентны), то на пересечении соответствующих строки и столбца будет стоять 0.

2 Сетевой график и правила его построения

Одним из математических методов современной теории управления большими системами, широко применяемым на практике, является *метод сетевого планирования и управления* (СПУ).

Основой метода СПУ является сетевой график (сетевая модель), отражающий(ая) логическую взаимосвязь и взаимообусловленность входящих в него элементарных операций (работ).

В системах СПУ используются следующие, наиболее распространенные способы построения сетевых графиков:

1) сетевые графики в терминах «дуги-операции». В таких графиках вершины, называемые *событиями,* соответствуют моментам времени начала или окончания одной или нескольких операций, а дуги — операциям;

2) сетевые графики в терминах «дуги-связи», в которых операции изображаются вершинами сети, а дуги показывают порядок выполнения (взаимосвязь) отдельных операций.

В сетевом графике различают три вида событий: *исходное, завершающее и промежуточное. Исходное* — это такое событие, с которого начинается выполнение комплекса операций. *Завершающее с*оответствует достижению конечной цели, т. е. завершению комплекса операций. Сетевые графики с несколькими завершающими событиями называются *многоцелевыми.* К *промежуточным* относятся все прочие события.

События обозначаются кружками или другими геометрическими фигурами. Предполагается, что события не имеют продолжительности и наступают как бы мгновенно.

Моментом свершения события считается момент окончания выполнения всех входящих в это событие операций.

Пока не выполнены все входящие в событие операции, не может свершиться само событие, а следовательно, не может быть начата ни одна из непосредственно следующих за ним операций. Различают три вида операций:

1) *действительная операция* процесс, требующий затрат времени и ресурсов (разработка проекта, подвоз материалов, выполнение монтажных работ и т. д.);

2) *операция-ожидание* процесс, требующий только затрат времени (затвердение бетона, естественная сушка штукатурки перед началом малярных работ, рост растений и т. д.);

3) *фиктивная операция,* или логическая зависимость, отражает технологическую или ресурсную зависимость в выполнении некоторых операций.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать определенные правила:

1) в сети не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна дуга;

2) не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одной дуги;

3) сеть не должна содержать контуров;

4) любая пара событий сетевого графика может быть соединена не более чем одной дугой.

5) если какие-либо операции могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей им операции, то последнюю целесообразно представить как ряд последовательно выполняемых операций, завершающихся определенными событиями. Например, если операции *c* и *d* могут быть начаты до полного окончания операции *b,* то операцию *b* рекомендуется разбить на элементарные операции b_1, b_2 и b_3 и представить выполнение всех операций в виде графика, изображенного на рис. 1.6.

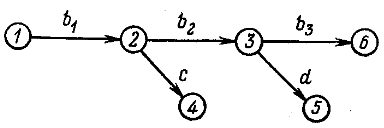


Рис. 1.6.

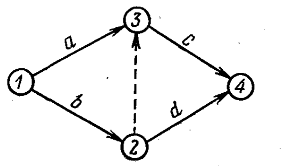


Рис.1.7.

Для отражения технологической или ресурсной зависимости в выполнении операций применяют фиктивные операции (рис. 1.7).

Построение сетевого графика начинается с составления списка операций (работ), подлежащих выполнению (табл. 1.4). Операции, включенные в список, характеризуются определенной продолжительностью, которая устанавливается на основе действующих нормативов или по аналогии с ранее выполнявшимися операциями. Такие временные оценки называются *детерми-нированными.*

Таблица 1.4 Список операций для построения сетевого графика

Операция	Шифр операции	Наименование операции	Опирается на операции	Продолжительность, дни
a_1	(1,2)	Подготовительные работы	-	5
a_2	(1,3)	Демонтаж старого оборудования	-	3
a_3	(2,6)	Ремонтные строительно-монтажные работы	a_1	30
a_4	(3,4)	Подготовка фундамента под новое оборудование	a_1, a_2	16

a_5	(2,4)	Подготовка к монтажу нового оборудования	a_1	10
a_6	(2,5)	Электротехнические работы	a_1	12
a_7	(4,5)	Монтаж нового оборудования	a_4, a_5	8
a_8	(5,7)	Подключение оборудования к электросети	a_6, a_7	2
a_9	(7,8)	Наладка и технологические испытания оборудования	a_8	6
a_{10}	(6,8)	Отделочные работы	a_3, a_6, a_7	8
a_{11}	(8,9)	Приемка цеха в эксплуатацию	a_9, a_{10}	1

Если нормативные данные временных оценок операций отсутствуют, то определяются *вероятностные* оценки.

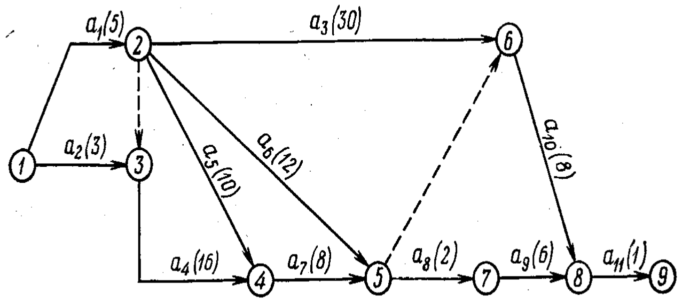


Рис. 1.8.

1.3 Лекция № 3 (2 часа)
Тема: «Основы теории графов и методы сетевого планирования и управления»

1.3.1 Вопросы лекции:
1 Расчеты на детерминированных сетях
2. Расчеты на вероятностных сетях

1.3.2 Краткое содержание вопросов
1 Расчеты на детерминированных сетях

Для управления ходом выполнения комплекса операций, представленного *сетевой моделью,* оперирующая сторона должна располагать количественными параметрами элементов сети. К таким параметрам относятся: *продолжительность выполнения всего комплекса операций, сроки выполнения отдельных операций и их резервы времени*. Важнейшим параметром сетевого графика является также критический путь.

Критическим называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность во времени. Суммарная продолжительность операций, принадлежащих критическому пути, равна *критическому времени* $t_{кр}$ выполнения комплекса операций в целом. На графике критический путь, как правило, выделяется жирной линией.

Предположим, что продолжительности выполнения операций t_{ij} известны и приписаны у соответствующих дуг графика (рис. 1.9).

Определим, прежде всего, *ожидаемые (ранние) сроки свершения событий* t_i сетевого графика.

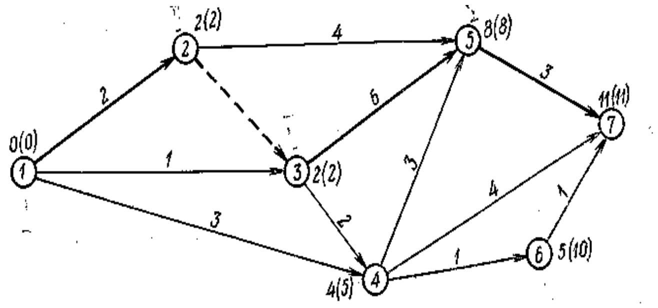


Рис. 1.9.

Общая формула для нахождения ожидаемых сроков: $t_1 = 0$;

$$t_j = \max(t_i + t_{ij}), \quad j = 2,3,...,n$$

для $\{(i, \to j)\}$ - подмножества дуг сети, входящих в событие *(j).*

Ожидаемый срок свершения события *(7)* $t_7 = 11$совпадает с критическим временем (суммарной продолжительностью операций, принадлежащих критическому пути). Возвращаясь теперь от завершающего события к исходному, выделим операции, принадлежащие *критическому пути.*

Увеличение времени выполнения любой операции, принадлежащей критическому пути, ведет к увеличению времени выполнения комплекса операций.

Для событий, не лежащих на критическом пути, существует *предельный (поздний) срок* свершения. Он равен минимальной разности между предельными сроками окончания операций, исходящих из данного события, и временем выполнения соответствующих операций:

$$t_n^* = t_n; \qquad t_i^* = \min(t_j^* - t_{ij}), \quad i = \overline{1, n-1},$$

для $\{i \to, j\}$ - подмножества дуг сети, исходящих из события (i).

Некритические события имеют *резервы времени,* которые показывают, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение событий без изменения срока свершения завершающего события. Резерв времени R_i события *(i)* равен разности между предельным и ожидаемым сроком его свершения: $R_i = t_i^* - t_i$.

Ожидаемые и предельные сроки свершения событий находятся в единстве со сроками начала и окончания операций:

ранний срок начала выполнения операции *(i, j)* равен ожидаемому сроку свершения *(i)*-го события $(t_{ij}^{р.н} = t_i)$;

поздний срок окончания операции совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события $(t_{ij}^{п.о} = t_j^*)$;

поздний срок начала выполнения операции равен разности между предельным сроком свершения ее конечного события и продолжительностью $(t_{ij}^{п.н} = t_j^* - t_{ij})$;

ранний срок окончания операции равен сумме ожидаемого срока свершения ее начального события и продолжительности $(t_{ij}^{р.о} = t_i + t_{ij})$.

Сроки выполнения операций находятся в границах, определяемых параметрами: $t_{ij}^{р.н}, t_{ij}^{п.н}, t_{ij}^{р.о}, t_{ij}^{п.о}$. Следовательно, операции, как и события, могут иметь некоторый резерв времени.

Полный резерв времени операции $R_{ij}^{п}$ показывает, насколько можно сдвинуть начало выполнения операции или увеличить ее продолжительность, не изменяя ожидаемого срока свершения начального события, при условии, что конечное для данной операции событие свершится не позднее своего предельного срока. Величина полного резерва времени вычисляется по формуле: $R_{ij}^{п} = t_j^* - (t_i + t_{ij}) = t_j^* - t_{ij}^{р.о}$.

Свободный резерв времени операции R_{ij}^{c} показывает, насколько можно увеличить продолжительность или отсрочить начало выполнения операции *(i, j)* при условии, что начальное и конечное ее события свершаются в ожидаемое время: $R_{ij}^{c} = t_j - (t_i + t_{ij}) = t_j - t_{ij}^{р.о}$.

Найдем резервы времени операции *(4, 6)* сетевого графика (см. рис. 1.9):

$$R_{46}^{п} = t_6^* - (t_4 + t_{46}) = 10 - (4+1) = 5;$$

$$R_{46}^{c} = t_6 - (t_4 + t_{46}) = 5 - (4+1) = 0;$$

2 Расчеты на вероятностных сетях

Сетевые графики комплекса операций могут иметь *детерминированную* или *стохастическую* структуру. Если все операции комплекса и их взаимосвязи точно определены, то такая структура графика называется *детерминированной. Стохастическая* структура означает, что все операции включаются в сеть с некоторой вероятностью. Например, в научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработках заранее не известны не только продолжительности отдельных операций, но и их перечень, а также структура сети.

Расчет параметров и анализ сетей случайной структуры связан с известными трудностями. Поэтому на практике обычно применяются детерминированные сети со случайными временными оценками операций. Такие сети называются *вероятностными.*

При исследовании вероятностных сетей могут встретиться два случая:

1) операции не являются новыми, и мы приближенно знаем для каждой из них функцию распределения продолжительности выполнения;

2) операции являются новыми, малоизученными, и для них функции распределения продолжительностей неизвестны.

В первом случае по известной функции распределения нетрудно определить среднее значение продолжительности выполнения каждой операции (математическое ожидание) и дисперсию.

Во втором случае применяется метод усреднения. Исходными данными для метода усреднения являются вероятностные оценки продолжительности каждой операции:

a - минимальная продолжительность (оптимистическая оценка) операции;

b - максимальная продолжительность;

m - вероятная продолжительность (мода) операции.

Эти оценки времени задаются ответственным исполнителем или группой экспертов.

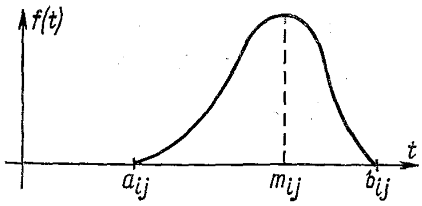


Рис. 1.10

Исследования, проведенные в нашей стране и за рубежом, позволили обосновать возможность использования бета-распределения в качестве типового распределения продолжительности операций с оценками *a, b* и *m*.

Функция плотности бета-распределения (рис. 1,10) аналитически представима в виде

$$f(t) = \begin{cases} c(t-a)^p (b-t)^q, a \le t \le b \\ 0, t > a, t > b \end{cases}$$

где *p, q* - параметры распределения, зависящие от вида операций, а *c* - нормирующий множитель, определяемый из условия

$$c\int_a^b (t-a)^p (b-t)^q \, dt = 1.$$

По известной функции распределения *f(t)* находятся числовые характеристики операций: среднее значение (математическое ожидание) продолжительности операции

$$M(t) = \bar{t} = \int_a^b tf(t)dt = \frac{(p+q)m + a + b}{p+q+2};$$

дисперсия

$$D[t] = \sigma_t^2 = \int_a^b t^2 f(t)dt - \overline{t^2},$$

Статистический анализ, проведенный эмпирико-экспериментальным путем разработчиками математического аппарата системы PERT, позволил установить, что $p + q \approx 4$. Следовательно,

$$\bar{t} = \frac{a + 4m + b}{6}; \qquad (1)$$

$$D[t] \approx \left(\frac{b-a}{6}\right)^2. \qquad (2)$$

После определения математических ожиданий продолжительностей операций по формуле (1) проводится расчет временных параметров сети, как и в детерминированном случае. Длительность критического пути рассматривают как математическое ожидание случайной величины $t_{кр}$:

$$M[t_{кр}] = \overline{t_{кр}} = \sum_{(i,j)кр} \bar{t}_{ij}.$$

Дисперсию продолжительности пути считают равной сумме дисперсий продолжительностей операций, находящихся на критическом пути:

$$D[t_{кр}] = \sum_{(i,j)\in\mu_{кр}} D_{ij}[t].$$

Расчет временных параметров сети по средним значениям продолжительностей операций не позволяет строго определить срок завершения комплекса операций. Отклонение случайных величин t_{ij} от их средних значений $\bar{t}_{ij}$ может быть как в большую, так и в меньшую сторону. Поэтому фактическая продолжительность выполнения комплекса операций $t_ф$ может быть больше или меньше $t_{кр}$.

На практике важна оценка вероятности завершения комплекса операций к определенному сроку, которая зависит от дисперсии $D[t_{кр}]$ продолжительности критического пути. Если продолжительности работ отклоняются от своих средних значений на такую малую величину, что критический путь не изменяется, и если на критическом пути лежит значительное число операций (20 или более), то на основании центральной предельной теоремы можно приближенно считать, что его продолжительность подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $\bar{t}_{кр}$ и $D[t_{кр}]$. Тогда вычисление вероятности того, что фактическая продолжительность выполнения комплекса операций $t_ф$ меньше планового директивного срока $T_{пл}$, производится по формуле:

$$P(t_ф < T_{пл}) = \Phi(u) + 0{,}5 \ , \qquad (3)$$

где $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа, значения которой берутся из таблиц для аргумента

$$u = \frac{T_{пл} - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}} \ ,$$

а $\sigma_{кр} = \sqrt{D[t_{кр}]}$ - среднеквадратическое отклонение.

По формуле (3) также можно вычислить вероятность выполнения любой операции в заданный срок.

Рассмотрим подход к определению математического ожидания $\bar{t}_{кр}$ и дисперсии $D_{ij}[t]$ операций (ij) сетевого проекта на основе двух оценок: оптимистической a и пессимистической b. Многочисленные эмпирико-экспериментальные исследования двухоценочной методики показали, что в бета-распределении величины p и q, определенные для большого количества сетевых моделей, близки к постоянным значениям $p=1$, $q=2$. Выбрав их в качестве стандартных показателей степени, получим функцию, которая относится к классу бета-распределений и имеет следующие параметры:

математическое ожидание $$\overline{t_{ij}} = \int_a^b t f(t) dt = \frac{3a + 2b}{5} \ ; \qquad (4)$$

дисперсию $$D_{ij}[t] = \int_a^b t^2 f(t) dt - \bar{t}_{ij}^{\,2} = \left(\frac{b-a}{5}\right)^2 . \qquad (5)$$

Пример. Найти критическое время $t_{кр}$ выполнения комплекса операций, представленного на рис. 1.11, используя средние оценки продолжительности и дисперсию, а также определить:

1) вероятность выполнения комплекса операций за

а) $T_{пл}$ =35 дней;

б) $T_{пл}$ =42 дня,

2) время, за которое комплекс операций будет выполнен с вероятностью, не меньшей

а) P=0.75;

б) P=0.35,

3) вероятность завершения операции *(2. 5)* в 8-й день.

Оптимистическая оценка a_{ij} и пессимистическая оценка b_{ij} для каждой операции заданы в табл. 1.6. Случайные отклонения времени выполнения операций от математических ожиданий не меняют критического пути.

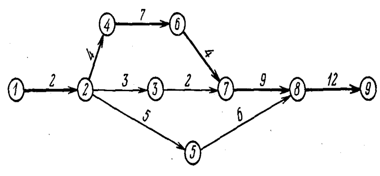


Рис. 1.11.

Решение

По формулам (4), (5) вычислим $\bar{t}_{ij}$ и $D_{ij}(t)$ и занесем в две правые графы табл. 1.5.

Осуществив расчет продолжительности критического пути по средним оценкам времени (приписаны дугам графика), получим $t_{кр} = 38$ дней. Такой же расчет по оптимистическим оценкам приводит к величине $t_{кр.опт} = 27{,}5$ дня, по пессимистическим - $t_{кр.пес} = 53{,}75$ дня. Практически же комплекс операций может быть выполнен с некоторой вероятностью в любой срок из интервала [27,5...53,75].

Критический путь включает 6 операций, поэтому при определении доверительного интервала для продолжительности проекта по нормальному закону распределения ошибка окажется значительной. Заметим, что практически все руководства по методам СПУ этот факт игнорируют, вводя в заблуждение и читателя, и лиц, в интересах которых проводится расчет.

Таблица 1.5

Исходные параметры			Расчетные параметры	
(i,j)	a_{ij}	b_{ij}	$\bar{t}_{ij}$	D_{ij}
(1,2)	1	3,5	2	0,25
(2,3)	2	4,5	3	0,25
(2,4)	2,5	6,25	4	0,56
(2,5)	4	6,5	5	0,25
(3,7)	1,5	2,75	2	0,063
(4,6)	5	10	7	1
(5,8)	5,4	8,25	6	0,56
(6,7)	3	5,5	4	0,25
(7,8)	8	10,5	9	0,25
(8,9)	8	18	12	4

Используя функцию Лапласа, получим $u = \dfrac{35-38}{2{,}51} = \dfrac{-3}{2{,}51} = -1{,}19$

и вероятность завершить проект за 38 дней: $P(t_ф < T_{пл}) = Ф\left(\dfrac{35-38}{2{,}51}\right) + 0{,}5 = -0{,}383 + 0{,}5 = 0{,}117 \cdot$

Аналогично определяется вероятность выполнения комплекса операций за *Тпл* = 42 дня:

$$P(t_ф < T_{пл}) = Ф(\frac{42-38}{2{,}51}) + 0{,}5 = Ф(1{,}55) + 0{,}5 = 0{,}439 + 0{,}5 = 0{,}939\ .$$

Определим теперь время, за которое комплекс операций будет выполнен с вероятностью, не меньшей чем $P = 0{,}75$.

Величине $Ф(u) = P - 0{,}5 = 0{,}25$ соответствует значение $u = 0{,}86$.

Следовательно,

$$T_{пл} = 38 + 2{,}51 \times (0{,}86) = 38 + 2{,}15 \approx 40 \text{ дней.}$$

Для $P = 0{,}35$ имеем $Ф(u) = 0{,}35 - 0{,}5 = -0{,}15$ и $u = -0{,}39$. Таким образом,

$$T_{пл} = 38 + 2{,}51(-0{,}39) = 38 - 0{,}98 \approx 37 \text{ дней.}$$

Ожидаемый срок свершения 5-го события $t_5 = 7$. Сумма дисперсий операций, принадлежащих пути *(1 – 2 – 5)*, ведущему к 5-му событию, $D_{12}(t) + D_{25}(t) = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$.

Таким образом, $P_{(2,5)}(t_ф < T_{пл}) = Ф\left(\dfrac{8-7}{\sqrt{0{,}5}}\right) + 0{,}5 = Ф(1{,}41) + 0{,}5 = 0{,}4207 + 0{,}5 = 0{,}9207 \approx 0{,}921 \cdot$

Следовательно, при расчетах с использованием нормального закона с вероятностью 0,921 операция *(2, 5)* будет завершена в плановый срок.

1.4. Лекция № 4 (2 часа)
Тема: «Основы линейного программирования»

1.4.1 Вопросы лекции:
1 Общая постановка задачи линейного программирования
2. Графический метод решения ЗЛП.

1.4.2 Краткое содержание вопросов
1 Общая постановка задачи линейного программирования
Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются задачами линейного программирования. Этот термин появился в конце 30-х годов, когда программирование на компьютере еще не было развито, и соответствует не очень удачному переводу английского "programming". *Под линейным программированием понимается линейное планирование*, т.е. получение оптимального плана—решения в задачах с линейной структурой.
Составление плана (программы) фирмы, цеха, завода, отрасли промышленности является одной из важнейших задач в менеджменте. Решение таких задач осложняется тем, что приходится находить значения не двух и не трех переменных величин — число переменных может быть от нескольких десятков до нескольких сотен и даже тысяч.
Рассмотрим простейшую задачу составления производственного плана.
Задача 1. Некоторому заводу требуется составить оптимальный план выпуска двух видов изделий при определенных возможностях четырех видов машин. План выпуска этих изделий надо составить так, чтобы от реализации изготовленной продукции завод получил наибольшую прибыль. Оба вида изделий последовательно обрабатываются этими машинами. В плане должно быть предусмотрено, что первая машина ежедневно может обрабатывать эту продукцию лишь в течение *8 ч,* вторая—*12ч,* третья — *12ч,* четвертая — *9 ч.*
В таблице указано время, необходимое для обработки каждого изделия этих двух видов (в часах). Нуль означает, что изделие машинами данного вида обрабатывать не надо.

Изделия	Станок			
	1-й	2-й	3-й	4-й
I	1	0.5	1	0
II	1	1	0	1
Возможное время работы станка (в часах)	18	12	12	9

Завод от реализации одного изделия I вида получает 4 руб., а от реализации одного изделия II вида—6 руб. прибыли.

Построим математическую модель этой задачи. Пусть x_1 — число изделий I вида, x_2 — число изделий II вида. Так как машины каждого вида (1, 2, 3, 4) могут обрабатывать продукцию не более (18, 12, 12, 9) часов соответственно, то получаем следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 18 \\ 0{,}5x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \leqslant 12 \\ x_2 \leqslant 9 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Общая прибыль может быть выражена как $F = 4x_1 + 6x_2,$ (2)
где x_1 и x_2 удовлетворяют условиям задачи (1).
Таким образом, построенная математическая модель данной задачи состоит из системы неравенств (1), на множестве решений которой надо найти наибольшее значение целевой функции (2).
В общем виде задача линейного программирования ставится следующим образом.

Максимизировать (минимизировать) функцию $$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad (3)$$

при ограничениях
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i, & (i=\overline{1,m_1});\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \ge b_i, & (i=\overline{m_1+1,m_2});\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = b_i, & (i=\overline{m_2+1,m}),\end{cases} \qquad (4)\text{-}(6)$$

$$x_j,\ j=\overline{1,n} \qquad (7)$$

Функция (3) — линейная, ограничения (4) — (6) — линейные. Задача содержит *n* переменных и *m* ограничений.

Решить задачу линейного программирования - это значит найти значения управляющих переменных $x_j, j=\overline{1,n}$, удовлетворяющих ограничениям (4) — (6), при которых целевая функция (3) принимает минимальное или максимальное значение.

Примеры типичных экономических и производственных задач, оптимальное решение которых может быть найдено с помощью построения соответствующих линейных математических моделей:

Планирование производства

Для изготовления различных видов изделий используются разные ресурсы. Общие запасы каждого ресурса, количество ресурса каждого типа, затрачиваемого на изготовление одного изделия каждого вида, и прибыль, получаемая от реализации одного изделия каждого вида, заданы. Нужно составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную суммарную прибыль от реализации изделий.

Формирование минимальной потребительской продовольственной корзины

Задан ассортимент продуктов, имеющихся в продаже. Каждый продукт содержит определенное количество разных питательных веществ (витаминов и калорий). Известен требуемый человеку минимум питательных веществ каждого вида. Необходимо определить требуемую потребительскую продовольственную корзину, имеющую минимальную стоимость.

Расчет оптимальной загрузки оборудования

Предприятию необходимо выполнить производственный заказ на имеющемся оборудовании. Для каждой единицы оборудования заданы: фонд рабочего времени, себестоимость на изготовление единицы продукции каждого вида и производительность, т.е. число единиц продукции каждого вида, которое можно произвести в единицу времени. Нужно распределить изготовление продукции между оборудованием таким образом, чтобы себестоимость всей продукции была минимальна.

Раскрой материала

На раскрой (распил) поступает материал нескольких видов в определенном количестве. Из этого материала необходимо изготовить различные изделия. Материал может быть раскроен разными способами. Каждый способ имеет свою себестоимость и позволяет получить разное количество изделий каждого вида. Определить способ раскроя, при котором суммарная себестоимость минимальна.

Составление плана реализации товара

Фирма реализует различные товары, используя при этом определенный набор средств (технических, людских, денежных). Общий запас средств, число средств каждого вида, используемых при реализации единицы любого товара и прибыль от его продажи заданы. Надо сформировать план реализации товаров, приносящий фирме максимальную прибыль.

Рассмотрим порядок формализации содержательной постановки на примере последней задачи.

Построение математической модели

1) Цель — максимизации прибыли. Параметры:

n -число различных видов реализуемых товаров;

m -число разных видов средств;

b_i -запас средств i- го вида,

a_{ij} - число средств i-го вида, используемых для реализации единицы товара j-го вида,

p_j - прибыль от реализации единицы товара j -го вида.

управляющие переменные – x_j - количество реализуемого товара j-го вида;

Область допустимых решений формируют ограничения по запасам средств и условия неотрицательности управляющих переменных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \le b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Критерий оптимальности определяется по соотношению

$$P = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max,$$

где P — суммарная прибыль.

В результате расчета по построенной линейной математической модели определяется количество реализуемых товаров каждого вида, обеспечивающее фирме максимальную прибыль.

2 Графический метод решения ЗЛП.

Если число переменных в задаче линейного программирования (ЗЛП) равно двум, а ограничениями является система неравенств, то задачу можно решать графическим методом.

Пример 1

При продаже двух видов товара используется 4 типа ресурсов. Норма затрат ресурсов на реализацию единицы товара, общий объем каждого ресурса заданы в табл. 1.

Таблица 1

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы товара первого вида составляет 2 усл. ед., второго вида — 3 усл. ед.

Требуется найти оптимальный план реализации товаров, обеспечивающий торговому предприятию максимальную прибыль.

Решение.

Это задача составления плана реализации товара при n =2, m=4.

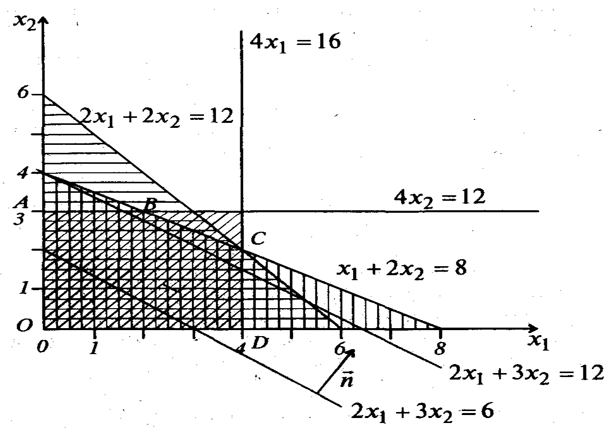


Рис. 1.

Алгоритм решения ЗЛП графическим методом.
1) Записывают уравнения прямых, соответствующих ограничениям, и строят их на плоскости.
2) Определяют области, в которых выполняются ограничения задачи. Для этого выбирают произвольную точку на плоскости *ХОУ* и подставляют ее координаты в левую часть одного из неравенств. Если неравенство верно, то искомая полуплоскость находится с той же стороны от прямой, что и точка; в противном случае искомая полуплоскость лежит с противоположной стороны от прямой. Эти действия последовательно выполняются для всех неравенств, отражающих ограничения задачи. Определяют область допустимых решений задачи как область пересечения m полуплоскостей, соответствующих m ограничениям.
3) Определяют направление возрастания (убывания) целевой функции. Это можно сделать двумя способами. Можно построить вектор—нормаль к прямой с уравнением целевой функции. Его направление показывает направление возрастания функции, в противоположном направлении функция убывает. Можно просто построить две линии уровня функции $2x_1 + 3x_2 = c_1$, $2x_1 + 3x_2 = c_2$ где c_1, c_2 - произвольные константы, и по их расположению определить направление возрастания (убывания) функции *Р*.
4) Определяют граничную точку (точки) области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное или минимальное значение.
5) Вычисляют значения найденной точки, решая совместно уравнения, задающие прямые, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение прямой на границе области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.
Выполнив первые два пункта алгоритма, получим допустимую область *OABCD* (рис. 1).Целевая функция *P* возрастает в направлении вектора n =(2;3) —нормали к прямой $2x_1+3x_2+c=0$, отвечающей целевой функции, следовательно, минимум находится в точке (0;0). Максимум определяем, передвигая нашу линию уровня в направлении вектора n параллельно самой себе до тех пор, пока хотя бы одна ее точка будет принадлежать области допустимых решений.
В данном случае это точка $x_1 = 4$, $x_2 = 2$; и при этом $P=2*4+3*2=14$.
Таким образом, для получения максимальной прибыли в размере 14 усл. ед. надо продать 4 изделия первого вида и 2 изделия второго вида.
Изложенный графический метод применим для решения задач линейного программирования следующего вида:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min).$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, & i = \overline{1, m_1}; \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m}. \end{cases}$$

1.5 Лекция № 5 (2 часа)
Тема: «Основы линейного программирования»
1.5.1 Вопросы лекции:
1 Понятие о симплекс-методе
2. Двойственная ЗЛП. Экономическая интерпретация

1.5.2 Краткое содержание вопросов
1 Понятие о симплекс-методе
В произвольной форме линейная математическая модель или задача линейного программирования имеет вид (4) — (6).
Наиболее распространенный метод ее решения — симплекс-метод.
На предыдущем примере мы убедились, что в случае двух переменных область допустимых решений, как правило, представляет собой замкнутый многоугольник. Для n переменных областью допустимых решений является многомерный многогранник, называемый *симплексом.* Оптимальное решение, как правило, это вершина (граничная точка) такого многогранника. *Симплекс-метод* и заключается в последовательном целенаправленном обходе вершин симплекса. В каждой следующей граничной точке симплекса значение целевой функции, в общем случае, улучшается.
Для применения симплекс-метода задачу следует записать в канонической форме:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (8)$$

В канонической форме записи все переменные неотрицательны, ограничениями являются уравнения, и требуется найти такие значения x_j, при которых целевая функция имеет максимум.
Переход к канонической форме записи производится с помощью следующих простых действий.
1) Если требуется найти минимум *f*, то, заменяя *f* на *–f,* переходят к задаче максимизации, так как *min f = max(-f).*
2) Если ограничение содержит неравенство со знаком <, то от него переходят к равенству, добавляя в левую часть ограничения дополнительную неотрицательную переменную.
3) Если ограничение содержит неравенство со знаком >, то от него переходят к равенству, вычитая из левой части дополнительную неотрицательную переменную.
4) Если в задаче какая-либо из переменных произвольна, то от нее избавляются, заменяя ее разностью двух других неотрицательных переменных. Например, для произвольной переменной x_k, полагают $x_k = x_k' - x_k''$ где $x_k', x_k'' \ge 0$.
Симплекс-метод является методом направленного перебора решений системы (8) и включает два этапа:
- определение начального решения, удовлетворяющего ограничениям;
- последовательное улучшение начального решения и получение оптимального решения задачи.

Любое решение задачи линейного программирования называется опорным планом задачи.
Система (8) содержит *m* линейно независимых уравнений, их число меньше числа неизвестных, входящих в систему, следовательно, систему (8) можно разрешить относительно *m* неизвестных, например $x_1, x_2, ..., x_m$, выразив их через остальные неизвестные (которые и будут *базисными*)

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

(Коэффициенты в полученной системе, естественно, отличны от коэффициентов системы (8), но для простоты обозначены той же буквой).
Данный переход осуществляется с помощью элементарных алгебраических преобразований, включающих умножение правой и левой частей уравнений на одно и то же число и их сложение, и не влияющих на значение решений системы (8).
2. После указанных преобразований задача (4) — (6) запишется в следующем виде

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max. \qquad \begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (9)$$

Форма записи (9) называется стандартной
Пример.

$$f = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max.$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 15; \\ x_1 + 3x_3 \leq 7; \\ -2x_1 + 8x_2 \leq 20. \end{cases}$$

Запишем задачу в каноническом виде, вводя дополнительные переменные x_4, x_5, x_6,

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 15; \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 7; \\ -2x_1 + 8x_2 + x_6 = 20; \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6. \end{cases}$$

Примем, что базисные переменные - это x_4, x_5, x_6 (они не входят в целевую функцию). Свободные переменные – это x_1, x_2, x_3 (т.е. те, которые входят в целевую функцию и, соответственно, могут изменять ее значение). Таким образом, допустимый (опорный) план есть вектор:

$$X_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 15, x_5 = 7, x_6 = 20\}.$$

Целевая функция уже выражена через свободные переменные, поэтому можно перейти к составлению симплекс-таблицы (табл. 2).

Таблица 2

Базисные	Коэффициенты при переменных						Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	3	3	-1	1	0	0	15
x_5	1	0	3	0	1	0	7
x_6	-2	8	0	0	0	1	20
f	-5	2	-3	0	0	0	0

Для проверки решения на оптимальность просматривается последняя f- строка. Если коэффициенты при свободных переменных в ней неотрицательны, то получено оптимальное решение. Если все эти коэффициенты положительны, то оптимальное решение единственно. Если же среди неотрицательных хотя бы один нулевой, то задача имеет бесконечное множество решений.
Если в f- строке есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а соответствующем столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция неограничена в допустимой области. Если же среди коэффициентов при свободных переменных есть хотя бы один отрицательный и в соответствующем ему столбце есть хотя бы один положительный элемент, то полученное решение может быть улучшено путем ввода соответствующей переменной в базис.
Ввод переменной в список базисных переменных означает, что ей приписывается отличное от 0 положительное значение, т.е. ее значение увеличивается. Из формулы для целевой функции $f=5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ видно, что увеличение значения x_2 приводит только к уменьшению f т.е. переменную x_2 бессмысленно вводить в список базисных переменных. Увеличение переменных x_1 и x_3 приводит к

увеличению значения f при этом на большую величину значение изменяется с увеличением x_1 , следовательно, переменная x_1 должна стать базисной переменной. Максимальное значение коэффициента при x_1 в формуле для f соответствует максимальному по абсолютной величине отрицательному элементу в последней строке симплекс-таблицы, следовательно, понятен выбор новой базисной переменной.

Для определения переменной, выводимой из списка базисных переменных, надо в соответствии с алгоритмом симплекс-метода найти отношения элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца и среди них выбрать минимальное (отрицательный результат деления запрещается назначением ему бесконечной величины). В нашем примере

$$\min\{15/3;\ 7/1;\ 20/-2\} = \{5;\ 7;\ +\infty\} = 5,$$

следовательно, из списка базисных переменных надо вывести x_4 , стоящую в первой строке симплекс-таблицы, и разрешающий элемент a_{11}=3.

2 Двойственная ЗЛП. Экономическая интерпретация

Рассмотрим задачу линейного программирования следующего вида:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \end{cases} \qquad (10)$$

В задаче требуется максимизировать целевую функцию; все ограничения являются неравенствами со знаком $\le$, все переменные x_j неотрицательны. Задача содержит n управляющих переменных и m ограничений. Коэффициенты при переменных в целевой функции: $c_1, c_2, \ldots, c_n$; свободные члены: $b_1, b_2, \ldots b_m$.

Двойственная задача линейного программирования имеет вид

$$g = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min.$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n; \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0. \end{cases} \qquad (11)$$

В двойственной задаче требуется найти минимум целевой функции, ограничения — неравенства со знаком ≥, управляющие переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ неотрицательны. Задача содержит m управляющих переменных и n ограничений. Коэффициенты целевой функции такой задачи $b_1.b_2,\ldots,b_m$ являются свободными членами исходной ЗЛП, а свободные члены двойственной задачи $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — коэффициентами целевой функции исходной ЗЛП. Матрица коэффициентов двойственной задачи транспонирована, т.е. строки заменены столбцами, а столбцы — строками.

Задачи (10) и (11) называются парой *взаимно двойственных задач* линейного программирования. Для двойственных задач верна следующая теорема.

Теорема двойственности: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение x^*, то другая также имеет оптимальное решение y^*. При этом соответствующие им оптимальные значения целевых функций равны.

Поясним экономический смысл двойственной модели.

Пусть в качестве управляющих переменных x_j исходной модели рассматривается число изделий, производимых некоторым предприятием, а параметрами b_i — количество ресурсов $i-$го типа, используемых для изготовления изделий. Через a_{ij} обозначено количество ресурсов i-го типа, идущее на изготовление одного изделия j-го вида, (c_j —прибыль от реализации одного изделия j-го вида). Тогда исходная модель (10) соответствует задаче определения оптимального плана производства продукции, обеспечивающего максимальную прибыль.

Пусть теперь предприятие решило прекратить производство изделий и продать ресурсы, идущие на их изготовление. Обозначим через y_i цены на единицу ресурсов i-го вида. Цены на ресурсы должны удовлетворять следующим двум условиям: во-первых, они не должны быть слишком высокими, иначе ресурсы невозможно будет продать; а во-вторых, цены на ресурсы должны быть такими, чтобы прибыль от их реализации была больше прибыли от реализации готовой продукции. Первое условие выражается целевой функцией, а второе условие — ограничениями задачи (11). Причем в левой части каждого из неравенств стоит прибыль от продажи ресурсов всех типов, идущих на изготовление j-го изделия, в правой части — прибыль от продажи j-го изделия. Таким образом, *двойственная задача соответствует следующей экономической проблеме: по каким минимальным ценам следует продавать ресурсы, чтобы прибыль от их реализации была больше прибыли, полученной от реализации продукции, изготавливаемой с использованием этих ресурсов.* Значения переменных y_i часто называют теневыми ценами.

Построение двойственной задачи позволяет глубже разобраться в поставленной экономической проблеме.

1.6 Лекция № 6 (2 часа)
Тема: «Общая постановка транспортной задачи, ее экономическая интерпретация и основные методы решения»

1.6.1 Вопросы лекции:
1 Постановка транспортной задачи по критерию стоимости
2. Способы определения базисного решения

1.6.2 Краткое содержание вопросов
1 Постановка транспортной задачи по критерию стоимости
К задачам линейного программирования сводится большой класс военных, экономических и инженерных задач. Для решения этих задач может быть использован наиболее универсальный симплексный метод. Однако некоторые задачи могут быть сформулированы относительно просто, и для их решения пригодны специальные методы линейного программирования, значительно более эффективные, чем универсальный метод.
Впервые такая модель была использована для планирования оптимальных схем перевозок, поэтому она получила название *транспортной задачи* (ТЗ).
Математически транспортная задача формулируется следующим образом.
Требуется минимизировать

$$L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j; \quad j=\overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j, \quad x_{ij}\geqslant 0, \quad i=\overline{1, m}, \quad j=\overline{1, n},$$

где C_{ij} — стоимость перевозки единицы груза из i-того пункта отправления до j-того пункта назначения; x_{ij} количество груза, перевезенного из i-того пункта отправления в j-тый пункт назначения; a_{ij}—запасы груза на i-том пункте отправления; b_{ij}—потребности в грузе на j-том пункте назначения.
Условия (2) и (3) означают, что количество груза, вывозимого из i-того пункта отправления, равно запасам груза в этом пункте и количество груза, ввозимого в j-тый пункт назначения, равно потребностям в грузе для данного пункта назначения. Из условия (4) следует, что общие запасы и потребности в грузе равны.
Показателем эффективности плана перевозок является стоимость, поэтому сформулированную задачу называют *транспортной задачей по критерию стоимости*. Но величина C_{ij} может иметь не только стоимостный смысл (расстояние, время, расход топлива и т. п.).
Обычно исходные данные транспортной задачи задаются в виде табл. 7.9.

Таблица 7.9

ПО \ ПН	B_1	B_2	...	B_n	a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum b_j$

Научное исследование транспортной задачи началось еще в 30-х годах, когда советский ученый А. Н. Толстой разработал своеобразный метод ее решения для случая, когда имеется не более двух пунктов отправления.
В работе Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», вышедшей в 1939 г., изложен метод разрешающих множителей и указано, что он пригоден для

решения транспортной задачи. В 1949 г. Л. В. Канторович и М. К. Гаврин предложили один из наиболее эффективных методов решения транспортной задачи — метод потенциалов.

При решении транспортной задачи на ЭВМ наиболее эффективен венгерский метод, разработанный в конце 50-х годов.

Идейно все методы решения транспортной задачи можно разделить на *две группы*.

В методах первой группы ищется допустимое (опорное) решение, которое удовлетворяет условиям (7.42), (7.43), и с помощью последовательности итерации улучшается допустимое решение. В методах второй группы ищется оптимальное решение, для которого могут не удовлетворяться условия (7.42), (7.43), и последовательно сокращаются невязки ограничений до получения допустимого оптимального плана. Поэтому *методы первой группы обычно называют методами последовательного улучшения плана, методы второй группы — методами последовательного сокращения невязок ограничений.*

2 Способы определения базисного решения

Простейшим способом определения опорного плана является так называемый *способ «северо-западного угла»*.

Допустим, что требуется определить опорный план для ТЗ, исходные данные для которой приведены в табл. 7.10. Будем заполнять ее перевозками постепенно, начиная с левой верхней клетки («северо-западного» угла таблицы). Первой заполняется клетка *A1 – B1*. Спрос пункта назначения *B1* составляет 30 единиц, запасы пункта отправления A1—40 единиц. Следовательно, спрос *B1* можно полностью удовлетворить за счет запасов *A1*. Следующая клетка *A1 – B2*. Спрос пункта назначения *B2*—100 единиц, оставшиеся запасы пункта отправления *A1*—10 единиц. Назначаем перевозку *A1 – B2* — 10 единиц. И т.д.

Окончательное распределение перевозок приведено в табл. 7.11. Таким образом, способ «северо-западного угла» весьма прост, но полученный с его помощью план может существенно отличаться от оптимального плана.

Таблица 7.10

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10	1	3	40
A_2	6	2	5	80
A_3	12	5	14	60
b_j	30	100	50	180

Таблица 7.11

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10 30	1 10	3	40
A_2	6	2 80	5	80
A_3	12	5 10	14 50	60
b_j	30	100	50	180

Лучшие результаты дает *способ наименьшего элемента* в матрице. Сущность этого способа рассмотрим на этом же примере (табл. 7.10).

В табл. 7.10 выбираем клетку с минимальным элементом. Такой клеткой является *A1 – B2*. Потребности пункта назначения В2 составляют 100 единиц, запасы пункта отправления *A1* —40 единиц. Назначаем перевозку *A1—B2,* равную 40 единицам. Так как запасы пункта отправления *A1* полностью исчерпаны, то первую строку исключаем из дальнейшего рассмотрения. Определяем следующую клетку *A2 – B2* с минимальным элементом. Неудовлетворенные запасы пункта назначения *B2* - 60 единиц, запасы пункта отправления *A2* — 80 единиц, назначаем перевозку *A2 – B2* — 60 единиц. Аналогичным образом назначаем все остальные перевозки, указанные в табл. 7.12.

Еще более точное приближение опорного плана к оптимальному дает *способ Фогеля* (способ предложен американским ученым У. Фогелем).

Способ Фогеля рассмотрим на примере задачи, приведенной в табл. 7.10. Процесс начинается с определения разностей между двумя наименьшими элементами каждой строки и каждого столбца табл. 7.1О. Обозначим эти разности $Д_i$, и $Д_j$ соответственно. Например, в строке *A1*минимальный элемент равен 1, следующий за ним по величине элемент—3, разность между ними—2. Эта и другие разности по строкам и столбцам выписаны в табл. 7.13. Затем из всех разностей строк и столбцов выбираем наибольшую. В нашем примере это $Д_3$=7 в строке А3. Определяем клетку с минимальным элементом в этой строке *А3 – В2* и в эту клетку записываем поставки *А3 – В2* 60 единиц. Запасы пункта отправления А3 исчерпаны. Исключаем строку А3 из рассмотрения и определяем новые разности. В нашем примере разности не изменились, но в общем случае они могут и пересчитываться. Определяем следующую максимальную разность 4, которой соответствует минимальный элемент в клетке *А2 – В1* 6. Назначаем перевозки *А1 – В2* и аналогичным образом продолжаем вычислительную процедуру до назначения всех перевозок. Результаты назначения приведены в табл. 7.13.

Таблица 7.12

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10	1 40	3	40
A_2	6	2 60	5 20	80
A_3	12 30	5	14 30	60
b_j	30	100	50	180

Таблица 7.13

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	a_i	Δ_i
A_1	10	1	3 40	40	2
A_2	6 30	2 40	5 10	80	3
A_3	12	5 60	14	60	7
b_j	30	100	50	180	
Δ_j	4	1	2		

Сравним опорные планы, полученные рассмотренными способами.

Опорный план, полученный способом «северо-западного угла» (см. табл. 7.11), дает следующую стоимость перевозок:

Л1=10*30+1*10+2*80+5*10+14*50= 1220.

Опорному плану, полученному способом наименьшего элемента (см. табл. 7.12), соответствует

Л2=1 • 40+2 • 60+5 • 20+ 12 • 30+ 14 • 30= 1040.

Наиболее точные результаты дает опорный план, полученный способом Фогеля (см. табл. 7.13):

Л3=5*60+6*30+2*40+5*10+3*40=730.

Однако каждый из этих способов не гарантирует, что полученный опорный план является оптимальным. Для уточнения опорного плана разработан ряд методов.

Распределительный метод

Наиболее простым методом улучшения опорного плана является распределительный метод.

Сущность распределительного метода состоит в том, что для каждой свободной клетки, элементы которой не вошли в опорный план, находится цикл.

Циклом называется последовательность клеток, в которых поворачивает «ладья» (она может двигаться лишь по строкам и столбцам таблицы), возвращающаяся в ту же клетку, из которой она вышла. При этом в каждой строке и в каждом столбце таблицы в цикл входят или две клетки, или ни одной, и *помимо исходной в цикл включаются лишь базисные клетки*, элементы которых вошли в опорный план.

С помощью цикла определяют, на сколько изменятся транспортные расходы, если ввести в свободную клетку единицу груза. Эта величина K_{ij} называется *индексом свободной клетки* (*i,j*). Если K_{ij} <0, т. е. транспортные расходы уменьшатся, то в клетку вносится максимально возможная перевозка (она равна минимальной перевозке в «отрицательных» клетках цикла), а если K_{ij} > 0, то маршрут (*i,j*) использовать не стоит и проверяется следующая свободная клетка. Процесс заканчивается, если для всех свободных клеток K_{ij} >= 0.

Поясним рассмотренную вычислительную процедуру на примере решения задачи, опорный план для которой представлен в табл. 7.14. Свободными клетками являются *А1-В1, А1-В3*, *А2-В1, А3-В2.* Найдем цикл для клетки *А1-В1* (табл. 7.14). В клетке, где добавляем единицу груза, ставим знак «плюс», где убавляем — знак «минус». Цикл образуют клетки *А1-В1, А1-В2, А2-В2, А2-В3, А3-В3, А3-В1*. Общий баланс груза по строкам и столбцам не изменяется. Если в клетке *А1-В1* мы добавляем единицу груза, то в клетке *А1-В2* убавляем на единицу. Очевидно, что для клеток, где стоит знак «плюс», транспортные расходы увеличиваются; для клеток, где стоит знак «минус», транспортные расходы уменьшаются. Следовательно,

$$K(1,1) = 10+2+14-1-5-12= 8 > 0.$$

Перераспределение перевозок нецелесообразно.

Аналогичным образом составляем цикл для клетки *A1-B3 (A1-B3, A2-B3, A2-B2, A1-B2*, *A1-B3)*. Величина индекса клетки K(1; 3) = 3+2-1-5= -1. Перераспределение целесообразно. Минимальная перевозка «отрицательной» клетки *A2-B3* равна 20. Следовательно, назначаем в *A1-B3,* 20 единиц, в *A2-B3*—0, в *A2-B2.*—80, в *A1-B2—20.* Общий баланс по строкам и столбцам сохранился. Получили новый опорный план (табл. 7.15). Для клетки *A3-B2 K(3.2)*=5+3-1-14=-7. Следовательно, опорный план можно улучшить. Назначаем в *A3-B2* 20 единиц, в *A1-B2,*—0, в *A1-B3,*—40, в *A3-B3*— 10 единиц. Новый опорный план представлен в табл. 7.16.

Таблица 7.14

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3
A_1	10 +	1 − 40	3
A_2	6	2 + 60	5 − 20
A_3	12 − 30	5	14 + 30

Таблица 7.15

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3
A_1	10	1 − 20	3 + 20
A_2	6	2 80	5
A_3	12 30	5 +	14 − 30

Таблица 7.16

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3
A_1	10	1	3 40
A_2	6	2 − 80	5 +
A_3	12 30	5 + 20	14 − 10

Таблица 7.17

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3
A_1	10	1	3 40
A_2	6 +	2 − 70	5 10
A_3	12 − 30	5 + 30	14

Строим цикл для клетки *A2-B3* и определяем K(2,3) =5+5—14—2=-6. Следовательно, опорный план можно улучшить, назначив в *A2-B3* 10 единиц, в *A3-B3*—0, в *A3-B2* — 30, в *A2-B2* — 70 единиц. Остальные назначения оставляем без изменений. Новый опорный план приведен в табл. 7.17. Строим цикл для клетки *A2-B1 (A2-B1, A2-B2, A3-B2*, *A3-B1, A2-B1)* и вычисляем K(2,1)=6+5—2—12=—3.

Произведя перераспределение перевозок, получаем новый опорный план (табл. 7.18)

K(1,1) =10+5—3—6=6>0;

K(1,2)= 1+5—3—2=1>0;

K(3,1)=12+2- 6—5=3>0;

K(3,3)=14+2- 5—5=6>0.

Так как все индексы положительны, то полученный план является оптимальным.

Таблица 7.18

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3
A_1	10	1	3 40
A_2	6 30	2 40	5 10
A_3	12	5 60	14

Таблица 7.19

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3
A_1	3 25	2 30	3
A_2	3	3	4 40
A_3	6	6 50	2 0

Обычно в транспортной задаче число базисных клеток равно $m+n$-1 и цикл можно построить единственным образом (например, в рассмотренной задаче число заполненных клеток 3+3-1=5.

Если число базисных клеток меньше $m+n$-1 (такая задача называется вырожденной), то для того, чтобы построить цикл, к базисным клеткам нужно добавить свободные так, чтобы они с базисными клетками не образовывали циклов. Например, пусть табл. 7.19 задан вырожденный план перевозок (в нем не хватает одной базисной клетки). Здесь можно включить в число базисных клетку *A1-B2,* или *A2-B1,* или *A2-B2,* или *A3-B3.* После этого можно построить цикл для любой свободной клетки. А если включить клетку *A3-B1,* образующую цикл с клетками *A1-B1, A1-B2, A2-B2,* то построить цикл с базисными клетками для остальных свободных клеток все равно не удастся. Включим в базисные клетку *A3-B3,* назначив для нее фиктивную перевозку, равную нулю. Теперь для любой свободной клетки можно составить цикл и определить индекс.

Недостатком рассмотренного метода решения транспортной задачи является необходимость строить циклы. При расчетах на ЭВМ на это уходит основная часть времени, необходимого для решения задачи. Поэтому получили распространение другие методы решения транспортной задачи, которые нами будут рассмотрены далее.

1.7 Лекция № 7 (2 часа)
Тема: «Методы решения транспортной задачи»

1.7.1 Вопросы лекции:
1 Метод потенциалов
2. Общая характеристика венгерского метода

1.7.2 Краткое содержание вопросов
1 Метод потенциалов

Распределительный метод решения транспортной задачи требует нахождения цикла для каждой свободной клетки при определении ее индекса. Эта операция может быть значительно упрощена при использовании *метода потенциалов*. Идея метода потенциалов заключается в том, что для проверки допустимого плана на оптимальность для каждого столбца и строки определяются числа U_i $(i=1,,,m)$ и V_j $(j=1,,,n)$, которые называются *потенциалами*. С помощью потенциалов легко вычисляются индексы свободных клеток.

Рассмотрим транспортную задачу в общем виде

$$L=\min_{x_{ij}\geqslant 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad (7.45)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i; \qquad (7.46)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j. \qquad (7.47)$$

Определим функцию Лагранжа для задачи (7.45)—(7.47):

$$F(X,\ u)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}u_i\left(a_i-\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}v_j\left(b_j-\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\right), \qquad (7.48)$$

Так как $x_{ij} >= 0$ и ограничения заданы в виде равенств, то условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}\geqslant 0;\quad x_{ij}\geqslant 0;\quad x_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}=0;\quad i=\overline{1,\ m};\quad j=\overline{1,\ n};$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}=0;\quad i=\overline{1,\ m};\quad \frac{\partial F}{\partial v_j}=0;\quad j=\overline{1,\ n}.$$

Выполнив дифференцирование (7.48), получим

$$\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}=c_{ij}-u_i-v_j\geqslant 0; \qquad (7.49)$$

$$x_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}=x_{ij}(c_{ij}-u_i-v_j)=0; \qquad (7.50)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}=a_i-\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=0; \qquad (7.51)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_j}=b_j-\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=0. \qquad (7.52)$$

Условия (7.51), (7.52) совпадают с условиями (7.46), (7.47). Из условий (7.49), (7.50) видно, что при $X_{ij}>0$

$$c_{ij}=u_i+v_j; \qquad (7.53)$$

при $x_{ij}=0$

$$c_{ij}\geqslant u_i+v_j. \qquad (7.54)$$

Условие (7.53) позволяет находить потенциалы для допустимого базисного решения. Из условия (7.54) следует выражение для определения индексов свободных клеток

$$k_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geqslant 0. \tag{7.55}$$

Итак, определив потенциалы, можно рассчитать индексы свободных клеток и проверить допустимый план на оптимальность. Если условие (7.55) не выполняется, то из всех свободных клеток, для которых $K_{ij} < 0$, выбирается одна с максимальным по абсолютной величине индексом. Для этой свободной клетки строится цикл и производится перераспределение плана перевозок. Вычислительный процесс заканчивается при выполнении условия (7.55) для всех свободных клеток.

Рассмотрим пример решения транспортной задачи методом потенциалов. Исходные данные для решения и допустимый план представлены в табл. 7.20. Определим потенциалы U_i и V_j.

Потенциал первой строки выбираем произвольно, например U1=0. В первой строке находится одна базисная клетка *A1-B3.* Следовательно V3=C(1,3) – U1= 3-0=3. Зная V3 можно найти U2= C(2,3) – V3 = 5—3=2. Используя следующую базисную клетку *A2-B2,* определяем *V2=C(2,2) – U2= 2*—2=0. По базисным клеткам третьей строки последовательно рассчитываем U3=C(3,2) – V2 = 5-0 =5; V1=C(3,1) – U3 = 12-5 =7.

Зная потенциалы строк и столбцов, рассчитываем индексы свободных клеток:

$$k_{1,1} = 10 - (0+7) = 3 > 0; \qquad k_{1,2} = 1 - (0+0) = 1 > 0;$$

$$k_{2,1} = 6 - (2+7) = -3 < 0; \qquad k_{3,3} = 14 - (5+3) = 6 > 0.$$

Так как $k_{2,1} < 0$, то данный план не является оптимальным.

Таблица 7.20

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	10	1	3 / 40	0
A_2	6	2 / 70	5 / 10	2
A_3	12 / 30	5 / 30	14	5
v_j	7	0	3	

Таблица 7.21

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	10	1	3 / 40	0
A_2	6 / 30	2 / 40	5 / 10	2
A_3	12	5 / 60	14	5
v_j	4	0	3	

Отрицательный индекс имеет свободная клетка *A2-B1.* Составляем для этой клетки цикл *A2-B2, A3-B2, A3-B1,* производим перераспределение перевозок и рассчитываем потенциалы для нового опорного плана (табл. 7.21). По потенциалам определяем индексы свободных клеток:

$$k_{1,1} = 10 - (0+4) = 6; \qquad k_{1,2} = 1 - (0+0) = 1;$$

$$k_{3,1} = 12 - (5+4) = 3; \qquad k_{3,3} = 14 - (5+3) = 6.$$

Все индексы положительны. Следовательно, данный план является оптимальным.

Таким образом, вычислительный алгоритм метода потенциала включает следующие операции:

1) определяем опорный план;

2) рассчитываем для базисного опорного плана потенциалы;

3) определяем индексы свободных клеток и проверяем план на оптимальность;

4) при наличии отрицательных индексов выбираем из них индекс с максимальным абсолютным значением и производим для соответствующей свободной клетки перераспределение плана перевозок, после чего переходим к п. 2

Метод потенциалов — простой и эффективный метод решения транспортной задачи. Наиболее удобен метод для расчетов вручную. При использовании ЭВМ метод менее удобен, так как построение циклов на ЭВМ связано с большими затратами машинного времени.

2 Общая характеристика венгерского метода

Наиболее эффективным методом решения транспортной задачи на ЭВМ является венгерский метод. Вычислительные эксперименты, поставленные на ЭВМ, показали, что венгерский метод в 2—4 раза эффективнее метода потенциалов. В основу метода положены теоремы, доказанные венгерскими математиками Д. Кенигом и Е. Эгервари. На основании этих теорем американские математики Г. Кун и Д. Манкрес разработали метод, который справедливо был назван венгерским.

Венгерский метод относится к методам последовательного *сокращения невязок ограничений*. Метод основан на двух теоремах.

Теорема 1. Если план $\|X_{ij}\|$ минимизирует

$$L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

при выполнении ограничений (7.46) – (7.47), то этот план минимизирует и

$$L'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}$$

при тех же ограничениях, где $c'_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$; $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$; u_i, v_j — константы приведения матрицы.

Теорема 2. Если все $c'_{ij}\geqslant 0$ и можно указать такой план перевозок $\|x_{ij}\|$, для которого

$$L'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}=0$$

и выполняются ограничения задачи, то полученный план перевозок оптимален.

Вторая теорема очевидна, так как при C_{ij} >= 0 минимальное значение целевой функции не может быть меньше нуля.

Для доказательства первой теоремы представим L' в виде

$$L'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{m}u_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}v_j\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=L-\sum_{i=1}^{m}u_ia_i-\sum_{j=1}^{n}v_jb_j.$$

Так как значения сумм не зависят от X_{ij}, то L' и L достигают минимума при одних и тех же значениях X_{ij}.

Из теоремы 1 следует, что прибавление и вычитание некоторого числа из всех элементов строки или столбца матрицы $\|C_{ij}\|$ не изменяет оптимального плана. Если все перевозки назначены на нулевые элементы матрицы $\|C'_{ij}\|$, то целевая функция $L'=0$. Таким образом, идея метода заключается в том, чтобы путем прибавления или вычитания констант приведения U_i, и V_j,- из всех элементов строк и столбцов матрицы $\|C_{ij}\|$ преобразовать ее к такому виду, чтобы все ее элементы были неотрицательны и все перевозки можно было назначить по нулевым элементам.

Несмотря на идейную простоту венгерского метода, его вычислительный алгоритм является достаточно сложным.

1.8.Лекция № 8 (2 часа)
Тема: «Введение в целочисленное программирование»

1.8.1 Вопросы лекции:
1 Математические модели, приводящие к задачам целочисленного программирования
2. Общая характеристика методов отсечения
3. Комбинаторные методы. Алгоритм ветвей и границ для решения задач целочисленного программирования

1.8.2 Краткое содержание вопросов
1 Математические модели, приводящие к задачам целочисленного программирования

Многие задачи исследования операций такие, как распределения ресурсов, сетевого планирования и управления, календарного планирования описываются математическими моделями дискретного программирования.

Рассмотрим общую задачу максимизации:

Найти $\max f(x_1, x_2, ..., x_4)$ (3.1)

при условиях

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1 \\ &\vdots \\ &g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m \end{aligned} \qquad (3.2)$$

и $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ (3.3)

где D — некоторое подмножество действительных чисел.

Если множество D является конечным или счетным, то условие (3.3) — это условие дискретности, и данная задача является задачей дискретного программирования.

Чаще всего условие дискретности разделено по отдельным переменным следующим образом:

$$x_j \le D_j,\ j = \overline{1, n} \qquad (3.4)$$

где D_j, — конечное (или счетное) множество.

Если вводится ограничение x_j — целые числа (j = 1, 2, ..., n), то приходят к задачам целочисленного программирования (ЦП), которое является частным случаем дискретного программирования.

В задачах дискретного программирования область допустимых решений является невыпуклой и несвязной. Поэтому отыскание решения таких задач сопряжено со значительными трудностями. В частности, невозможно применение замены дискретной задачи ее непрерывным аналогом с последующим округлением найденного решения до ближайшего целочисленного. Например, рассмотрим следующую задачу ЛП:

Пример 1. Найти $\max(x_1 - 3x_2 + 3x_3)$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \end{cases},$$

где $x_1, x_2, x_3 \ge 0, x_j$ - целые числа ($j = 1,2,3$)

Игнорируя условие целочисленности, находим оптимальный план симплекс-методом:

$$x_{1опг} = 1/2;\ x_{2опг} = 0;\ x_{1опг} = 5$$

Проверка показывает, что никакое округление компонент этого плана не дает допустимого решения, удовлетворяющего ограничениям этой задачи. Искомое целочисленное решение задачи таково:

$$x_{1опт} = 2;\ x_{2опт} = 2;\ x_{1опт} = 5.$$

Таким образом, для решения задач дискретного программирования необходимы специальные методы.

Методы решения задач дискретного программирования по принципу подхода к проблеме делят на 3 группы: 1) методы отсечения или отсекающих плоскостей; 2) метод ветвей и границ; 3) методы случайного поиска и эвристические методы.

По структуре математической модели задачи дискретного программирования разделяют на следующие классы:

- задачи с неделимостями;
- экстремальные комбинаторные задачи;
- задачи на несвязных и невыпуклых областях;
- задачи с разрывными целевыми функциями;

Задачи с неделимостями

Математические модели задачи с неделимостями основаны на требовании целочисленности переменных $\{x_j\}$, вытекающем из физических условий практических задач.

К таким задачам относится задача об определении оптимальной структуры производственной программы, где $(x_1, x_2, ..., x_n)$ - объемы выпуска продукции.

Эта задача заключается в отыскании $\max\limits_{\{x_j\}} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j,$ (3.5)

при $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1,2,...,m),$ (3.6)

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ...,\ x_n \ge 0;$ x_j - целые при $j \in J$. (3.7)

Если $J = N = (1,2,...,n)$, то задача называется полностью целоцисленной, в противном случае $J \ne N$ - частично целочисленной.

Задача о ранце

Одной из наиболее распространенных задач целочисленного программирования является так называемая задача о ранце.

Постановка задачи. Турист готовится к длительному переходу в горах. В рюкзаке он может нести груз, масса которого не более *W* кг. Этот груз может включать *n* видов предметов, каждый предмет типа *j*, массой ϖ_j кг, $j = 1,2,...,n$. Для каждого вида предметов турист определяет его ценность E_j во время перехода. Сколько предметов каждого типа он должен положить в рюкзак, чтобы суммарная ценность снаряжения была максимальной?

Обозначим через x_j - количество предметов *j*-го типа в рюкзаке. Тогда математическая модель задачи такова: $\max \sum\limits_{j=1}^{n} E_j x_j$ (3.8)

при ограничениях $\sum\limits_{j=1}^{n} \varpi_j x_j \le W,$ x_j - целое (3.9)

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2,...,n$$

Задачи о покрытии относятся к классу экстремальных комбинаторных задач на графах.

Типичная задача о покрытии состоит в следующем.

Дан граф *Г*. Требуется найти его минимальное покрытие, т.е. такую минимальную совокупность ребер, чтобы любая вершина графа была инцидентна некоторому ребру, входящему в покрытие.

Обозначим вершины графа $i\ (i = 1,2,...,m)$, а ребра $j\ (j = 1,2,...,n)$.

Граф характеризуется матрицей инциденций вершин и ребер $A = \|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если ребро } j \textit{ входит в покрытие}; \\ 0 - \textit{в противномслучае.} \end{cases}$

Вводим набор переменных $\{x_j\}$ таких, что

$$x_i = \begin{cases} 1, \textit{если ребро } j \textit{ входит в покрытие}; \\ 0 - \textit{в противномслучае.} \end{cases}$$

Тогда нахождение минимального покрытия эквивалентного следующей задаче:

Найти $\min \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ (3.10)

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1 \qquad (3.11)$$

$$i = 1,2,...,m$$

Задачи на несвязных и невыпуклых областях

Данные задачи представляют собой модели линейного программирования, в которых к обычным условиям присоединены некоторые дополнительные условия, превращающие область допустимых решений в невыпуклую или несвязную.

Введение дополнительных дискретных переменных позволяет осуществить переход от задачи оптимизации на невыпуклой области к задаче на области,

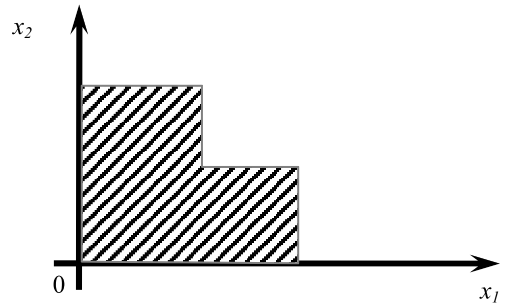


Рис. 11.1

представляющей собой сумму выпуклых множеств.

2 Общая характеристика методов отсечения

Для решения задач целочисленного программирования разработаны две группы точных методов:

- методы отсечения (один из них - метод Гомори);
- комбинаторные методы.

Рассмотрим сущность методов отсечения.

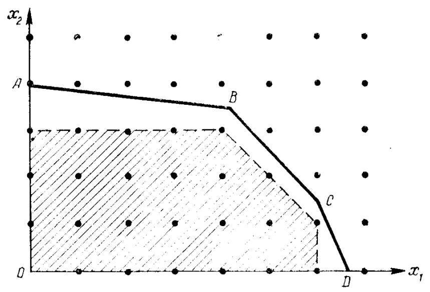


Рис. 11.2

Допустим, что необходимо решить задачу целочисленного программирования

$$L = \max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.11}$$

при ограничениях $\sum a_{ij} x_{ij} \le b_i, \; i = \overline{1,m},$ (8.12)

x_j - неотрицательные целые числа. (8.13)

Предположим, что область допустимых решений имеет вид, показанный на рис. 11.2. Узлы целочисленных решений на этом рисунке изображены точками. Точки, расположенные внутри области *OABCD,* являются допустимыми решениями задачи (11.11) — (11.13). Оптимальное же решение данной задачи без учета условия целочисленности всегда расположено на границе области решения. Однако в данном примере граничные точки не являются целочисленными. Допустим, что путем введения дополнительных ограничений область допустимых решений сужена до заштрихованной области на рис. 11.2. В этом случае, решая задачу (11.11), (11.12), получим оптимальное решение, которое является целочисленным.

Таким образом, общая идея всех методов отсечения заключается в том, что решается задача линейного программирования (11.11), (11.12) без учета условия (11.13). Если полученное оптимальное решение является целочисленным, то данное решение совпадает и с решением задачи (11.11) — (11.13). Если же решение (11.11), (11.12) не является целочисленным, то вводятся дополнительные ограничения, отсекающие нецелочисленные вершины многогранника, и процесс решения повторяется. После определенного количества аналогичных итераций находится оптимальное целочисленное решение задачи.

Таким образом, независимо от правила формирования дополнительных ограничений метод отсечения состоит из следующих основных шагов.

1. Находим оптимальное решение задачи линейного программирования без учета условия целочисленности решения. Если подученное решение является целочисленным, то прекращаем вычислительный процесс. В противном случае переходим к п. 2.
2. Вводим дополнительное ограничение, исключающее полученное нецелочисленное решение, и возвращаемся к п. 1.

Практический опыт решения задач целочисленного программирования методом отсечения показал, что этот метод имеет плохую сходимость. Поэтому для повышения эффективности вычислительных алгоритмов целочисленного программирования были предложены комбинаторные методы, основанные на упорядоченном переборе наиболее перспективных вариантов.

3. Комбинаторные методы. Алгоритм ветвей и границ для решения задач целочисленного программирования

Комбинаторные методы решения задач целочисленного программирования можно разделить на две группы:

- методы динамического программирования;
- методы ветвей и границ.

Идея метода Ветвей и Границ достаточна проста.

Представляем процесс поиска решения в виде графа типа «дерево». При начале построения дерева первую переменную x_1 можно включить $(x_1 = 1)$ или не включить $(\bar{x}_1 = 0)$, т.е. из корневой вершины выходят две ветви. Аналогично в каждой из введенных вершин можно поступить со второй переменной (рис. 11.3).Так и образуется *дерево возможных вариантов*.

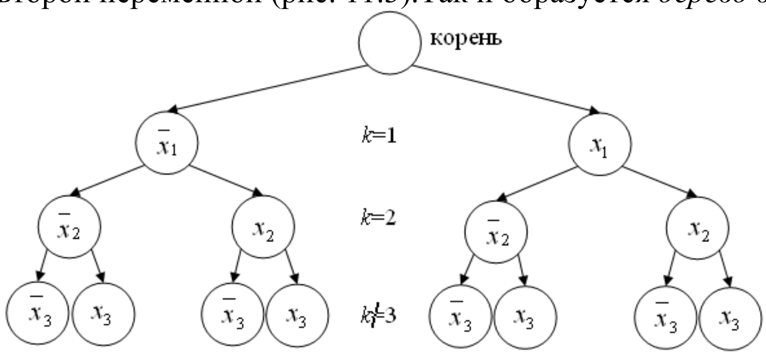


Рис. 11.3.

На первом уровне построенного нами дерева $k = 1, m = 2^1 = 2$. Очевидно, что далее для любого k имеем число вершин (т.е. вариантов) $m = 2^k$.

Значение целевой функции L, вычисленное вдоль ветви, дает границу решения по ней.

Проведем формализацию этой идеи на примере решения задачи

$$L = \max_{x_j = 0;1} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.11a}$$

при ограничении $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b.$ (8.12 а)

Дерево возможных вариантов данной задачи изображено на рис. 11.4. Каждой ветви дерева вариантов соответствует определенный план

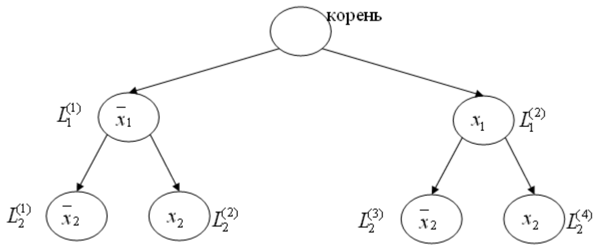
$$X_k^m = \{x_1, x_2, ..., x_k\},\ k = 0,1,2,...,n;\ m = 1,2,...,2^k$$

(k – номер уровня, m – число узлов на данном уровне),

с помощью которого можно найти соответствующее значение целевой функции $L_k = \sum_{x_j \in X_k^m} c_j x_j$

и отвечающие ему затраты ограниченных в задаче ресурсов $D_k = \sum_{x_j \in X_k^m} a_j x_j .$

Очевидно, что построив дерево полностью и перебрав все 2^n вариантов, можно определить оптимальный план для данной задачи. Установим теперь условия, которые позволяют исключить полный перебор.



$(\bar{x}_j = 0;\ x_j = 1;\ j = 1, 2, ..., k)$

Рис. 11.4

Наиболее простое из этих условий имеет вид $D_k = \sum\limits_{x_j \in X_k^m} c_j x_j > b$ **(11.14)**

Физически условие (11.14) означает, что данная ветвь не удовлетворяет ограничению (11.12а), т.е. с сумма ресурсов, потребляемых таким вариантом, существенно больше имеющейся. Однако, использование только одного условия (11.14) для отсечения бесперспективных ветвей потребовало бы проверки всех висячих вершин.

Поэтому для отсечения бесперспективных вариантов кроме условия (11.14) используют дополнительные неравенства

$$\left.\begin{aligned} D_k\left(X_k^m\right) \le D_k\left(X_k^l\right); \\ L_k\left(X_k^m\right) \ge L_k\left(X_k^l\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

Неравенства (11.15) означают, что l-й вариант как по значению целевой функции L, так и по величине ограничения на ресурсы D уступает более перспективному m-тому варианту. Неравенства (8.15) используются для отсечения бесперспективных вариантов в методах динамического программирования. Так как все сравниваемые варианты необходимо хранить, то наиболее существенным ограничением при машинном решении задачи методом динамического программирования становится ограниченный объем оперативной памяти компьютера. Поэтому в методе ветвей и границ для отсечения бесперспективных вариантов в задаче максимизации используется неравенство $H_k\left(X_k^m\right) = L_k^0\left(X_k^m\right) + L_k'\left(X_k^m\right) \le L_0,$ (11.16)

где L_0 — уже полученное допустимое приближенное решение целочисленной задачи;

$H_k\left(X_k^m\right)$ — верхняя граница решения;

$L_k^0\left(X_k^m\right) = \sum\limits_{x_j \in X_k^m} c_j x_j$ - результат от включения в дерево k первых переменных в исследуемом варианте m;

$L_k'\left(X_k^m\right)$ - добавка, возникающая в силу снятия ограничения на целочисленность переменной.

Эта добавка определяется путем решения следующей задачи:

$$L_k'\left(X_k^m\right) = \max_{0 \le x_j \le 1} \sum_{j=k+1}^{n} c_j x_j\ , \tag{11.17}$$

при ограничении

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j x_j \le b - \sum_{x_j \in X_k^m} a_j x_j \tag{11.18}$$

Отдельно взятая задача (11.17), (11.18) является типовой задачей линейного программирования и, следовательно, может быть решена симплекс-методом. Ее решение позволяет найти верхнюю границу решения по варианту m и, тем самым, отсекать бесперспективные вершины.

Конкретизируем процедуру ветвей и границ на примере.

Добавка определяется путем решения следующей задачи:

$$L_k'\left(X_k^m\right) = \max_{0 \le x_j \le 1} \sum_{j=k+1}^{n} c_j x_j\ , \tag{4.15}$$

при ограничении

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j x_j \le b - \sum_{x_j \in X_k^m} a_j x_j\ , \tag{4.16}$$

которая является типовой задачей линейного программирования и может быть решена симплекс-методом.

Поскольку в ней условие целочисленности снято, то $L_k'\left(X_k^m\right) \geq \max_{x_j=0;1} \sum_{j=k+1}^{n} c_j x_j$,

при ограничении (4.16). Следовательно, ветвь с номером *m* не может привести к решению, целевая функция которого больше приближенного решения L_0. Именно поэтому величина $H_k^m\left(X_k^m\right)$ называется верхней границей решения.

Пример. Для решения задачи оптимизации инновационного портфеля, т.е. максимизации чистого дисконтированного дохода *NPV* всего портфеля при ограничении на первоначальные затраты: $L = \max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \leq D$, $x_j = \begin{cases} 1, \text{если } j-\text{тый проект не реализуется;} \\ 0-\text{если он принимается к реализации.} \end{cases}$

где $c_j - NPV$-доход по *j*-му проект, d_j - первоначальные затраты на *j*-й проект, введем следующие обозначения:

U – все множество переменных x_j ,*S* – множество переменных, вошедших в ветвь дерева возможных вариантов, $E_s = \left\{ x_j \mid d_j > D - \sum_{x_j \in s} d_j x_j \right\}$ - множество переменных, которые нельзя включить в ветвь дерева, так как на них уже не хватит средств, $G_s = U \setminus (S + E_s)$ - множество переменных x_j, из которых выбирается очередная переменная для включения в дерево возможных вариантов (ДВМ).

Учитывая специфику задачи, выберем дихотомический способ построения ДВМ, т.е. будем полагать $\overline{x}_j = 0$ для проекта, не включаемого в портфель и $x_j = 1$, если проект принимается к реализации. При выборе очередной переменной будем использовать *метод градиента*, т.е. будем отдавать предпочтение переменной x_j, для которой доходность на единицу средств максимальна.

Иначе говоря, выбирается переменная x_r, определяемая по правилу: $h_r(x_r) = \max_{x_j \in G_s} h_j(x_j)$, (4.17)

Где $h_j(x_j) = {c_j}/{d_j}$ (4.18) есть значение градиента по переменной x_j.

На любом очередном шаге определяем $H_s(x_r)$, $H_s(\overline{x}_r)$ и выбираем для дальнейшего ветвления ту вершину, у которой величина H_s максимальна. Избранную ветвь продлеваем до тех пор, пока не окажется выполненным условие $G_s = \varnothing$, т.е. не исчерпается возможность использовать оставшиеся средства. Применение расчета градиента позволяет отказаться от симплекс-метода при отыскании верхней границы решения в этой задаче.

Пример 4.1. Требуется определить оптимальный инновационный портфель для условий, заданных таблицей 4.1, в которой *j* – номер проекта, c_j и d_j – его ожидаемая доходность и первоначальные затраты соответственно при общем ограничении на затраты *D* = 6.

Таблица 4.1

j	1	2	3
c_j	9	4	6
d_j	3	2	6
h_j	3	2	1

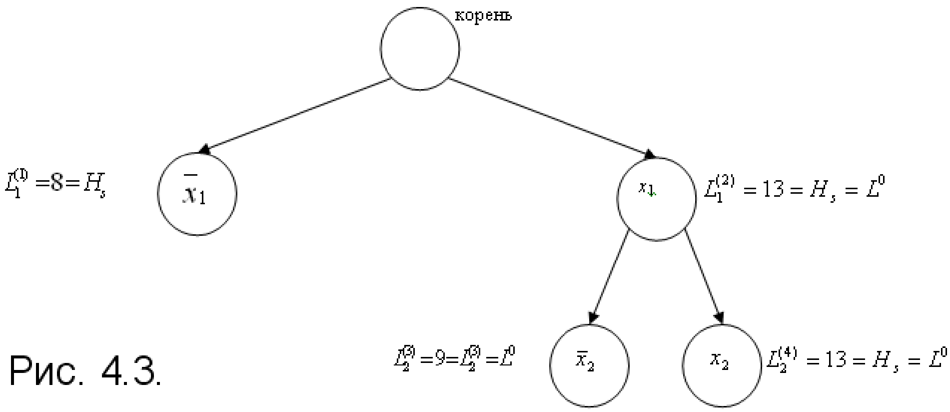


Рис. 4.3.

Общий алгоритм решения одномерной задачи целочисленного программирования с применением метода градиента для поиска верхней (нижней) границы решения.

Шаг 1. Пронумеровать переменные в порядке убывания (возрастания) градиента

$$h_j(x_j) = {c_j}/{d_j}\ .$$

Шаг 2. Выбрать переменную h_r, по правилу $h_r(x_r) = \max(\min) h_j$ для включения в множество *S*.

Шаг 3. Определить множества E_s и G_s для построения ветви.

Шаг 4. Проверить условие $G_s = \varnothing$. Если оно выполняется, то получено допустимое решение, если нет – перейти к п. 5.

Шаг 5. Рассчитать верхнюю (нижнюю) границу решения H_s и проверить неравенство $H_s > L^0 (H_s < L^0)$, исходя из того, что первоначально $L^0 = 0 (L^0 = \infty)$. Если неравенство выполняется, то перейти к п. 3 для очередного варианта значения переменной x_r, в противном случае к п. 6.

Шаг 6. Для висячих вершин проверить неравенство $H_s > L^0 (H_s < L^0)$. Если оно выполняется, выбрать вершину с $\max(\min) H_s$ и перейти к п. 3. Иначе решение L^0 оптимально.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2.1 Практическое занятие №1 (2 часа).

Тема: «Введение. Математическое моделирование и исследования операций»

2.1.1 Задание для работы:

1. Моделирование как метод выбора и обоснования решений в экономике и менеджменте.
2. История развития исследования операций.
3. Оптимизационные задачи. Содержательная и математическая постановка.

2.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Моделирование как метод выбора и обоснования решений в экономике и менеджменте.

Провести устный опрос теоретического материала.

2. История развития исследования операций.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Разобрать тесты

1. Термин "исследование операций" появился ...

в годы второй мировой войны
в 50-ые годы XX века
в 60-ые годы XX века
в 70-ые годы XX века
в 90-ые годы XX века
в начале XXI века

2. Под исследованием операций понимают (выберите наиболее подходящий вариант) ...

комплекс научных методов для решения задач эффективного управления организационными системами
комплекс мер, предпринимаемых для реализации определенных операций
комплекс методов реализации задуманного плана
научные методы распределения ресурсов при организации производства

3. Упорядочьте этапы, через которые, как правило, проходит любое операционное исследование:

постановка задачи
построение содержательной (вербальной) модели рассматриваемого объекта (процесса)
построение математической модели
решение задач, сформулированных на базе построенной математической модели
проверка полученных результатов на адекватность природе изучаемой системы
реализация полученного решения на практике

4. В исследовании операций под операцией понимают…

всякое мероприятие (систему действий), объединенное единым замыслом и направленное на достижение какой-либо цели
всякое неуправляемое мероприятие
комплекс технических мероприятий, обеспечивающих производство продуктов потребления

5. Решение называют оптимальным, ...

если оно по тем или иным признакам предпочтительнее других
если оно рационально
если оно согласовано с начальством
если оно утверждено общим собранием

3. Оптимизационные задачи. Содержательная и математическая постановка.

Провести устный опрос теоретического материала.

1. Составить математическую модель задачи: Кондитерский цех выпускает три вида продукции М1, М2, М3. Для изготовления продукции используется три вида сырья Р1, Р2, Р3. Запасы сырья ограничены: сырьё первого вида Р1 имеется в количестве 2660 единиц, сырьё второго вида Р2– в количестве 2000 единиц, сырьё третьего вида Р3 – в количестве 3030 единиц. Известны нормы расхода сырья на единицу продукции: для выпуска единицы продукции М1 требуется 2 единицы сырья Р1, 1 единица сырья Р2, 3 единицы сырья Р3; для выпуска единицы продукции М2 требуется 1 единица сырья Р1, 3 единицы сырья Р2, 4 единицы сырья Р3; для выпуска единицы продукции М3 требуется 3 единицы сырья Р1, 2 единицы сырья Р2, 1 единица сырья Р3. Известна прибыль от реализации единицы продукции: М1 приносит прибыль в размере 20 единиц, М2 – в размере 24 единиц, М3 – в размере 28 единиц. Требуется определить оптимальное количество выпуска

продукции М1, М2, М3, исходя из ограничений по запасам сырья, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

2. Составить математические модели следующих задач:

При производстве двух видов продукции используются три вида сырья. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли. Исходные данные таковы:

а)

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
	№1	№2
30	1	3
48	4	3
60	3	3
Прибыль	70	60

б)

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
	№1	№2
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Прибыль	40	50

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Введение. Математическое моделирование и исследования операций», приобретены умения формулировать оптимизационные задачи, критерии оптимизации, строить математические модели задач исследования операций, осуществлять математическую постановку и разрабатывать компьютерные модели оптимизационных задач обоснования принятия решений, использовать стандартные алгоритмы и программы решения задач исследования операций, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и владения основными приемами обработки и представления экспериментальных данных.

2.2 Практическое занятие №2 (2 часа).
Тема: «Основы теории графов и методы сетевого планирования и управления»

2.2.1 Задание для работы:

1. Основные понятия теории графов
2. Сетевой график и правила его построения

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

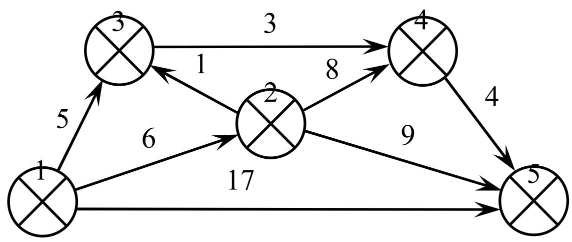
1. Основные понятия теории графов

Провести устный опрос теоретического материала.

2. Сетевой график и правила его построения

Провести устный опрос теоретического материала.

1 . Дан сетевой график проекта, время начала которого равно нулю.



1) Найдите полный резерв времени работы $(2, 3)$.

2) Найдите критическое время проекта.

2. Дано:

(i,j)	1,2	2,3	2,4	2,5	3,7	4,5	4,6	4,9	5,8	5,10	6,9	6,11	7,10	8,10	9,10	10,11
t (i,j)	5	6	4	3	6	1	4	7	9	3	1	5	7	4	3	8

(i,j) = (9,10)

1. Построить сетевой график.
2. Выделить критический путь и найти его длину.
3. Определить резервы времени каждого события.
4. Определить резервы времени (полные, частные первого вида, свободные и независимые) всех работ и коэффициент напряженности работы (i, j). Данная работа указана в конце каждого варианта (под таблицей).

2.2.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Основы теории графов и методы сетевого планирования и управления», приобретены умения формулировать оптимизационные задачи, критерии оптимизации, строить математические модели задач исследования операций, осуществлять математическую постановку и разрабатывать компьютерные модели оптимизационных задач обоснования принятия решений, использовать стандартные алгоритмы и программы решения задач исследования операций, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и владения основными приемами обработки и представления экспериментальных данных.

2.3 Практическое занятие №3 (2 часа).
Тема: «Основы теории графов и методы сетевого планирования и управления»

2.3.1 Задание для работы:

1. Расчеты на детерминированных сетях
2. Расчеты на вероятностных сетях

2.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Расчеты на детерминированных сетях

Провести устный опрос теоретического материала.

1) построить сетевую модель, используя временные оценки $T_{нв}$ как детерминированные;

2) произвести расчет детерминированных параметров сетевой модели графическим и табличным способами;

3) самостоятельно приняв вероятностные временные оценки $T_о$ и $T_п$ по каждой работе, произвести необходимые расчеты и оценить надежность сетевой модели.

«Оценка надежности сетевой модели производства работ»

Вариант	Код работ	$T_{нв}$, дн.	Вариант	Код работ	$T_{нв}$, дн.
1	1-2	11	2	1-2	10
	1-3	14		2-3	15
	1-4	17		2-4	12
	2-5	8		3-5	15
	3-5	11		3-9	0
	3-6	15		4-5	12
	3-8	0		4-7	0
	4-6	13		5-6	20
	4-7	12		6-8	8
	5-7	9		6-9	15
	6-7	14		7-6	0
	7-8	15		7-10	18
				8-10	20
				9-10	25

2. Расчеты на вероятностных сетях

Провести устный опрос теоретического материала.

Для выше сформулированной задачи выполнить:

3) самостоятельно приняв вероятностные временные оценки $T_о$ и $T_п$ по каждой работе, произвести необходимые расчеты и оценить надежность сетевой модели.

2.3.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Основы теории графов и методы сетевого планирования и управления», приобретены умения формулировать оптимизационные задачи, критерии оптимизации, строить математические модели задач исследования операций, осуществлять математическую постановку и разрабатывать компьютерные модели оптимизационных задач обоснования принятия решений, использовать стандартные алгоритмы и программы решения задач исследования операций, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и владения основными приемами обработки и представления экспериментальных данных.

2.4 Практическое занятие №4 (2 часа).
Тема: «Основы линейного программирования»

2.2.1 Задание для работы:

1. Общая постановка задачи линейного программирования
2. Графический метод решения ЗЛП.

2.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Общая постановка задачи линейного программирования

Провести устный опрос теоретического материала.

2. Графический метод решения ЗЛП.

Провести устный опрос теоретического материала.

Решить задачу линейного программирования графическим методом:

1. $Z(X) = 2x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$x_2 \ge 0.$

2. $Z(X) = x_1 - 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 - 2x_2 \ge 2. \end{cases}$$

3 $Z(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 - 3x_2 \ge 0, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 0. \end{cases}$$

4. $Z(X) = -x_1 + 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -8x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge -12. \end{cases}$$

2.4.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Основы линейного программирования», приобретены умения формулировать оптимизационные задачи, критерии оптимизации, строить математические модели задач исследования операций, осуществлять математическую постановку и разрабатывать компьютерные модели оптимизационных задач обоснования принятия решений, использовать стандартные алгоритмы и программы решения задач исследования операций, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и владения основными приемами обработки и представления экспериментальных данных.

2.5 Практическое занятие №5 (2 часа).
Тема: «Основы линейного программирования»

2.5.1 Задание для работы:

1. Понятие о симплекс-методе
2. Двойственная ЗЛП. Экономическая интерпретация

2.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Понятие о симплекс-методе

Провести устный опрос теоретического материала.

1) Решить симплексным методом

$$Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$

Д

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, & + x_5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11, & + x_6 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

2) Найти начальное опорное решение и путем перебора опорных решений определить оптимальное решение задачи:

$$Z(X) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

$$Z(X) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 14, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

2. Двойственная ЗЛП. Экономическая интерпретация

Провести устный опрос теоретического материала.

. Составить двойственные задачи для следующих задач (номер задачи в зависимости от варианта):**1.**

1.
$$Z(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

2.
$$Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

2.5.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Основы линейного программирования», приобретены умения формулировать оптимизационные задачи, критерии оптимизации, строить математические модели задач исследования операций, осуществлять математическую постановку и разрабатывать компьютерные модели оптимизационных задач обоснования принятия решений, использовать стандартные алгоритмы и программы решения задач исследования операций, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и владения основными приемами обработки и представления экспериментальных данных.

2.6 Практическое занятие №6 (2 часа).
Тема: «Общая постановка транспортной задачи, ее экономическая интерпретация и основные методы решения»

2.2.1 Задание для работы:

1. Постановка транспортной задачи по критерию стоимости
2. Способы определения базисного решения

2.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Постановка транспортной задачи по критерию стоимости

Провести устный опрос теоретического материала.

1) Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

a_i \ b_j	50	80
90	9	3
110	4	8

2. Способы определения базисного решения

Провести устный опрос теоретического материала.

Для следующих транспортных задач составить математические модели:

Составить начальное опорное решение, используя метод северо-западного угла, для транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

a_i \ b_j	250	300	200	200
200	9	8	3	1
350	7	10	6	4
400	2	3	8	12

Составить начальное опорное решение, используя методом минимальной стоимости, для транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

a_i \ b_j	200	200	300	400
200	4	3	2	1
300	2	3	5	6
500	6	7	9	12

2.1.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Общая постановка транспортной задачи, ее экономическая интерпретация и основные методы решения», приобретены умения формулировать оптимизационные задачи, критерии оптимизации, строить математические модели задач исследования операций, осуществлять математическую постановку и разрабатывать компьютерные модели оптимизационных задач обоснования принятия решений, использовать стандартные алгоритмы и программы решения задач исследования операций, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и владения основными приемами обработки и представления экспериментальных данных.

2.7 Практическое занятие №7 (2 часа).
Тема: «Методы решения транспортной задачи»

2.7.1 Задание для работы:

1. Метод потенциалов
2. Общая характеристика венгерского метода

2.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Метод потенциалов

Провести устный опрос теоретического материала.
Решить транспортные задачи методом потенциалов:

1.

a_i \ b_j	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

2.

a_i \ b_j	10	10	5	8	7
7	4	6	8	3	2
13	5	3	4	6	4
20	3	2	5	7	5

3.

a_i \ b_j	100	200	200	300
100	1	3	4	1
200	5	2	2	7
400	4	4	3	6
200	7	2	5	3

4.

a_i \ b_j	200	400	400	800
200	1	6	9	3
400	3	2	2	4
600	4	5	4	7
200	1	4	3	9

2. Общая характеристика венгерского метода

Провести устный опрос теоретического материала.

Будем считать, что перед нами матрица (платежная, временная и т.д.) и нужно решить задачу о назначениях венгерским методом на максимум, т.е. выбрать по одной клетке в строке и столбцу так, чтобы их сумма была максимальна.

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 3 & 12 & 4 & 2 \\ 14 & 3 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 15 & 8 & 12 \\ 3 & 14 & 3 & 15 & 11 & 10 \\ 3 & 13 & 1 & 9 & 6 & 6 \\ 15 & 10 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

2.7.3 Результаты и выводы:

На данном занятии студентами изучены основные определения и понятия по теме «Методы решения транспортной задачи», приобретены умения формулировать оптимизационные задачи, критерии оптимизации, строить математические модели задач исследования операций, осуществлять математическую постановку и разрабатывать компьютерные модели оптимизационных задач обоснования принятия решений, использовать стандартные алгоритмы и программы решения задач исследования операций, сформированы навыки решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала и владения основными приемами обработки и представления экспериментальных данных.