

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра «Проектирование и управление в технических системах»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ
ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

Теория автоматического управления

Направление подготовки (специальность) 27.03.04 Управление в технических системах
Профиль образовательной программы Системы и средства автоматизации
технологических процессов

Форма обучения очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. Конспект лекций	4
1.1 Лекция № 1 Классификация систем управления (СУ)	4
1.2 Лекция № 2 Поведение объектов и СУ; информация и принципы управления.....	8
1.3 Лекция № 3 Примеры СУ техническими, экономическими и организационными объектами; задачи теории управления.....	13
1.4 Лекция № 4 Модели вход-выход: дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики.....	20
1.5 Лекция № 5 Модели вход-состояние-выход; преобразования форм представления моделей.....	29
1.6 Лекция № 6 Устойчивости, инвариантности, чувствительности, управляемости и наблюдаемости.....	33
1.7 Лекция № 7 Качество переходных процессов в линейных СУ.....	37
1.8 Лекция № 8 Задачи и методы синтеза линейных СУ.....	42
1.9 Лекция № 9 Линейные дискретные модели СУ: основные понятия об импульсных СУ, классификация дискретных СУ; анализ и синтез дискретных СУ.....	56
1.10 Лекция № 10 Нелинейные модели СУ; анализ равновесных режимов; методы линеаризации нелинейных моделей; анализ поведения СУ на фазовой плоскости.....	60
1.11 Лекция № 11 Устойчивость положений равновесия: первый и второй методы Ляпунова, частотный метод исследования абсолютной устойчивости.....	72
1.12 Лекция № 12 Исследование периодических режимов методом гармонического баланса.....	74
1.13 Лекция № 13 Модели и характеристики случайных сигналов. Прохождение случайных сигналов через линейные звенья.....	77
1.14 Лекция № 14 Анализ и синтез линейных стохастических систем при стационарных случайных воздействиях.....	83
1.15 Лекция № 15 Задачи оптимального управления. Критерии оптимальности.....	92
1.16 Лекция № 16 Методы теории оптимального управления.....	94
1.17 Лекция № 17 Системы управления оптимальные по быстродействию, по расходу ресурсов и расходу энергии.....	95
1.18 Лекция № 18 Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов.....	103
2. Методические указания по выполнению лабораторных работ	107
2.1 Лабораторная работа № ЛР-1 Исследование датчиков	107
2.2 Лабораторная работа № ЛР-2 Поведение объектов и СУ; информация и принципы управления.....	109

2.3 Лабораторная работа № ЛР-3	Исследование реле.....	112
2.4 Лабораторная работа № ЛР-4	Изучение сельсинных датчиков.....	114
2.5 Лабораторная работа № ЛР-5	Изучение динамических звеньев.....	115
2.6 Лабораторная работа № ЛР-6	Исследование операционных усилителей....	117
2.7 Лабораторная работа № ЛР-7	Исследование логических усилителей.....	118
2.8 Лабораторная работа № ЛР-8	Исследование регистра.....	120
2.9 Лабораторная работа № ЛР-9	Исследование двоичного счётчика и дешифратора.....	122
3. Методические указания по проведению практических занятий.....		124
3.1 Практическое занятие № ПЗ-1	Первый метод Ляпунова	124
3.2 Практическое занятие № ПЗ-2	Второй метод Ляпунова	125
3.3 Практическое занятие № ПЗ-3	Частотный метод исследования абсолютной устойчивости.....	129
3.4 Практическое занятие № ПЗ-4	Критерий устойчивости Гурвица.....	135
3.5 Практическое занятие № ПЗ-5	Критерий устойчивости Михайлова.....	141
3.6 Практическое занятие № ПЗ-6	Критерий устойчивости Найквиста.....	143
3.7 Практическое занятие № ПЗ-7	Динамическое программирование.....	150
3.8 Практическое занятие № ПЗ-8	Исследование разомкнутой системы.....	151

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1. Лекция № 1 (2 часа)

Тема: «Классификация систем управления (СУ)».

1.1.1 Вопросы лекции

1. Общие сведения
2. Классификация систем по изменению режимов обработки системы ЧПУ.

1.1.2. Краткое содержание вопросов

1. Общие сведения

Управление - это целенаправленное воздействие на какой-либо объект или протекающий процесс с целью качественного или количественного изменения параметров и достижения определенных целей.

Всякое управление технологическим объектом включает в себя следующие компоненты:

- сбор первичных сведений об управляемом объекте (сведения об изделии, оборудовании и приемах обработки, записанные в УП), вторичных сведений (сведения, полученные во время управления)
- обработку полученных сведений (выполнение необходимых расчетов, анализ данных, проверка условий и т.д.);
- выводы и принятие необходимых решений;
- обеспечение управляющих воздействий.

УЧПУ наиболее полно и эффективно реализует все компоненты автоматического управления. ЧПУ придает технологическому оборудованию гибкость, так как перестройка его на новый вид технологического процесса, изделий сводится к переналадке оборудования и загрузке УЧПУ новыми управляющими программами с перезаписью новых параметров в массивы данных.

- По структуре: одноступенчатая и двухступенчатая.

1. Одноступенчатая - центральный диспетчерский пункт (ЦДП) имеет непосредственные линии связи и каналы телемеханики со всеми объектами и комплексами производства.

2. Двухступенчатая - связь осуществляется через промежуточные пункты (операторские или диспетчерские).

- По характеру использования:

1. для оперативного вмешательства в ход процесса;
2. для совершенствования организации управления;

3. для создания новых схем и конструкций, совершенствования машин и комплексов.

- По степени централизации:

1. Централизованные (характеризуются наличием в системе единого командоаппарата, с помощью которого осуществляется управляющее воздействие на рабочие органы станка, определяющие требуемую последовательность, скорость, подачу, величину перемещений.)

Преимущества - компактность, малопротяженность линий связи.

Недостатки - значительные затраты на переоборудование из-за изменения конструкции командоаппарата.

Пример: коленвал токарно-револьверного станка;

2. Децентрализованные (характеризуются отсутствием командоаппарата, управляющее воздействие формируется каждым отдельным рабочим органом, с помощью упоров и путевых выключателей). Все операции в таких системах выполняются последовательно.

Преимущества - возможность организации управления значительным количеством объектов; исключение последующих сигналов при невыполнении предыдущих, быстрое перерегулирование.

Недостатки - большая протяженность линий связи (увеличение погрешности), из-за регулировки и переустановки упоров значительные затраты времени.

Пример: робототехнический комплекс (РТК) следящего привода.

- По управлению движением:

1. путевые (управление по положению с помощью путевых выключателей, упоров, кулачков);

2. командные (управление по времени с помощью командоаппаратов и ПМК);

- По типу программносителя: магнитные ленты и диски; перфокарты и перфоленты; ЛВС - локально-вычислительные сети; копиры и шаблоны; кулачки и маховые механизмы.

- По элементной базе: электрические; механические; гидравлические и пневматические.

2. Задачи СУТО:

1) Обеспечение требуемых действий исполнительных механизмов.

2) Обеспечение заданных режимов.

3) Обеспечение требуемых параметров объекта производства.

4) Выполнение вспомогательных параметров.

Требования.

- 1) Обеспечение высокой мобильности.
- 2) Обеспечение выполнения сложных задач функционирования.
- 3) Простота конструкции и низкая себестоимость.
- 4) Возможность дистанционного управления.
- 5) Возможность саморегулирования.

Команды СУТО.

- Технологические - предусмотренные техпроцессом.
- Цикловые - изменение параметров, инструмента, СОЖ, реверс.
- Служебные - выполняемые с помощью логических операций.

Классификация систем, по характеру информации записанной на программоносителе; системы непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные.

В непрерывных системах программа записывается непрерывно. Если применяется система с фазовой модуляцией, то программа представляется синусоидальным напряжением, фаза которого пропорциональна программируемым перемещениям; в системах с амплитудной модуляцией перемещения пропорциональна амплитуда этого напряжения.

В дискретных (импульсных) системах информация о перемещениях задается соответствующим числом импульсов. Если механизм перемещения оснащен датчиком импульсов и для учета перемещения используется счетная схема, то систему называют счетно-импульсной. Если исполнительным устройством является шаговый двигатель, то систему называют шагово-импульсной.

В импульсно-фазовых устройствах ЧПУ суммирование импульсов, задаваемых программой, производится в фазовом преобразователе, выходной, сигнал которого в виде угла сдвига фазы переменного напряжения пропорционален количеству импульсов программы.

2. Классификация систем по изменению режимов обработки системы ЧПУ.

По изменению режимов обработки системы ЧПУ подразделяются на цикловые, программные и адаптивные.

Цикловые системы осуществляют движения с повторяющимися циклами. В них применяется кулачковое, аппаратное, микропрограммное и программируемое управления. При кулачковом управлении используют для задания режимов штекерные панели, аппаратное управление осуществляют при помощи релейно-контактной или бесконтактной аппаратуры. Для микропрограммного управления применяют

запоминающие устройства микрокоманд, а программируемое управление режимами обработки основано на использовании средств программируемой логики.

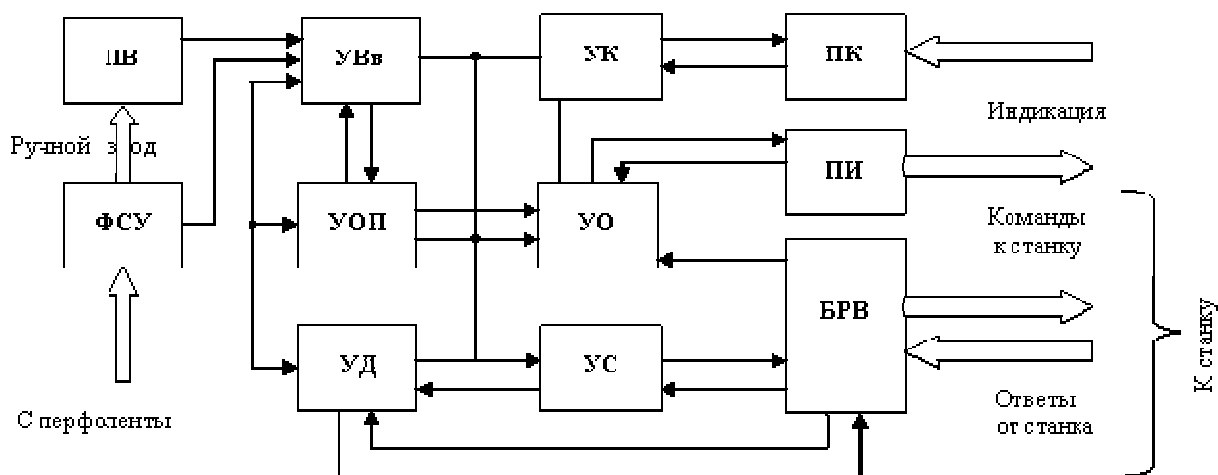


Рисунок 1 Структурная схема типового позиционного УЧПУ

Пульт коррекции (ПК) предназначен для набора и хранения коррекции по предусмотренным адресам. Узел коррекции (УК) обеспечивает последовательное считывание цифровой информации, установленной на переключателях, ввод считываемой информации с нормализацией по запросам в УП в соответствующие адреса (адреса инструментов или координат).

Пульт индикации (ПИ) обеспечивает индикацию информации на экране по задействованным адресам (построчно или по страницам) и представляет собой лучевую трубку, в левой части которой растровые строки индицируют действительное положение рабочих органов, а в правой части - заданные значения в УП. Пульт индикации может работать в рабочем и проверочном (без отработки) режимах, что дает возможность получить необходимую информацию. Пульт индикации вместе с пультом ввода является видеомонитором.

1.2 Лекция №2 (2 часа)

Тема: «Поведение объектов и СУ; информация и принципы управления».

1.2.1. Вопросы лекции

1. Поведение объектов и СУ
2. Информация и принципы управления

1.2.2 Краткое содержание вопросов

1. Поведение объектов и СУ

Несмотря на многообразие ОУ, можно сформулировать лишь несколько основополагающих принципов управления. Реализация того или иного принципа управления определяет вид общей структуры СУ.

Независимо от того, как организован процесс управления, в любой СУ должен присутствовать прямой канал передачи управляющего воздействия f_y к той выходной координате y , которая должна это управляющее воздействие «воспроизводить» – рисунок 2.

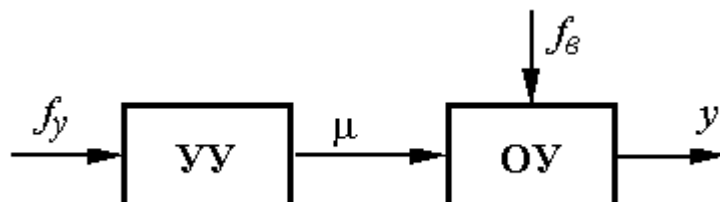


Рисунок 2

Здесь изображена укрупненная структура; ОУ может содержать усилительные, преобразовательные и другие функциональные звенья.

2. Информация и принципы управления

Принципы управления
разделяются по способу контроля за
текущим состоянием процесса
управления.

Принцип разомкнутого управления

Структура на рис. 1.2 собственно
и реализует *принцип разомкнутого
управления*. По-существу, здесь не
производится учет текущей информации
о состоянии процесса управления.

Этот принцип может быть использован только
в тех случаях, когда сигнальное возмущающее
воздействие f_{θ} незначительно, вариации параметров
(параметрические возмущения) всех функциональных
устройств также малы, математическое описание СУ
известно и достоверно, а требования к качеству
процесса управления не слишком высоки. Таким
образом, использование принципа разомкнутого
управления весьма ограничено.

Принцип компенсации

При реализации *принципа компенсации* учет информации о текущем состоянии процесса управления производится путем **непосредственного** измерения

возмущающего воздействия – см. рис. 3.

Рис. 3. Структурной особенностью СУ, реализующих принцип компенсации, является наличие дополнительного пути прохождения возмущающего воздействия на структурной схеме модели системы.

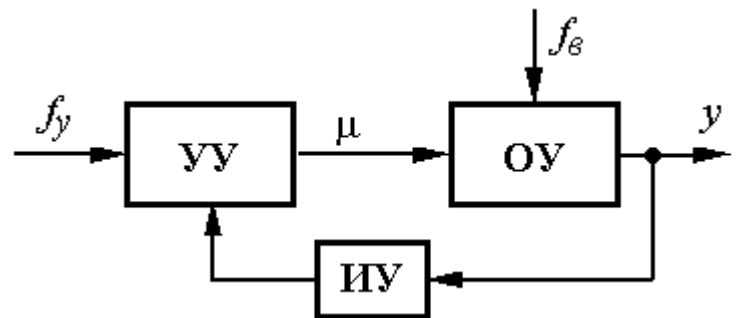
Принцип компенсации возмущения используется в тех случаях, когда имеется глобальное (по сравнению с другими) и поддающееся измерению сигнальное возмущение.

Очевидно, что влияние параметрических возмущений и неопределенность параметров операторов функциональных звеньев в данном случае не учитываются, не ослабляются и непосредственно ухудшают качество процесса управления.

Принцип замкнутого управления

Этот принцип является комбинацией (объединением)

принципов компенсации и замкнутого



целесообразно использовать при высоких требованиях к качеству процесса управления и в том случае, если есть преобладающее и доступное для измерения сигнальное возмущение.

Это возмущение компенсируется созданием дополнительного пути, а влияние всех остальных неучтенных сигнальных и параметрических возмущений уменьшается за счет контура отрицательной обратной связи.

Классификация систем управления

При реализации *принципа замкнутого управления* учет информации о текущем состоянии процесса управления производится путем **непосредственного** измерения управляемой координаты – см. рис. 1.4.

Структурной особенностью СУ, реализующих принцип замкнутого управления, является наличие на структурной схеме модели системы замкнутого пути – *контура*, образуемого при передаче текущей информации от управляемой координаты к УУ. Поэтому такой принцип управления получил также название *принцип обратной связи*.

Рисунок 4

Существенной особенностью замкнутого управления является то обстоятельство, что не имеют значения причины, вызвавшие отклонение процесса от цели управления. Ими могут являться множество сигнальных и параметрических возмущений, неточность математического описания функциональных звеньев. В связи с этим рассматриваемый принцип более универсален и он получил широкое распространение.

Следует отметить, что выработка УУ нового управляющего воздействия μ для реагирования на изменившееся текущее состояние может произойти только после факта отклонения текущего состояния от цели и появления рассогласования. Поэтому такой принцип управления называется также

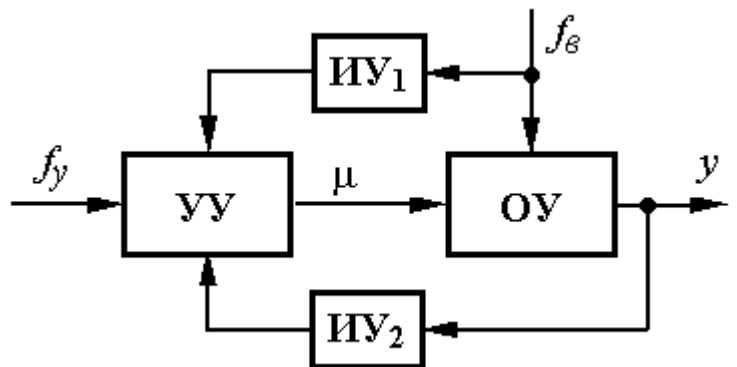
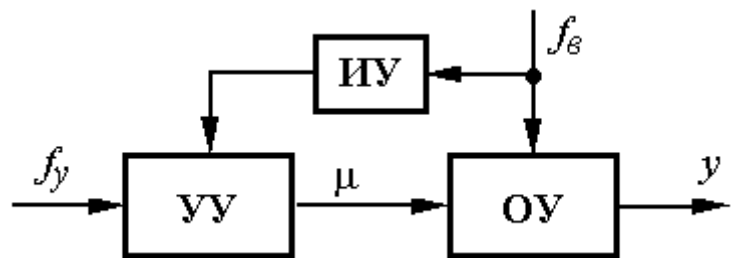
управлением по отклонению

Принцип комбинированного управления

В основе любой классификации лежат признаки, по которым множество объектов подразделяется на подмножества – классы.

Системы управления можно классифицировать по различным признакам. Рассмотрим следующие признаки классификации:

- информационный,
- по типу сигналов,
- алгоритмический,
- энергетический.



Классификация систем управления по информационному признаку

СУ подразделяются по способу получения текущей информации о состоянии процесса управления.

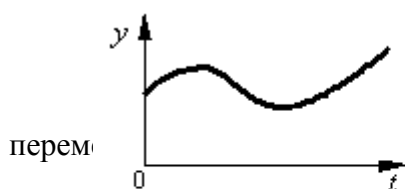
Поэтому рассматриваемая классификация подразделяет СУ как раз в соответствии с принципами управления – см. подразд. 1.2.

Классификация систем управления по типу сигналов

Используемые в теории управления модели СУ как правило абстрагированы от физической природы сигналов. Сигналы (*координаты, переменные*) на входах и выходах функциональных звеньев рассматриваются как носители информации, в сами звенья – как преобразователи этих сигналов.

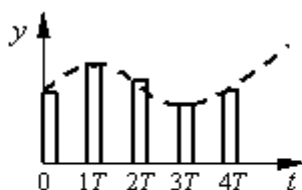
Преобразование сигнала некоторым звеном производится в соответствии с приданным (приписанным) этому звену оператором.

Непрерывные системы. В них информация кодируется уровнем (значением) функции непрерывного времени – см. рис. 6, а.

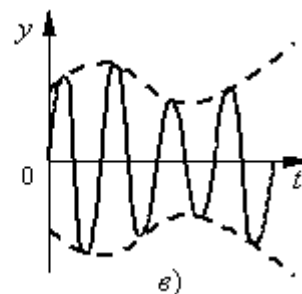


Кв

а)



б)



в)

сигналов может производиться как по уровню, так и по времени. Системы, в которых производится квантование сигнала по времени, а мгновенное значение непрерывного сигнала на выходе какого-либо аналогового звена

1.3 Лекция №3 (2 часа)

Тема: «Примеры СУ техническими, экономическими и организационными объектами; задачи теории управления».

1.3.1. Вопросы лекции

1. Задачи теории управления
2. Примеры СУ техническими, экономическими и организационными объектами

1.3.2 Краткое содержание вопросов

1. Задачи теории управления

Развитие различных сфер человеческой деятельности на современном этапе невозможно без широкого применения вычислительной техники и создания информационных систем различного направления. Обработка информации в подобных системах стала самостоятельным научно-техническим направлением. Научно-техническая революция (НТР) - коренное, качественное преобразование производительных сил на основе превращения науки в ведущий фактор развития общественного производства. В ходе НТР, начало которой относится к середине XX в., бурно развивается и завершается процесс превращения науки в непосредственную производительную силу. Научно-техническая революция изменяет облик общественного производства, условия, характер и содержание труда, структуру производительных сил, общественного разделения труда, ведет к быстрому росту производительности труда, оказывает воздействие на все стороны жизни общества, включая культуру, быт, психологию людей, взаимоотношение общества с природой, ведет к резкому ускорению научно-технического прогресса (НТП).

Начало НТП связано с революцией в технике. Усложнение проектируемых систем "заставили" государства организовать в рамках крупных национальных научно-технических проектов согласованное взаимодействие науки и промышленности. Начался резкий рост ассигнований на науку, числа исследовательских учреждений. Научная деятельность стала массовой профессией. Во второй половине 50-х годов в большинстве стран началось создание общегосударственных органов планирования и управления научной деятельностью. Усилились непосредственные связи между научными и техническими разработками, ускорилось использование научных достижений в производстве. В 50-е годы создаются и получают широкое применение в научных исследованиях, производстве, а затем и управлении электронные вычислительные машины (ЭВМ), ставшие символом НТП. Их появление знаменует начало постепенного

перехода к комплексной автоматизации производства и управления, изменяющий положение и роль человека в процессе производства. Можно выделить несколько главных научно-технических направлений НТП: n комплексная автоматизация производства, контроля и управления производством; n открытие и использование новых видов энергии; создание и применение новых конструкционных материалов.

Рассмотрим более подробно одно из главных научно-технических направлений НТП - комплексную автоматизацию производства, контроль и управление производством.

Автоматизация производства - это процесс в развитии машинного производства, при котором функции управления и контроля, ранее выполнявшиеся человеком, передаются приборам и автоматическим устройствам. Цель автоматизации производства заключается в повышении эффективности труда, улучшении качества выпускаемой продукции, в создании условий для оптимального использования всех ресурсов производства.

Одной из характерных тенденций развития общества является появление чрезвычайно сложных (больших) систем. Основными причинами этого являются: непрерывно увеличивающаяся сложность технических средств, применяемых в народном хозяйстве; необходимость в повышении качества управления как техническими, так и организационными системами (предприятие, отрасль, государство и др.); расширяющаяся специализация и кооперирование предприятий - основные тенденции развития народного хозяйства.

В отличие от традиционной практики проектирования простых систем при разработке крупных автоматизированных, технологических, энергетических, аэрокосмических, информационных и других сложных комплексов возникают проблемы, меньше связанные с рассмотрением свойств и законов функционирования элементов, а больше - с выбором наилучшей структуры, оптимальной организации взаимодействия элементов, определением оптимальных режимов их функционирования, учетом влияния внешней среды и т.п. По мере увеличения сложности системы этим комплексным общесистемным вопросам отводится более значительное место. Темпы НТП вызывают усложнение процессов проектирования, планирования и управления во всех сферах и отраслях народного хозяйства. Развитие отраслей и усиление их взаимного влияния друг на друга приводят к увеличению количества возможных вариантов, рассматриваемых в случаях принятия решений при

проектировании, производстве и эксплуатации, планировании и управлении предприятием, объединением, отраслью и т. п. Анализируя эти варианты, необходимо привлекать специалистов различных областей знаний, организовывать взаимодействие и взаимопонимание между ними.

Все это привело к появлению нового - системного - подхода к анализу больших систем. Они часто не поддаются полному описанию и имеют многогранные связи между отдельными функциональными подсистемами, каждая из которых может представлять собой также большую систему. В основе системного подхода лежит специальная теория - общая (абстрактная) теория систем.

Потребность в использовании понятия «система» возникала для объектов различной физической природы с древних времен: еще Аристотель обратил внимание на то, что целое (т. е. система - авт.) несводимо к сумме частей, его образующих.

В частности, термин "система" и связанные с ним понятия комплексного, системного подхода исследуются и подвергаются осмыслению философами, биологами, психологами, кибернетиками, физиками, математиками, экономистами, инженерами различных специальностей. Потребность в использовании этого термина возникает в тех случаях, когда невозможно что-то продемонстрировать, изобразить, представить математическим выражением и нужно подчеркнуть, что это будет большим, сложным, не полностью сразу понятным (с неопределенностью) и целым, единым. Например - "солнечная система", "система управления станком", система организационного управления предприятием (городом, регионом и т. п.), "экономическая система", "система кровообращения" и т.д. В математике термин система используется для отображения совокупности математических выражений или правил - "система уравнений", "система счисления", "система мер" и т. п. Казалось бы, в этих случаях можно было бы воспользоваться терминами "множество" или "совокупность". Однако понятие системы подчеркивает упорядоченность, целостность, наличие определенных закономерностей.

Интерес к системным представлениям проявлялся не только как к удобному обобщающему понятию, но и как к средству постановки задач с большой неопределенностью.

По мере усложнения производственных процессов, развития науки, появились задачи, которые не решались с помощью традиционных математических методов и в которых все большее место стал занимать собственно процесс постановки задачи, возросла роль эвристических методов, усложнился эксперимент, доказывающий адекватность

формальной математической модели.

Для решения таких задач стали разрабатываться новые разделы математики; оформилась в качестве самостоятельной прикладная математика, приближающая математические методы к практическим задачам; возникло понятие, а затем и направление принятия решений, которое постановку задачи признает равноценным этапом ее решения.

Однако средств постановки задачи новые направления не содержали, поскольку на протяжении многовековой истории развития по образному выражению С.Лема "математики изгоняли беса, значение, из своих пределов", т. е. не считали функцией математики разработку средств постановки задачи.

Исследование процессов постановки задач, процесса разработки сложных проектов позволили обратить внимание на особую роль человека: человек является носителем целостного восприятия, сохранения целостности при расчленении проблемы, при распределении работ, носителем системы ценностей, критериев принятия решения. Для того, чтобы организовать процесс проектирования начали создаваться системы организации проектирования, системы управления разработками и т. п.

Понятие "система" широко использовалось в различных областях знаний, и на определенной стадии развития научного знания теория систем оформилась в самостоятельную науку.

2. Примеры СУ техническими, экономическими и организационными объектами

Развитие научного знания и его приложений к практической деятельности в XVIII - XIX в.в. привело к все возрастающей дифференциации научных и прикладных направлений. Возникло много специальных дисциплин, которые часто используют сходные формальные методы, но настолько преломляют их с учетом потребностей конкретных приложений, что специалисты, работающие в разных прикладных областях (так называемые "узкие специалисты"), перестают понимать друг друга. В то же время в конце XIX века стало резко увеличиваться число комплексных проектов и проблем, в первую очередь для управления экономикой, требующих участия специалистов различных областей знаний.

Роль интеграции наук, организации взаимосвязей и взаимодействия между различными научными направлениями во все времена выполняла философия - наука наук, которая одновременно являлась и источником возникновения ряда научных направлений.

В частности, И.Ньютон сделал открытия своих основных законов в рамках натурфилософии, как тогда называлась физика, являвшаяся частью философского знания.

Так, и в 30-е годы 20-го столетия философия явилась источником возникновения обобщающего направления, названного теорией систем. Основоположником этого направления считается биолог Л. фон Берталанфи. Отметим, что важный вклад в становление системных представлений внес в начале XIX века (еще до Л. фон Берталанфи) А.А.Богданов. Однако в силу исторических причин предложенная им всеобщая организационная наука тектология не нашла распространения и практического применения. Важную роль в развитие этого направления В.Н.Садовского, Э.Г.Юдина, И.В.Блауберга, С.П.Никаиорова.

В нашей стране вначале теорию систем активно развивали философы, ими были разработаны концептуальные основы, терминологический аппарат, исследованы закономерности функционирования и развития сложных систем, поставлены другие проблемы, связанные с философскими и общенаучными основами системных исследований.

Однако философская терминология не всегда легко применяется в практической деятельности. Поэтому потребности практики почти одновременно со становлением теории систем привели к возникновению направления, названного исследованием операций.

Это направление возникло в связи с задачами военного характера. Несмотря на довольно широкое распространение в других прикладных областях, благодаря развитому математическому аппарату, базирующемуся на методах оптимизации, математического программирования и математической статистики, исходная терминология направления часто трудно интерпретируется в практических условиях проектирования сложных технических комплексов, в экономических задачах, при решении проблем организации производства и управления предприятиями, объединениями, научно-исследовательскими организациями, объектами непроизводственной сферы и т. п.

В 60-е годы при постановке и исследовании сложных проблем проектирования и управления довольно широкое распространение получил термин системотехника.

Применительно к задачам управления в определенный период более широкое распространение получил термин кибернетика, введенный М.А.Ампером (от "kiber" - кормчий, рулевой, управляющий чем-то), принятый для названия новой "науки об

управлении в живых организмах и машинах" Н.Винером [1.12].

В нашей стране вначале кибернетика не признавалась наукой, а затем этот термин использовался в период становления работ по автоматизации управления как обобщающий для названия всех системных направлений. Однако в связи с неоднозначной трактовкой термина этот термин в настоящее время используется в более узком смысле как одно из направлений теории систем, занимающееся процессами управления техническими объектами. А для обобщения дисциплин, связанных с исследованием и проектированием сложных систем, используется термин системные исследования, иногда используется термин системный подход. Наиболее конструктивным из направлений системных исследований в настоящее время считается системный анализ, который появился в связи с задачами военного управления в 1948 г

Этот термин используется в публикациях неоднозначно. В одних работах системный анализ определяется как "приложение системных концепций к функциям управления, связанным с планированием". В других - термин «системный анализ» употребляется как синоним термина "анализ систем". Развитие общества характеризуется понятием "информационных барьеров". Первый информационный барьер был достигнут в тот период, когда экономические связи полностью замыкались в рамках ограниченных коллективов (род, семья, племя) и сложность управления этим коллективом стала превосходить способности одного человека. Это произошло многие тысячелетия тому назад, и вызвало соответствующие изменения в технологии управления, которые состояла в изобретении двух механизмов управления экономикой: первый механизм - создание иерархических систем управления (при котором руководитель заводит себе помощников, а те в свою очередь, распределяют функции между своими подчиненными); второй механизм - введение правил взаимоотношения между людьми и социальными коллективами: предприятиями, регионами, государствами и т. д. (эти функции первоначально выполняла религия, а в последующем - законодательная система). Одним из наиболее действенных способов реализации этого механизма являются экономические регуляторы, основанные на введении рыночных товарно-денежных отношений. Второй информационный барьер связан с ограниченной способностью к переработке информации у всего населения страны - сложность задач управления экономикой растет быстрее числа занятых в ней людей. Теоретические исследования о тенденциях роста численности управленческого

персонала подтверждались и статистикой. Например, в США в начале нынешнего столетия на одного конторского работника приходилось 40 рабочих: в 1940 г.-10; в 1958 г.-6; а в 1965 - всего лишь 1 рабочий. Отечественная статистика аналогично констатировала рост численности управленческого персонала до 40 и более процентов от общей численности работников предприятия.

Иными словами, возникла ситуация, когда как бы каждым рабочим командует управленческий работник. На самом деле ситуация гораздо сложнее: система организационного управления занимается не только непосредственно организацией производства, но и его технической подготовкой, материальным, финансовым, кадровым и т. п. обеспечением, развитием предприятия и т. д. По мере укрупнения предприятий, более частого обновления номенклатуры выпускаемой ими продукции и технологий растет потребность в обслуживающих видах деятельности, а соответственно и численность управленческого персонала, что и приводит к такому парадоксальному результату.

Аналогичная ситуация наблюдалась и с ростом численности управленческого персонала регионов, страны. При этом возник как бы особый класс управленческих работников - номенклатура, а эффективность управления повысить не удавалось.

Для решения проблемы началась разработка автоматизированных систем управления - АСУ), но в дальнейшем стало ясно, что необходимы более радикальные изменения в управлении страной, учет закономерностей функционирования и развития сложных систем с активными элементами. К числу задач, решаемых теорией систем, относятся: определение общей структуры системы; организация взаимодействия между подсистемами и элементами; учет влияния внешней среды; выбор оптимальной структуры системы; выбор оптимальных алгоритмов функционирования системы.

Проектирование больших систем обычно делят на две стадии: макропроектирование (внешнее проектирование), в процессе которого решаются функционально-структурные вопросы системы в целом, и микропроектирование (внутреннее проектирование), связанное с разработкой элементов системы как физических единиц оборудования и с получением технических решений по основным элементам (их конструкции и параметры, режимы эксплуатации). В соответствии с таким делением процесса проектирования больших систем в теории систем рассматриваются методы, связанные с макропроектированием сложных систем.

1.4. Лекция №4 (2 часа)

Тема: «Модели вход-выход: дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики».

1.4.1 Вопросы лекции

1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции звеньев и систем.
2. Временные характеристики звеньев и систем

1.4.2 Краткое содержание вопросов

1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции звеньев и систем.

Математическое описание систем автоматического управления (САУ) составляется на основе описания отдельных ее звеньев. Объединяя уравнения звеньев с учетом их взаимосвязей, получают уравнение системы [1-5].

В теории автоматического управления приняты определенные формы записи дифференциальных уравнений линейных звеньев.

Дифференциальное уравнение линейного звена (рис. 1.1) в операторной форме имеет вид [2]

$$Q(p)y(t) = R(p)x(t), \quad (1.1)$$

где

$$Q(p) = T_n^n p^n + T_{n-1}^{n-1} p^{n-1} + \dots + T_2^2 p^2 + T_1 p + 1;$$

$$R(p) = k_m p^m + k_{m-1} p^{m-1} + \dots + k_2 p^2 + k_1 p + k_0;$$

T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – постоянные времени (сек);

k_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – коэффициенты передачи;

$p = d/dt$ – оператор дифференцирования;

n – порядок дифференциального уравнения.

В уравнении (1.1) $Q(p)$ (дифференциальный оператор при выходной величине) называют собственным оператором, а $R(p)$ (дифференциальный оператор при входной величине) – оператором воздействия.

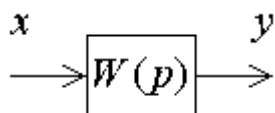


Рис. 1.1. Структурная схема линейного звена САУ

Другой формой записи математического описания звена является запись с помощью передаточной функции.

Отношение оператора воздействия к собственному оператору называют передаточной функцией или передаточной функцией в операторной форме

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{k_m p^m + k_{m-1} p^{m-1} + \dots + k_2 p^2 + k_1 p + k_0}{T_n p^n + T_{n-1} p^{n-1} + \dots + T_2 p^2 + T_1 p + 1} \quad (1.2)$$

Используя передаточную функцию, уравнение (1.1) можно записать в виде

$$y(t) = W(p)x(t) \quad (1.3)$$

Наряду с передаточной функцией в операторной форме широко используют передаточную функцию в форме изображений Лапласа.

Передаточной функцией или передаточной функцией в форме изображений Лапласа называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях.

Передаточную функцию в форме изображения Лапласа можно получить из передаточной функции в операторной форме, если в последней сделать подстановку $p = s$, где $s = \sigma + j\omega$ – комплексная величина

$$W(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{k_m s^m + k_{m-1} s^{m-1} + \dots + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{T_n s^n + T_{n-1} s^{n-1} + \dots + T_2 s^2 + T_1 s + 1} \quad (1.4)$$

где

$$x(s) = L[x(t)]; y(s) = L[y(t)] \text{ – преобразования Лапласа.}$$

Тогда дифференциальное уравнение в изображениях Лапласа имеет вид

$$Q(s)y(s) = R(s)x(s) \text{ или } y(s) = W(s)x(s) \quad (1.5)$$

Такое сходство рассмотренных выражений для передаточных функций справедливо только при нулевых начальных условиях.

Очень часто при описании оператора дифференцирования и комплексной переменной преобразования Лапласа используется один и тот же символ p , передаточная функция в этом случае имеет один и тот же вид. Однако необходимо

помнить, что символ ***P*** при этом имеет различный смысл.

Временные характеристики звеньев и систем

Динамические свойства линейных звеньев и систем автоматического управления в целом могут быть описаны уравнениями, как показано выше, и графическими характеристиками. В теории автоматического применяются два типа таких характеристик – временные и частотные. Эти характеристики могут быть сняты экспериментально или построены по уравнению звена [4].

Переходная или временная характеристика (функция) звена ***h(t)*** представляет собой реакцию на выходе звена, вызванную подачей на его вход единичного, ступенчатого воздействия. Единичное, ступенчатое воздействие (единичная, ступенчатая функция) – это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остается неизменным

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом

$$h(t) = y(t) \text{ при } x(t) = 1(t) \quad (1.6)$$

Импульсная переходная (временная) характеристика или функция, называемая еще весовой функцией (функцией веса), ***w(t)*** представляет собой реакцию звена на единичный импульс. Единичный импульс (единичная импульсная функция или дельта-функция) – это математическая идеализация предельно короткого импульсного сигнала. Единичный импульс – это импульс, площадь которого равна единице при длительности, равной нулю, и высоте, равной бесконечности

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

При этом согласно определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Таким образом

$$w(t) = y(t) \text{ при } x(t) = \delta(t) \quad (1.7)$$

Дельта-функция просто связана с единичной, ступенчатой функцией

$$\delta(t) = 1'(t)$$

Отсюда следует аналогичная связь между весовой и переходной функциями

$$w(t) = h'(t) \text{ или } h(t) = \int_0^t w(t) dt$$

Временные характеристики на основании преобразования Лапласа связаны также с передаточной функцией звена. Переходная характеристика

$$h(t) = L^{-1}[W(p)/p],$$

импульсная переходная характеристика

$$w(t) = L^{-1}[W(p)]$$

2. Временные характеристики звеньев и систем

Частотные характеристики описывают установившиеся вынужденные колебания на выходе звена, вызванные гармоническим воздействием на входе [4].

Пусть на вход звена (рис. 1.1) подано гармоническое воздействие

$$x(t) = x_m \sin \omega t,$$

где x_m – амплитуда, а ω – угловая частота этого воздействия.

По окончании переходного процесса на выходе этого звена будут существовать гармонические колебания с той же частотой, что и на входе, но отличающиеся в общем случае по амплитуде и фазе

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где y_m – амплитуда выходных установившихся колебаний; φ – фазовый сдвиг между входными и выходными колебаниями.

При фиксированной амплитуде входных колебаний амплитуда и фаза установившихся колебаний на выходе звена зависит от частоты колебаний.

Амплитудной частотной характеристикой (АЧХ) звена называется зависимость отношения амплитуд от частоты

$$A(\omega) = \frac{y_m}{x_m};$$

фазовой частотной характеристикой (ФЧХ) звена называется зависимость сдвига

фаз от частоты

$$\varphi(\omega) = \varphi$$

При исследовании систем автоматического управления амплитудную и фазовую частотные характеристики удобно строить в логарифмических координатах. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, в логарифмических координатах характеристики деформируются таким образом, что возникает возможность упрощенно изображать амплитудные частотные характеристики ломаными линиями. Во-вторых, в логарифмическом масштабе амплитудная частотная характеристика последовательной цепочки звеньев равна сумме амплитудных характеристик отдельных звеньев.

Амплитудно-частотная характеристика в логарифмических координатах (ЛАХ) строится в виде зависимости

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

от $\lg(\omega)$, называемой логарифмической амплитудной характеристикой (ЛАХ), а фазовая – в виде зависимости φ от $\lg(\omega)$, называемой логарифмической фазовой характеристикой (ЛФХ).

Обыкновенные амплитудная и фазовая характеристики могут быть объединены в одну характеристику – амплитудно-фазовую частотную характеристику $W(j\omega)$, используя $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ в качестве полярных координат.

Амплитудно-фазовую частотную характеристику $W(j\omega)$ можно строить и в прямоугольной системе координат – в комплексной плоскости. При этом координатами будут проекции вектора $A(\omega)$ на соответствующие оси. Зависимости $U(\omega)$ и $V(\omega)$ называются соответственно действительной (вещественной) и мнимой частотными характеристиками.

Аналитические выражения для рассмотренных выше частотных характеристик могут быть легко получены по передаточной функции. Если в выражение передаточной функции звена $W(p)$ подставить $p = j\omega$, то получится комплексная величина $W(j\omega)$, которая представляет собой функцию ω и является амплитудно-фазовой частотной характеристикой (частотной передаточной функцией) звена

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) \quad (1.8)$$

Тогда справедливы следующие соотношения

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

Частотные и переходные характеристики взаимосвязаны. Наиболее просто связь между ними определяется для весовой функции с помощью преобразования Фурье

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Типовые звенья и их характеристики

В теории автоматического управления вводится понятие типовых звеньев, передаточная функция которых только в определенном частотном диапазоне соответствует реальным звеньям систем управления. Рассматривая характеристики звеньев независимо от их назначения, физического принципа действия, мощности и скорости передаваемых сигналов, можно выделить ряд типовых звеньев, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков [3]:

- 1) простейшие: пропорциональные, интегрирующие и дифференцирующие звенья;
- 2) звенья первого порядка: инерционные, инерционно-дифференцирующие, форсирующие и инерционно-форсирующие;
- 3) звенья второго порядка: колебательные, консервативные, инерционные, форсирующие.

Более сложные линейные звенья могут быть сведены к соединению типовых звеньев.

Модели типовых звеньев могут быть представлены в виде дифференциальных уравнений, передаточных функций, а также частотных и временных характеристик [2, 3].

Пропорциональное звено. Пропорциональным (безынерционным или статическим) называют звено, которое описывается уравнением

$$y(t) = kx(t), \tag{1.9}$$

или, что тоже, передаточной функцией

$$W(p) = k \quad (1.10)$$

Частотные функции этого звена имеют вид

$$W(j\omega) = k, \quad U(\omega) = k, \quad V(\omega) = 0, \quad A(\omega) = k, \quad \varphi(\omega) = 0,$$

$$L(\omega) = 20 \lg k,$$

Временные функции этого звена имеют вид

$$h(t) = k1(t), \quad w(t) = \delta(t)$$

Примеры реализации пропорциональных звеньев приведены на рис. 1.2.

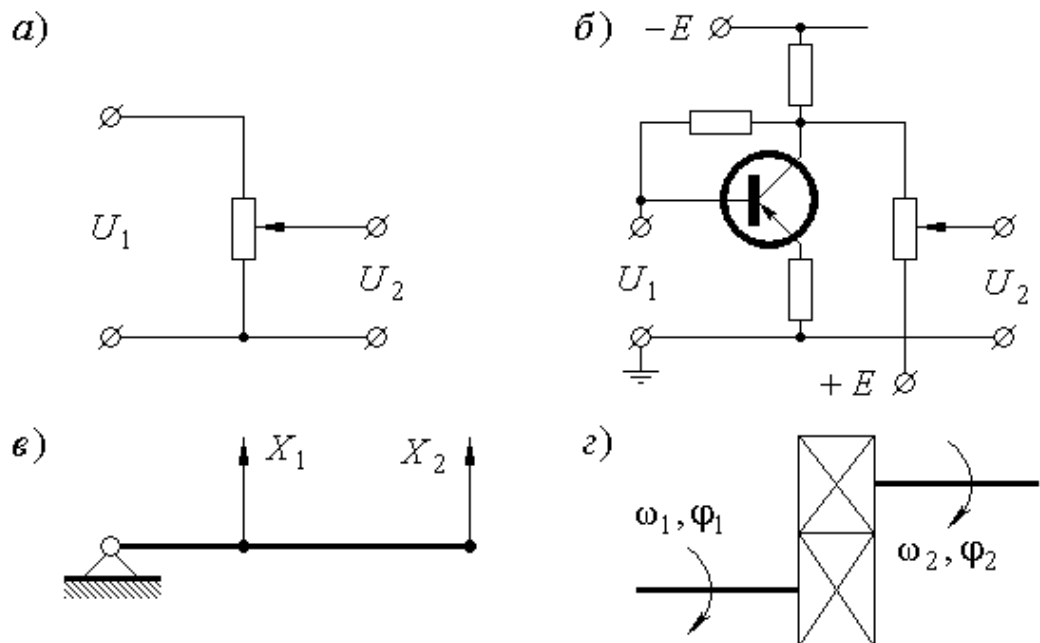


Рис. 1.2. Примеры реализации пропорциональных звеньев

Интегрирующее звено. Интегрирующим называют звено, которое описывается уравнением

$$py = kx, \quad (1.11)$$

или передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p} \quad (1.12)$$

Уравнение такого звена может быть записано также в виде

$$y(t) = k \int_0^t x(t) dt + y_0$$

Частотные функции этого звена имеют вид

$$W(j\omega) = k / j\omega, \quad U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = -k / \omega, \quad A(\omega) = k / \omega, \\ \varphi(\omega) = -\pi / 2, \quad L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$$

Временные функции этого звена имеют вид

$$h(t) = k t l(t), \quad w(t) = k l(t)$$

Примеры реализации интегрирующих звеньев приведены на рис. 1.3.

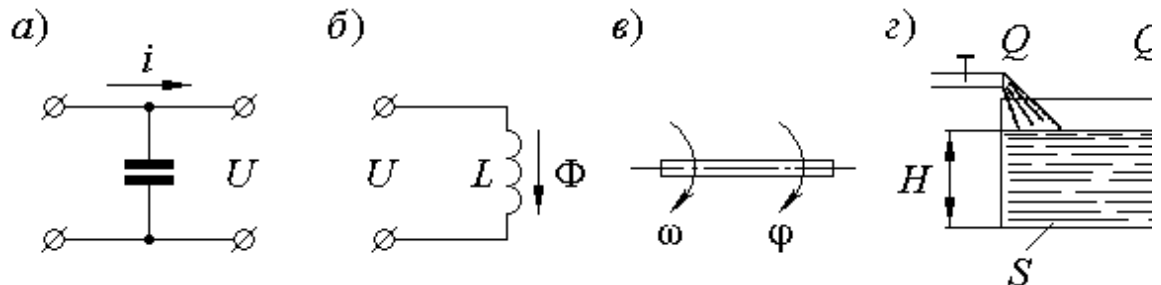


Рис. 1.3. Примеры реализации интегрирующих звеньев

Дифференцирующее звено. Дифференцирующим называют звено, которое описывается уравнением

$$y = k p x, \quad (1.13)$$

или передаточной функцией

$$W(p) = k p. \quad (1.14)$$

Уравнение такого звена может быть записано также в виде

$$y = k \frac{dx}{dt}$$

Частотные функции этого звена имеют вид

$$W(j\omega) = j k \omega, \quad U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = k \omega, \quad A(\omega) = k \omega, \quad \varphi = \pi / 2, \\ L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega$$

Временные функции этого звена имеют вид

$$h(t) = \delta(t), \quad w(t) = \dot{\delta}(t).$$

Такое звено физически нереализуемо.

Колебательное звено второго порядка. Звено, которое можно описать уравнением

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)y = kx$$

или в другой форме

$$(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)y = kx, \quad (1.23)$$

где $T = T_2$, $\xi = T_1 / 2T$,

или передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}, \quad (1.24)$$

называют колебательным.

Колебательное звено ($0 < \xi < 1$). Передаточная функция этого звена

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}.$$

Частотные функции этого звена имеют вид

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= k / [(1 - T^2 \omega^2) + j2\xi T\omega] \\ U(\omega) &= k(1 - T^2 \omega^2) / [(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2] \\ V(\omega) &= 2k\xi T\omega / [(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2] \\ A(\omega) &= k / \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} -\arctg 2\xi T\omega / (1 - T^2 \omega^2) & \text{при } \omega \leq 1/T, \\ -\pi - \arctg[2\xi T\omega / (1 - T^2 \omega^2)] & \text{при } \omega > 1/T; \end{cases} \\ L(\omega) &= 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}. \end{aligned}$$

Временные функции этого звена имеют вид

$$h(t) = k \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \right] \cdot 1(t) ;$$

$$w(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \cdot 1(t)$$

где $\alpha = \xi/T$; $\beta = \sqrt{1 - \xi^2}/T$; $\varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$.

Пример реализации колебательного звена приведен на рис. 1.7.

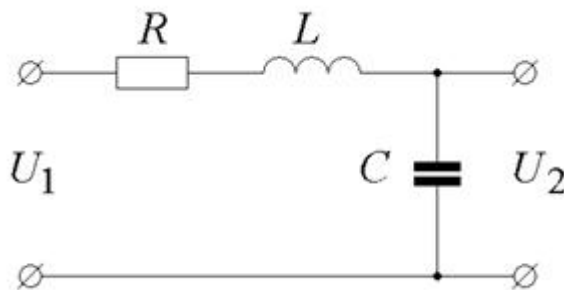


Рис. 1.7. Пример реализации колебательного звена

1.5 Лекция №5 (2 часа)

Тема: «Модели вход-состояние-выход; преобразования форм представления моделей».

1.5.1 Вопросы лекции

1. Модели вход-состояние-выход.
2. Преобразования форм представления моделей.

1.5.2. Краткое содержание вопросов

1. Модели вход-состояние-выход.

ТАУ предлагает два основных подхода к анализу и синтезу линейных САУ. Первый базируется на структурных схемах и ПФ отдельных элементов и всей системы. В связи с этим его часто называют *операторно-структурным*. Другой его особенностью является использование физических величин в качестве переменных. Подробно этот подход рассмотрен при изучении ММ типа "вход – выход" (см. п. 2.1).

Второй подход отличается описанием САУ системой ОДУ первого порядка, составленных относительно переменных состояния. Переменные состояния при таком описании САУ аналогичны обобщенным координатам, используемым в теоретической механике. Сам подход к исследованию САУ получил название *метода пространства состояний* или *метода переменных состояния*.

Понятие пространства состояний

Согласно методу пространства состояний (МПС) все переменные величины, характеризующие САУ, разделяют на три группы:

1) входные переменные или входные (управляющие) воздействия $u(t)$;

2) выходные переменные $y(t)$, характеризующие реакцию САУ на входные воздействия;

3) переменные (координаты) состояния $x(t)$, характеризующие динамическое поведение САУ.

Взаимосвязь названных переменных поясняют схемой САУ, на которой систему изображают в виде "черного ящика" в соответствии с рисунком 2.29.

Отдельные части САУ характеризуют ПФ $W_1(s)$ и $W_2(s)$. Как следует из схемы, переменные состояния $x(t)$ являются промежуточными величинами. Их относят к содержимому "черного ящика". Следовательно, они скрыты от прямого наблюдения. Кроме того, переменные состояния не всегда являются физическими величинами. Иногда для удобства математического моделирования САУ целенаправленно отказываются от физического содержания переменных состояния. Поэтому в общем случае $x(t)$ являются абстрактными переменными. Однако они должны *однозначно* выражаться через физические величины $y(t)$.

В общем случае исследуемую САУ считают *многомерной* (рисунок 2.29). Для упрощения работы с многомерными величинами их представляют в векторно-матричном виде. Так, совокупность входных переменных представляют в виде *вектора входа* совокупность выходных переменных – в виде *вектора выхода* а совокупность переменных состояния – в виде *вектора состояния*

Согласно МПС множество всех значений, которые может принять вектор входа U в момент времени t , образует *пространство входа* исследуемой САУ. Аналогично, множество всех значений, которые может принять вектор выхода Y в момент времени t , образует *пространство выхода*, а множество всех значений, которые может принять вектор состояния X в момент времени t , образует *пространство состояний* САУ.

Как было отмечено, векторно-матричные уравнения (2.82) описывают *многомерную* САУ. Эта же совокупность уравнений служит ММ *одномерной* САУ, т.е. системы с одним входом и одним выходом. При использовании МПС такие САУ часто называют системами со *скалярным* входом и выходом, так как входная и выходная величины являются скалярными. Уравнения состояния и выхода одномерной системы имеют вид

3.2. Преобразования форм представления моделей.

Разработано множество эквивалентных форм (представлений) уравнений состояния, различающихся между собой видом матриц A , B и C . Одни из форм используются чаще, так как обладают в некоторых случаях известными преимуществами перед другими. Такие формы записи уравнений состояния называются *каноническими*. Считают, что удобство канонических форм заключается в следующем. Во-первых, канонические представления матриц обеспечивают минимальное количество ненулевых элементов, что заметно упрощает вычисления. Во-вторых, канонические представления приводят к простым алгоритмам синтеза оптимальных регуляторов замкнутых САУ /3/.

Таким образом, в результате приведения уравнений к канонической форме более простую структуру принимают две из трех матриц: A и B (управляемые формы) или A и C (наблюдаемые формы). Управляемые канонические формы используют при синтезе регулятора, а наблюдаемые канонические формы – при синтезе наблюдателя /23/.

Первая управляемая каноническая форма

Первой управляемой канонической формой называют специальные матрицы. Очевидно, что коэффициенты характеристического полинома $A(s)$ составляют последний столбец матрицы A . Матрицы такого вида называют *матрицами Фробениуса*. Элементы таких матриц определяют без вычислений. Характеристический многочлен $A(s)$ совпадает со знаменателем ПФ системы управления. Корни данного многочлена определяют устойчивость и качество переходных процессов в САУ.

Матрица входа B рассматриваемого канонического представления также имеет специальный вид. Вследствие скалярного входного воздействия матрица B представляет собой вектор-столбец, элементы которого также не требуется вычислять.

Полученная ММ системы управления может быть изображена в виде структурной схемы, представленной на рисунке 2.31.

Принятые переменные состояния являются выходными сигналами интеграторов.

Первую управляемую каноническую форму называют также *канонической формой дуальной фазовой переменной* /20/.

Управляемое каноническое представление

Второй управляемой канонической формой или управляемым каноническим представлением (УКП) называют специальные матрицы

Очевидно, что коэффициенты характеристического полинома $A(s)$ составляют последнюю строку матрицы коэффициентов A . Коэффициенты характеристического полинома таких матриц определяют без вычислений, так как матрица коэффициентов (2.88) является матрицей Фробениуса.

Матрица входа B рассматриваемой канонической формы также имеет специальный вид. Вследствие скалярного входного воздействия матрица B представляет собой вектор-столбец. Его элементы также не требуется вычислять. К матрице C таких специальных требований не предъявляют. В рассматриваемом случае $C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Рассматриваемое УКП отличается также переменными состояниями. В качестве последних принимают выходную (управляемую) величину $y(t)$ и $(n - 1)$ ее производных

Такие переменные являются нормальными (2.65). В связи с этим рассматриваемую вторую управляемую каноническую форму или УКП называют *нормальной формой*. Таким образом, одномерная САУ описывается уравнениями состояния в данной канонической форме (УКП)

Очевидно, что первые n уравнений системы (2.90) имеют нормальную форму Коши и совпадают с системой ОДУ (2.68).

Полученная ММ системы управления может быть изображена в виде структурной схемы, представленной на рисунке 2.32.

В более общем случае, когда вектор выхода $C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$, структурная схема САУ приобретает каноническую форму с общим выходом, как показано на рисунке 2.33. Такую САУ описывают уравнениями состояния

Наблюдаемое каноническое представление

Если САУ описывается неоднородным дифференциальным уравнением (2.5) с производными входной величины в правой части, для приведения ММ к первой наблюдаемой канонической форме (НКП) принимают другие переменные состояния X . Их вводят следующими уравнениями состояния

Каноническая форма Жордана

Это представление уравнений состояния также отличается специальным видом матрицы коэффициентов A , которая в данном случае имеет форму Жордана

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A , которые рассчитывают как корни характеристического уравнения САУ (2.8).

Как видно, матрица коэффициентов A является *диагональной*. Это свойство матрицы упрощает вычисления, так как матрица Жордана имеет наибольшее количество

нулевых элементов. Матрицы входа и выхода в рассматриваемом представлении являются векторами соответственно $C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$, а D – скаляром вида $D = d_0$.

Следовательно, одномерную САУ описывают уравнениями состояния и выхода вида

Структурная схема САУ, соответствующая уравнениям (2.96), изображена на рисунке 2.36.

Управляемое каноническое представление является дуальным ко второму наблюдаемому каноническому представлению дуальной системы.

1.6 Лекция №6 (2 часа)

Тема: «Устойчивости, инвариантности, чувствительности, управляемости и наблюдаемости».

1.6.1 Вопросы лекции

1. Устойчивости, инвариантности, чувствительности
2. Управляемости и наблюдаемости

1.6.2. Краткое содержание вопросов

1. Устойчивости, инвариантности, чувствительности

Рассмотрим n -мерное пространство состояния X , в котором каждому состоянию системы соответствует некоторое положение изображающей точки определяемое значениями фазовых координат x

Пусть в пространстве состояния X заданы два множества S . Рассматриваемая система будет управляемой, если существует такое управление u определенное на конечном интервале времени T , которое переводит изображающую точку в пространстве X из подобласти S_1 в подобласть S_2

Можно сузить определение управляемости и понимать под ней возможность перевода изображающей точки из любой области пространства состояния X в начало координат. Система будет полностью управляемой, если каждое состояние управляемо в этом смысле.

От пространства состояния X перейдем к другому пространству Z посредством неособого преобразования $z = T x$ причем T , где A — матрица коэффициентов B

Тогда вместо (5.87) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u + \tilde{E}f, \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}, \\ u &= \tilde{D}\tilde{x}. \end{aligned} \right\}$$

Здесь использованы преобразованные матрицы коэффициентов: [12]

Введение новых фазовых координат посредством неособого преобразования [13] приводит к эквивалентным системам различной структуры.

При некотором преобразовании может оказаться, что часть управляющих величин не входит в некоторые дифференциальные уравнения (5.91) или часть фазовых координат не участвует в формировании выхода y . В первом случае система будет не полностью управляемой, а во втором — не полностью наблюдаемой.

В случае не полностью управляемой системы ее исходные уравнения (5.87) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + Bu, \\ \frac{dx^2}{dt} &= A_{22}x^2, \\ y &= Cx, \\ u &= Dx. \end{aligned} \right\}$$

Это иллюстрирует рис. 5.15. Набор фазовых координат [14] соответствует управляемой части фазовых координат, а набор [15] — неуправляемой части.

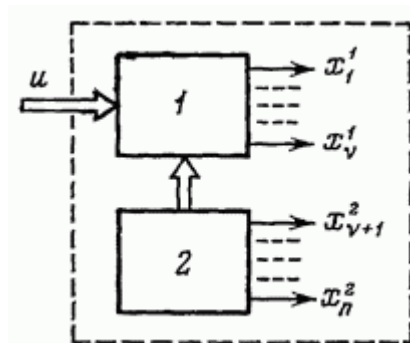


Рис. 5.15.

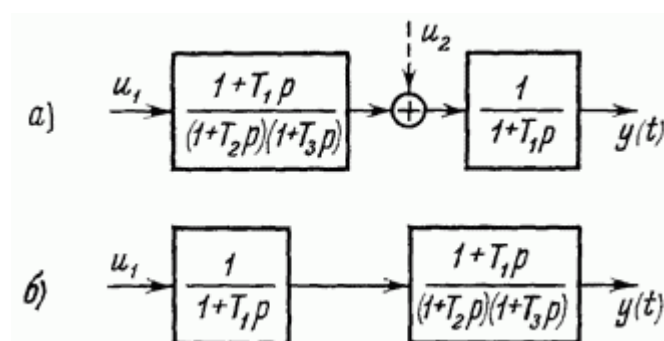


Рис. 5.16.

Р. Калманом [50] был доказан критерий управляемости, который гласит, что размерность [16] управляемой части системы, то есть порядок первой группы уравнений (5.91), совпадает с рангом матрицы

$$U = \| B, AB, (A)^2B \dots (A)^{n-1}B \|_{n \times kn}.$$

При [17] система полностью управляема, при [18] не полностью управляема и при [19] полностью неуправляема.

На рис. 5.16, а изображен простейший пример. Если рассматривать выходную величину [20] при ненулевых начальных условиях, то можно записать

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt} + C_3 e^{-ct},$$

где [21] определяются начальными условиями до приложения входного сигнала [22] — вынужденная составляющая. Система устойчива при а [23]

Если начальные условия до приложения [24] были нулевыми, то поведение системы может быть рассчитано по передаточной функции

$$W_1(p) = \frac{1 + T_1 p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)} = \frac{1}{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}.$$

В этом случае по интегралу Дюамеля — Карсона

$$y(t) = \int_0^t u_1(\tau) w_1(t - \tau) d\tau = y_{\text{в}}(t) + C_2 e^{-bt} + C_3 e^{-ct}.$$

Как следует из выражений (5.95) и (5.96), система во втором случае описывается дифференциальным уравнением не третьего, а второго порядка. Система будет устойчивой даже при [25]

Рассмотренная система будет не полностью управляемой. В ней оказывается, что [26]

При введении второй составляющей управления [27] система оказывается полностью управляемой, и ей будет соответствовать матрица-строка передаточных функций по управлению

$$W(p) = \| W_1(p), W_2(p) \| = \left\| \frac{1}{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}, \frac{1}{1 + T_1(p)} \right\|.$$

В случае не полностью наблюдаемой системы ее уравнения могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= A_{11}x^1 + B_1u, \\ \frac{dx^2}{dt} &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + B_2u, \\ y &= C_1x^1, \\ u &= D_1x^1. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения отличаются от (5.87) тем, что фазовые координаты группы [28] не входят ни в выражения для u и y , ни в первое уравнение, куда входят только фазовые координаты группы [29]. Группа фазовых координат [30] относится к ненаблюдаемым. Это иллюстрирует рис. 5.17.

Р. Калманом [50] показано, что порядок первой группы уравнений [31] совпадает с рангом матрицы

$$V = \|C', A'C', (A')^2C', \dots, (A')^{n-1}C'\|_{n \times mn}.$$

При [32] система полностью наблюдаема, при [33] — не полностью наблюдаема [34] при [35] полностью ненаблюдаема.

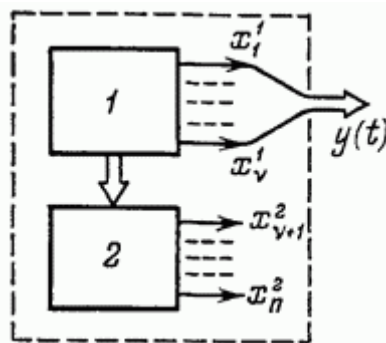


Рис. 5.17.

На рис. 5.16, б изображен простейший пример. Для него легко показать, что в формировании выхода участвуют только две фазовые координаты из трех.

В общем случае система может содержать четыре группы фазовых координат: управляемую, но ненаблюдаемую часть [36], управляемую и наблюдаемую часть [37], неуправляемую и ненаблюдаемую часть [38] и неуправляемую но наблюдаемую часть [39].

Исходные уравнения системы (5.87) в этом случае можно для самого общего случая записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 + A_{14}x^4 + B_1u, \\ \frac{dx^2}{dt} &= A_{22}x^2 + A_{24}x^4 + B_2u, \\ \frac{dx^3}{dt} &= A_{33}x^3 + A_{34}x^4, \\ \frac{dx^4}{dt} &= A_{44}x^4, \\ y &= C_2x^2 + C_4x^4, \\ u &= D_2x^2 + D_4x^4. \end{aligned} \right\}$$

Левая часть характеристического уравнения (5.88) системы в этом случае содержит четыре сомножителя:

$$\begin{aligned} |Ip - A - BD| &= \begin{vmatrix} Ip - A_{11} & -A_{12} - B_1D_2 & -A_{13} & -A_{14} - B_1D_4 \\ 0 & Ip - A_{22} - B_2D_2 & 0 & -A_{24} - B_2D_4 \\ 0 & 0 & Ip - A_{33} & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & Ip - A_{44} \end{vmatrix} = \\ &= |Ip - A_{11}| \cdot |Ip - A_{22} - B_2D_2| \cdot |Ip - A_{33}| \cdot |Ip - A_{44}| = 0. \quad (5.100) \end{aligned}$$

2. Управляемости и наблюдаемости

Управляемость и наблюдаемость системы в изложенном смысле не всегда совпадает с практическими представлениями. Даже если какая-либо фазовая координата и может быть вычислена по доступным для измерения выходным величинам, обработка измеренных величин может быть, во-первых, сложной и, во-вторых, она может быть затруднена наличием помех. Поэтому практически наблюдаемыми координатами обычно считаются те из них, которые могут быть непосредственно измерены датчиками различных типов.

1.7 Лекция №7 (2 часа)

Тема: «Качество переходных процессов в линейных СУ».

1.7.1 Вопросы лекции

1. Понятие о качестве переходных процессов.
2. Коррекция динамических свойств линейных САУ.

1.7.2. Краткое содержание вопросов

1. Понятие о качестве переходных процессов.

Из предыдущей лекции мы узнали, что автоматическая система прежде всего должна быть устойчива. В устойчивой системе переходный процесс затухает. Однако для практики вовсе не безразличен характер затухания переходного процесса. Так, например, если переходный процесс затухает медленно, и система долго входит в новый установившийся режим, то она обладает недостаточным быстродействием, и, следовательно, ее применение будет ограничено. Поэтому устойчивость является

необходимым, но недостаточным условием работоспособности автоматических систем. Достаточным условием является *качество процессов регулирования*, которое оценивается *качеством переходных процессов и ошибками в установившихся режимах*.

Качество переходных процессов обычно оценивают по переходной функции $h(t)$, которая представляет собой реакцию системы на внешнее воздействие типа единичной ступенчатой функции $1(t)$. Для следящих систем и систем управления рассматривают переходную функцию по отношению к задающему воздействию $h(t)$, а для систем стабилизации – по отношению к возмущению $h_f(t)$.

На примере переходной функции $h(t)$ (рис. 9.1) познакомимся с основными показателями качества переходного процесса: временем регулирования, перерегулированием, основной частотой колебаний, количеством колебаний, максимальной скоростью и максимальным ускорением регулируемой величины.

Время регулирования t_p определяется длительностью переходного процесса. теоретически переходный процесс длится бесконечно долго, однако практически считают, что он заканчивается, как только отклонения регулируемой величины от нового ее установившегося значения не будут превышать допустимых пределов ε . Обычно принимают $\varepsilon = (3 - 5)\%$ от $h_{уст}$. Временем регулирования характеризуют быстродействие системы. однако иногда быстродействие характеризуют также временем t_y достижения переходной функцией первый раз нового установившегося значения или временем t_{max} достижения максимального значения h_{max} .

Перерегулирование Δh_{max} , или выброс, представляет собой максимальное отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения. Обычно первый максимум является наибольшим. Относительное перерегулирование вычисляют по формуле

$$\sigma = \frac{\Delta h_{max}}{h_{уст}} \cdot 100\% = \frac{h_{max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\% .$$

Время регулирования и перерегулирование, основные показатели переходного процесса, тесно связаны между собой. На первый взгляд может показаться, что перерегулирование недопустимо, так как оно увеличивает время регулирования. Однако это не так. Действительно, перерегулирование появляется вследствие того, что система к новому установившемуся состоянию подходит с определенной скоростью, которая графически отображается тангенсом угла наклона касательной в точке А (рис. 9.1):

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_y} = tg \alpha .$$

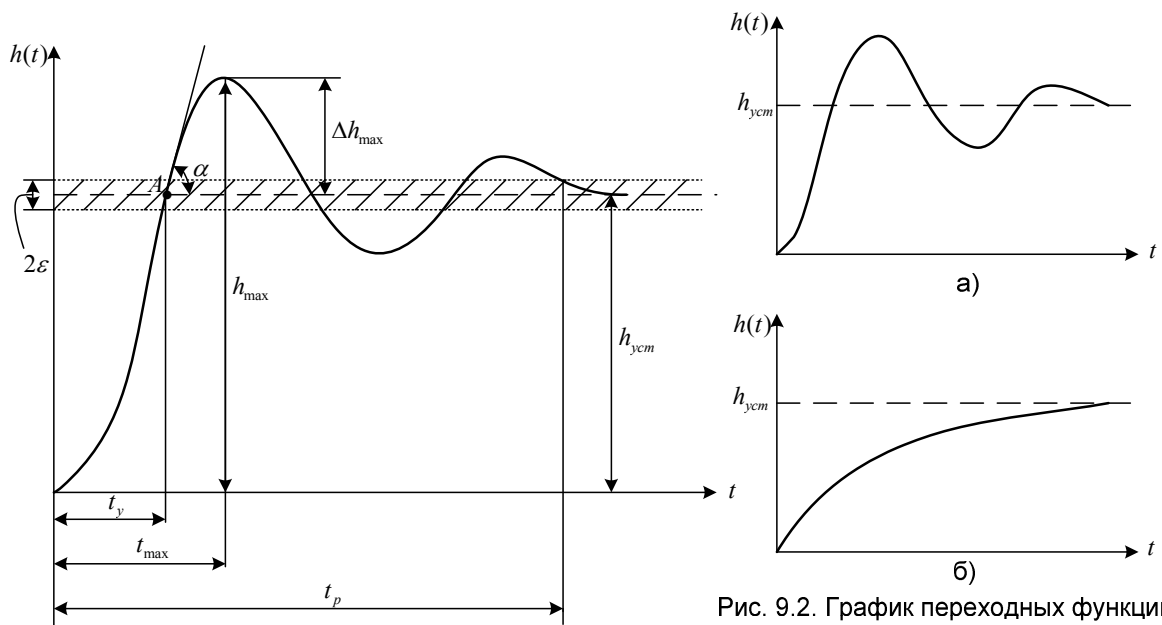


Рис. 9.1. График переходной функции $h(t)$

Рис. 9.2. График переходных функций с большим перерегулированием в системе (а) и при отсутствии перерегулирования (б)

Чем больше эта скорость, тем дальше за новое установившееся положение пройдет система по инерции. Значит, для уменьшения перерегулирования необходимо уменьшить скорость, с которой система подходит к новому установившемуся состоянию. Это, в конце концов, приведет к увеличению времени регулирования. Если система подходит к установившемуся состоянию с нулевой скоростью, то перерегулирования вообще не будет, но время регулирования значительно увеличится (рис. 9.2,б).

Так как время регулирования характеризует быстродействие системы, то стремятся, там где это необходимо, свести его к минимуму. Это значит, что система должна обрабатывать задающее воздействие с большой скоростью, что в итоге приводит к большому перерегулированию. Кроме того, поскольку переходный процесс колебательный, то будут иметь место большие ускорения регулируемой величины, что может вызвать недопустимо большие динамические нагрузки на элементы системы. Таким образом, как отсутствие, так и слишком большое перерегулирование нежелательно. Поэтому в качестве оптимального допускают перерегулирование в пределах 20 – 30%. При этом число полукосильаний переходной функции равно 2 – 3.

Числовые значения времени регулирования и перерегулирования часто задают в качестве исходных данных для синтеза корректирующих устройств, поскольку правильным выбором и настройкой последних обеспечивается подавление нежелательных колебаний регулируемой величины в переходном процессе.

Для некоторых систем перерегулирование вообще недопустимо, например, для систем автоматического регулирования химических процессов, где перерегулирование может испортить выпускаемый продукт. Необходимо также иметь в виду, что стремление уменьшить время регулирования приводит к увеличению мощности исполнительного устройства.

2. Коррекция динамических свойств линейных САУ.

Коррекция динамических свойств САУ осуществляется для выполнения требований по точности, устойчивости и качеству переходных процессов.

С точки зрения требований к точности САУ в установившихся режимах коррекция динамических свойств САУ может понадобиться для увеличения коэффициента передачи или порядка астатизма при сохранении устойчивости и определенного качества переходных процессов.

Коррекция применяется также как средство обеспечения устойчивости неустойчивой системы или расширения области устойчивости и повышения качества переходных процессов.

Осуществляется коррекция с помощью введения в систему специальных *корректирующих звеньев* с особо подобранной передаточной функцией.

Различают 4 основных вида корректирующих устройств.

1. Последовательные корректирующие устройства или, как их еще называют, *корректирующие фильтры*, которые могут описываться различными передаточными функциями $W_K(s)$ (рис. 9.3).

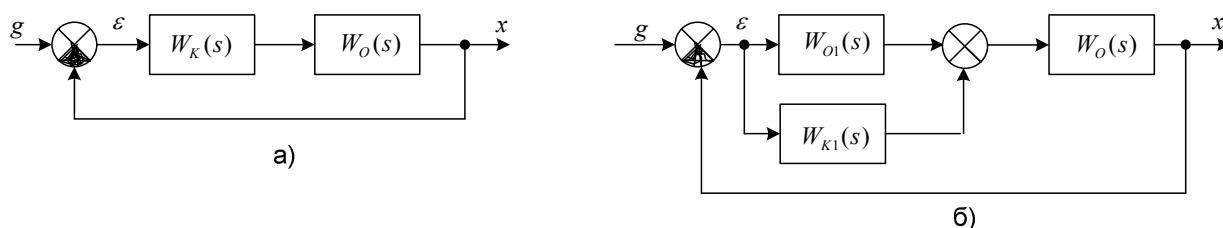


Рис. 9.3. Структурные схемы последовательных корректирующих устройств.

Здесь $W_O(s)$ - передаточная функция основных звеньев системы; $W_K(s)$ - передаточная функция корректирующих звеньев.

В первом случае (рис. 9.3,а) общая передаточная функция разомкнутой цепи системы будет

$$W(s) = W_K(s)W_O(s).$$

Во втором случае (рис. 9.3, б) имеем

$$W_K(s) = W_{01}(s) + W_{K1}(s),$$

где нулями отмечены передаточные функции заданных частей системы.

2. Параллельные корректирующие устройства. Выполняются в виде дополнительных местных обратных связей $W_{o.c}(s)$ (рис. 9.4), когда

$$W_K(s) = \frac{W_{01}(s)}{1 + W_{o.c}(s)W_{01}(s)}.$$

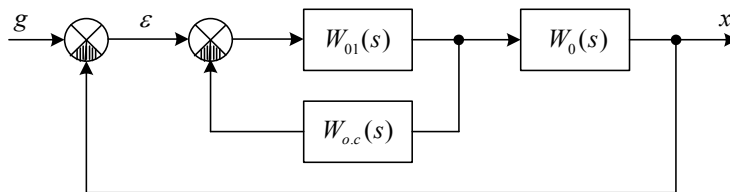


Рис. 9.4. Структурная схема САУ с параллельным корректирующим устройством.

3. Корректирующие устройства по внешнему воздействию.

4. Неединичная главная обратная связь.

Передаточная функция корректирующего устройства $W_K(s)$ или $W_{o.c}(s)$ может иметь, вообще говоря, произвольный вид. Но наиболее часто применяются определенные типы корректирующих устройств, которые мы и рассмотрим.

Типовые последовательные корректирующие устройства.

Введение производной от ошибки – простейший метод улучшения качества переходного процесса. Структурно введение производной представлено на рис. 9.5.

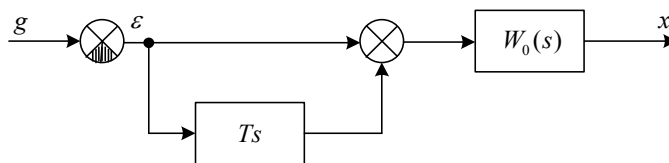


Рис. 9.5. Введение производной от ошибки.

Технически это может быть осуществлено различными устройствами, причем производная может осуществляться не в чистом виде, а с инерционностью, например, в виде

$$\frac{T_s}{T_1 s + 1}.$$

Передаточная функция разомкнутой цепи (рис. 9.5) с идеальной производной будет

$$W(s) = (Ts + 1)W_0(s).$$

Заменив $s = j\omega$, получим амплитуду и фазу в виде:

$$A(\omega) = A_0(\omega)\sqrt{T^2\omega^2 + 1}; \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \arctg T\omega.$$

Существенным здесь является то, что при введении воздействия по производной добавляется положительная фаза.

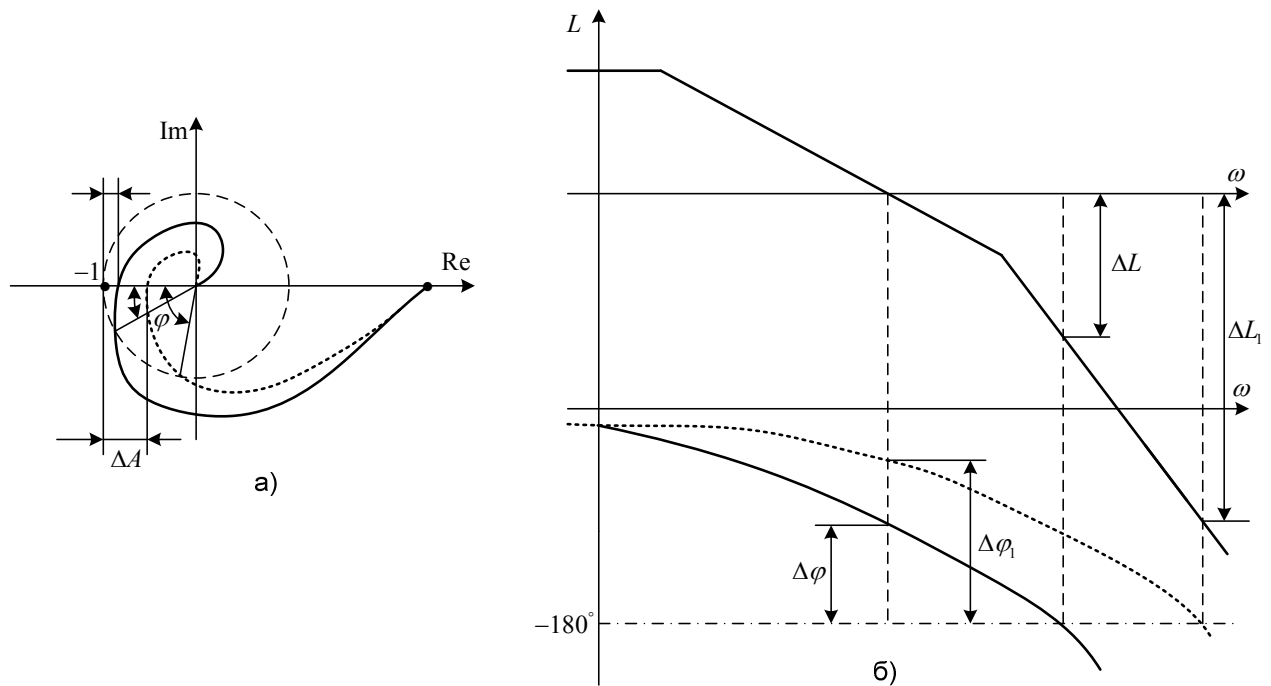


Рис. 9.6. Изменение запаса устойчивости при введении производной по ошибке.

Вследствие этого радиус-векторы амплитудно-фазовой характеристики (рис. 9.6, а) поворачиваются против часовой стрелки, увеличивая запас устойчивости и улучшая качество переходного процесса. То же самое легко проследить и на логарифмических характеристиках (рис. 9.6,б).

В случае неидеального дифференцирования (с инерционностью) этот эффект несколько уменьшается количественно, но качественно он сохраняется.

Заметим, что введение производной от ошибки может служить и стабилизирующим средством, т.е. превращать неустойчивую замкнутую систему в устойчивую, например, если на рис. 9.6,а точка $(-1, j0)$ лежала бы внутри характеристики $W_0(j\omega)$, то новая характеристика $W(j\omega)$ уже могла бы не охватывать точку $(-1, j0)$.

1.8 Лекция №8 (2 часа).

Тема: «Задачи и методы синтеза линейных СУ».

1.8.1 Вопросы лекции

1. Задачи синтеза линейных СУ
2. Методы синтеза линейных СУ

1.8.2. Краткое содержание вопросов

1. Задачи синтеза линейных СУ

Различают синтез оптимальной САУ и синтез системы с заданными показателями качества. Из двух названных систем оптимальная САУ будет отличаться наилучшими показателями. Задача оптимизации систем является задачей вариационного типа. В инженерной практике наибольшее распространение получили методы синтеза САУ на заданные показатели качества. Как правило, это графоаналитические методы. Условно их можно разделить на корневые и частотные.

Первую группу составляют:

- 1) метод стандартных коэффициентов (стандартных ПФ) /6, 12, 17, 22, 25, 27, 30, 34, 45/;
- 2) метод преобладающих корней Т.Н.Соколова /6/;
- 3) метод корневого годографа /10, 12, 22, 25, 28, 51, 56/ и другие.

Вторую группу составляют:

- 1) метод расширенных частотных характеристик /39, 44, 59/;
- 2) метод резонансной частоты Д.К.Широкого;
- 3) графоаналитический метод В.Я.Ротача;
- 4) метод логарифмических амплитудных характеристик /6/ и др.

Названные методы позволяют синтезировать САУ по следующим показателям качества:

- 1) времени регулирования t_p ;
- 2) колебательности M ;
- 3) степени затухания ψ .

Отдельную группу образуют методы расчета ОПН по приближенным формулам или методы определения ОПН по номограммам. Наиболее известными среди них являются:

- 1) метод Циглера-Николса (Ziegler – Nichols) /32/;
- 2) метод Коэна-Куна (Cohen O.H. – Coon O.A.);
- 3) метод Чина-Хронса-Ресвика (KunLiChien – Hrones J.A. – Reswick J.B.) /32, 59/;
- 4) метод ВТИ /13, 44/ и др. /7, 24, 47, 54/.

Считают, что методы синтеза САУ на заданные показатели качества решают задачу параметрической оптимизации САУ.

2. Методы синтеза линейных СУ

Метод стандартных коэффициентов

Метод стандартных коэффициентов не является универсальным. Однако он нашел широкое применение благодаря своей простоте.

В основу метода положена связь между переходной характеристикой $h(t)$ и основной ПФ системы управления $\Phi(s)$. Вид переходной характеристики определяется значением нулей z_m и полюсов p_n основной ПФ системы. Для ряда типовых ПФ найдены "оптимальные" распределения нулей и полюсов, обуславливающие наиболее благоприятные переходные характеристики $h(t)$ с точки зрения динамики синтезируемой САУ. Каждому такому оптимальному распределению нулей и полюсов соответствуют вполне определенные значения коэффициентов полиномов числителя и знаменателя основной ПФ системы, которые называют стандартными.

Синтез САУ этим методом начинают с приведения основной ПФ системы к нормированному виду (форме Вышнеградского). Для этого аргумент ПФ s заменяют аргументом σ и делят ее числитель и знаменатель на σ^n . В результате получают нормированную ПФ (индекс аргумента "*" опущен):
где среднегеометрическое значение корней характеристического уравнения замкнутой САУ $D(s) = 0$.

Если САУ описывается уравнением второго порядка ($n = 2$), величина σ_n есть частота собственных колебаний системы.

Приведение ПФ системы $\Phi(s)$ к нормированному виду $\Phi(s^*)$ изменяет длительность процесса регулирования с t_p на t_{p*} . Безразмерное время регулирования t_{p*} , соответствующее нормированной ПФ, и реальное время t_p , соответствующее исходной ПФ $\Phi(s)$, связаны следующим образом:

При этом величину t_{p*} принимают в качестве меры быстродействия системы управления: при одинаковом распределении полюсов и нулей нормированной ПФ время регулирования t_{p*} будет тем меньше, чем больше σ_n .

Реальные САУ характеризуются небольшим порядком высшей производной числителя m . Поэтому стандартные коэффициенты определены для трех типовых нормированных ПФ:

- 1) не содержащих нулей ($m = 0$):
- 2) с одним нулем ($m = 1$):
- 3) с двумя нулями ($m = 2$):

Названные коэффициенты $A_1 - A_{n-1}$ обуславливают наименьшую длительность процесса регулирования t_p . Обычно стандартные коэффициенты сводят в таблицы, в которых также указывают безразмерное время t_{p*} соответственно порядку ПФ n .

Если САУ описывается первой типовой ПФ вида (3.16), т.е. не содержит нулей, наименьшей длительности переходного процесса ($t_p = t_{мин}$) достигают биномиальными коэффициентами A_1, A_2, \dots, A_{n-1} . В этом случае коэффициенты характеристического уравнения являются коэффициентами бинома Ньютона $(s + 1)^n$. При биномиальных коэффициентах корни характеристического уравнения являются кратными (вещественными). Коэффициенты уравнений от первого ($n = 1$) до пятого ($n = 5$) порядка сведены в таблицу 3.1, которая содержит также соответственно безразмерное время регулирования t_r . Переходные характеристики САУ с ПФ вида (3.16) и $n = 1 \div 5$ изображены на рисунке 3.17 и свидетельствуют об отсутствии перерегулирования, т.е. являются

монотонными.

Процесс регулирования в САУ второго порядка ($n = 2$) названного качества достигается при коэффициенте демпфирования $\xi = 1$ (см. переходную характеристику 1 на рисунке 3.18).

Таблица 3.1 – Биномиальные коэффициенты нормированной ПФ типа (3.16)

n		A4	A3	A2	A1		t _r
1	–	–	–	–	1	1	3,0
2	–	–	–	1	2	1	4,7
3	–	–	1	3	3	1	6,3
4	–	1	4	6	4	1	7,8
5	1	5	10	10	5	1	9,2

Если в процессе регулирования допускается незначительное перерегулирование, т.е. переходная характеристика может быть апериодической, рекомендуется принять коэффициент демпфирования $\xi = 0,7 \div 0,8$. Известно, что при таком демпфировании переходные процессы в системе второго и более высоких порядков затухают быстрее, чем в случае $\xi = 1$. В результате длительность процесса регулирования будет меньше (см. переходную характеристику 2 на рисунке 3.18). Кратность корней характеристического уравнения утрачивается, поскольку они становятся комплексными. Все комплексные корни (и один вещественный при нечетном n) располагаются на одинаковом расстоянии η от оси мнимых чисел. Мнимые части корней образуют арифметическую прогрессию с разностью γ и первым членом прогрессии также γ .

Установлено оптимальное отношение $\mu = \gamma/\eta$, которое обуславливает наименьшее безразмерное время регулирования t_r среди трех названных случаев. Соответствующие стандартные коэффициенты указаны в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Стандартные коэффициенты нормированной ПФ типа (3.16), обеспечивающие минимальное время регулирования								
n		A4	A3	A2	A1		t_p	σ
1	–	–	–	–	1	1	3,0	–
2	–	–	–	1	1,38	1	4,4	5,0
3	–	–	1	2,05	2,39	1	4,4	–
4	–	1	2,6	3,80	2,80	1	4,6	4,73
5	1	2,5	5,30	5,46	3,64	1	5,7	–

При синтезе АР стандартные коэффициенты используют следующим образом. Если синтезируемая САР (рисунок 3.19) содержит, например, П регулятор, то выбору подлежит коэффициент усиления регулятора КАР. В первую очередь определяют ПФ разомкнутой системы по (2.27) и основную ПФ системы по (2.32)

Полученную основную ПФ системы нормируют следующим образом: Поскольку ПФ не содержит нулей ($m = 0$), эталонной функцией является типовая ПФ вида (3.19) при $n = 2$

Для определения неизвестного коэффициента КАР сравнивают коэффициенты характеристических полиномов двух основных ПФ $F(s)$ и $F_э(s)$ и получают систему алгебраических уравнений

На этом этапе синтеза АР система уравнений кроме КАР содержит еще два неизвестных $A1$ и $W0$. Коэффициент $A1$ должен иметь стандартное значение. Его выбирают по таблицам стандартных коэффициентов в зависимости от принятой эталонной переходной характеристики (рисунок 3.18). Эталонную характеристику $h_э(\tau)$ выбирают, в свою очередь, в соответствии с технологическим регламентом. Второе неизвестное рассчитывают, используя первое уравнение системы, по формуле

Затем определяют искомый коэффициент усиления П-регулятора

Если технологическим регламентом ограничена длительность процесса регулирования $t_p \leq t_{max}$, необходимо рассчитать действительное время регулирования t_p и убедиться в выполнении требования регламента. Для этого сначала определяют безразмерное время регулирования t_p по таблицам или по эталонной переходной характеристике $h_э(\tau)$ (рисунок 3.18). Затем вычисляют действительное время регулирования t_p по формуле

В частности, если в рассматриваемом примере параметризации П регулятора (рисунок 3.19) в качестве эталонного принять монотонный процесс регулирования

(переходная характеристика 1 на рисунке 3.18) и биномиальные коэффициенты, то в соответствии с таблицей 3.1 эталонная ПФ системы принимает вид

Если ОР характеризуется следующими параметрами $KOP = 0,1$ и $TOP = 5$, то частота собственных колебаний САУ

Окончательно искомый коэффициент усиления П-регулятора

Действительное время регулирования при $\tau_r = 4,8$ (см. таблицу 3.1) Рассмотренные комбинации стандартных коэффициентов, связанные с кратным или близким к нему распределением корней характеристического уравнения САУ, эффективны при параметрической оптимизации систем, ПФ которых не имеют нулей. В противном случае процесс регулирования сопровождается заметным перерегулированием ($\sigma > 5\%$). Для недопущения этого предложены другие комбинации стандартных коэффициентов, которым соответствует иное расположение корней характеристического уравнения САУ.

В случае САУ с основной ПФ типа (3.17) с одним нулем ($m = 1$) корни характеристического уравнения рекомендуется располагать на отрицательной вещественной полуоси в арифметической прогрессии. Коэффициенты характеристического полинома типовой ПФ вида (3.17) указаны в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Стандартные коэффициенты нормированной ПФ типа (3.17)

n		A4	A3	A2	A1		τ_r	σ
1	–	–	–	–	1	1	3,0	–
2	–	–	–	1	2,50	1	3,8	9,92
3	–	–	1	5,10	6,35	1	7,5	9,83
4	–	1	7,22	16,30	11,83	1	12,7	9,75
5	1	9,00	29,00	38,00	18,00	1	> 16	10,2

Примером названной САУ становится рассмотренная в предыдущем примере система при изменении простейшего пропорционального закона регулирования на изодромное (рисунок 3.20).

При использовании ПИ регулятора ПФ системы имеет вид

Основная ПФ в нормированном виде содержит только один ноль ($m = 1$). Поэтому эталонной является типовая ПФ вида (3.17) при ($n = 3$)

Сравнивая коэффициенты характеристических полиномов основных ПФ $F(s)$ и $F_э(s)$, получают систему алгебраических уравнений

Согласно таблице 3.3 стандартные коэффициенты равны $A1 = 6,35$ и $A2 = 5,10$. Поскольку ОР сохраняет свои параметры без изменения, из первого уравнения этой

системы следует, что с помощью двух других алгебраических уравнений определяют искомые параметры настройки ПИ-регулятора действительное время регулирования

В случае САУ с основной ПФ типа (3.18) с двумя нулями ($m = 2$) корни характеристического уравнения рекомендуется располагать на отрицательной вещественной полуоси в геометрической прогрессии. Коэффициенты характеристического полинома ПФ вида (3.18) представлены в таблице 3.4.

Кроме рассмотренных стандартных коэффициентов типовых ПФ вида (3.16) – (3.18) известны иные коэффициенты и соответствующие им оптимальные переходные характеристики $h_{\Sigma}(\tau)$, полученные с помощью интегральных критериев (см. п. 2.4.5.4). Названные коэффициенты и характеристики широко применяют при синтезе следящих приводов.

Таблица 3.4 – Стандартные коэффициенты нормированной ПФ типа (3.18)

n		A4	A3	A2	A1		τp	σ
3	–	–	1	6,7	6,7	1	1,6	10,2
4	–	1	7,9	15,0	7,9	1	4,4	20,9
5	1	18	69,0	69,0	18,0	1	8,5	19,8

Минимизацией квадратичного функционала J20 получены стандартные коэффициенты типовой ПФ вида (3.16), которые представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Стандартные коэффициенты нормированной ПФ типа (3.16), обеспечивающие минимум квадратичного функционала J20

n		A4	A3	A2	A1		τp	σ
1	–	–	–	–	1	1	3,0	–
2	–	–	–	1	1	1	5,3	16,3
3	–	–	1	1	2	1	8,7	7,26
4	–	1	1	3	2	1	10,3	14,2
5	1	1	4	3	3	1	12,5	11,5

Д.Грехем и Р.Летроп получили стандартные коэффициенты типовой ПФ вида (3.16) (таблица 3.6) при минимизации интеграла от абсолютного значения ошибки J10.

Таблица 3.6 – Стандартные коэффициенты нормированной ПФ типа (3.16), обеспечивающие минимум квадратичного функционала J10

n		A4	A3	A2	A1		τp	σ
---	--	----	----	----	----	--	----	---

1	–	–	–	–	1	1	–	–
2	–	–	–	1	1,40	1	2,9	4,60
3	–	–	1	1,75	2,15	1	3,6	1,98
4	–	1	2,10	3,40	2,70	1	4,3	1,92
5	1	2,80	5,00	5,50	3,40	1	5,2	2,10

В таблице 3.7 представлены стандартные коэффициенты Баттерворта (идеальный фильтр), которые раньше других начали применять при оптимизации электроприводов.

Таблица 3.7 – Стандартные коэффициенты Баттерворта								
n	A4		A3	A2		A1	τp	σ
1	–	–	–	–	1	1	–	–
2	–	–	–	1	1,40	1	2,9	4,60
3	–	–	1	2,00	2,00	1	6,0	8,14
4	–	1	2,60	3,40	2,60	1	6,9	11,10
5	1	3,24	5,24	5,24	3,24	1	7,6	12,70

Внешнее отличие названных коэффициентов проявляется их симметричным распределением подобно биномиальным коэффициентам. Однако переходная характеристика САУ приобретает перерегулирование и колебательностью превосходит аналогичные характеристики. Время регулирования, обусловленное коэффициентами Баттерворта, также самое большое среди рассмотренных ранее. Тем не менее в этом случае САУ обладает наиболее широкой полосой пропускания гармонических полезных сигналов при заданной статической ошибке регулирования. Другими словами, модуль АЧХ системы управления в широком диапазоне частот. Поэтому электроприводы, настроенные по Баттерворту, называют настроенными на модульный оптимум (см. п. 2.5.10).

Метод корневого годографа

Метод корневого годографа (МКГ) применяется при анализе и синтезе линейных САУ. С помощью корневого годографа системы можно оценить ее устойчивость и качество регулирования. Однако МКГ наиболее эффективен при синтезе корректирующих устройств САУ.

Корневым годографом называют совокупность траекторий, которые описывают корни характеристического уравнения замкнутой САУ на комплексной плоскости при изменении одного из параметров системы от 0 до ∞ . Варьируемым может быть любой из

параметров, линейно входящий в характеристическое уравнение. Типичной является задача исследования влияния коэффициента усиления автоматического регулятора и параметров корректирующего устройства на очертания годографа.

Суть МКГ наиболее просто оценить на примере следящей системы, структурная схема которой изображена на рисунке 2.9.

Очевидно, что при $K = 0$ полюсы разомкнутой и замкнутой САУ равны. При увеличении коэффициента усиления K единственный полюс замкнутой САУ будет двигаться вдоль отрицательной вещественной полуоси. Траектория движения полюса согласно определению представляет собой корневой годограф. Стрелка указывает направление возрастания параметра K . Своим началом КГ имеет полюс разомкнутой САУ.

Также очевидно, что при $K = 0$ полюсы разомкнутой и замкнутой САУ равны.

ПФ разомкнутой САУ может быть подобна ПФ колебательного звена и соответственно иметь пару комплексно-сопряженных полюсов $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ при $\xi < 1$. Действительную часть полюса α называют коэффициентом затухания (сравни с декрементом затухания), так как α характеризует быстроту затухания колебаний разомкнутой САУ. Мнимую часть полюса β называют частотой собственных колебаний разомкнутой САУ. Коэффициент демпфирования ξ и постоянная времени T разомкнутой системы определяют названные величины следующим образом:

Корневой годограф замкнутой системы показан на рисунке 3.24.

В качестве последнего примера на рисунке 3.25 изображен корневой годограф САУ, которая в разомкнутом состоянии имеет ПФ третьего порядка соответственно структурной схеме (рисунок 3.26):

Полюсы разомкнутой САУ $p_1 = 0$, $p_2 = -10$ и $p_3 = -20$ обозначены на комплексной плоскости знаком "x".

Рассмотренные примеры достаточно иллюстрируют свойства КГ замкнутых САУ /51, 56/:

- 1) количество ветвей КГ равно порядку характеристического уравнения САУ $D(s) = 0$, т.е. количеству полюсов основной ПФ системы $\Phi(s)$;
- 2) ветви КГ начинаются при $K = 0$ в полюсах ПФ разомкнутой САУ p_1, p_2, \dots, p_n ;
- 3) при $K \rightarrow \infty$ m ветвей КГ стремятся к m нулям ПФ z_1, z_2, \dots, z_m . Остальные $n - m$ ветвей устремляются в бесконечность;
- 4) КГ являются непрерывными кривыми или отрезками прямых, обусловленными изменением коэффициента усиления K от 0 до ∞ ;

5) КГ, не лежащие на оси вещественных чисел, симметричны относительно этой оси;

6) прямолинейные участки годографов, лежащие на оси вещественных чисел, обусловлены только вещественными полюсами и нулями (рисунки 3.22, 3.23 и 3.25);

7) в точках пересечения ветвей КГ с осью вещественных чисел два вещественных корня сливаются и далее превращаются в комплексно-сопряженные (рисунки 3.23 и 3.25);

8) точки пересечения ветвей КГ с осью мнимых чисел обусловлены чисто мнимыми корнями (рисунки 3.25).

Самой трудоемкой операцией МКГ является построение годографа. Наиболее известны методы У.Р.Эванса, Э.Г.Удэрмана, К.Ф.Теодорчика-Г.А.Бендрикова, позволяющие построить КГ системы даже вручную. Современные системы компьютерной математики (MATLAB, MathCAD, Maple) и моделирования САУ (MBTU, SystemView) содержат встроенные функции автоматического построения и анализа КГ систем управления [12, 58]. Наиболее эффективно применение ПК при синтезе корректирующих устройств САУ методом доминирующих полюсов. Этот метод наряду с методом компенсации можно рассматривать как разновидность МКГ.

Понятие доминирующих (преобладающих) полюсов составляет основу метода доминирующих полюсов. Считают, что динамические свойства САУ определяет пара комплексно-сопряженных полюсов основной ПФ системы $s_{1, 2} = -\alpha \pm j\beta$, называемых доминирующими. Другими словами, в качестве ММ синтезируемой САУ принимают К-звено с ПФ вида (2.19), т.е. принимают равенство и подобие свойств замкнутой САУ и К-звена.

На первом этапе синтеза решают задачу определения доминирующих полюсов по заданным показателям качества синтезируемой САУ.

Затем наносят на комплексную плоскость вычисленные таким образом доминирующие полюсы $s_{1, 2}$. Там же указывают полюсы p_n и нули z_m неизменяемой части САУ, которые определяют по ПФ этой части $W_n(s)$. Под ПФ неизменяемой части системы $W_n(s)$ понимают ПФ разомкнутой нескорректированной САУ.

Второй этап синтеза заключается в отыскании дополнительных полюсов и нулей, принадлежащих корректирующему устройству (КУ). Их размещают на комплексной плоскости так, чтобы КГ скорректированной САУ проходил около доминирующих полюсов $s_{1, 2}$. Рекомендуется скомпенсировать нулями ближайшие к мнимой оси полюсы неизменной части САУ для того, чтобы влияние доминирующих полюсов s_1 и s_2 на динамику системы было действительно определяющим.

Наконец, в случае необходимости увеличения коэффициента передачи системы K до заданного значения, вводят диполь. Диполем называют близко расположенные друг к другу дополнительные полюс и ноль. Введение диполя позволяет увеличить коэффициент передачи без заметного изменения показателей качества САУ.

По окончании коррекции составляют ПФ корректирующего устройства $W_{\text{ку}}(s)$, основываясь на введенных полюсах и нулях.

Оценку качества скорректированной САУ проводят, как обычно, по переходной характеристике системы.

Примером [51] САУ, требующей коррекции своих динамических свойств, служит система, структурная схема которой изображена на рисунке 3.26. Переходная характеристика САУ $h_n(t)$ показана на рисунке 3.27. Очевидно, что требования к процессу регулирования не выполнены. Необходимо синтезировать последовательное КУ, обеспечивающее выполнение указанных требований при $K \geq 10$.

Приняв первоначально $\tau_p = 0,5$ и $\sigma = 0,2$, согласно (3.21) рассчитывают доминирующие полюсы

Найденные доминирующие полюсы $s_{1,2}$ лежат вдали от КГ некомпенсированной САУ (НСК на рисунке 3.28). Неизменяемая часть САУ обладает полюсами $p_1 = 0$, $p_2 = -10$ и $p_3 = -20$. Ближайший из них к мнимой оси полюс $p_2 = -10$ необходимо скомпенсировать нулем КУ $z_{\text{ку}} = 10$. В свою очередь полюс КУ $p_{\text{ку}}$ располагают вблизи от третьего полюса неизменяемой части системы $p_3 = -20$. Наилучшим положением $p_{\text{ку}}$ считают такое, при котором КГ скорректированной САУ проходит через доминирующие полюсы $s_{1,2}$ или в непосредственной близости от них (рисунок 3.28). Для исследуемой САУ целесообразно принять полюс КУ $p_{\text{ку}} = -24$. Наконец, коэффициент передачи $K_{\text{ку}} = 2,4$ обеспечивает совместно с $z_{\text{ку}} = -10$ и $p_{\text{ку}} = -24$ заданные показатели качества скомпенсированной САУ $\tau_p = 0,65$ и $\sigma = 25\%$.

Синтезированное КУ относят к инерционным устройствам ПД-типа, описываемым ПФ общего вида

В рассматриваемом примере так как ; $K_p = K_{\text{дзку}} = 1,0$; $T = 1/p_{\text{ку}} = 0,042$.

Различают опережающую ($|p_{\text{ку}}| > |z_{\text{ку}}|$) и запаздывающую ($|p_{\text{ку}}| < |z_{\text{ку}}|$) коррекции. Следовательно, синтезировано ПД-устройство опережающего или форсирующего типа. Положительное ПД-воздействие (см. знак "+" в числителе ПФ) форсирует, т.е. ускоряет, процесс регулирования. Форсирующее действие КУ обусловлено начальным "всплеском" переходной характеристики $h(t)$ ПД-звена (см. таблицу 2.2). Поэтому включение КУ названного типа в САУ повышает быстродействие последних (см. рисунок 3.27).

Наряду с последовательными КУ ПД-типа широко применяют корректирующие ПИ- и

ПИД-звенья. ПИ-звенья включают в контур регулирования в тех случаях, когда основные показатели качества САУ – длительность процесса регулирования t_p и перерегулирование σ – удовлетворяют заданным требованиям, но коэффициент усиления мал. Его необходимо увеличить для уменьшения статической ошибки регулирования ε_{st} , см. равенство (2.42). При этом требуется сохранить неизменными показатели качества САУ t_p и σ .

ПИД-звенья применяют в тех случаях, когда необходимо одновременно увеличить коэффициент усиления, повысить быстродействие САУ и уменьшить динамическое отклонение выходной величины утах.

Выбор параметров названных КУ осуществляют МКГ аналогично синтезу ПД-звена в рассмотренном примере.

Метод расширенных частотных характеристик

Методом расширенных частотных характеристик (РЧХ) при синтезе САУ удовлетворяют требование к степени затухания Ψ переходного процесса системы. Считают, что оптимальная степень затухания заключена в пределах $\Psi = 0,75 \div 0,90$. Более интенсивное затухание при $\Psi > 0,90$ неприемлемо, поскольку сопровождается значительным перерегулированием. Слабое затухание при $\Psi < 0,75$ затягивает переходный процесс. Опыт эксплуатации САУ свидетельствует о том, что $\Psi = 0,75$ удовлетворяет многим требованиям техники автоматического регулирования. Однако степень затухания Ψ не является однозначным показателем качества регулирования, так как одно и то же значение Ψ может быть достигнуто различным сочетанием параметров АР. При этом быстродействие САУ также будет различным. Поэтому при параметризации АР стремятся обеспечить кроме заданной степени затухания Ψ минимальное время регулирования t_p или минимум интегральной оценки J_{20} .

При синтезе САУ необходимо ее структурную схему привести к типовому виду (рисунок 2.14). Предполагается, что ПФ объекта регулирования $W_O(s)$ известна, включая коэффициент передачи и постоянные времени. Выбран также закон регулирования, т.е. определена в общем виде (3.8) – (3.12) ПФ регулятора $W_A(s)$. Таким образом, искомыми являются параметры АР.

Рассматриваемый метод базируется на понятии расширенных амплитудно-фазовых частотных характеристик объекта и регулятора. Их получают из ПФ $W_O(s)$ и $W_A(s)$ заменой оператора Лапласа s оператором $(j - m)\omega$, где m – степень колебательности, см. формулу (2.131). Связь между степенью затухания Ψ и степенью колебательности m вытекает из (2.125) и (2.130)

В основу метода положено условие нахождения замкнутой САУ на границе устойчивости ($m = 0$):

Записав расширенные АФЧХ и в показательном виде (2.52), последнее соотношение представляют в виде двух равенств. Полученные уравнения решают относительно искомых настроечных параметров АР.

Эти уравнения описывают границу области заданной степени затухания Ψ в параметрической форме (ω – параметр), которую называют линией равной степени затухания $KI = f(KP)$. Ее используют для отыскания параметров АР KI , KP и KD . Линию строят в плоскости параметров регулятора (рисунок 3.30) с помощью названных уравнений, предварительно задавшись диапазоном частот ω и степенью затухания $\Psi_{зад}$. Линия равной степени затухания, изображенная на рисунке 3.30, имеет типичный вид. Точка экстремума кривой $KI = f(KP)$ определяет искомые настроечные параметры АР.

Сущность рассматриваемого метода раскрывается на примере синтеза астатической САУ, структурная схема которой изображена на рисунке 3.20. В данном случае необходимо определить параметры настройки ПИ-регулятора KP и KI , которые обеспечат процесс регулирования со степенью затухания $\Psi = 0,75$. ПФ объекта регулирования

Первоначально получают расширенную АФЧХ объекта регулирования

Во-вторых, записывают инверсную (обратную) расширенную АФЧХ объекта регулирования

В-третьих, записывают инверсную (обратную) расширенную АФЧХ объекта регулирования в алгебраическом виде, где $R(m, \omega)$ – инверсная расширенная вещественная ЧХ объекта регулирования; $J(m, \omega)$ – инверсная расширенная мнимая ЧХ объекта регулирования

В-четвертых, задаваясь различными значениями частоты ω , на плоскости параметров настройки АР строят линию равной степени затухания $\Psi = 0,75$ по параметрическим уравнениям /44/:

Очевидно, что линия равной степени затухания $\Psi = \text{const}$ представляет собой годограф (рисунок 3.30).

В-пятых, определяют искомые параметры ПИ-регулятора как координаты точки экстремума линии равной степени затухания $KP = 5,5$ и $KI = 0,32$. Считают, что оптимальные значения параметров настройки ПИ-регулятора находятся несколько правее точки экстремума.

В-шестых, получают переходную характеристику САУ $h(t)$, по которой непосредственно рассчитывают степень затухания Ψ и сравнивают с заданной $\Psi_{зад} =$

0,75. На рисунке 3.31 показана переходная характеристика $h(t)$, рассчитанная при параметрах настройки АР $K_P = 5,5$ и $K_I = 0,32$. Степень затухания в данном случае равна заданной $\Psi_{\text{зад}} = 0,75$; действительно

При таком результате параметризацию ПИ-регулятора считают законченной.

Последовательность параметризации П-регулятора статической САР (рисунок 3.19) ничем не отличается от только что рассмотренной процедуры. Более того, для определения единственного параметра настройки П-регулятора необходим тот же годограф (рисунок 3.30). Коэффициент передачи регулятора K_P определяется координатами точки пересечения годографа и оси абсцисс. В рассматриваемом примере $K_P = 10,7$. При этом $K_I = 0$.

Последовательность параметризации ПИД-регулятора с тремя настроечными параметрами K_I , K_P и K_D отличается от рассмотренной операциями по определению коэффициента K_D . В этом случае линию равной степени затухания $\Psi = \text{const}$ описывают следующими параметрическими уравнениями [44]:

Поскольку двух уравнений для определения трех неизвестных параметров регулятора недостаточно, строят несколько графических зависимостей $K_I = f(K_P)$ для различных значений K_D , начиная с $K_D = 0$. В каждом случае параметры K_P и K_I определяют так, как при параметризации ПИ-регулятора. Затем полученные сочетания параметров K_I , K_P и K_D анализируют и выбирают наилучший вариант, сравнивая переходные характеристики по минимуму времени регулирования или минимуму интегральной оценки J_{20} .

Рассматриваемый метод предстает как графоаналитический в случае построения линии равной степени затухания, экстремум которой служит для определения параметров настройки АР. Названные параметры можно рассчитать чисто аналитически без каких-либо графических построений. Особенность расчета заключается в исследовании на экстремум функции, заданной параметрически.

В приведенном примере параметризации ПИ-регулятора инверсная расширенная АФЧХ имеет вид

Линия равной степени затухания описывается параметрическими уравнениями

Дифференцируя каждое из этих уравнений по частоте ω , получают следующие выражения

В свою очередь, первая производная функции $K_I = f(K_P)$

Для нахождения экстремума этой функции приравнивают ее первую производную к нулю и рассчитывают значение частоты, при котором он достигается, найденное значение частоты в параметрические уравнения, рассчитывают параметры настройки ПИ-

регулятора:

Таким образом, аналитический и графоаналитический способы параметризации приводят к одинаковым результатам. Оба способа реализации метода РЧХ легко автоматизируются с помощью ПК.

1.9 Лекция №9 (2 часа)

Тема: «Линейные дискретные модели СУ: основные понятия об импульсных СУ, классификация дискретных СУ; анализ и синтез дискретных СУ».

1.9.1 Вопросы лекции

1. Основные понятия об импульсных СУ, классификация дискретных СУ.
2. Анализ и синтез дискретных СУ.

1.9.2. Краткое содержание вопросов

1. Основные понятия об импульсных СУ, классификация дискретных СУ.

Основные определения
устойчивости непрерывных систем
справедливы и для дискретных систем с
учетом некоторых особенностей.

Необходимым и достаточным
условием устойчивости непрерывной
линейной системы является
расположение в левой полуплоскости
всех корней ее характеристического
уравнения. Сопоставим, как выглядят
уравнения для непрерывных и для
дискретных систем.

Для непрерывных систем передаточные
функции представляют отношение дробно –
рациональных функций и имеют вид

$$K(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (1)$$

Характеристическое уравнение
 $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0$ представляет собой
степенное уравнение, при этом число корней
уравнения равно степени полинома - n .

Например, для передаточной функции

$$K(p) = \frac{1}{p + \alpha} \quad p_1 = -\alpha.$$

Для дискретных систем передаточные функции имеют вид

$$K(p) = \frac{b_0 e^{mpT} + b_1 e^{(m-1)pT} + \dots + b_m}{a_0 e^{npT} + a_1 e^{(n-1)pT} + \dots + a_n}. \quad (2)$$

Характеристическое уравнение $a_0 e^{npT} + a_1 e^{(n-1)pT} + \dots + a_n = 0$ представляет собой трансцендентное уравнение, при этом число корней уравнения бесконечно, так как они имеют периодический характер.

Например, для передаточной функции

$$K(p) = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}} \quad (3)$$

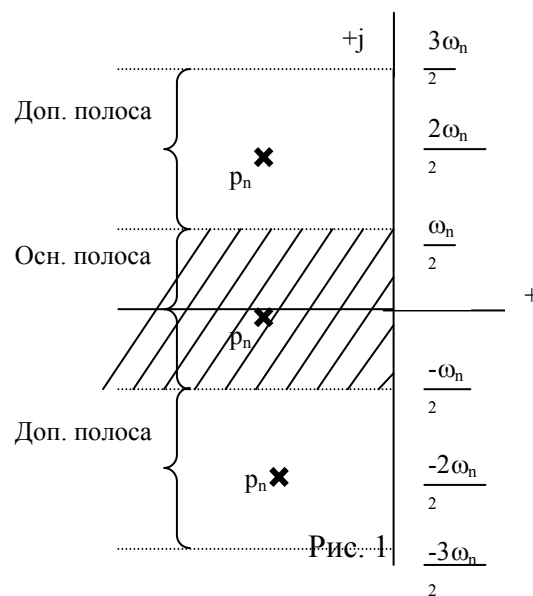
корни определяются из соотношений

$$e^{pT} = e^{-\alpha T} e^{j2\pi n}, \quad p_n = -\alpha + j \frac{2\pi}{T} n = -\alpha \pm j \omega_n n \quad (\text{где } -\infty \leq n \leq \infty).$$

Каждому из n корней в плоскости P , соответствует бесконечное множество периодических корней в плоскости P^* , отстоящих друг от друга на расстоянии частоты квантования и расположенных по группам в каждой полосе. Для анализа свойств системы достаточно анализировать расположение корней в одной, так называемой основной полосе, в качестве которой обычно считают полосу частот $(-\omega_n / 2) \leq \omega \leq (\omega_n / 2)$.

Расположение корней этого уравнения в комплексной плоскости приведено на рис.

1.



Дискретная система автоматического управления устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости в пределах основной полосы.

Пример 1. Определить устойчивость дискретной системы с передаточной функцией

$$K_z^*(p) = \frac{4}{(e^{pT} - e^{-3T})(e^{pT} - e^{-4T})}.$$

Решение: Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$(e^{pT} - e^{-3T})(e^{pT} - e^{-4T}) = 0.$$

Определим корни характеристического уравнения

$$e^{pT} = e^{-3T}; e^{pT} = e^{-4T}; p_1 = -3 \pm j\omega_n n; p_2 = -4 \pm j\omega_n n.$$

Система устойчива, так как все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости в пределах основной полосы.

Пример 2. Определить устойчивость дискретной системы с передаточной функцией

$$K_z^*(p) = \frac{4}{(e^{pT} - e^{-6T})(e^{pT} - 1)}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(e^{pT} - e^{-6T})(e^{pT} - 1) = 0.$$

Определим корни характеристического уравнения заданной системы

$$e^{pT} = e^{-6T}; e^{pT} = 1; p_1 = -6 \pm j\omega_n n; p_2 = 0 \pm j\omega_n n.$$

Система на границе устойчивости, так как один корень расположен на мнимой оси, а второй устойчивый.

3.2. Анализ и синтез дискретных СУ.

Использование z -преобразования позволяет преобразовать трансцендентный полином в степенной, что позволяет упростить процесс исследования дискретных систем управления.

Применение z -преобразования (рис. 2.3) отображает основную полосу на плоскость Z , отрезок мнимой оси $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ в окружность единичного радиуса, а левую часть полосы в круг единичного радиуса.

Следовательно, дискретная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости в пределах основной полосы (т. е. условие устойчивости $|Z_K| < 1$).

Пример 3. Определить устойчивость дискретной системы с передаточной функцией

$$K_3^*(z) = \frac{3}{(z + 3 - j4)(z + 3 + j4)}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(z + 3 - j4)(z + 3 + j4) = 0.$$

Определим корни характеристического уравнения

$$z_1 = -3 + j4; \quad z_2 = -3 - j4.$$

Определим модуль корней

$$|z_1| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Система не устойчива, так как модуль корней ее характеристического уравнения больше единицы.

Пример 4. Определить устойчивость дискретной системы, структурная схема которой представлена на рис. 2.

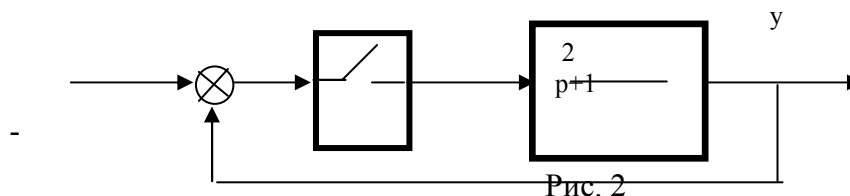


Рис. 2

Решение: Передаточная функция разомкнутой дискретной системы

$$K_p^*(p) = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{2(s+1)}{(s+1)(1 - e^{sT} e^{-pT})} \right] = \frac{2e^{pT}}{e^{pT} - e^{-T}}.$$

Передаточная функция разомкнутой дискретной системы в форме z -преобразования

$$K_p(z) = \frac{2z}{z - d}, \text{ где } d = e^{-T}.$$

Передаточная функция замкнутой дискретной системы в форме z -преобразования

$$K_3(z) = \frac{2z}{3z - d}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $3z - d = 0$.

Определим корни характеристического уравнения

$$z_1 = \frac{d}{3} < 1.$$

При этом модуль корня $|z_1| < 1$ при любых допустимых T , следовательно, система устойчива.

1.10 Лекция №10 (2 часа)

Тема: «Нелинейные модели СУ; анализ равновесных режимов; методы линеаризации нелинейных моделей; анализ поведения СУ на фазовой плоскости».

1.10.1 Вопросы лекции

11. Нелинейные модели СУ.

12. анализ равновесных режимов; методы линеаризации нелинейных моделей; анализ поведения СУ на фазовой плоскости

1.10.2. Краткое содержание вопросов

1. Нелинейные модели СУ.

К нелинейным относят системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

Система является нелинейной вследствие наличия в ее составе звеньев, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, или имеющих нелинейную статическую характеристику (например, дискриминационную).

Нелинейный режим работы имеет место в системе при выходе ошибки слежения за пределы линейного участка (переходной режим, срыв слежения, большой уровень помех и т.д.).

Методы анализа нелинейных систем:

Метод кусочно-линейной аппроксимации. Нелинейная характеристика разбивается на ряд линейных участков, в пределах каждого из которых система описывается линейным дифференциальным уравнением. Далее на каждом из этих участков система исследуется линейными методами; находятся решения, описывающие работу системы, которые затем "сшиваются". Метод удобен при небольшом числе участков разбиения. Недостаток метода в громоздкости вычислений при увеличении количества участков.

Метод гармонической линеаризации. Нелинейный элемент (НЭ) заменяется его линейным эквивалентом. Критерий эквивалентности состоит в равенстве первой

гармоники напряжения на выходе НЭ и его линейного эквивалента по амплитуде и фазе при подаче на входы НЭ и его эквивалента гармонического сигнала. Метод эффективен, когда все высшие гармоники подавляются последующими цепями.

Метод фазовой плоскости. Применяется для исследования нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков. Состоит в построении и исследовании фазового портрета системы в координатах исследуемой величины и ее производной.

Используется для анализа переходных режимов работы, оценки устойчивости системы, возможности возникновения периодических колебаний.

Моделирование на аналоговых и цифровых вычислительных машинах. Не имеет ограничений на количество и вид нелинейностей, порядок дифференциального уравнения, позволяет исследовать поведение системы при детерминированных и случайных воздействиях.

Отсутствие возможностей найти аналитические зависимости для исследуемых явлений является недостатком метода.

Метод статистической линеаризации. Состоит в замене НЭ его статистическим линейным эквивалентом. Используется для исследования нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями произвольного порядка. Метод является приближенным. Имеет место неоднозначность в решениях при использовании различных критериев эквивалентности замены.

Метод, основанный на использовании марковской теории случайных процессов позволяет исследовать системы, описываемые дифференциальными уравнениями первого и второго порядков, работающие в условиях действия случайных возмущений, и получить аналитические выражения для этих систем, что является его достоинством.

На практике используют комбинацию различных методов.

Анализ нелинейного режима работы системы ЧАП

Для определения некоторых характеристик системы, произведем качественный анализ системы ЧАП (рис.1)

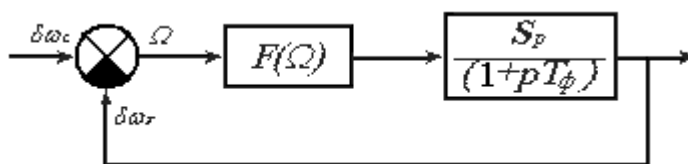


Рис.1 Структурная схема нелинейной системы.

Исходные данные:

S_p — крутизна регулировочной характеристики генератора;

$F(\Omega)$ — дискриминационная характеристика;

$\delta\omega_z = 0$ — нестабильность частоты генератора;

$\xi(t, \Omega) = 0$ — флюктуационная составляющая;

$\delta\omega_c = const$ — отклонение от частоты от номинального значения. .

T_ϕ — постоянная времени фильтра.

Составим ДУ описывающее поведение системы:

$$\Omega = \delta\omega_c - \delta\omega_z \quad (1)$$

$$\delta\omega_z = F(\Omega) \frac{S_p}{1 + pT_\phi} ; \quad (2)$$

Подставив (8.2) в (8.1), получим

$$\Omega = \delta\omega_c - F(\Omega) S_p \frac{1}{1 + pT_\phi} ;$$

$$T_\phi \frac{d\Omega}{dt} + \Omega + S_p F(\Omega) = \delta\omega_c \quad . \quad (3)$$

В установившемся режиме $\Omega = const$; $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, следовательно,

$$F(\Omega) = \frac{\delta\omega_c - \Omega}{S_p} \quad . \quad (4);$$

Решение уравнения (4) может быть найдено графическим способом (рис.2).

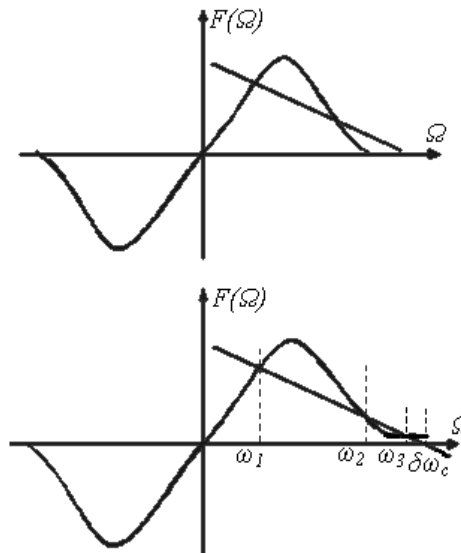


Рис. 2

$\frac{\delta\omega_c - \Omega}{S_p}$ - прямая проходящая через точку $\delta\omega_C = \Omega$, с наклоном $\frac{-1}{S_p}$.

Абсциссы точек $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и есть решение этого ДУ.

Исследуем на устойчивость в "малом" систему в точках $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

С этой целью линеаризируем дискриминационную характеристику в окрестности точек равновесия системы и представим ее зависимостью

$$F(\Omega) = F(\Omega_i) + S_{\partial i}(\Omega - \Omega_i); \quad (5)$$

где $S_{\partial i}$ - крутизна дискриминационной характеристики;

$$S_{\partial i} = \left. \frac{dF(\Omega)}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_i} \quad i=1,2,3$$

Подставим (5) в (3) и введем новую переменную $x = \Omega - \Omega_i$; в результате получим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$T_\phi \frac{dx}{dt} + (1 + S_p S_{\partial i})x = 0 \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает поведение системы в окрестности точек равновесия системы. Определим исходя из алгебраического критерия условия устойчивости системы:

$$T_\phi > 0, \quad (1 + S_p S_{\partial i}) > 0$$

В точке, соответствующей решению Ω_1 , $S_{\partial} > 0$, следовательно,

$$S_{\partial} > -\frac{1}{S_p}$$

Таким образом Ω_1 соответствует устойчивому состоянию равновесия.

В точке, соответствующей Ω_3 , $S_{\partial} < 0$, но $|S_{\partial}| < \frac{1}{S_p}$, поэтому Ω_3 соответствует устойчивому состоянию равновесия.

В точке, соответствующей Ω_2 , $S_\partial < 0$ и $|S_\partial| > \frac{1}{S_p}$, здесь условие устойчивости не выполняется.

Если задать ряд значений начальной частотной расстройки, можно получить ряд решений, определяющих ошибку Ω , и построить зависимость установившегося значения ошибки от величины начальной расстройки по частоте (рис.3).

Для разомкнутой системы эта зависимость линейна.

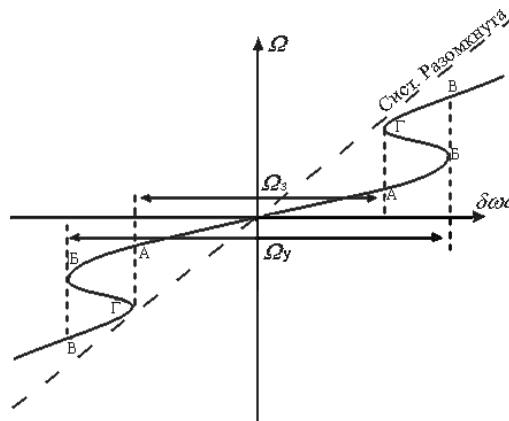


Рис.3 Зависимость частотной ошибки от первоначальной частотной расстройки.

Для замкнутой системы при увеличении $\delta\omega_c$ увеличивается и Ω , и в точке Б система скачком переходит в точку В: происходит срыв слежения. При дальнейшем увеличении $\delta\omega_c$ система будет вести себя как и разомкнутая. При уменьшении $\delta\omega_c$ система войдет в режим синхронизма в точке Г, ошибка скачком уменьшится, при этом $\delta\omega_c$ будет меньше, чем при срыве слежения.

Диапазон первоначальных расстроек частот входного сигнала и генератора, в пределах которого сохраняется режим слежения называют полосой удержания. Диапазон первоначальных расстроек, в пределах которого система выведенная из синхронизма способна войти в режим синхронизма называют полосой захвата Ω_3 .

Участок В– Г соответствует решению типа 3 (устойчивому состоянию).

Участок Б – Г соответствует решению типа 2 (неустойчивому состоянию).

Участок Б – Б соответствует решению типа 1(устойчивому состоянию).

Аналогичную зависимость можно получить для системы ФАПЧ (рис.4),

Где $\delta\omega = \omega_c - \omega_e$ - расстройка между частотой входного сигнала и частотой собственных колебаний опорного генератора;

Ω - ошибка слежения по частоте.

Не для всех систем $\Omega_y > \Omega_3$. Это определяется типом фильтра и дискриминатора. Для цифровых следящих систем $\Omega_y = \Omega_3$ и называется полосой синхронизации.

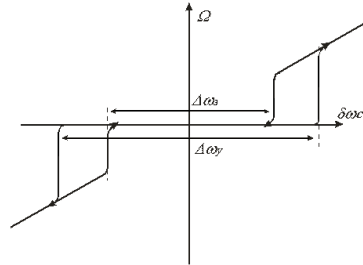


Рис.4 Зависимость частотной ошибки от первоначальной частотной расстройки.

2. анализ равновесных режимов; методы линеаризации нелинейных моделей; анализ поведения СУ на фазовой плоскости.

Предположим, что поведение следящей системы описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (7)$$

Обозначим

$$x = x_1;$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \varphi(x_1, x_2). \quad (8)$$

Состояние системы, описываемой уравнениями (8), определяется в каждый момент времени величинами x_1 и x_2 т.е. величиной координаты $x = x_1$ и скоростью ее изменения. Это состояние системы можно отобразить точкой на плоскости с координатами (x_1, x_2) , называемой фазовой плоскостью. При изменении состояния системы изображающая точка перемещается на фазовой плоскости по кривым, которые называют фазовыми траекториями. Совокупность фазовых траекторий для различных начальных условий называют фазовым портретом.

Чтобы получить уравнение фазовых траекторий, исключим из (2) время, поделив для этого второе из них на первое:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_2} \quad (9)$$

Его решение $x_2 = \phi(x_1)$. Каждой комбинации начальных условий x_{1i}, x_{2i} соответствует свое решение уравнения (3) и своя фазовая траектория.

В качестве примера рассмотрим затухающий колебательный процесс, показанный на рис.5.

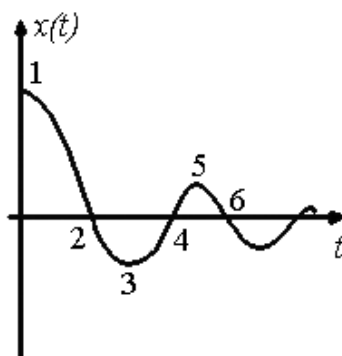


Рис.5 Затухающий колебательный процесс.

Цифрами отметим характерные точки кривой и сопоставим их с фазовой траекторией. В точке 1 $x^1(0) > 0$, $x^2(0) = 0$, поэтому фазовая траектория начинается на положительной полуоси абсцисс (Рис.6). В точке 2 $x^1 = 0$, $x^2 < 0$, поэтому эта точка расположена на отрицательной полуоси абсцисс. В точке 3 $x^1 < 0$, $x^2(0) = 0$, и на фазовой плоскости она расположена на отрицательной части горизонтальной оси и т.д. В результате для затухающего колебательного процесса фазовая траектория имеет вид сходящейся спирали.

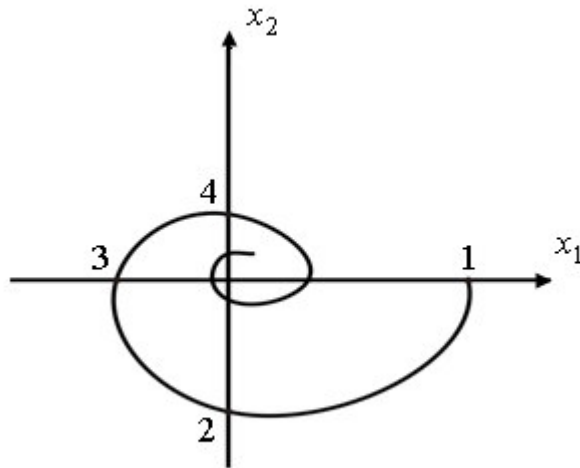


Рис.6 Фазовая траектория затухающего колебательного процесса.

Для затухающего монотонного процесса (рис.7а) фазовая траектория приведена на рис.7б.

Если в системе возникают периодические колебания, на фазовой плоскости они отображаются в виде замкнутой кривой, называемой предельным циклом. Предельный цикл является устойчивым, если при некоторых отклонениях от него фазовая траектория вновь стремится к предельному циклу. При расхождении фазовых траекторий предельный цикл называется неустойчивым.

Построение фазовых траекторий позволяет судить о свойствах нелинейных систем по переходному процессу.

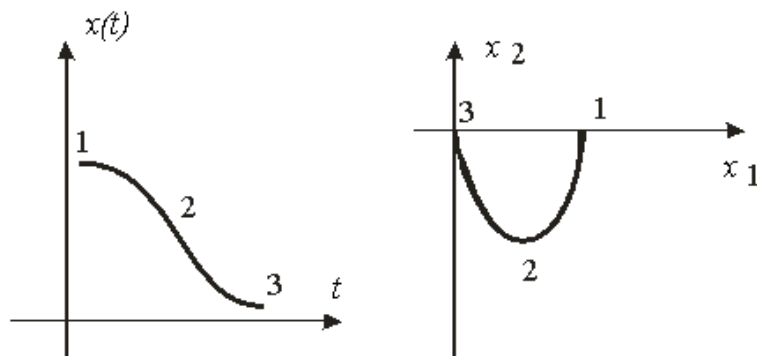


Рис.7 Аперiodический процесс и его фазовая траектория.

Построение фазового портрета системы обычно начинают с определения его характера вблизи точек равновесия системы, в которых производные $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Координаты точек равновесия x_{10}, x_{20} определяются, как следует из (8), равенствами

$x_{20} = 0$, $\varphi(x_{10}, 0) = 0$. Точки равновесия при построении фазового портрета системы называют особыми.

Поведение фазовых траекторий вблизи особых точек зависит от характера корней $s_{1,2}$ соответствующего характеристического уравнения

$$s^2 + 2\eta s + \omega_0^2 = 0,$$

где

$$2\eta = -\left(d\varphi/dx_2\right) \Big|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}, \quad \omega_0^2 = -\left(d\varphi/dx_1\right) \Big|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}},$$

$(x_1 - x_{10}) = \Delta x$ - отклонение от состояния равновесия.

Если $\eta > 0$ и $\omega_0^2 > \eta^2$, то процесс $\Delta x(t)$ является затухающим гармоническим колебанием

$$\Delta x(t) = A e^{-\eta t} \sin(\omega t + \psi_i), \quad (10)$$

где A и ψ_i - амплитуда и начальная фаза колебания; ω - его частота, равная

$$\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}.$$

Продифференцировав выражение (10) для $\Delta x(t)$ по времени, получим

$$\dot{x}_2(t) = A e^{-\eta t} [\omega \cos(\omega t + \psi_n) - \eta \sin(\omega t + \psi_n)]. \quad (11)$$

Фазовая траектория, построенная по приведённым выражениям для процессов $\Delta x(t)$ и $\dot{x}_2(t)$, имеет вид скручивающейся спирали (см. рис.8), получившей название – устойчивый фокус.

При $\eta > 0$ и $\omega^2 > \eta^2$ процесс $\Delta x(t)$ является гармоническим колебанием с нарастающей амплитудой. Особая точка соответствует при этом неустойчивому состоянию равновесия и называется неустойчивым фокусом (см. рис.9).

При выполнении условия $0 < \omega_0^2 < \eta^2$ корни $s_{1,2}$ действительные и имеют одинаковый знак. Если они отрицательны, то особая точка является устойчивым узлом

(см. рис.10). Положительным корням $s_{1,2}$ соответствует особая точка типа

неустойчивого узла (см. рис.11). При $\omega_0^2 < 0$ корни $s_{1,2}$ действительные и имеют разные знаки. Особая точка называется седлом (см. рис.12).

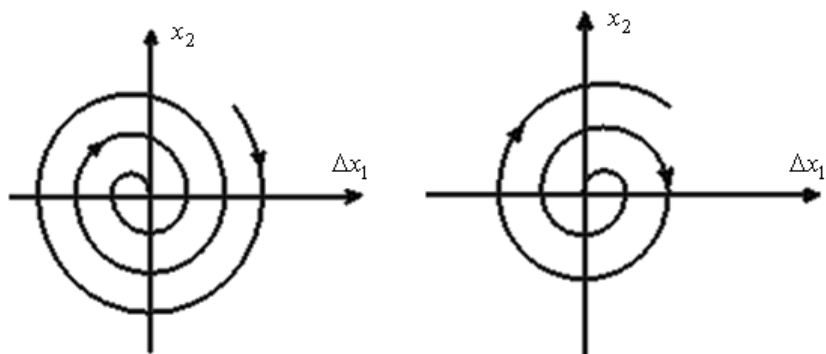


Рис.8 Устойчивый фокус.

Рис.9 Неустойчивый фокус.

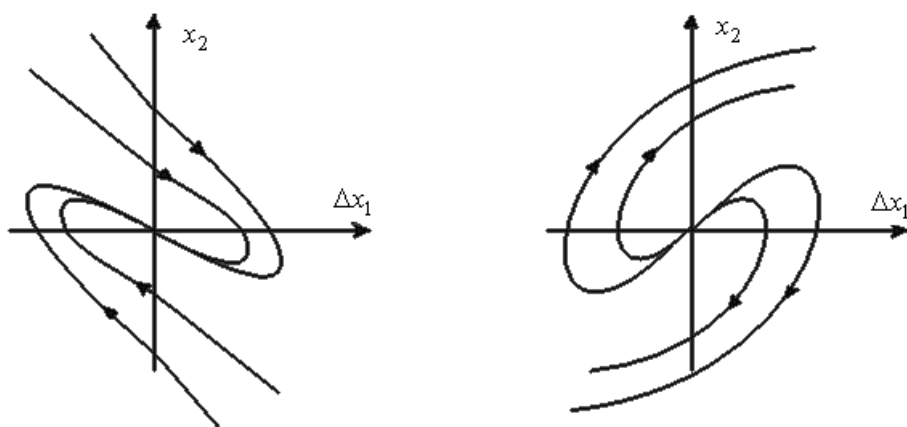


Рис.10 Устойчивый узел.

Рис.11 Неустойчивый фокус

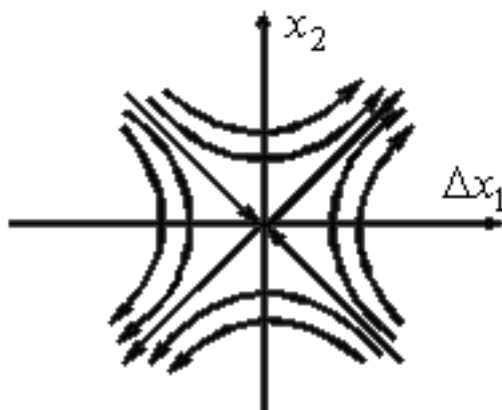


Рис.12 Особая точка типа седла.

Для построения фазового портрета необходимо определить изоклины. Изоклиной называют геометрическое место точек в котором касательные к фазовым траекториям имеют постоянный наклон.

Уравнение изоклины:

$$\frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_2} = k = \frac{dx_2}{dx_1}.$$

Для горизонтальных касательных уравнение изоклины:

$$\varphi(x_1, x_2) = 0;$$

для вертикальных:

$$\varphi(x_1, x_2) = \infty.$$

Ось абсцисс является изоклиной вертикальных касательных. Для особых точек типа узла и седла существуют изоклины, совпадающие с фазовыми траекториями: (C_1, C_2, C_3, C_4). Они называются сепаратриссами.

Рассмотрим пример.

Определим условия вхождения в синхронизм системы, представленной структурной схемой (рис.13), если задающее воздействие изменяется по линейному закону $\lambda(t) = at$ и в момент включения системы при $t = 0$ начальная ошибка имеет конечное значение $x(0) = x^0$.

Рис.14. Дискриминационная характеристика (а) и фазовый портрет (б)

Обозначим ошибку слежения.

$$x(t) = x^1 = \lambda(t) - y(t).$$

Тогда производная этой функции:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{dy}{dt} = a - \frac{dy}{dt}.$$

Так как в качестве фильтра системы используется интегрирующее звено, то

$$y(t) = kF(x^1) / p.$$

В результате уравнение ошибки примет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = a - kF(x^1).$$

Обозначим

$$\frac{dx_1}{dt} = x^2$$

и, пользуясь уравнением

$$x^2 = a - kF(x^1),$$

построим фазовый портрет системы в координатах (x^1, x^2) для различных значений скорости изменения задающего воздействия a .

При различных значениях a кривая $x^2 = f(x^1)$ перемещается параллельно - но самой

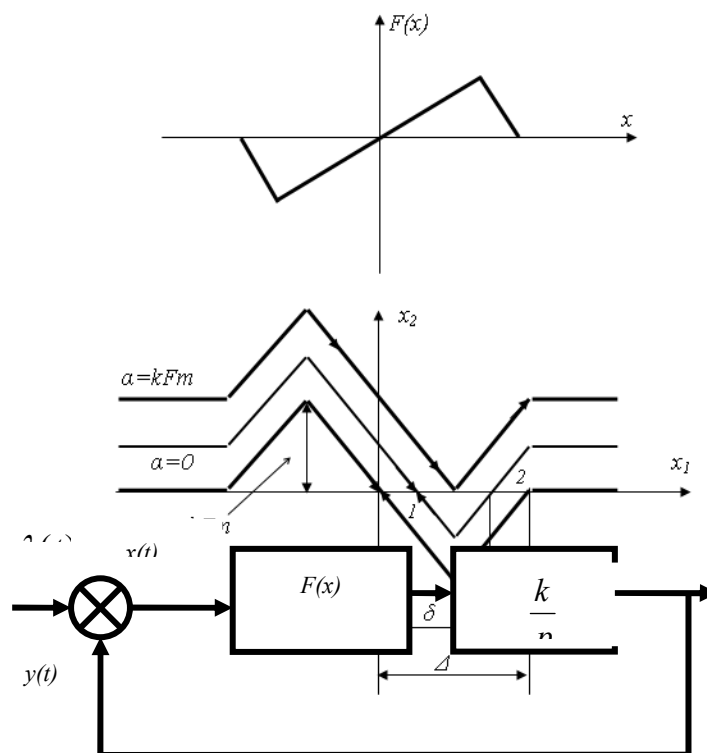


Рис. 13. Модель нелинейной системы.

себе. На рис.14 изображено семейство кривых для положительной скорости a . Обозначим максимальное значение функции $F(x) = F^m$. Направление движения изображающей точки обозначим в соответствии с правилами: в верхней полуплоскости слева направо; в нижней – справа налево. Проанализируем фазовый портрет.

При $a=0$ ошибка слежения $x^1 \rightarrow 0$ при начальных значениях $|x^1(0)| < \Delta$, что следует из направления движений на фазовой траектории. Если $0 < a \leq kF^m$, то x^1 стремится к устойчивой точке 1, если начальное рассогласование $x^1(0)$ меньше величины δ , соответствующей точке 2. Когда $x^1(0) > \delta$, захвата не происходит, так как x^1 неограниченно растёт. Если скорость $|a| > kF^m$, то захвата не будет ни при каких начальных условиях, поскольку нет устойчивых точек на фазовой траектории. Таким образом, условия захвата сигнала, изменяющегося с постоянной скоростью a , состоят в выполнении неравенства $kF^m > a$. При этом область захвата $x(0) < \delta$. Величина δ находится из уравнения $a - kF(\delta) = 0$. Первый корень этого уравнения соответствует точке 1 устойчивого равновесия, а второй корень, соответствующий точке 2, является искомой величиной δ .

1.11. Лекция 11 (2 часа)

Тема: «Устойчивость положений равновесия: первый и второй методы Ляпунова, частотный метод исследования абсолютной устойчивости».

1.11.1 Вопросы лекции

1. Устойчивость положений равновесия: первый и второй методы Ляпунова.
2. Частотный метод исследования абсолютной устойчивости.

1.11.2. Краткое содержание вопросов

1. Устойчивость положений равновесия: первый и второй методы Ляпунова.

Устойчивость – свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после всякого выхода из него в результате какого-либо воздействия. Это свойство затухания переходного процесса с течением времени.

Для тех объектов, которые работают в условиях непрерывно меняющихся воздействий, т.е. когда установившийся режим вообще отсутствует, дается общее определение устойчивости:

Система устойчива, если её выходная величина остаётся ограниченной в условиях действия на систему ограниченных по величине возмущений.

$Y_{св} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если все корни характеристического уравнения λ обладают отрицательной вещественной частью.

Если хотя бы один вещественный корень λ_i будет положительным или хотя бы одна пара комплексно-сопряженных корней будет иметь положительную вещественную часть, то в этом случае процесс будет расходящийся.

Если в характеристическом уравнении системы имеется хотя бы один нулевой корень или хотя бы одна пара чисто мнимых корней $\lambda_{i,i+1} = \pm j\beta$, то система будет находиться на границе устойчивости.



Метод Ляпунова. Он дал первое определение устойчивости:

В качестве возмущения Ляпунов рассматривал любое отклонение от установившегося режима, т.е. он рассматривал устойчивость как свойство свободного движения.

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Пусть $y^*(t)$ — обозначает некоторый установившийся режим, а действительное текущее знач. $y - y(t)$. $y(t)$ — соответствует возмущенному движению.

Отклонение возможного движения от невозможного обозначим через $x_i(t)$

$$x_i(t) = y_i(t) - y_i^*(t)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)^* \text{ - диж уравнение в форме Коши в отклонениях.}$$

Невозможное движение $x^* = 0$, x_i можно принять за координаты состояния системы.

Если мы смогли бы найти все решения этого уравнения, то мы могли бы найти все возможные воздействия.

В общем случае конкретное выражение зависит от y^* , т.е. при рассмотрении устойчивости необходимо указать об устойчивости какого режима идет речь.

Геометрическая трактование устойчивости Ляпунова.

Невозмущенное движение $x^* = 0$ называется устойчивым если задав трубку сколь угодно малого n -мерного сечения E можно подобрать в начальный мом. вр. t_0 такую область начальных условий зависящая от E , что в дальнейшем увеличение t возмущенное движение $x(t)$ не выйдет из заданной трубки E .

Аналитический критерий устойчивости Ляпунова.

Невозможное движение $x^* = 0$ называется установившим, если при заданном $E > 0$ сколь угодно мало оно не было существует такое $\square > 0$ зав-ее от E , что при начальных условиях если $x_i(t_0) < \square$, то при дальнейшем движении $|x_i(t)| < \square E$.

Если данное условие не выполняется хотя бы для одного x_i , то система неустойчива. Если при выполнении данных условий $x_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ то невозмущенное движение – асимптотически устойчивое. Если $x(t) \rightarrow 0$ при любых начальных отклонениях, то система называется устойчивой в целом.

Ляпунов рассматривал в общем случае не линейную систему, а ее линеаризованный вариант. Он предположил теорему устойчивости, которая позволяет судить об устойчивости нелинейной системы по ее линеаризованному варианту. Если уравнение (*) разложить в ряд Тейлора:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ -Линейное уравнение 1-го приближения для него можно составить характерное уравнение.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Для нелинейных систем к которым применимо разложение (**) существует **3 теоремы Ляпунова** об исследовании устойчивости по 1-му приближению.

Т.1. Невозможное движение $x^*=0$ устойчиво не зависимо от вида малых нелинейностей \square_1 , если все корни характерного уравнения $D(\square)$ имеют отрицательные вещественные корни.

Т.2. Невозможное движение $x^*=0$ не устойчиво не зависимо от вида малых нелинейностей \square_1 , если хотя бы один корень характерного уравнения $D(\square)$ имеет положительную вещественную часть.

Т.3. В случае наличия в каких-либо корнях характерного уравнения нулевой вещественной части при всех остальных отрицательных ничего нельзя сказать об устойчивости невозможного движения $x^*=0$ по 1-му приближению, т.е. без специального исследования уравнения (**).

По Т.3. система находящаяся на границе устойчивости.

1.12 Лекция №12 (2 часа)

Тема: «Исследование периодических режимов методом гармонического баланса».

1.12.1 Вопросы лекции

1. Общие сведения метода гармонического баланса.
2. Частным случаем метода гармонического баланса.

1.12.2. Краткое содержание вопросов

1. Общие сведения метода гармонического баланса.

Применение аналитического выражения для аппроксимации характеристики нелинейного элемента позволяет наименее трудоемко провести расчет, когда закон изменения во времени одной из переменных, определяющих работу нелинейного элемента (ток или напряжение для резистора, потокосцепление или ток для катушки индуктивности, заряд или напряжение для конденсатора), задан или вытекает из предварительного анализа физических условий протекания процесса, что имело место при решении предыдущих задач данного раздела. Если такая определенность отсутствует, то задачу в общем случае можно решить только приближенно. Одним из таких методов, наиболее широко применимым на практике, является метод гармонического баланса.

Метод основан на разложении периодических функций в ряд Фурье. В общем случае искомые переменные в нелинейной электрической цепи несинусоидальны и содержат бесконечный спектр гармоник. Ожидаемое решение можно представить в виде суммы основной и нескольких высших гармоник, у которых неизвестными являются амплитуды и начальные фазы. Подставляя эту сумму в нелинейное дифференциальное уравнение, записанное для искомой величины, и приравнявая в полученном выражении коэффициенты перед гармониками (синусоидальными и косинусоидальными функциями) одинаковых частот в его левой и правой частях, приходим к системе из $2n$ алгебраических уравнений, где n -количество учтенных гармоник. Необходимо отметить, что точное решение требует учета бесконечного числа гармоник, что невозможно осуществить практически. В результате ограничения числа рассматриваемых гармоник точный баланс нарушается, и решение становится приближенным.

Методика расчета нелинейной цепи данным способом включает в себя в общем случае следующие основные этапы:

1. Записываются уравнения состояния цепи для мгновенных значений.
2. Выбирается выражение аналитической аппроксимации заданной нелинейности.
3. На основе предварительного анализа цепи и нелинейной характеристики задается выражение искомой величины в виде конечного ряда гармоник с неизвестными на этом этапе амплитудами A_i и начальными фазами φ_i .

4. Осуществляется подстановка функций, определенных в пунктах 2 и 3, в уравнения состояния с последующей реализацией необходимых тригонометрических преобразований для выделения синусных и косинусных составляющих гармоник.

5. Производится группировка членов в полученных уравнениях по отдельным гармоникам, и на основании приравнивания коэффициентов при однопорядковых

гармониках в их левых и правых частях (в отдельности для синусных и косинусных составляющих) записывается система нелинейных алгебраических (или трансцендентных) уравнений относительно искомых амплитуд A_i и начальных фаз φ_i функции разложения определяемой величины.

6. Осуществляется решение (в общем случае численными методами на ЭВМ) полученной системы уравнений относительно A_i и φ_i .

2. Частным случаем метода гармонического баланса.

Частным случаем метода гармонического баланса является **метод расчета по первым гармоникам несинусоидальных величин (метод гармонической линеаризации)**, когда высшими гармониками искомых переменных, а также входных воздействий пренебрегают. При анализе используется характеристика нелинейного элемента по первым гармоникам, для получения которой в аналитическое выражение нелинейной характеристики для мгновенных значений подставляется первая гармоника одной из двух переменных, определяющих эту характеристику, и находится нелинейная связь между амплитудами первых гармоник этих переменных. Этапы расчета соответствуют изложенным для метода гармонического баланса. При этом, в силу того, что конечная система нелинейных уравнений имеет второй порядок, в ряде случаев появляется возможность их аналитического решения. Кроме того, поскольку рассматриваются только первые гармоники несинусоидальных величин, при расчете можно использовать символический метод.

Пусть, например, в цепи, питаемой от источника синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin \omega t$ и состоящей из последовательно соединенных линейного резистора R и нелинейной катушки, вебер-амперная характеристика которой задана аппроксимацией вида $\psi(i) = ai + bi^3$, необходимо определить первую гармонику тока, задаваемую выражением $i(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$, где I_{1m} и φ_1 - неизвестные (искомые величины).

Для решения определяем аналитическое выражение характеристики $\psi(i)$ для первых гармоник:

$$\begin{aligned} \psi(i) &= aI_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + bI_{1m}^3 \sin^3(\omega t + \varphi_1) = \\ &= \left(aI_{1m} + \frac{3}{4}bI_{1m}^3 \right) \sin(\omega t + \varphi_1) - \frac{1}{4}bI_{1m}^3 \sin(3\omega t + 3\varphi_1), \end{aligned}$$

откуда

$$\psi_{Im}(I_{Im}) = aI_{Im} + \frac{3}{4}bI_{Im}^3 \quad (2)$$

После подстановки выражения тока и соотношения (2) в уравнение состояния цепи

$$u = Ri + \frac{d\psi}{dt}$$

получаем

$$U_m \sin \omega t = RI_{Im} \sin(\omega t + \varphi_1) + \left(aI_{Im} + \frac{3}{4}bI_{Im}^3 \right) \omega \cos(\omega t + \varphi_1)$$

или

$$U_m \sin \omega t = RI_{Im} (\cos \varphi_1 \sin \omega t + \sin \varphi_1 \cos \omega t) + \left(aI_{Im} + \frac{3}{4}bI_{Im}^3 \right) \times \\ \times \omega (\cos \varphi_1 \cos \omega t - \sin \varphi_1 \sin \omega t)$$

На основании последнего получаем систему уравнений

$$U_m = RI_{Im} \cos \varphi_1 - \left(aI_{Im} + \frac{3}{4}bI_{Im}^3 \right) \omega \sin \varphi_1;$$

$$0 = RI_{Im} \sin \varphi_1 + \left(aI_{Im} + \frac{3}{4}bI_{Im}^3 \right) \omega \cos \varphi_1,$$

из которых находим искомые параметры I_{Im} и φ_1 .

1.13 Лекция №13 (2 часа)

Тема: «Модели и характеристики случайных сигналов. Прохождение случайных сигналов через линейные звенья».

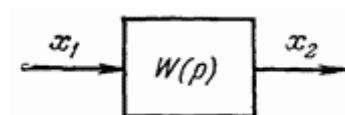
1.13.1 Вопросы лекции

1. Модели и характеристики случайных сигналов.
2. Прохождение случайных сигналов через линейные звенья

1.13.2. Краткое содержание вопросов

1. Модели и характеристики случайных сигналов.

Рассмотрим линейную систему (рис. 11.25) с передаточной функцией [1] и функцией веса [2]. Пусть на входе действует случайный сигнал [3] с корреляционной функцией [4]



Выходной сигнал [5] на основании формулы свертки (7.44)

$$x_2(t) = \int_0^t w(\tau) x_1(t-\tau) d\tau = \int_0^t w(t-\tau) x_1(\tau) d\tau.$$

Рассматривая в этой формуле математические ожидания, имеем

$$M[x_2(t)] = \tilde{x}_2(t) = \int_0^t w(t-\tau) \tilde{x}_1(\tau) d\tau.$$

Для получения корреляционной функции на выходе запишем исходную формулу для центрированных значений [6] для двух моментов времени:

$$\left. \begin{aligned} x_2^0(t) &= \int_0^t w(\eta) x_1^0(t-\eta) d\eta, \\ x_2^0(t_1) &= \int_0^{t_1} w(\lambda) x_1^0(t_1-\lambda) d\lambda. \end{aligned} \right\}$$

После перемножения получим

$$x_2^0(t) x_2^0(t_1) = \int_0^t \int_0^{t_1} w(\eta) w(\lambda) x_1^0(t-\eta) x_1^0(t_1-\lambda) d\eta d\lambda.$$

Далее, переходя к математическому ожиданию, можно найти корреляционную функцию

$$R_2^0(t, t_1) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^{t_1} w(\lambda) R_1^0(t-\eta, t_1-\lambda) d\lambda.$$

Для определения дисперсии на выходе [7] в формуле (11.98) следует положить [8].

Тогда

$$D_2(t) = R^0(t, t) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^t w(\lambda) R_1^0(t-\eta, t-\lambda) d\lambda.$$

В случае использования канонического разложения случайной функции

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) + \sum_v V_v x_v(t)$$

выходная величина может быть представлена в виде

$$x_2(t) = \tilde{x}_2(t) + \sum_v V_v y_v(t),$$

где [9] определяется формулой (11.95), а координатные функции

$$y_v(t) = \int_0^t w(t-\tau) x_v(\tau) d\tau.$$

Корреляционная функция выходного сигнала

$$R_2^0(t, t_1) = \sum_v D_v y_v(t) y_v(t_1),$$

а дисперсия

$$D_2(t) = \sum_v D_v [y_v(t)]^2.$$

Для нахождения математического ожидания [10] и координатных функций [11] в соответствии с выражениями (11.95) и (11.102) могут использоваться различные методы построения переходных процессов (см. главу 7).

В случае, когда на входе (рис. 11.25) действует случайный стационарный процесс, корреляционная функция [12] зависит только от сдвига [13]. Однако на выходе линейной системы процесс некоторое время после включения будет устанавливаться и не будет стационарным. Корреляционная функция на выходе может быть получена из общего выражения (11.98):

$$R_2^0(t, t_1) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^{t_1} w(\lambda) R_1^0(\tau - \eta + \lambda) d\lambda,$$

а дисперсия — из (11.99):

$$D_2(t) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^t w(\lambda) R_1^0(\lambda - \eta) d\lambda.$$

Если рассматриваемая система устойчива, то [14] стремятся к некоторым пределам, которые определяют стационарный процесс на выходе. Они могут быть найдены из (11.105) и (11.106), если положить [15]. Тогда

$$R_2^0(\tau) = \int_0^\infty w(\eta) d\eta \int_0^\infty w(\lambda) R_1^0(\tau - \eta + \lambda) d\lambda,$$

$$D_2 = R_2^0(0) = \int_0^\infty w(\eta) d\eta \int_0^\infty w(\lambda) R_1^0(\lambda - \eta) d\lambda.$$

Пусть, например, на входе интегрирующего звена с передаточной функцией [16] и функцией веса [17] действует белый шум с корреляционной функцией [18]. Тогда в соответствии с (11.106) дисперсия на выходе будет

$$D_2(t) = \int_0^t k d\eta \int_0^t kN \delta(\lambda - \eta) d\lambda = \int_0^t k d\eta \cdot kN = k^2 Nt,$$

т. е. дисперсия растет пропорционально времени. Нетрудно видеть, что [19] так как звено не является устойчивым, а оно находится на границе устойчивости (нейтрально-устойчиво).

2. Прохождение случайных сигналов через линейные звенья

Для расчета установившегося стационарного процесса на выходе системы (рис. 11.25) более удобно исходить из известной спектральной плотности на входе [20]. Тогда можно легко найти спектральную плотность [21] выходного сигнала. Действительно, по определению спектральная плотность на входе связана с изображением Фурье [22] случайной величины [23] соотношением (11.61);

$$S_1(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_1(j\omega)|^2.$$

Это же соотношение имеет место и для выходного сигнала:

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_2(j\omega)|^2.$$

В линейной системе изображения Фурье [24] связаны между собой посредством частотной передаточной функции;

$$F_2(j\omega) = W(j\omega) F_1(j\omega).$$

Отсюда можно найти

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_1(j\omega)|^2 |W(j\omega)|^2,$$

или

$$S_2(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность выходной величины может быть получена умножением спектральной плотности входной величины на квадрат модуля частотной передаточной функции линейной системы. Отметим, что приведенное выше доказательство, вообще говоря, не является строгим, так как существование стационарного случайного процесса на выходе не доказано.

При известной спектральной плотности [25] выходной величины может быть найдена корреляционная функция [26] по преобразованию Фурье (11.66) или (11.68).

Получим выражение (11.109) более строго. Для этого используем формулу (11.107). Так как в реальных системах весовая функция тождественно равна нулю при [27] то нижние пределы интегрирования можно положить равными — [28] Полагая, что на входе действует центрированный процесс [29] имеем

$$R_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) R_1(\tau + \lambda - \eta) d\lambda.$$

Найдем теперь спектральную плотность для выходного сигнала. Она связана с корреляционной функцией соотношением (11.65):

$$S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Подставляя в последнюю формулу значение корреляционной функции из (11.110), получаем

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} w(\eta) w(\lambda) R_1(\tau + \lambda - \eta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} e^{j\omega\lambda} e^{-j\omega\eta} R_1(\tau + \lambda - \eta) w(\lambda) w(\eta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau + \lambda - \eta) e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} d\tau = \\ &= W(j\omega) W(-j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega). \end{aligned} \quad (11.111)$$

Последнее выражение совпадает с (11.109), что и требовалось доказать.

Для нахождения дисперсии, или среднего квадрата выходной величины, необходимо проинтегрировать по всем частотам спектральную плотность;

$$\overline{x_2^2} = D_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(2\pi f) df.$$

Отметим, что закон распределения для случайной величины может, вообще говоря, меняться при прохождении ее через линейную систему. Однако в случае, если на входе линейной системы имеется нормальное распределение случайной величины [30] то на выходе для случайной величины [31] также будет иметь место нормальное распределение.

При вычислении интеграла (11.112) обычно приходится иметь дело с подынтегральным выражением вида

$$\frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2},$$

где [32] представляют собой некоторые полиномы от комплексной переменной [33]

Наивысшую степень знаменателя обозначим [34] Наивысшая степень числителя в реальной системе может быть не выше [35] Для удобства интегрирования написанное выше выражение обычно представляют в виде

$$\frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2} = \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)},$$

где

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n, \\ G(j\omega) &= b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}. \end{aligned}$$

Полином [36] содержит только четные степени [37] Полином [38] для устойчивой системы может иметь корни только в верхней полуплоскости. Область устойчивости оказалась в верхней полуплоскости вследствие того, что была использована подстановка [39] а множитель [40] означает поворот комплексного числа на угол π .

Таким образом, вычисление дисперсии (11.112) можно свести к нахождению интеграла

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(j\omega) d\omega}{A(j\omega)A(-j\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega) d\omega}{|A(j\omega)|^2}.$$

В общем случае при любом [41] для устойчивой системы интеграл [42] может быть представлен в виде [38]

$$I_n = \frac{1}{2a_0} \frac{M_n}{\Delta_n},$$

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

совпадает со старшим определителем Гурвица, а числитель определяется выражением

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Интегралы такого вида вычислены до [43] и сведены в таблицы (см. приложение 2).

Заметим, что знаменатель правых частей приведенных в приложении 2 формул представляет собой [44] — определитель Гурвица. На границе колебательной устойчивости этот определитель обращается в нуль, а дисперсия выходной величины будет стремиться к бесконечности.

В заключение рассмотрим два важных случая прохождения случайного сигнала через линейную систему.

Статистическое дифференцирование. При поступлении случайного сигнала на идеальное дифференцирующее устройство с передаточной функцией [45] спектральная плотность выходной величины (производной от входной величины) может быть получена умножением спектральной плотности входной величины на [46]

$$S_2(\omega) = \omega^2 S_1(\omega),$$

при двойном дифференцировании — на [47]

Статистическое интегрирование. При поступлении случайного сигнала на идеальное интегрирующее звено с передаточной функцией [48] спектральная плотность выходной величины (интеграла от входной величины) может быть получена делением интегральной плотности входной величины на [49]

$$S_2(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{\omega^2},$$

при двойном интегрировании — на [50]

1.14 Лекция №14 (2 часа)

Тема: «Анализ и синтез линейных стохастических систем при стационарных случайных воздействиях».

1.14.1 Вопросы лекции

1. Аналитический метод с помощью стандартных интегралов.

2. Задачи исследования линейной системы при стационарных случайных воздействиях.

1.14.2 Краткое содержание вопросов

1. Аналитический метод с помощью стандартных интегралов.

Аналитический метод основан на представлении спектральных плотностей и КПФ системы дробно-рациональными функциями частоты:

$$D_{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) \cdot d\omega$$

$$\delta_{\varepsilon}(\omega) = \frac{|B(j\omega)|^2}{H(j\omega) \cdot H(-j\omega)} = \frac{M(j\omega)}{H(j\omega) \cdot H(-j\omega)} \quad (9)$$

где $M(j\omega)$ – четная функция частоты.

$$\begin{cases} M(j\omega) = b_0(j\omega)^{2(n-1)} + b_1(j\omega)^{2(n-2)} + \dots \\ H(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + a_2(j\omega)^{n-2} + \dots \end{cases} \quad (10)$$

Особенностью такого представления является то, что полином $M(j\omega)$ содержит только чётные степени $(j\omega)$, а $H(j\omega)$ для устойчивой СУ имеет все корни, расположенные в верхней полуплоскости корней.

$$\text{Т.о. } D_{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(j\omega)}{H(j\omega) \cdot H(-j\omega)} \cdot d\omega = I_n$$

I_n – стандартный интеграл, имеются таблицы значений стандартных интегралов I_n .

$$\text{Например для } n=1: \quad I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1}$$

$$n=2: \quad I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1}$$

Таким образом аналитический метод определения дисперсии проводится в следующем порядке:

1. определяется спектральная плотность ошибки $S_{\varepsilon}(\omega)$.
2. спектральная плотность представляется в виде (9).
3. рассчитываются коэффициенты полинома системы (10).
4. рассчитывается значение стандартного интеграла I_n .

в: графический метод :

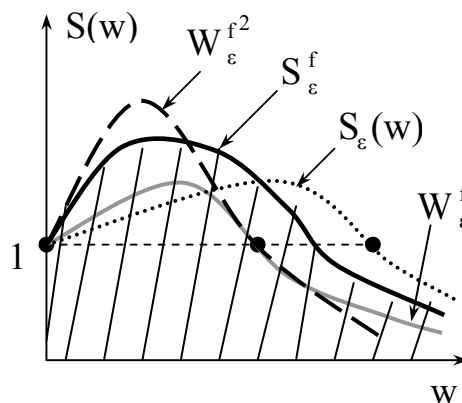
Для СУ, у которых $n > 4$, аналитические расчёты достаточно сложные, поэтому в инженерной практике используется графоаналитический метод расчета интегралов.

$$D_{\varepsilon}^f = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\varepsilon}^f(\omega) \cdot d\omega$$

$$S_{\varepsilon}^f(\omega) = \left| W_{\varepsilon}^f(j\omega) \right|^2 S_f(\omega)$$

Можно построить графики $S_{\varepsilon}^f(\omega^2)$ и $W_{\varepsilon}^f(j\omega)$, и проинтегрировать их графически.

Пусть для некоторой линейной системы управления задана спектральная плотность ошибки $S_f(\omega)$, $W_{\varepsilon}^f(\omega)$ - передаточная функция системы по каналу ошибки. Нужно определить D_{ε} .

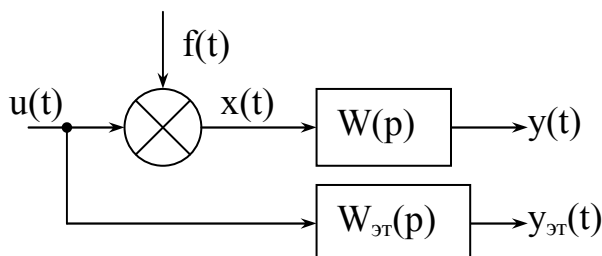


После построения кривых, проинтегрируем и получим дисперсию, которая равна площади под кривой $S_{\varepsilon}^f(\omega)$.

Как видно из графика, величина дисперсии зависит от расположения максимумов АЧХ и спектральной плотности ошибки. Величина дисперсии большая при совпадении этих максимумов. При выборе таких параметров системы, при которых максимумы оказываются разнесенными, можно добиться существенного уменьшения дисперсии, т.е. увеличения динамической точности. Таким образом, графоаналитический метод позволяет указать способы изменения частотной характеристики СУ таким образом, чтобы при заданных S внешних воздействий уменьшить D_{ε} .

2. Задачи исследования линейной системы при стационарных случайных воздействиях.

Рассмотрим линейную систему, на вход которой действует одновременно полезный сигнал $U(t)$ и помеха $f(t)$:



Структурная схема ЛСУ.

При исследовании линейной системы при случайных воздействиях обычно рассматривают две задачи:

- 1) Идентификация объекта или системы
- 2) Фильтрация помехи с преобразованием сигнала.

Опр. Идентификацией называют определение математической модели объекта или системы с целью оценки его характеристик (статических или динамических).

1) Задача идентификации при случайных воздействиях состоит в следующем: как при заданной $f(t)$ и известной $y(t)$ определить $W(p)$. Постановка и методы решения такой задачи и рассматриваются в специальном курсе моделирования.

2) В задаче фильтрации помехи с преобразованием сигнала необходимо: выбрать параметры линейного звена, при которых сигнал $y(t)$ минимально отличается от заданного по условию задачи преобразованного рабочего сигнала $y_{эт}(t)$:

$$\text{При этом: } y_{эт}(p) = U(p) \cdot W_{эт}(p).$$

Как правило $W_{эт}(p)$ считается заданной. Если задача фильтрации решается для следящей СУ, то $W(p)$ – передаточная функция замкнутой СУ, а $W_{эт}(p) = 1$, тогда выходной сигнал СУ будет равен заданию.

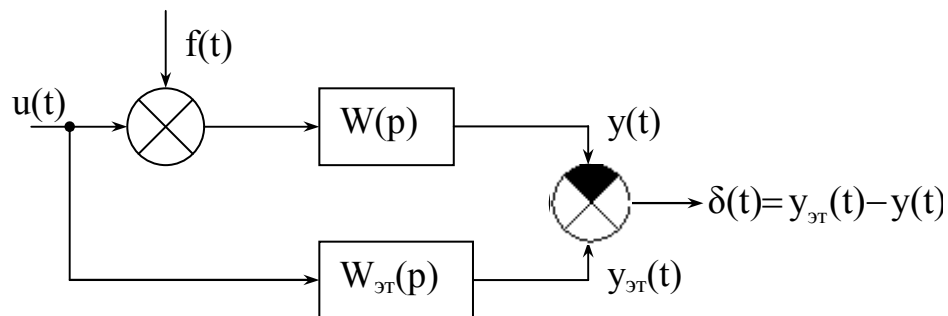
Если на выходе системы требуется получить производную от рабочего сигнала, то: $W_{эт}(p) = p$.

Если требуется получить $\int u(t) dt$, то $W_{эт}(p) = \frac{1}{p}$ и т.д.

При фильтрации и преобразовании рабочий сигнал $U(t)$ является полезным сигналом, а помеха $f(t)$ вносит дополнительную погрешность, которую необходимо уменьшить выбором ОПФ системы.

Фильтрация помехи с преобразованием сигнала ($\min \sigma^2$).

Для рассмотрения задачи составим структурную схему, состоящую из реальной системы, состоящей из $W(p)$ и некоторой фиктивной $W_{\text{эт}}(p)$. При этом объединим сигналы и сформируем ошибку преобразования $\delta(t)$.



На выходе системы формируется сигнал ошибки $\delta(t)$.

Будем считать статические характеристики сигналов $U(t)$ и $f(t)$ известными, при этом, в зависимости от степени детерминированности характеристик объекта $W(p)$, возможны две постановки задачи:

1) Выражение $W(p)$ известно и требуется, по известной $W_{\text{эт}}(p)$ и статическим характеристикам сигналов $U(t)$ и $f(t)$, определить средний квадрат ошибки $\delta^2(t)$ и, варьируя параметры системы, минимизировать $\overline{\delta^2(t)}$. Это задача анализа или параметрического синтеза.

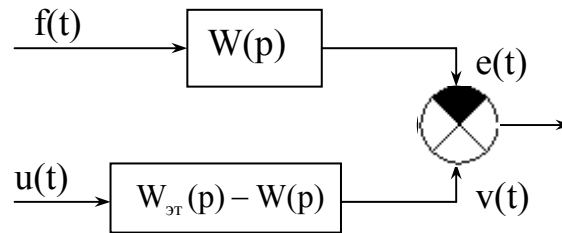
2) ОПФ системы $W(p)$ - неизвестна, необходимо так синтезировать систему, чтобы при известных $W_{\text{эт}}(p)$ и заданных статических характеристиках сигнала $U(t)$ и $f(t)$, и среднеквадратичная ошибка была минимальна, т.е. $\delta^2(t) - \min$. Это задача структурного синтеза.

Рассмотрим первую из этих задач :

1) Запишем ошибку системы в операторной форме:

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= Y_{\text{эт}}(p) - Y(p) = U(p) \cdot W_{\text{эт}}(p) - [U(p) + F(p)] \cdot W(p) = \\ &= [W_{\text{эт}}(p) - W(p)] \cdot U(p) - F(p) \cdot W(p) \end{aligned}$$

В соответствии с выражением, исходная структурная схема может быть представлена в следующем эквивалентном виде.



Если обозначить выходные сигналы $e(t)$ и $v(t)$, тогда спектральная плотность ошибки $S_\delta(\omega)$ может быть представлена:

$$S_\delta(\omega) = S_e(\omega) + S_v(\omega) - S_{ev}(\omega) - S_{ve}(\omega)$$

Распишем S_{ve} и S_{ev} :

$$S_{ve}(j\omega) = \text{Re} [S_{ve}(j\omega)] + j \text{Im} [S_{ve}(j\omega)]$$

$$S_{ev}(j\omega) = S_{ve}(-j\omega) = \text{Re} [S_{ve}(j\omega)] - j \text{Im} [S_{ve}(j\omega)]$$

С учётом этого спектральная плотность ошибки может быть переписана в следующем виде:

$$S_\delta(\omega) = S_e(\omega) + S_v(\omega) - 2 \text{Re} [S_{ve}(j\omega)]$$

Если выразить спектральные плотности $S_e(\omega)$, $S_v(\omega)$ и $S_{el}(j\omega)$ через известные характеристики $f(t)$, $U(t)$ и КПФ звеньев можно получить следующие выражения для спектральной плотности $S_\delta(\omega)$:

$$S_\delta(\omega) = |W(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) + |W_{эт}(j\omega) - W(j\omega)|^2 \cdot S_u(\omega) - 2 \text{Re} [S_{ve}(j\omega)]$$

$$S_{ve}(j\omega) = (W_{эт}(\omega) - W(-j\omega)) \cdot W(-j\omega) \cdot S_{uf}(j\omega)$$

Если сигналы $f(t)$ и $U(t)$ на выходе системы некоррелированные, то $S_{fu}(j\omega) = 0$ и $S_\delta(\omega)$ определяется как:

$$S_\delta(\omega) = |W(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) + |W_{эт}(j\omega) - W(j\omega)|^2 \cdot S_u(\omega) \quad (12)$$

В этом выражении второе слагаемое вызвано искажением сигнала $U(t)$ звеном $W(p)$ в следствии отличия характеристик этого звена от эталона. Второе слагаемое вызвано помехой.

Определим среднеквадратичное значение ошибки при фильтрации и преобразовании помехи:

$$D_{\varepsilon} = \overline{\delta(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\delta}(\omega) \cdot d\omega \quad (11)$$

Для линейных систем $S_{\delta}(\omega)$ обычно представляет собой дробно-рациональную вещественную функцию и вычисление интеграла (11) сводится к определению суммы стандартных интегралов вида:

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(j\omega)}{H(j\omega) \cdot H(-j\omega)} \cdot d\omega$$

Полученные выражения (11) и (12) позволяют определить параметры следящей системы оптимальной по минимуму среднеквадратичного отклонения.

Основным требованием, предъявляемым к следящим системам, является точное воспроизведение управляющего сигнала, в этом случае $W_{\text{ст}}(p) = 1$ и форма для спектральной плотности ошибки будет иметь вид:

$$S_{\delta}(\omega) = |W(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) + |1 - W(j\omega)|^2 \cdot S_u(\omega) - 2 \operatorname{Re}[(1 - W(j\omega)) \cdot W(-j\omega) \cdot S_{uf}(j\omega)] \quad (12^*)$$

$$S_{\delta}(\omega) = |W(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) + |1 - W(j\omega)|^2 \cdot S_u(\omega) \quad (13)$$

В этих формулах $W(j\omega)$ – передаточная функция замкнутой СУ, она может быть рассчитана по известным ОПФ объекта и регулятора, поэтому она является функцией параметров системы: $W(p) = F(a_i, i = \overline{1, n})$, например $K_{\text{пер}}, T_1, T_2, \dots$

Как правило решением этой задачи является определение параметров системы, минимальных среднеквадратичных отклонений.

Алгоритм расчёта параметров системы по минимуму $\overline{\delta^2(t)}$.

- 1) Определить ОПФ системы $W(p)$;
- 2) Определить $S_{\delta}(\omega)$;
- 3) Представить $S_{\delta}(\omega)$ в стандартном виде: $S_{\delta}(\omega) = \frac{M(j\omega)}{H(j\omega) \cdot H(-j\omega)}$;

Определить коэффициенты полиномов H и M ;

- 4) Рассчитать $\overline{\delta^2(t)}$, используя таблицы интегралов либо стандартные интегралы I_n ;

5) Определить производные от ошибки по интересующим параметрам a_1 , приравнять к нулю $\frac{\partial \overline{\delta^2(t)}}{\partial a}$. Определить оптимальные значения параметров a , обеспечивающих минимальное среднеквадратичное отклонение.

6) Реализовать в следящей системе найденные значения параметров a .

Одним из вариантов решения может быть использование корректирующих устройств.

Синтез оптимальных по точности систем при стационарных случайных воздействиях.

Задача синтеза по сравнению с предыдущей является более общей, в этой задаче заданы статические характеристики U и f и $W_{\text{эт}}(p)$ и требуется найти выражение для $W(j\omega)$, обеспечивающая минимальное среднеквадратичное отклонение.

Эта задача впервые была поставлена и решена академиком Колмогоровым, независимо от него и иным способом - Винером.

В последующие годы эти результаты были доведены до практического применения и доступны для инженерного уровня.

Рассмотрим основные результаты Колмогорова – Винера.

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{W_{\text{эт}}(j\omega) \cdot S_{xu}(j\omega)}{S_x(\omega)}$$

(14)

Если помеха и сигнал некоррелированные, то взаимные спектральные плотности $S_{fu}(j\omega) = 0$ и

$$S_{xu}(j\omega) = S_u(\omega), \text{ а } S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_f(\omega).$$

$$\text{В этом случае } W_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{W_{\text{эт}}(j\omega) \cdot S_u(\omega)}{S_u(\omega) + S_f(\omega)} \quad (15).$$

Для следящей СУ $W_{\text{эт}}(p) = 1$ и

$$W_{\text{опт}}(p) = \frac{S_u(\omega)}{S_u(\omega) + S_f(\omega)} \quad (16).$$

Выводы: 1) при выводе формул (14), (15), (16) на вид КПФ $W_{\text{опт}}(j\omega)$ не накладывалось никаких ограничений.

2) получаемая по этим формулам $W_{\text{опт}}(j\omega)$ вступает в противоречие с условием физической реализации, т.е. ОПФ имеет корни в правой полуплоскости, отсюда следует $g_{\text{опт}}(t) \neq 0, t < 0$.

Решение (16) можно разбить на две составляющие: физически реализуемую и физически нереализуемую.

Для нахождения ОПФ $W_{\text{опт}}(j\omega)$ физически реализуемой системы применяются два способа, вытекающие из теории Колмогорова – Винера:

- 1) факторизация;
- 2) расщепление;

Задача факторизации:

Пусть в результате решения задачи получается:

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{W_{\text{эт}}(j\omega) \cdot S_{xu}(j\omega)}{S_x(\omega)}$$

Представив $S_x(\omega) = \psi(j\omega) \cdot \psi(-j\omega)$, где $\psi(j\omega)$ – соответствует реализуемому устойчивому звену. Функция $\psi(-j\omega)$ соответствует нереализуемой части, тогда:

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \cdot \frac{W_{\text{опт}}(j\omega) \cdot S_{xu}(j\omega)}{\psi(-j\omega)} \quad (17).$$

После этого решается **задача расщепления:**

$$W_{\text{опт}}(j\omega) \cdot \psi(j\omega) = \frac{W_{\text{опт}}(j\omega) \cdot S_{xu}(j\omega)}{\psi(-j\omega)}.$$

Полученное выражение представляется в виде двух составляющих:

$$W_{\text{опт}}(j\omega) \cdot \psi(j\omega) = \frac{W_{\text{опт}}(j\omega) \cdot S_{xu}(j\omega)}{\psi(-j\omega)} = R(j\omega) + N(-j\omega)$$

$R(j\omega)$ – соответствует реализуемой части;

$N(j\omega)$ – соответствует нереализуемой части;

Далее не реализуемая часть системы отбрасывается и

$$W_{\text{опт.реал}}(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{\psi(j\omega)} \quad (18) \text{ – формула Колмогорова – Винера.}$$

Выводы:

1) Рассмотренный метод синтеза – структурно-параметрический, когда ко входу линейной системы приложен центрированный стационарный случайный процесс.

2) Полученное решение физически нереализуемо, поэтому с помощью факторизации и расщепления определяется $W_{\text{опт.реал}}(j\omega)$. При этом погрешность будет больше минимальной.

3) В настоящее время разработаны методы синтеза при случайных воздействиях, приложенных в разных точках системы. При одновременном воздействии на систему регулирующих и случайных сигналов и другие задачи.

Для структурно параметрического синтеза разработаны пакеты прикладных программ (ТАУ2, МАТКАД, МАТЛАБ).

1.15 Лекция 15 (2 часа)

Тема: «Задачи оптимального управления. Критерии оптимальности».

1.15.1 Вопросы лекции

1. Задачи оптимального управления.
2. Критерии оптимальности.

1.15.2. Краткое содержание вопросов

1. Задачи оптимального управления.

Под оптимальной САУ понимается наилучшая в некотором смысле система. Критерии оптимальности могут быть различны и зависят от решаемой задачи. Наиболее часто встречаются такие критерии оптимальности:

- 1) Точность САУ при изменяющемся воздействии,
- 2) Время переходного процесса,
- 3) Экономичность;
- 4) Производительность;
- 5) Интегральные критерии.

К настоящему времени наибольшее развитие получили 2 направления в теории оптимальности систем:

1) Теория оптимального управления движением систем с полной информацией об объекте и возмущениях;

2) Теории оптимального управления при случайных возмущениях.

Для реализации оптимального управления необходимо:

1) Определить цель управления. Цель выражается либо целевой функцией, либо критерием оптимизации.

Целевая функция или критерий оптимизации позволяют найти количественный эффект любого решения.

2) Выбрать модель для анализа и определения эффективности принятого решения.

3) Изучить все состояния среды функционирования объекта, влияющие на прошлое, настоящее и будущее процесса управления.

При решении задачи оптимального управления используются методы вариационного исчисления, принципы максимума, а также динамическое и математическое программирование.

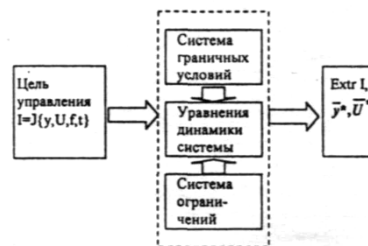
Задачу оптимального управления в общем случае можно сформулировать следующим образом:

Даны:

1) Цель управления, представленная математически в виде некоторого функционала или критерия управления

2) Уравнения системы - они обычно задаются в виде уравнений состояний

3) Система граничных уравнений в начальный и конечный момент времени.



4) Система ограничений, которым должны удовлетворять переменные состояния и уравнения.

Требуется найти:

Вектор управления, при котором критерий цели управления имеет экстремум (max или min).

Необходимо отметить, что оптимальное управление в ряде случаев может не существовать, и об этом нельзя судить не решая задачу. Решение задачи нахождения оптимального управления является неоднозначным, т.е. каждое найденное решение дает локальный оптимум. Если найдены все локальные оптимумы, то в этом случае может быть выделен глобальный оптимум. Найденный глобальный оптимум является решением задачи оптимального управления.

2. Критерии оптимальности.

Интегральные критерии качества:

1. Оптимальное Быстродействие

Функционал имеет вид

$$I = \int_0^T dt = T$$

2. Оптимальная Производительность

Критерием оптимальности является угол поворота \square за определенное время t и функционал имеет вид

$$I = \int_0^T \dot{y}(t) dt$$

3. Оптимальная экономичность

Критерием оптимальности является расход энергии за определенное время и функционал имеет вид

$$I = \int_0^T U^2(t) dt = T$$

1.16 Лекция №16 (2 часа)

Тема: «Методы теории оптимального управления».

1.16.1 Вопросы лекции

1. Вариационное исчисление
2. Метод динамического программирования

1.16.2 Краткое содержание вопросов

1. Вариационное исчисление

В технических задачах на управление накладываются ограничения по энергетическим ресурсам, и ограничения на фазовые координаты из соображения прочности и безопасности.

Матем. Аппаратом для нахождения экстремалей является вариационное исчисление.

Можно выделить 4 основных метода вариации. Исчисления, которые используются для решения задач оптимального управления:

1. Применение уравнения Эйлера
2. Принцип максимума
3. Динамическое программирование
4. Нелинейное программирование (Прямой

вариационный метод).

Основное применение метода, используемого уравнение Эйлера – это задачи, где экстремалами являются гладкие функции, а экстремизируемый функционал и дополнительные условия задаются нелинейными функциями координат.

Уравнение Эйлера обычно применяют для решения задач оптимального управления, где по физическому смыслу трудно ожидать решение в виде разрывных функций и где ограничения и функционал существенно нелинейны.

Принцип максимума наиболее эффективно дает решение для линейных оптимальных задач, где ограничение задано в виде неравенств, этот метод развился для управления системами, где управление – это кусочно-линейная ф-ия.

2.Метод динамического программирования

В основу метода динамического программирования положен принцип оптимальности, этот метод развивался как аппарат исследования одношаговых оптимальных решений. Этот метод чаще применяется в задачах с дискретным временем, т.е. когда уравнения записаны в виде разностных выражений.

Методы нелин. Прогрессия – это по существу методы автоматической оптимизации, сюда относятся:

- градиентный метод
- метод наискорейшего спуска
- метод по координатной оптимизации
- симплекс метод

Особенность применения этих методов в автомат-х системах оптимизации состоит в том, что оптимальная функция представляет собой выходную величину объекта, а совокупностью независимых переменных является управляющие воздействия.

1.17 Лекция 17 (2 часа)

Тема: «Системы управления оптимальные по быстродействию, по расходу ресурсов и расходу энергии».

1.17.1 Вопросы лекции

1. Системы, оптимальные по расходу ресурсов.
2. Критерии оптимизации.

1.17.2. Краткое содержание вопросов

1. Системы, оптимальные по расходу ресурсов.

Дана модель объекта управления:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1)$$

Или

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} U_k, \quad (2)$$

где $i=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,m$

Начальные и конечные условия (граничные условия):

$$x_i(0) = x_{in}, \quad x_i(t_k) = x_{ik} \quad (3)$$

Управляющее воздействие (ресурсы) ограничены по величине

$$|U_j| \leq U_{jm} \quad (4)$$

Критерий оптимальности, который соответствует минимальному расходу ресурсов имеет следующий вид:

$$J = \int_0^{t_k} \sum_{j=1}^m C_j |U_j(t)| dt \quad (5)$$

Требуется определить оптимальный закон управления объектом (1). Для решения этой задачи воспользуемся принципом максимума.

На основании (5) введем дополнительную переменную

$$\frac{dx_0}{dt} = \sum_{j=1}^m C_j |U_j(t)| \quad (6)$$

Функция Гамильтона примет следующий вид:

$$H = \Psi_0 \sum_{j=1}^m C_j |U_j| + \sum_{i=1}^n \Psi_i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j \right) \quad (7)$$

Дополнительные переменные определяются из сопряженных уравнений

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n a_{ij} \Psi_j, \quad i=1,2,\dots,n \quad (8)$$

На основе (7) запишем функцию, состоящую из слагаемых, зависящих от U:

$$H^* = - \sum_{j=1}^m C_j |U_j| + \sum_{i=1}^n \Psi_i \sum_{j=1}^m b_{ij} U_j \quad (9)$$

Поменяем порядок суммирования во втором слагаемом выражении (9):

$$H^* = - \sum_{j=1}^m C_j |U_j| + \sum_{i=1}^n U_j \sum_{j=1}^m b_{ij} \Psi_i \quad (10)$$

Введем обозначение:

$$\sigma_i(t) = \sum_{j=1}^m b_{ij} \Psi_i(t) \quad (11)$$

Функция H^* будет максимальной, если каждое слагаемое максимально

$$\frac{\sigma_j(t)}{C_j} - |U_j| \rightarrow \max, j=1,2,\dots,n.$$

Учитывая, что $-|U_j| \leq 0$, определил закон оптимального управления

$$U_{ionm}(t) = \begin{cases} U_m, & \text{если } \frac{\sigma_j}{C_j} > 1 \\ 0, & \text{если } \left| \frac{\sigma_j}{C_j} \right| < 1 \\ -U_m, & \text{если } \frac{\sigma_j}{C_j} < -1 \end{cases} \quad (12)$$

Выражение (12) может быть практически реализовано с помощью реле с зоной нечувствительности (рис 16.а)

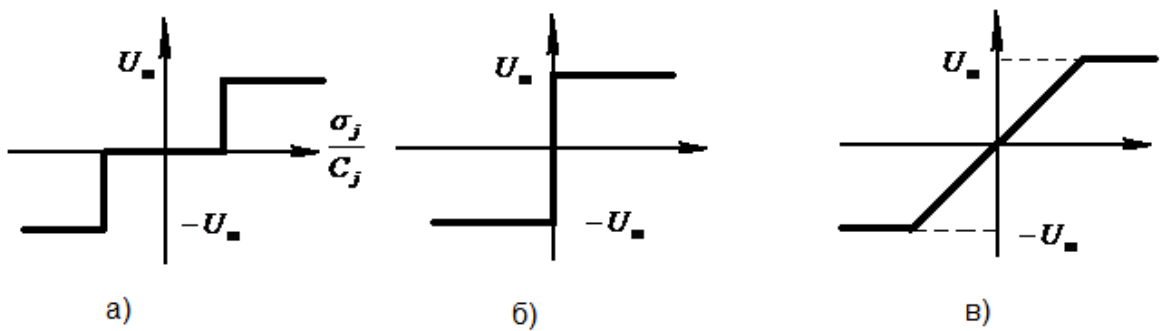


Рис. 16.1 Характеристики исполнительных устройств в системах оптимальных:
а) по минимуму расхода ресурсов, б) по быстродействию, в) по минимуму расхода энергии

1 Критерии оптимизации

Обобщая результаты, определенные по разным критериям, можно увидеть сходство и различие в характеристиках устройств, формирующих управляющее воздействие на объект (рис. 16.1). Все они имеют ограничения по величине управляющего воздействия, что довольно очевидно. Минимизация расходов ресурсов требует применение реле с зоной нечувствительности (рис. 16.1), максимальное быстродействие – идеальное реле (рис. 16.1б), минимизация расходов энергии – линейное звено с насыщением (рис. 16.1в).

Рассмотрим решение задачи синтеза оптимального управления по расходу ресурсов для объекта управления с одним управляющим воздействием. В этом случае управление (2) объекта управления в развернутом виде будет:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n u \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Граничные условия, ограничение по ресурсу и критерий оптимальности определяется выражениями (3), (4), (5). Введем дополнительную переменную

$$\dot{x}_0 = C|U(t)|$$

Составим функцию Гамильтона

$$H = \psi_0 C|U(t)| + \psi_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + \psi_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n u) \quad (14)$$

Для определения вспомогательных параметров Ψ_i запишем систему сопряженных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\psi_2 - \dots - \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\psi_n \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\psi_2 - \dots - \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\psi_n \\ &\vdots \\ \frac{d\psi_n}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\psi_2 - \dots - \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\psi_n \end{aligned}$$

Или с учетом системы (12)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -a_{11}\psi_1 - a_{21}\psi_2 - \dots - a_{n1}\psi_n \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -a_{12}\psi_1 - a_{22}\psi_2 - \dots - a_{n2}\psi_n \\ &\dots \\ \frac{d\psi_n}{dt} &= -a_{1n}\psi_1 - a_{2n}\psi_2 - \dots - a_{nn}\psi_n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В общем виде систему (15) можно представить, как

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_j, \quad i=1,2,\dots,n \quad (16)$$

Выражение (16) аналогично выражению (7).

Сформируем из (14) функцию из слагаемых, зависящих от U ,

$$H^* = -C|U| + \psi_n b_n U. \quad (17)$$

Введем обозначение:

$$\sigma(t) = b_n \psi_n(t) \quad (18)$$

Следовательно:

$$H^* = \left(\frac{\sigma(t)}{C} - |U| \right) C \quad (19)$$

Необходимо обеспечить, чтобы :

$$\left(\frac{\sigma(t)}{C} - |U| \right) \rightarrow \max$$

Это достигается при следующем алгоритме:

$$U_{opt}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \left| \frac{\sigma(t)}{C} \right| < 1 \\ U_m, & \text{если } \frac{\sigma(t)}{C} > 1 \\ -U_m, & \text{если } \frac{\sigma(t)}{C} < -1 \end{cases} \quad (20)$$

Т.е. выражение (20) как и выражение (11) определяют, что для реализации оптимального управления необходимо исполнительное устройство в виде реле с зоной нечувствительности (рис. 16.1а)

Рассмотрим пример

Объект управления имеет передаточную функцию:

$$W_e(p) = \frac{y}{u} = \frac{K_0}{p(T_0 p + 1)} \quad (\text{п1.1})$$

Обозначив

$$x_1 = g_3 - y; \dot{x}_1 = x_2,$$

запишем (п1.1) в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{22}x_2 + b_2U \end{aligned} \right\}, \quad (\text{п1.2})$$

$$\text{где } a_{22} = -\frac{1}{T_0}; b_2 = \frac{K_0}{T_0}$$

Граничные условия:

$$x(0) = x_{1n}; x_2(0) = 0; x_1(t_k) = 0; x_2(t_k) = 0 \quad (\text{п1.3})$$

Управляющий ресурс ограничен по амплитуде:

$$|U| \leq U_m \quad (\text{п1.4})$$

В качестве критерия выберем интегральный критерий, обеспечивающий одновременно ограничение переходного процесса по времени и по расходу управляющего воздействия

$$J = \int_0^{t_k} (1 + C|U(t)|) dt \rightarrow \min \quad (\text{п1.5})$$

Введем дополнительную переменную:

$$\dot{x}_0 = 1 + C|U(t)| \quad (\text{п1.6})$$

Сформируем функцию Гамильтона:

$$H = \psi_0(1 + C|U|) + \psi_1 x_2 + \psi_2(ax_2 + b_2 U) \quad (\text{п1.7})$$

Примем $\psi_0 = -1$.

Тогда,

$$H^* = -C|U| + \psi_2 b_2 U \quad (\text{п1.8})$$

Максимум функции (п1.8) при ограничении ресурса (п1.4), а значит оптимальный закон управления, будет определяться следующей зависимостью:

$$U_{opt}(t) = \begin{cases} 0, \text{если } \left| \frac{b_2}{C} \psi_2 \right| \leq 1 \\ U_m, \text{если } \frac{b_2}{C} \psi_2 > 1 \\ -U_m, \text{если } \frac{b_2}{C} \psi_2 < -1 \end{cases} \quad (\text{п1.9})$$

Найдем вспомогательные переменные из сопряженной системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 = 0 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 = -\psi_1 - a\psi_2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{п1.10})$$

Из решения системы дифференциальных уравнений (п1.10) следует:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_{10} \\ \psi_2(t) &= \left(\psi_{20} + a \frac{\psi_{10}}{a_{22}} \right) e^{a_{22}t} + \frac{\psi_{10}}{a_{22}} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{п1.11})$$

Найдем решение уравнений (п1.2)

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} + \frac{x_{20}}{a_{22}}(1 - e^{a_{22}t}) \\ x_2(t) &= x_{20} e^{a_{22}t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{п1.12})$$

При $U=0$ получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} + \frac{x_{20}}{a_{22}}(1 - e^{a_{22}t}) \\ x_2(t) &= x_{20} e^{a_{22}t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{п1.13})$$

При $U=+U_m$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} + \frac{1}{a_{22}}(x_{20} + \frac{bU_m}{a_{22}})e^{a_{22}t} - \frac{b}{a_{22}}t - \frac{1}{a_{22}}(x_{20} + \frac{bU_m}{a_{22}}) \\ x_2(t) &= (x_{20} + \frac{bU_m}{a_{22}})e^{a_{22}t} - \frac{bU_m}{a_{22}} \end{aligned} \quad (\text{п1.14})$$

Исключив из (п1.13) и (п1.14) время t , получим уравнение фазовых траекторий для $U=0$

$$x_1 = x_{10} + \frac{1}{a_{22}}(x_2 - x_{20}) \quad (\text{п1.15})$$

Для $U=U_m$

$$x_1 = x_{10} + \frac{1}{a_{22}}(x_2 - x_{20}) - \frac{bU_m}{a_{22}^2} \ln \left| \frac{x_2 + \frac{bU_m}{a_{22}}}{x_{20} + \frac{bU_m}{a_{22}}} \right| \quad (\text{п1.16})$$

Системы из исходного состояния (x_{10}, x_{20}) в начале координат $(x_{1к}=0, x_{2к}=0)$ должно производиться следующим путем изминения управляющего воздействия:

$$U_{onm} = \begin{cases} -U_m, npu(0 \leq t \leq t_1) \\ 0, npu(t_1 \leq t \leq t_2) \\ U_m, npu(t_2 \leq t \leq t_k) \end{cases} \quad (\text{п1.17})$$

Следовательно, необходимо найти линии переключения управляющего воздействия с $U=\pm U_m$ на $U=0$ и с $U=0$ на $U=\pm U_m$.

Используя выражения для фазовых траекторий (п1.16) и (п1.17), которые переходят через начало координат получаем, что линия переключения U с $\pm U$ на 0 определяется следующим выражением:

$$x_1 = \frac{1}{a_{22}} + \frac{b}{a_{22}^2} \ln(1 - \frac{a_{22}|x_2|}{b - 2a_{22}|x_2|}) \text{sign}(x_2) \quad (\text{п1.18})$$

Линия переключения U с 0 на $\pm U_m$ определяется выражением

$$x_1 = \frac{1}{a_{22}} + \frac{b}{a_{22}^2} \ln\left(1 - \frac{a_{22}|x_2|}{b}\right) \text{sign}(x_2). \quad (\text{п1.19})$$

Построенные на фазовой плоскости на основе этих выражений линии переключения представлены на рис п.1

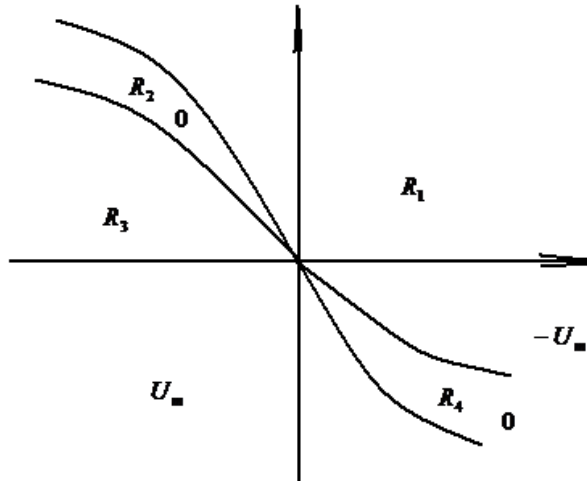


Рис.п.1 Фазовая плоскость с линиями переключения управляющего воздействия: R_1 – область, где $U=-U_m$, R_4 – область, где $U=+U_m$, R_2 и R_3 – область, где $U=0$.

Структурная схема замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию и минимуму расходов управляющего ресурса представив на рис. П.2

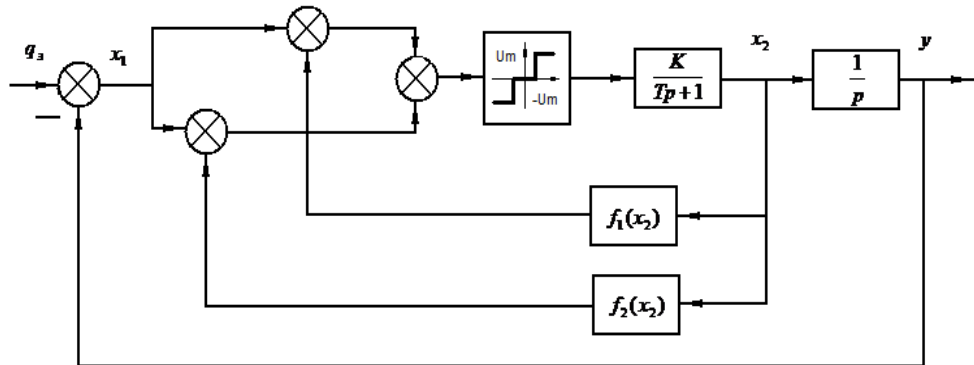


Рис. П.2 Структурная схема замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию и минимуму расхода управляющего ресурса

В соответствии с выражениями (п.16.18)и (п16.19) нелинейные обратные связи по x_2 имеют вид:

$$f_1(x_2) = T_0 x_2 - T_0 K_0 \ln\left(1 + \frac{|x_2|}{K_0}\right) \text{sign}(x_2). \quad (\text{п1.20})$$

$$f_2(x_2) = T_0 x_2 - T_0 K_0 \ln\left(1 + \frac{|x_2|}{K_0 + 2|x_2|}\right) \text{sign}(x_2). \quad (\text{п1.21})$$

Для системы, оптимальной только по расходу ресурса, критерий оптимальности примет следующий вид:

$$J = \int_0^{t_k} |U(t)| dt \quad (\text{п1.22})$$

Аналогично можно доказать, что в этом случае кривая переключения управляющего воздействия при переходе изображающей точки состояния объекта из области R_2 в область R_1 и из области R_4 в область R_3 остается , а другая граница переключений будет определяться линейной зависимостью

$$x_1 = \frac{1}{a_{22}} x_2 . \quad (\text{п1.23})$$

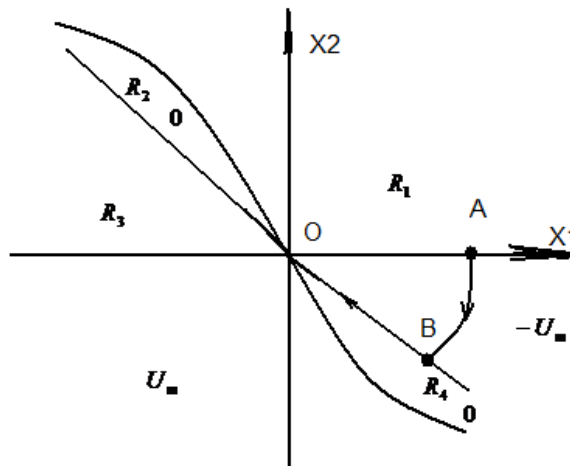


Рис. п.3 Линии переключения управляющего воздействия в САУ, оптимальной по расходу управляющего ресурса.

На рис.п.3 показан случай перехода состояния системы из области $R_1(U=-U_m)$ в начало состояния. На линии переключения B будет место скользящий режим.

1.18 Лекция №18 (2 часа)

Тема: «Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов».

1.18.1 Вопросы лекции

1. Постановка задачи АКОР.
2. Случаи решения АКОР.

1.18.2 Краткое содержание вопросов

1. Постановка задачи АКОР.

АКОР в России впервые был разработан профессором Летовым. Заслуга профессора Летова состоит в том, что он процесс синтеза оптимального управления

поставил на математическую основу выраженную в аналитической форме. Для этого профессор Летов обоснованно в своем методе выбирал критерий оптимальности и на основании математической модели объекта управления и выбранного критерия оптимальности аналитически находил выражение для алгоритма оптимального управления или выражение для оптимального регулятора. Одновременно с профессором Летовым америк. математиком Калманом был разработан метод подобный АКОРу, который назывался Метод пространства состояния, который явился основой современной теории управления. Заслуга Калмана состоит в том, что он разработал методы синтеза алгоритма оптимального управления, не только для детерминированной динамической системы, но и для стохастических динамических систем (со случайным переходным процессом).

$$\bar{\dot{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) \quad (1)$$

где $A(t)_{(n \times n)}$ – матрица коэффициентов объекта управления, коэффициенты зависят от времени;

$B(t)_{(n \times m)}$ – прямоугольная матрица распределения управляющих воздействий.

Коэффициенты этой матрицы также зависят от времени;

$\bar{x}(t)$ – n-мерный вектор состояния;

$\bar{u}(t)$ – m-мерный вектор управления.

$$\bar{y}(t) = C(t)\bar{x}(t) \quad (2)$$

$y(t)$ – p-мерный вектор выхода;

$C(t)_{(p \times n)}$ – матрица выхода динамической системы коэффициентов, которые зависят от времени.

2. Случаи решения АКОР.

В постановке задачи АКОР очень важное место занимает выбор критерия оптимальности или выбор функционала качества.

В общем случае для обоснованного выбора критерия оптимальности выбирается желаемый вектор выходных координат $\bar{y}_* (t)$, задача АКОР состоит в том, чтобы текущее значение выхода вектора было близко к желаемому:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \bar{y}_* (t) - \bar{y}(t) \quad (3)$$

Мы хотим чтобы в ∞ , при $t \rightarrow \infty$, $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$

В этом случае, учитывая рассуждения критерия оптимальности в общем виде можно представить так:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\bar{\varepsilon}^T(t) Q(t) \bar{\varepsilon}(t) + \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t) \right] dt + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^T(T) M \bar{\varepsilon}(T) \quad (4)$$

Задача АКОР с критерия вида (4) называется задачей слежения, текущая выходная координата отслеживания желаемых выходных координат.

Физический смысл слагаемых: 1-ое слагаемое представляет собой просуммированную ошибку и в этом слагаемом матрица $Q(t)$ это матрица квадратичной формы $[p \times p]$. Весовые коэффициенты этой матрицы выбираются с тем расчетом чтобы в конечном итоге первое слагаемое имело минимальное значение. 1-ое слагаемое характеризует точность работы системы.

2-ое слагаемое - квадратичная форма физически характеризует затраты энергии на управление, косвенным образом это слагаемое характеризует и быстродействие системы, чем больше затраты энергии на управление, тем более быстродейственное является система. Выбирая компромисс между затратами энергии на управление и полученным быстродействием:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(t) &= \bar{y}_x(t) - \bar{y}(t) \\ \bar{y}_x(t) &= 0 \end{aligned}$$

Второй случай решения задачи АКОР.

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left[\bar{y}^T(t) Q(t) \bar{y}(t) + \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t) \right] dt + \frac{1}{2} \bar{y}^T(T) M \bar{y}(T) \quad (5)$$

Целью управления является удержание выходных координат объекта

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix} \rightarrow 0$$

Если начальное отклонение выходных координат относительно 0 велико, то управляющее устройство должно в начале выходные координаты приблизить к нулю, а затем удерживать их около нуля, при этом не расходуя много энергии на управление. Подобную задачу называют задачей о рег. выхода

Рассмотрим третий случай

Третий случай решения задачи Акор связано с задачей удержания около нуля не выходного вектора и его компонентов, а компонентов вектора состояния.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow 0$$

Критерий оптимальности будет выглядеть следующим образом

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\bar{x}^T(t) Q(t) \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t)] dt + \frac{1}{2} \bar{x}^T(T) M \bar{x}(T) \quad (6)$$

В этом случае оптимальное управление должно минимизировать критерий вида, а соответственно задачу называют задачей о регуляторе состояния.

Четвертый случай.

Во всех трех случаях предполагается, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ – зависят от времени.

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \bar{u}(t) \quad (7)$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\bar{x}^T(t) Q \bar{x}(t) + \bar{u}^T R \bar{u}(t)] dt \quad (8)$$

Второй особенностью четвертого случая является то, что верхний предел интеграла имеет бесконечность. При этом $M=0$. Предполагая при этом, что на вектор управления $U(t)$ не наложено никаких ограничений.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = 0 \quad (9)$$

Выражение (9) эквивалентно асимптотической устойчивости синтезированной системы. В четвертом случае задача сводится к поиску такого вектора управления $\bar{u}[\bar{x}(t)]$ под действием кот. критерий вида (8) достигает \min значения и при этом выполняется условие асимптотической устойчивости.

Кроме рассмотренных 4-х случаев на практике встречаются задачи с оптимизацией нелинейных объектов и с ограничением на управляющее воздействие.

В этом случае решение задачи Акора осуществляется на основе принципа Понтрягина, кот. приспособлен специально для решения подобного рода задач, т.е. для решения задач оптимизации с нелинейным объектом и с ограничением на управляющее воздействие и фазовые координаты.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1 Лабораторная работа №1(2 часа).

2.1.1 Цель работы:изучение принципов действия и схем включения различных датчиков

2.1.2 Задачи работы:

1. В чем состоит назначение датчиков в системах автоматики?
2. По каким признакам классифицируются датчики?
3. Что такое чувствительность датчика?

1. Комбинированный прибор М 92
2. Переменный резистор ППБ-50Г-220 Ом \pm 5%
3. Термопара ТХК
4. Фотодиод ФД265А
5. Магнитоэлектрический вольтметр М4213 с температурной шкалой

Задание № 1. Снятие характеристики потенциометрического датчика

1. К резистору R_p , размещенному на лабораторном стенде, подключить постоянное напряжение 20 В.

2. Снять характеристику однократного потенциметрического датчика:

2.1. К выходу датчика подключить комбинированный прибор на пределе измерения 20 В.

2.2. Поворачивая рукоятку потенциометра R_p , через каждые 30 делений фиксировать по прибору выходное напряжение.

2.3. Результаты наблюдений занести в таблицу 3.

[illegible]

3. Снять характеристику двухтактного датчика.

3.1. Комбинированный прибор подключить между ползуном и средней точкой потенциометра.

3.2. Изменяя положения ползуна датчика, наблюдать за изменением величины и полярности выходного напряжения.

3.3. Результаты наблюдений занести в таблицу 4.

[illegible]

Задание № 2. Снятие характеристики фотодатчика

Порядок выполнения задания №2

1. Ознакомиться с блоком I, сектором А2.
2. К резистору R_p , размещенному на стенде, подключить постоянное напряжение 20 В.
3. Регулируемое напряжение, снимаемое с R_p , подключить к гнездам X_1 , X_2 осветительной лампы (блок I, А2). Для контроля напряжения освещения к этим же гнездам $-X_1$, X_2 подключить прибор на пределе измерения 20 В.
4. К гнездам X_3 , X_4 фотодиода подключить второй вольтметр на пределе измерения 2 В – для измерения фото ЭДС.
5. Результаты измерений занести в таблицу 5.

Таблица 5

U осв., В	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Еф., В										

Задание № 3. Градуировка термопары

Порядок выполнения задания №3

1. Ознакомиться с блоком 1, сектором А3.
2. К гнездам X_1 , X_2 нагревательного элемента подключить напряжение 24 В.
3. К гнездам X_4 , X_3 термопары подключить комбинированный прибор на пределе измерения 200 мВ и магнитоэлектрический вольтметр, имеющий температурную шкалу $(0 + 600)^\circ\text{C}$.
4. Наблюдая по магнитоэлектрическому «термометру» за повышением температуры, фиксировать по цифровому прибору значения термо ЭДС через каждые 20°C .
5. Результаты наблюдений занести в таблицу 6.

Таблица 6.

$T, ^\circ\text{C}$	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300
$E_T, \text{мВ}$																

Оформление и содержание отчёта

Зарисовать схемы включения потенциометрического датчика и таблицы результатов № 3, 4.

Построить характеристики для каждой схемы датчика:

$$U_{\text{вых}} = f(x).$$

Определить чувствительность датчика для каждой схемы включения по формуле:

$$S_x = \frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta x}$$

где $\Delta x = 30$ дел.

$x = 120$ дел.

Зарисовать схему включения фотодиода и таблицу 5.

По данным таблицы 5 **построить** характеристику фотодатчика:

$$E_f = f(U_{\text{осв.}})$$

Зарисовать схему включения термопары и таблицу 6

По данным таблицы 6 **построить** градуировочную характеристику термопары:

$$E_T = f(T)$$

Рассчитать чувствительность термопары по формуле:

$$\tilde{N} = \frac{\Delta A_{\text{в}}}{\Delta O},$$

где $\Delta T = 20^\circ\text{C}$

$T = 150^\circ\text{C}$

Ответить на вопросы:

1. В чем особенность двухтактной схемы включения потенциометрического датчика?
2. Какие величины позволяют контролировать потенциометрические датчики?
3. Проанализировать характеристику фотодатчика. Указать режим работы фотодиода, его особенности.
4. Чем определяется ЭДС термопары? Каковы требования к окружающей среде?
5. Какие еще датчики пригодны для контроля температуры? Дать краткую характеристику.

2.2. Лабораторная работа №2(4 часа).

Тема: «Поведение объектов и СУ; информация и принципы управления.»

2.2.1 Цель работы: изучить поведение объектов и СУ; информацию и принципы управления.

2.2.2 Задачи работы:

1. Какой нелинейный элемент обеспечивает усиление переменного тока в магнитном усилителе?
2. Как изменяется магнитная проницаемость ферромагнитного материала при намагничивании постоянным полем?
3. Для чего вводятся обратные связи в усилителе?

2.2.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1 Комбинированный прибор М 92 А

2 Магнитный усилитель ТУМ

2.2.4 Описание (ход) работы:

Задание № 1. Снятие характеристики простейшего магнитного усилителя

Порядок выполнения задания № 1

1. Ознакомиться с блоком 1, сектором А1.

2. Собрать схему простейшего усилителя:

2.1. Нагрузку усилителя R_H включить последовательно с рабочей обмоткой W_p .

2.2. Рабочую цепь усилителя подключить к источнику, переменного напряжения 24В.

2.3. Для контроля рабочего тока в цепь нагрузки включить комбинированный прибор на пределе измерения 200 мА переменного тока.

2.4. Цепь управления усилителя подключить к источнику постоянного напряжения 5 В.

2.5. Изменение тока управления осуществлять переменным резистором R_p , размещенным на лабораторном стенде.

2.6. Для контроля тока управления включить второй прибор на пределе измерения постоянного тока -500 мА.

3. Изменяя ток управления поворотом рукоятки резистора R_p , фиксировать значение рабочего тока

4. Результаты измерений занести в таблицу 1.

Таблица 1

$I_y, \text{мА}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$I_p, \text{мА}$											

5. Сменить полярность тока управления и повторить опыт

6. Результаты занести в таблицу 2.

Таблица 2

$I_y, \text{мА}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$I_p, \text{мА}$											

Задание № 2. Исследование усилителя с внешней обратной связью

Порядок выполнения задания № 2

1. Ввести в усилитель обратную связь:

1.1. Собрать выпрямительный мост ($VD1 \div VD4$), соединив перемычкой гнезда X_{14} , X_{15}

1.2. Вершины моста X_6 , X_{14} подключить к обмотке W_{oc} , $Y(X_{13} Y_3)$

- 1.3. Вершины моста X_{10} , X_{11} включить в разрыв рабочей
2. Цепь управления остается без изменения.
3. Изменяя ток управления, наблюдать за изменением рабочего тока.
4. Результаты наблюдений занести в таблицу 3.

Таблица 3.

I_y .мА	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
I_p .мА											

5. Сменить полярность тока управления и повторить опыт.
6. Результаты измерений занести в таблицу 4

Таблица 4.

I_y .мА	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
I_p .мА											

Оформление и содержание отчёта

Зарисовать схему простейшего магнитного усилителя и таблицы результатов 1,2.

По результатам **построить** характеристику усилителя:

$$I_p = f(I_y)$$

Рассчитать коэффициент усиления тока по формуле:

$$K_i = \frac{I_p}{I_y} \quad ,$$

при $I_y = \pm 10$ мА

$I_y = \pm 80$ мА

Зарисовать схему усилителя с обратной связью и таблицы результатов 3, 4.

Построить характеристику усилителя с обратной связью.

Рассчитать коэффициент усиления при $I_y = \pm 50$ мА

Ответить на вопросы.

1. Как влияет смена полярности тока управления на величину рабочего тока в простейшем усилителе?
2. Почему усилитель выполняется на двух сердечниках?
3. Как изменяются свойства усилителя с обратной связью при смене полярности управляющего тока?
4. Чем объясняется наличие начального тока в магнитных усилителях?
5. Почему прекращается рост тока в рабочей цепи при больших значениях тока управления?

2.3.Лабораторная работа №3(4 часа).

Тема: «Исследование реле»

2.3.1 Цель работы: Изучение схемы включения электромагнитного реле, его параметров, электронного реле времени

2.1.2 Задачи работы:

1. Из каких основных элементов состоит электромагнитное реле?
2. Чем определяется надежность реле?
3. Как повысить чувствительность реле?

2.3.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Электромагнитное реле РЭС-6
2. Электронный миллисекундомер
3. Комбинированный прибор М 92
4. Электронное реле времени
5. Светодиод АЛ 307БМ

2.3.4 Описание (ход) работы:

Задание № 1. Измерение параметров электромагнитного реле

Порядок выполнения задания № I

1. Ознакомиться с блоком 2, сектор А1.
2. Подать на переменный резистор R_p , размещенный на стенде, постоянное напряжение 20 В.
3. Регулируемое напряжение с резистора R_p подать на гнезда X_1 , X_3 .
4. Для контроля тока, протекающего по обмотке реле, к гнездам X_2 , X_6 подключить комбинированный прибор на пределе измерения 200 мА.
5. Для контроля напряжения на обмотке реле – к гнездам X_4 , X_5 подключить второй прибор на пределе измерения 20 В.
6. Увеличивая напряжение с помощью переменного резистора R_p , зафиксировать в момент загорания светодиода значения тока и напряжения срабатывания реле. Показания приборов занести в таблицу 1.

Таблица 1

I ср., мА	U ср, В	I отп., мА	U отп, В	T ср, мс	T отп, мс

7. Уменьшая напряжение срабатывания реле с помощью R_p , зафиксировать в момент погасания светодиода значения тока и напряжения отпускания реле. Показания приборов занести в таблицу 1
8. Разобрать схему и ознакомиться с сектором А2, блок 2.
9. Измерение времени срабатывания реле:
 - 9.1. К гнездам X_1 , X_2 подключить постоянное напряжение 30 В.
 - 9.2. К гнездам X_3 , X_4 подключить постоянное напряжение

9.3. Выполнить перемычки: X_5-X_{10} , X_7-X_8 , $X_{11}-X_{12}$.

9.4. Нажатием кнопки «Установить 0» «обнулить» счетчик.

9.5. Нажать кнопку включения реле (слева) и отсчитать с помощью индикаторов время срабатывания. Результаты занести в таблицу 1.

10. Измерение времени отпускания реле:

10.1. Вместо перемычек, названных в пункте 5.9.3 выполнить новые: X_5-X_6 , X_9-X_{10} , X_7-X_{11} .

10.2. «Обнулить» счетчик.

10.3. После одного нажатия кнопки включения реле отсчитать время отпускания реле и записать его в таблицу 1.

Задание № 2. Изучение электронного реле времени.

Порядок выполнения задания № 2

1. Ознакомиться с блоком 3, сектором А1.

2. К гнездам X_1 , X_2 блока 3, А1 подключить постоянное напряжение 30 В.

3. Для различных значений сопротивлений и емкостей фиксировать по часам время выдержки реле с момента нажатия кнопки SB до момента погасания светодиода VD2.

Емкость и сопротивление изменять с помощью выключателей SA1, SA2 и переменного резистора RI.

4. Результаты наблюдения занести в таблицу 2.

Таблица 2

R	R3	R3	R2+R3	R1+R2+R3	R2+R3	R1+R2+R3
C	C2	C1+C2	C2	C2	C1+C2	C1+C2
T(c)						

Оформление и содержание отчета

Зарисовать схему включения электромагнитного реле.

По данным таблицы 1 **рассчитать** мощность срабатывания и мощность отпускания реле по формулам:

$$P_{\text{ср}} = I_{\text{ср}} \cdot U_{\text{ср}} ;$$

$$P_{\text{отп}} = I_{\text{отп}} \cdot U_{\text{отп}} .$$

Зарисовать схему электронного реле времени.

Проанализировать данные таблицы 2. Сделать вывод.

Ответить на вопросы.

1. Объяснить, почему ток срабатывания реле больше тока отпускания?

2. Чем определяется быстродействие реле, т.е. его временные параметры: $T_{\text{ср}}$, $T_{\text{отп}}$.

3. Проанализировать работу электронного реле времени (письменно).

4. Чем определяется время выдержки реле? Как его изменять?
5. В чем отличие нейтрального электромагнитного реле от поляризованного?

2.4 Лабораторная работа №4(4 часа).

Тема: «Изучение сельсинных датчиков».

2.4.1 Цель работы: Исследование индикаторной и трансформаторной передач на сельсинах, следящей системы

2.4.2 Задачи работы:

1. Что такое сельсин?
2. Для чего предназначены системы дистанционной передачи?
3. Какова структура системы дистанционной передачи, следящей системы?

2.4.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Сельсины
2. Линия связи
3. Комбинированный прибор М 92

2.4.4 Описание (ход) работы:

Задание № 1. Исследование индикаторной передачи.

Порядок выполнения задания № 1.

1. Ознакомиться с элементами системы дистанционной передачи размещенными на лабораторном стенде слева от приборов.
2. Соединить через линию связи Rл гнезда R1, R2, R3 обмоток сельсинов.
3. Соединить между собой гнезда C1, C2 обмоток сельсинов и подключить их к источнику переменного напряжения (110 В или 30 В – в соответствии с обозначением на лицевой панели).
4. Поворачивая ротор сельсина-датчика, наблюдать за положением ротора сельсина-приемника.
5. Результаты наблюдений занести в таблицу 1.

Таблица 1.

L _д дел.	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	360
L _{пр} дел.											

Задание № 2. Исследование трансформаторной передачи.

Порядок выполнения задания № 2

1. Отключить обмотку возбуждения сельсина-приемника от напряжения и подключить ее (гнезда C1, C2) к комбинированному прибору на пределе измерения переменного напряжения 200 В.
2. Повернуть ротор сельсина-приемника относительно ротора сельсина-датчика на 90°

3. Поворачивая ротор сельсина-датчика, наблюдать за показаниями прибора (ротор сельсина-приемника зафиксировать).
4. Результаты наблюдений занести в таблицу 2.

Таблица 2.

Д, дел	0	30	60	90	120	150	180
U _{вых} , В							

Оформление и содержание отчета.

Зарисовать схему индикаторной передачи.

По результатам таблицы 1. **сформулировать** основное свойство данной передачи.

Зарисовать схему трансформаторной передачи.

По данным таблицы 2. **построить** характеристику $U_{\text{вых}} = f(\alpha_d)$ и проанализировать ее.

Ответить на вопросы:

1. В чем заключается принцип действия индикаторной передачи на сельсинах?
2. От чего зависит точность передачи?
3. Для чего вводится начальный разбаланс в трансформаторной передаче?
4. Почему неподвижен сельсин-приемник в трансформаторной передаче?
5. В чем заключается принцип работы следящей системы?

2.5 Лабораторная работа №5(4 часа).

Тема: «Исследование динамических звеньев»

2.5.1 Цель работы: Изучение свойств и определение коэффициентов передачи динамических звеньев

2.5.2 Задачи работы:

1. Какие виды динамических звеньев Вам известны?
2. По, какому принципу классифицируются динамические звенья?
3. Что такое коэффициент передачи звена?

2.5.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

- 1 Усилительные звенья
- 2 Комбинированный прибор М92.

2.5.4 Описание (ход) работы:

Выполнить:

Задание № 1. Изучение делителя напряжения

Порядок выполнения задания № 1

1. Ознакомиться с блоком 3, сектором А2.
2. К гнездам Х1, Х2 подключить постоянное напряжение 20 В.
3. Для контроля входного напряжения к гнездам Х1, Х2 подключить прибор на пределе измерения 20 В.

4. Для контроля выходного напряжения к гнездам X_3 , X_4 подключить второй прибор на пределе измерения 20 В.

5. Записать показания приборов

Задание № 2. Изучение эмиттерного повторителя

Порядок выполнения задания № 2

1. Ознакомиться с блоком 3, сектором АЗ.

2. К гнездам X_1 , X_2 подключить постоянное напряжение 20 В,

3. для контроля входного напряжения к гнездам X_3 , X_4 подключить прибор на пределе измерения 20 В.

4. Для контроля выходного напряжения к гнездам X_5 , X_6 подключить второй прибор на пределе измерения 20 В.

5. Изменяя напряжение на входе звена, наблюдать за изменением выходного напряжения.

6. Результаты наблюдений занести в таблицу 1.

Таблица 1.

$U_{вх}, В$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$U_{вых}, В$											
$K_{ст}$											

Оформление и содержание отчета

1. **Зарисовать** схему делителя напряжения.

2. **Определить** статический коэффициент передачи звена и **рассчитать** по формуле:

$$K_{\text{н0}} = \frac{U_{\text{âûð}}}{U_{\text{âð}}}$$

и занести в таблицу 1.

3. **Записать** уравнение делителя.

4. **Зарисовать** схему эмиттерного повторителя.

5. **Записать** уравнение звена.

Ответить на вопросы.

1. К какому виду относятся исследованные звенья?

2. Как связаны свойства звеньев с видом уравнения?

3. Приведите примеры инерционных звеньев и их уравнение

4. Что такое устойчивость звена или системы?

2.6 Лабораторная работа №6(4 часа).

Тема: «Исследование операционных усилителей»

2.6.1 Цель работы: Изучение схем включения и характеристик интегрирующего и дифференцирующего операционных усилителей

2.6.2 Задачи работы:

1. Что такое операционный усилитель?
2. Чем определяется выполняемая им функция?
3. Где применяются операционные усилители?

2.6.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

1. Выбрать оборудование
2. Операционные усилители К553УД1А с внешними элементами
3. Комбинированный прибор М92.
4. Электронный осциллограф Н3015 (любой учебный осциллограф)

Выполнить:

Задание № 1. Снятие характеристики интегрирующего усилителя

Порядок выполнения задания № 1

1. Ознакомиться с блоком 4, сектором А1, сектором А3.
2. К гнездам X_1 , X_2 потенциометра R (сектор А3) подключить постоянное напряжение 20 В.
3. На выход потенциометра R – X_3 , X_4 подключить вольтметр на пределе измерения 20 В.
4. Установить на выходе потенциометра напряжение 3 В.
5. Подать напряжение с выхода потенциометра R на вход интегрирующего усилителя (сектор А1) к гнездам X_1 , X_2 . Вольтметр с выхода потенциометра переключить на вход усилителя.
6. К гнездам X_5 , X_6 (сектор А1) подключить второй вольтметр на пределе измерения 20 В.
7. К гнездам X_7 , X_8 подключить постоянное напряжение 30 В.
8. Убедиться, что напряжение на входе усилителя не превышает 3 В.
9. Кратковременно нажать кнопку SB и затем наблюдать за увеличением выходного напряжения до определенного значения.
10. Повторным нажатием кнопки SB разрядить конденсатор, через равные интервалы времени (по часам) фиксировать выходное напряжение усилителя.
11. Результаты занести в таблицу 1.

Таблица 1

T, c	0	2	4	...
$U_{\text{вых}}, B$				

Задание №2. Снятие характеристики дифференцирующего усилителя

Порядок выполнения задания № 2

1. Ознакомиться с блоком 4, сектором А3.
2. Подать на гнезда X_1 , X_2 переменное напряжение 5 В.
3. На выход усилителя X_3 , X_4 подключить осциллограф.
4. К гнездам X_7 , X_8 (сектор А1) подключить постоянное напряжение 30 В.
5. Получить на экране осциллографа устойчивое изображение выходного напряжения и зарисовать его.

Оформление и содержание отчёта

Зарисовать схему интегрирующего усилителя.

По данным таблицы 1. **построить** график: $U_{\text{вых}} = f(T)$

Зарисовать схему дифференцирующего усилителя.

Зарисовать осциллограмму выходного напряжения.

Ответить на вопросы.

1. Какими элементами определяется коэффициент передачи усилителя?
2. Каковы условное обозначение и назначение выводов микросхемы К553УД1А.
3. Приведите уравнения интегрирующего и дифференцирующего усилителей?
4. Составьте схему аналоговой модели, соответствующую уравнению $Tu'' + \alpha u + \beta u' = 0$
5. Приведите примеры использования операционных усилителей.

2.7 Лабораторная работа №7(4 часа).

Тема: «Исследование логических усилителей»

2.7.1 Цель работы: Изучение логических микросхем серии К155

2.7.2 Задачи работы:

1. Какие основные функции алгебры логики Вы знаете?
2. Для чего применяются логические элементы?
3. В чем особенности микросхем серии К155?

2.7.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

- 1 Микросхемы: К155ЛА3, К155ЛЛ1, К155ЛИ1, К155ЛЕ1.
- 2 Светодиоды АЛ307БМ
- 3 Комбинированный прибор М 92

Задание № 1. Измерение уровней логических сигналов для микросхем серии К155

Порядок выполнения задания № 1

1. Ознакомиться с лабораторным блоком № 5
2. Подключить к гнездам X_{19} , X_{20} постоянное напряжение 5 В.
3. Измерить с помощью цифрового прибора на пределе измерения 20 В напряжение на выходе переключателя SA1, затем SA2, соответствующие логической единице и логическому нулю.
4. Результаты занести в таблицу 1.

Таблица 1.

Состояние переключателя	Замкнутое (вкл.)	Разомкнутое (выкл.)
Уровень напряжения (В)		
Логический сигнал		
Состояние светодиода		

Задание №2. Изучение свойств логических элементов**Порядок выполнения задания № 2**

1. Изучение микросхемы DDI

1.1. Выход переключателя SA1, т.е. гнездо X_1 соединить со входом X_5 микросхемы DDI.

1.2. Состояние входа элемента (X_5) и выхода (X_8) фиксировать светодиодами.

1.3. Результаты наблюдений и переключений занести в таблицу 2.

Таблица 2.

X_5	X_8
0	
1	

2. Изучение микросхемы DD 2

2.1. Выходы переключателей SA1, SA2 подключить ко входам X_6 , X_7 микросхемы.

2.2. Изменяя состояние входов элемента фиксировать с помощью светодиодов состояние выхода X_9 .

2.3. Результаты наблюдений, занести, в таблицу 3.

Таблица 3

X_6	X_7	X_9
0	0	
1	0	
0	1	
1	1	

3. Изучение микросхемы DD3: Повторить пункты 2.1 – 2.3.

4. Изучение микросхемы DD4: Повторить пункты 2.1 – 2.3.

5. Изучение микросхемы DD 5: Повторить пункты 2.1.- 2.3.

Задание № 3. Изучение комбинационных логических схем**Порядок выполнения задания № 3**

1 Составить, затем собрать схему соединения двух логических элементов

(произвольную). По аналогии с пунктом 2. заполнить таблицу истинности схемы.

2 Составить и собрать схему соединения четырех (трех) любых логических элементов и заполнить таблицу истинности.

Оформление и содержание отчета

Зарисовать условные обозначения всех логических элементов, указать их названия, таблицы истинности.

Зарисовать логические схемы и их таблицы истинности.

Ответить на вопросы.

1. Каковы логические схемы, нумерация выводов микросхем К155ДА3, -ЛЛ1, -ЛИ1, -ЛЕ1?
2. Записать логическое выражение для схем, собранных в пунктах 1, 2 проделанной работы.
3. Проследить прохождение кода «01» по каждой из этих схем.
4. Составить логическую схему по данному выражению:

$$F = \overline{X+Y} + X \cdot Y$$

5. Заполнить таблицу истинности для выражения, приведенного в вопросе 4 (теоретическую), предварительно упростив выражение

2.8.Лабораторная работа №8(4 часа).

Тема: «Исследование регистра»

2.8.1 Цель работы:Изучение устройства и принципа действия простейшего регистра

2.8.2 Задачи работы:

- 1.Что такое регистр и в чем его назначение?
- 2.От чего зависит количество триггеров в регистре?
3. Какие триггеры называются синхронными?

2.8.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

- 1 Микросхема К155ТМ8
- 2 Светодиоды АЛ307БМ

Задание № 1. Анализ схемы данного регистра

Порядок выполнения задания № 1

1. Ознакомиться с блоком № 7.
2. Подать постоянное напряжение 5 В к гнездам X_1 , X_2 .
3. Проанализировать, какие сигналы поступают на D –входы триггеров при замкнутых состояниях выключателей SA1 – SA3.

4. Проанализировать, какой сигнал поступает на R-входы триггеров при нажатии кнопки SBI. Какой уровень сигнала является активным?
5. Проанализировать, какой перепад напряжения возникает на C-входах триггеров при нажатии кнопки SB2.

Задание № 2. Изучение действий, выполняемых данным регистром

Порядок выполнения задания № 2

1. Нажатием кнопки SBI «обнулить» регистр. Состояния выходов триггеров фиксировать светодиодами VD1 – VD6.
2. Записать информации в регистр:
 - 2.1. Установить с помощью выключателей 5A1 – 5A3 на входе регистра код «III».
 - 2.2. Нажать кнопку SB2.
 - 2.3. Убедиться, что состояние регистра изменилось.
 - 2.4. Результаты наблюдений занести в таблицу 1.

Таблица 1

№ п/п	Состояние входов					Состояние выходов					
	<i>R</i>	<i>DI</i>	<i>D2</i>	<i>D3</i>	<i>C</i>	<i>Q1</i>	<i>Q2</i>	<i>Q3</i>	$\overline{Q1}$	$\overline{Q2}$	$\overline{Q3}$
1											
2											
3											
4											
5											

3. Хранение информации:

- 3.1. Изменить с помощью выключателей SA1 - SA3 код на входе регистра.
- 3.2. Убедиться, что состояние регистра не изменилось,
- 3.3. Результаты занести в таблицу 1.

4. Запись новой информации:

- 4.1. Установить на входе регистра код 101.
- 4.2. Нажать кнопку SB2 и наблюдать состояние регистр.:
- 4.3. Результаты занести в таблицу 1.

5. Обнуление регистра:

- 5.1. Нажать кнопку SB1.
- 5.2. Состояние регистра отразить в таблице 1.

Оформление и содержание отчета

Зарисовать схему регистра, изображенную на блоке.

Записать выводы, сделанные в 1 задании –пунктах 3, 4, 5.

Ответить на вопросы.

1. Каковы условное обозначение и назначение выводов микросхемы KI55TM8.
2. Какие разновидности регистров Вам известны?
3. Каковы условное обозначение и диаграмма переключений – триггера?
4. Изменить схему соединения триггеров в данном регистре для получения регистра сдвига.
5. Пояснить запись трехразрядного кода в регистр сдвига с помощью временной диаграммы.

2.9.Лабораторная работа №9(4 часа).

Тема: Исследование двоичного счётчика и дешифратора

2.9.1 Цель работы:Изучение принципа работы четырехразрядного двоичного счетчика и дешифратора

2.9.2 Задачи работы:

1. Что такое счетчик и в чем его назначение?
2. На основе каких триггеров может быть построен счетчик?
3. Как связано число триггеров с коэффициентом пересчета?

2.9.3 Перечень приборов, материалов, используемых в лабораторной работе:

- 1 Микросхема K155ИЕ2.
- 2 Микросхема К 514ВД1.
- 3 Светодподы АЛ307КМ
- 4 Комбинированный прибор М92А
- 5 Светодиодный индикатор АЛ307КМ

Задание №1. Изучение микросхемы K155ИЕ2

Порядок выполнения задания № 1

1. Ознакомиться с блоком № 6.
2. Проанализировать информацию о микросхеме K155ИЕ2:
 - 2.1. Микросхема K155ИЕ2 - универсальный четырехразрядный интегральный счетчик.
 - 2.2. Состав микросхемы: триггер со счетным входом и трехразрядный счетчик с коэффициентом деления - 5; вместе они образуют двоично-десятичный счетчик.
 - 2.3. Выводы микросхемы:
 - С1 - вход
 - R₀- & - вход установки "0"
 - I-C2 - перемычка, устанавливающая коэффициент пересчета - 9
 - R9- & - вход установки "9"
 - 1,2,3,4 - выходы.

Задание № 2.Изучение принципа работы счетчика и дешифратора

Порядок выполнения задания № 2

1. К гнездам X_1 , X_3 блока подать постоянное напряжение 5 В.
2. Нажатием кнопки SB2 установить счетчик в нулевое состояние
3. Нажатием кнопки SB1 на вход счетчика подать импульс, при этом должен загореться светодиод, включенный во входную цепь счетчика.
4. Состояния выходов счетчика также зафиксировать светодиодами.
5. Логические состояния выходов дешифратора контролировать комбинированным прибором на пределе измерения 20 В.
6. Состояние светодиодного индикатора фиксировать для каждого состояния счетчика.
7. Подавая на вход счетчика импульсную последовательность многократным нажатием кнопки SB1, заполнить таблицу 1. состояний всех элементов.

Таблица 9,1.

№ импульса на входе счетчика	Состояния выходов счетчика	Состояния выходов дешифратора								Состояния индикатора			
		X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													

Оформление и содержание отчета

Зарисовать схему включения счетчика и дешифратора, таблицу состояний.

Ответить на вопросы.

1. Как связан номер счетного импульса с состоянием счетчика?
2. Что такое Т-триггер и как его получить? Привести схему и таблицу состояний Т-триггера.
3. Составить функциональную схему четырехразрядного счетчика,
4. Привести диаграмму переключений счетчика .
5. Какие изменения необходимо ввести в схему счетчика чтобы коэффициент пересчета равнялся 9?
6. Сформулировать функцию дешифратора в данной работе.
7. Как построить вычитающий счетчик?

8. Привести обозначение и нумерацию выводов микросхемы

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие №1(2 часа).

Тема: «Первый метод Ляпунова»

3.1.1 Задание для работы:

1. Изучить основы первого метода Ляпунова

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

Устойчивость – свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после всякого выхода из него в результате какого-либо воздействия.

Это свойство затухания переходного процесса с течением времени. Для тех объектов, которые работают в условиях непрерывно меняющихся воздействий, т.е. когда установившийся режим вообще отсутствует, дается общее определение устойчивости:

Система устойчива, если её выходная величина остаётся ограниченной в условиях действия на систему ограниченных по величине возмущений.

$y_{св} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если все корни характеристического уравнения λ обладают отрицательной вещественной частью. Если хотя бы один вещественный корень λ_1 будет положительным или хотя бы одна пара комплексно-сопряженных корней будет иметь положительную вещественную часть, то в этом случае процесс будет расходящийся. Если в характеристическом уравнении системы имеется хотя бы один нулевой корень или хотя бы одна пара чисто мнимых корней $\lambda_{i,i+1} = \pm j\beta$, то система будет находиться на границе устойчивости.

Метод Ляпунова. Он дал первое определение устойчивости: В качестве возмущения Ляпунов рассматривал любое отклонение от установившегося режима, т.е. он рассматривал устойчивость как свойство свободного движения. Пусть $y^*(t)$ – обозначает некоторый установившийся режим, а действительное текущее знач. $y - y(t)$.

$y(t)$ – соответствует возмущенному движению. Отклонение возможного движения от невозможного обозначим через $x_i(t)$ $x_i(t) = y_i(t) - y_i^*(t)$ (*)- диж. уравнение в форме Коши в отклонениях. Невозможное движение $x^*=0$, x_i можно принять за координаты состояния системы. Если мы смогли бы найти все решения этого уравнения, то мы могли бы найти все возмущающие воздействия. В общем случае конкретное выражение зависит от y^* , т.е. при рассмотрении устойчивости необходимо указать об устойчивости какого режима идет

речь. Геометрическая трактовка устойчивости Ляпунова. Невозмущенное движение $x^*=0$ называется устойчивым, если задав трубку сколь угодно малого n -мерного сечения E можно подобрать в начальный момент времени t_0 такую область начальных условий d зависящая от E , что в дальнейшем увеличение t возмущенное движение $x(t)$ не выйдет из заданной трубки E . Аналитический критерий устойчивости Ляпунова. Невозмущенное движение $x^*=0$ называется устойчивым, если при заданном $E>0$ сколь угодно мало оно не было существует такое $d>0$ зависящее от E , что при начальных условиях если $x_i(t_0)<d$, то при дальнейшем движении $|x_i(t)|<E$. Если данное условие не выполняется хотя бы для одного x_i , то система неустойчива. Если при выполнении данных условий $x_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ то невозмущенное движение – асимптотически устойчивое. Если $x(t) \rightarrow 0$ при любых начальных отклонениях, то система называется устойчивой в целом. Ляпунов рассматривал в общем случае не линейную систему, а ее линеаризованный вариант. Он предположил теорему устойчивости, которая позволяет судить об устойчивости нелинейной системы по ее линеаризованному варианту. Если уравнение (*) разложить в ряд Тейлора: -Линейное уравнение 1-го приближения для него можно составить характеристическое уравнение. Для нелинейных систем к которым применимо разложение (**) существует 3 теоремы Ляпунова об исследовании устойчивости по 1-му приближению. Т.1. Невозмущенное движение $x^*=0$ устойчиво не зависимо от вида малых нелинейностей jI , если все корни характеристического уравнения $D(l)$ имеют отрицательные вещественные корни. Т.2. Невозмущенное движение $x^*=0$ не устойчиво не зависимо от вида малых нелинейностей jI , если хотя бы один корень характеристического уравнения $D(l)$ имеет положительную вещественную часть. Т.3. В случае наличия в каких-либо корнях характеристического уравнения нулевой вещественной части при всех остальных отрицательных ничего нельзя сказать об устойчивости невозмущенного движения $x^*=0$ по 1-му приближению, т.е. без специального исследования уравнения (**). По Т.3. система находящаяся на границе устойчивости.

3.1.3 Результаты и выводы: В ходе работы изучен первый метод Ляпунова.

3.2 Практическое занятие №2(2 часа).

Тема: «Второй метод Ляпунова»

3.2.1 Задание для работы:

1. Изучить основы второго метода Ляпунова

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

Одним из наиболее эффективных способов исследования устойчивости является второй метод Ляпунова (часто его называют также *прямым методом Ляпунова*), который не требует нахождения решения дифференциального уравнения.

Метод основан на идее замены анализа решений нелинейных уравнений произвольного порядка на оценку свойств этих решений с помощью скалярного дифференциального неравенства. При этом теряется информация о виде решений, но приобретает простота анализа устойчивости, поскольку исследуется изменение «расстояния» в пространстве состояний от текущей точки системы до начала координат. В качестве такой оценки расстояния можно использовать скалярную функцию переменных состояния, которую обозначим через $V(x)$.

Основная философия прямого метода Ляпунова является математическим расширением фундаментального физического наблюдения: если полная энергия механической (электрической) системы непрерывно рассеивается (убывает), то с течением времени система независимо от того является ли она линейной или нелинейной должна стремиться к состоянию равновесия. Отсюда мы можем судить об устойчивости системы путем исследования изменения единственной скалярной функции.

Пример. Рассмотрим нелинейную автономную управляемую систему масса-пружина-демпфер, динамика которой описывается уравнением

$$m\ddot{y} + b|\dot{y}|\dot{y} + k_0y + k_1y^3 = 0, \quad (*)$$

где $b|\dot{y}|\dot{y}$ - нелинейное рассеивание или демпфирование,

$k_0y + k_1y^3$ - нелинейная сила пружины.

Полная механическая энергия = кинетическая энергия + потенциальная энергия,

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \int_0^x (k_0y + k_1y^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k_0y^2 + \frac{1}{4}k_1y^4. \quad (**)$$

Сопоставляя определения устойчивости и механической энергии, мы можем увидеть определенную связь между механической энергией и понятиями, описанными ранее:

- Нулевая энергия соответствует состоянию равновесия ($y = 0, \dot{y} = 0$)
- Асимптотическая устойчивость влечет за собой сходимость механической энергии к нулю
- Неустойчивость связана с ростом механической энергии.

Эти связи говорят о том, значение скалярной величины, механической энергии непосредственно отражает длину вектора состояния, и кроме того, что свойство устойчивости системы можно охарактеризовать с помощью анализа изменения механической энергии.

Скорость изменения энергии в процессе движения системы, фактически движения изображающей точки, можно определить путем дифференцирования первого равенства в выражении (**) и используя (*),

$$\dot{V}(x) = m\dot{y} + (k_2 y + k_1 y^3)\dot{y} = y(-b\dot{y}|y|) = -b|y|^3. (***)$$

Выражение (***) влечет за собой, что энергия системы, начиная с определенного исходного значения, рассеивается до тех пор, пока масса не успокоится, т.е. $\dot{y} = 0$.

Прямой метод Ляпунова основан на обобщении понятий, связанных с вышерассмотренной системой масса-пружина-демпфер, на более сложные системы.

Понятно, что в случае устойчивого состояния равновесия фазовые траектории системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0, \quad (13)$$

с течением времени «стягиваются» к началу координат (рис. 8.2,а), при этом уменьшается расстояние от текущей точки до точки равновесия.

Для неустойчивого состояния равновесия фазовые траектории системы (13) расходятся (рис. 2,б), а расстояние увеличивается с течением времени.

Таким образом, суть второго метода Ляпунова сводится к оценке изменения некоторой функции переменных состояния системы $V(x)$, которую называют функцией Ляпунова, вдоль траекторий движения. Обсудим формальные свойства функций $V(x)$, используемые в дальнейшем.

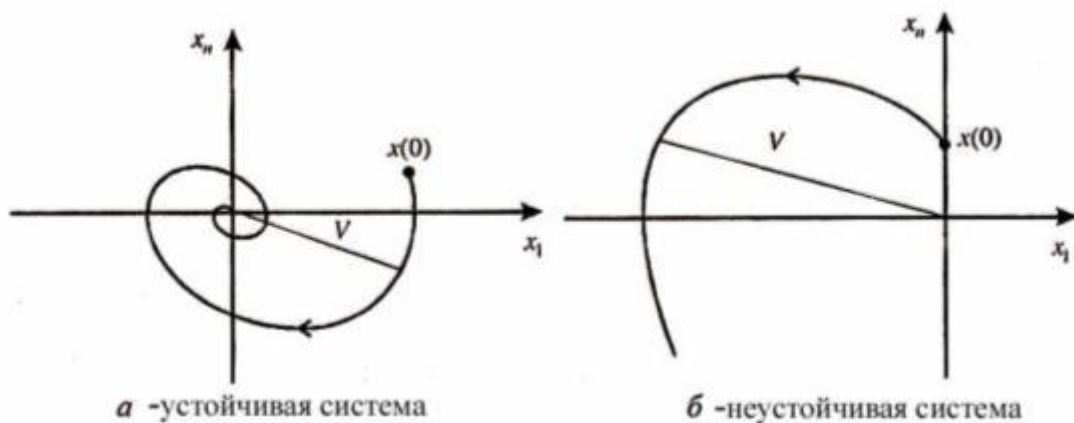


Рис. 2

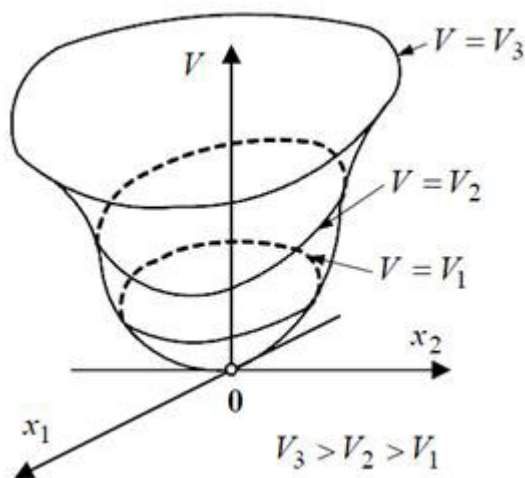
Рассмотрим функции $V(x)$ определенные и непрерывные в некоторой области пространства состояний D , содержащей начало координат и обладающие в этой области непрерывными частными производными по переменным x .

Функция $V(x)$ называется положительно определенной в области D , если она положительна для любых значений переменных из этой области и обращается в нуль только в начале координат, т. е. выполняются свойства

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

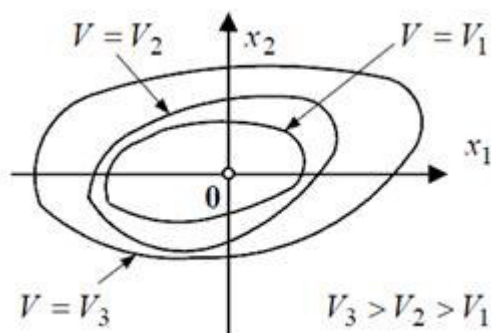
Дадим геометрическую интерпретацию положительно определенной функции.

Рассмотрим положительно определенную функцию $V(x)$ двух переменных x_1 и x_2 . В трехмерном пространстве $V(x)$ обычно является поверхностью подобной перевернутой чашке, как показано на рис. ниже. Нижняя точка чашки расположена в начале координат.



Двухразмерная геометрическая интерпретация может быть дана следующим образом.

На плоскости с координатами x_1 и x_2 линии уровня $V(x_1, x_2) = V_a = \text{const}$ обычно представляют овальные кривые, охватывающие начало координат, причем каждому овалу соответствует постоянное положительное значение V_a . Эти овалы, часто называемые *линиями уровня* или линиями постоянного значения V_a можно трактовать как проекции сечений чашки горизонтальными плоскостями на плоскость (x_1, x_2) , как показано на рис. ниже.



Функция переменных состояния называется отрицательно определенной в области D , если она отрицательна для любых значений переменных из этой области и обращается в нуль только в начале координат.

Полной производной функции Ляпунова в силу уравнения системы (13) (производной функции Ляпунова вдоль траекторий движения системы) называется функция $\dot{V}(x)$, которая определяется следующим образом:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (15)$$

Здесь $\frac{\partial V}{\partial x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$ - вектор-строка частных производных.

Полная производная функции Ляпунова представляет собой скалярное произведение вектор - строки $\partial V / \partial x$ и вектор - столбца $f(x)$ и может быть представлена в развернутой форме

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x)$$

Следует отметить, что полная производная функции Ляпунова $\dot{V}(x)$, так же как и сама функция Ляпунова $V(x)$, тождественно обращается в нуль в начале координат, поскольку $f(0) = 0$.

3.2.3 Результаты и выводы: В ходе работы изучен второй метод Ляпунова.

3.3 Практическое занятие №3(2 часа).

Тема: «Частотный метод исследования абсолютной устойчивости»

3.3.1 Задание для работы:

1. Изучить частотный метод исследования абсолютной устойчивости

3.3.2 Краткое описание проводимого занятия:

В случае устойчивой линейной части достаточный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе (рис.3.1) с однозначной нелинейной характеристикой , отвечающей требованию

$$0 \leq \frac{\partial f}{\partial x} \leq k \quad (3-20)$$

при ограниченном внешнем воздействии $g(t)$ имеет вид [4]

$$\operatorname{Re} W(j\omega) + \frac{1}{k} \geq 0 \quad (3-21)$$

или

$$\operatorname{Re} kW(j\omega) + 1 \geq 0 \quad (3-22)$$

Условие (3-20) ограничивает максимальное значение производной нелинейной характеристики величиной K .

На комплексной плоскости (рис.3.10) выполнение условия (3-22) означает, что АФХ $kW(j\omega)$ должна быть для всех $\omega \geq 0$ расположена правее прямой $\operatorname{Re} kW(j\omega) = -1$.

Для исследования абсолютной устойчивости процессов в НС с помощью логарифмических частотных характеристик запишем (3-22) в виде

$$1 \geq -kH(\omega) \cos \varphi(\omega) \quad (3-23)$$

где $H(\omega) = \operatorname{mod} W(j\omega)$;

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

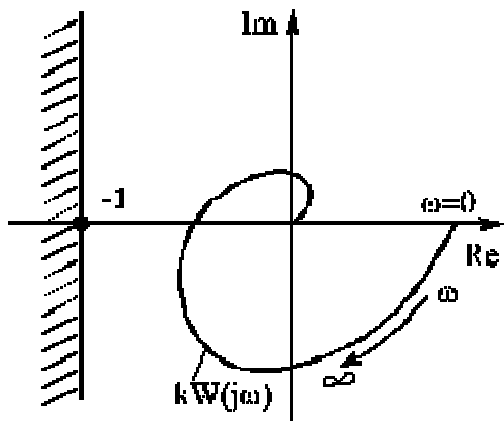


Рис. 3.10

Условие (3-23) всегда выполняется при $\cos \varphi(\omega) > 0$, и поэтому необходимо исследовать систему только при значениях $\varphi(\omega)$, при которых $\cos \varphi(\omega) < 0$.

Условие (3-23) запишем в виде

$$kH(\omega) \leq \frac{-1}{\cos \varphi(\omega)} \quad (3-24)$$

Переходя к логарифмическим характеристикам, получим условие абсолютной устойчивости процессов

$$20 \lg kH(\omega) \leq -20 \lg \cos \varphi(\omega), \quad (3-25)$$

которое должно выполняться при значениях $\varphi(\omega)$, удовлетворяющих неравенству

$$-(4m+1)\frac{\pi}{2} \geq \varphi(\omega) \geq -(4m+3)\frac{\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3-26)$$

Обозначим

$$L_{\text{кр}}(\omega) = 20 \lg kH(\omega) \quad (3-27)$$

ЛАХ приведенной линейной части:

$$L_{\text{кр}}(\omega) = -20 \lg \cos \varphi(\omega). \quad (3-28)$$

ЛАХ критического коэффициента передачи.

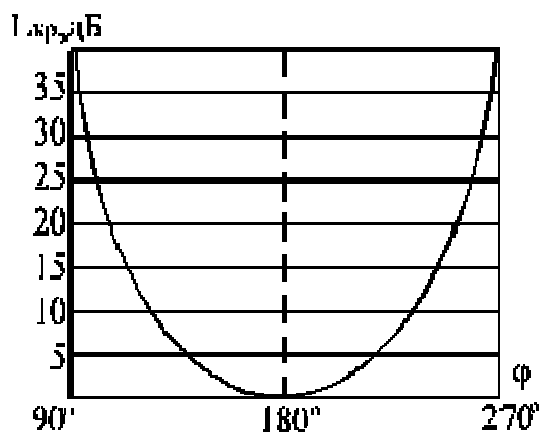


Рис. 3.11

Рассчитанная по (3-28) зависимость $L_{\text{кр}}(\omega)$ от фазового сдвига $\varphi(\omega)$ приведена на рис.3.11 и $L_{\text{кр}}(\omega)$ полностью определена в диапазоне

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi(\omega) \leq \frac{3}{2} \pi \quad (3-29)$$

изменения $\varphi(\omega)$, определяющего устойчивость системы.

Методика практического применения логарифмического метода исследования абсолютной устойчивости процессов в НС, вызванных ограниченным воздействием $g(t)$, состоит в следующем:

1. По известной нелинейной характеристике $f(x)$ найти максимальное значение

$$\max \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = k$$

производной

В общем случае может быть задан только класс нелинейных характеристик, но при этом должна быть задана и величина k .

2. Строится ЛАХ приведенной непрерывной $L_{\kappa\Phi}(\omega) = 20 \lg kH(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$.

3. В диапазоне частот, где выполняется условие (3-29) строится ЛАХ критического коэффициента передачи $L_{\kappa\Phi}(\omega)$ в соответствии с выражением (3-28).

4. Проверяется выполнение условия (3-25), т.е. характеристики $L_{\kappa\Phi}(\omega)$ и $L_{\kappa\Phi}(\omega)$ не должны пересекаться. При этом процессы в НС, вызванные ограниченным воздействием $g(t)$ будут абсолютно устойчивы, т.е. асимптотически устойчивы в целом при различных однозначных нелинейных характеристиках, производная которых принадлежит сектору $(0, k)$.

5. Если при заданном значении k условие абсолютной устойчивости (3-25) не выполняется, то необходимо найти граничное значение $k_{\text{гф}}$ при котором условие (3-25) выполняется (см. пример 3.3). Однако следует учитывать, что условие (3-25) дает достаточное, но не необходимое условие устойчивости. Это значит, что при выполнении (3-25) система будет наверняка устойчива, но возможны и другие сочетания параметров, при которых система будет также устойчива. Для проверки необходимо построить переходной процесс.

Пример 3.3. Рассмотрим систему с астатизмом первого порядка, передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k_1(1 + \tau_1 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}$$

и параметрами $k_1 = 20 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0,04 \text{ с}$, $T_2 = 0,01 \text{ с}$, $T_3 = 0,005 \text{ с}$, $\tau_1 = 0,02 \text{ с}$.

Необходимо определить граничное значение коэффициента $k_{\text{гф}}$ для нелинейной функции, удовлетворяющей условию (3-20), при котором процессы в системе абсолютно устойчивы. На рис.3.12 показаны ЛЧХ линейной части системы $L_1(\omega)$, ФЧХ - $\varphi_1(\omega)$ и ЛЧХ критического коэффициента передачи $L_{\kappa\Phi}(\omega)$.

Для определения $k_{\text{гф}}$ переместим $L_1(\omega)$, до касания с $L_{\kappa\Phi}(\omega)$ и определим величину перемещения ΔL на частоте касания

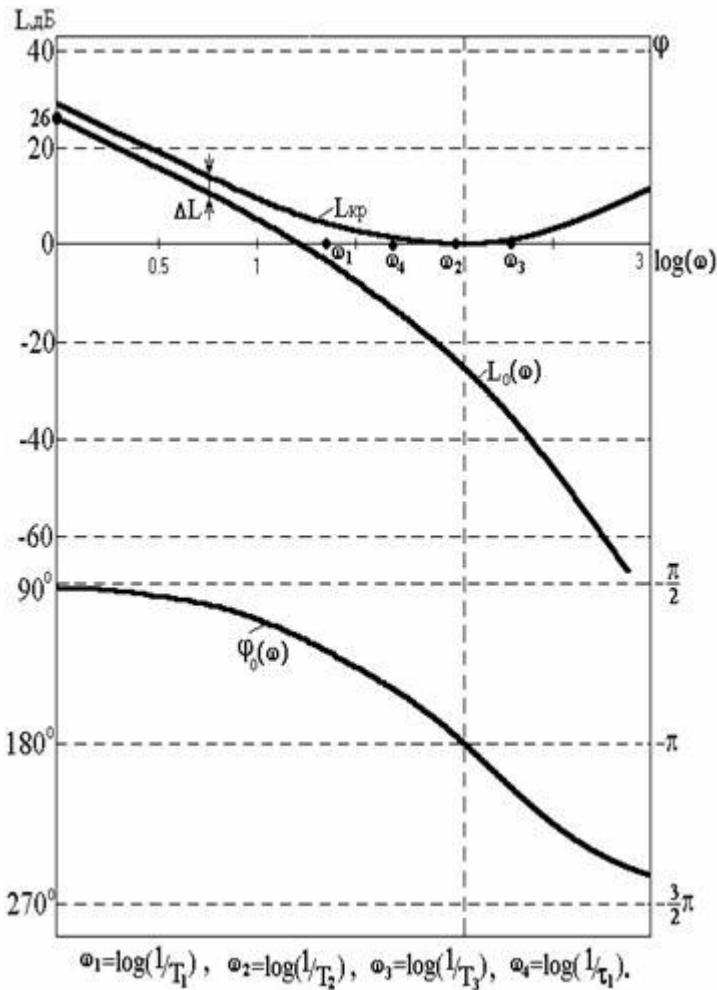


Рис. 3.12

$$\Delta L = \min [L_{\text{кр}}(\omega) - L_0(\omega)] , \quad (3-30)$$

а затем из выражения

$$\Delta L = 20 \lg k_{\text{к}} \quad (3-31)$$

определяется значение коэффициента подъема $k_{\text{к}}$. Граничное значение $k_{\text{кр}}$ вычисляется по выражению

$$k_{\text{кр}} = k \cdot k_{\text{к}} . \quad (3-32)$$

В данном примере $\Delta L = 3 \text{ дБ}$.

Поскольку $L_0(\omega) = 20 \lg |W'(j\omega)|$, то ЛАХ линейной части построена при $k = 1$. Следовательно,

$$k_{\text{кр}} = k_{\text{к}} = 10^{\frac{3}{20}} = 1,41$$

При неустойчивой линейной части структурная схема НС (рис. 3.1) преобразуется к виду (рис. 3.13).

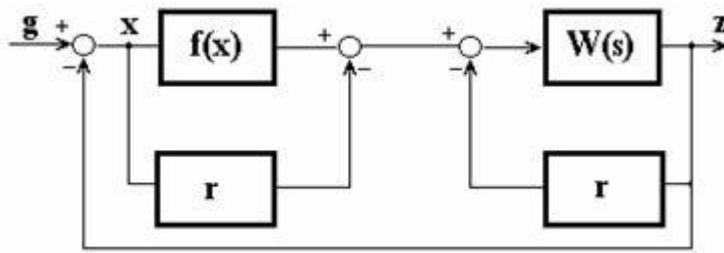


Рис. 3.13

Передаточная функция $W_*(S)$ и нелинейная характеристика $f_H(x)$ преобразованной системы связаны с $W(S)$ и $f(x)$ соотношениями

$$W_*(S) = \frac{W(S)}{1 + rW(S)}, \quad (3-33)$$

$$f_H(x) = f(x) - rx. \quad (3-34)$$

Коэффициент $r > 0$ выбирается из условия устойчивости внутреннего контура с

ПФ $W_*(S)$. Если производная от нелинейной характеристики $\frac{\partial f}{\partial x}$ принадлежит полюсе (r, k) , т.е.

$$r < \frac{\partial f}{\partial x} < k, \quad (3-35)$$

то для абсолютной устойчивости процессов в системе с одним нелинейным элементом достаточно, чтобы при заданном $r > 0$ выполнялось условие [4]

$$\operatorname{Re} \frac{W(j\omega)}{1 + rW(j\omega)} + \frac{1}{k - r} \geq 0. \quad (3-36)$$

Выражение (3-36) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} W_*(j\omega) + \frac{1}{k_n} \geq 0, \quad (3-37)$$

$$\text{где } k_n = k - r. \quad (3-38)$$

Условие (3-37) совпадает по виду с условием (3-21).

Таким образом, в случае неустойчивой линейной части необходимо:

а) используя ЛЧХ линейной части $rW(j\omega)$, выбрать параметр r таким образом, чтобы замкнутая система согласно критерию Найквиста была устойчива, а запас по фазе $\gamma \geq 30^\circ$

. Для этого ЛАХ $20 \lg |W(j\omega)|$ перемещают вдоль оси ординат и определяют частоту среза ω_c при которой $\gamma(\omega_c) \geq 30^\circ$. Величина смещения ЛАХ составляет $20 \lg r$;

б) используя номограмму замыкания по ЛЧХ, соответствующим ПФ $W(j\omega)$, найти ЛЧХ ПФ $W_*(j\omega)$;

в) вычислить коэффициент по выражению (3-38);

г) исследовать абсолютную устойчивость процессов по методике для НС с устойчивой линейной части.

3.3.3 Результаты и выводы: В ходе работы изучен частотный метод исследования абсолютной устойчивости.

3.4 Практическое занятие №4(2 часа).

Тема: «Критерий устойчивости Гурвица»

3.4.1 Задание для работы:

1. Изучить критерий устойчивости Гурвица

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

Определение устойчивости АСУ по корням характеристического уравнения сопряжено с большими трудностями, связанными с решением дифференциального уравнения и большим объемом вычислений. Поэтому в практике ТАУ для определения устойчивости чаще используют критерии устойчивости.

Критерием устойчивости называется совокупность правил, методов или алгоритмов, которые позволяют судить об устойчивости АСУ без решения характеристического уравнения, используя другие признаки. Все критерии можно разделить на две группы: алгебраические критерии устойчивости и частотные критерии устойчивости. К алгебраическим критериям устойчивости относятся:

- 1) критерий устойчивости Вишнеградского;
- 2) критерий устойчивости Гурвица;
- 3) критерий устойчивости Рауса.

. К частотным критериям устойчивости относятся:

- 4) частотный критерий устойчивости Найквиста;
- 5) частотный критерий устойчивости Михайлова.

Критерий устойчивости Гурвица можно сформулировать в форме, предложенной автором:

Если система описывается линейным дифференциальным уравнением, характеристическое уравнение которого имеет вид:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{(n-1)} + a_{n-2} p^{n-2} + a_{n-3} p^{n-3} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (8.5)$$

то для того, чтобы она была устойчива, т.е. чтобы все действительные корни и действительные части комплексных корней характеристического уравнения были бы отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты уравнения имели бы один и тот же знак, а диагональный детерминант порядка $n-1$, составленный из коэффициентов уравнения, и все его диагональные миноры были бы положительными.

Диагональный детерминант составляется следующим образом: по диагонали определителя выписывают коэффициенты характеристического уравнения, начиная с a_{n-1} по a_1 . Таким образом, получается матрица, содержащая $n-1$ строку и $n-1$ столбец. Столбцы заполняют следующим образом: вверх выписывают коэффициенты с убывающими индексами, а вниз – с возрастающими. При достижении нулевого или n -го индекса далее ставят нули.

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \quad (8.6)$$

Таким образом, получается квадратная матрица размером $(n-1) \times (n-1)$, на главной диагонали которой расположены коэффициенты от a_{n-1} по a_1 .

Каждый диагональный минор получают из предыдущего минора путем вычеркивания последней строки и последнего столбца.

$$D_{n-2} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_3 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_4 & a_2 \end{vmatrix} \quad (8.7)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad (8.8)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (8.9)$$

$$D_1 = a_{n-1} \quad (8.10)$$

Для решения вопроса об устойчивости АСУ выполняется анализ матрицы по следующим правилам:

- 1) если определители матрицы и всех диагональных миноров положительны, то АСУ устойчива;
- 2) если определитель или хотя бы один минор равен нулю, то АСУ находится на границе устойчивости;
- 3) если определитель или хотя бы один минор отрицательны, то АСУ неустойчива.

Рассмотрим конкретные примеры исследования систем на устойчивость с помощью критерия Гурвица.

Пример №1. АСУ включает статический объект второго порядка с передаточной

функцией $W_{os}(p) = \frac{k_{os}}{(T_1 p + 1)(T_2 + 1)}$ и интегральный регулятор с передаточной

функцией $W_r(p) = \frac{k_r}{p}$. Определить при каком значении коэффициента передачи регулятора система будет устойчивой.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы, при этом неважно по какому каналу будет записана передаточная функция, так как нас будет интересовать только знаменатель передаточной функции.

$$W_1(p) = \frac{W_{os}(p)W_r(p)}{1 + W_{os}(p)W_r(p)} \quad (8.11)$$

Знаменатель передаточной функции, приравненный к нулю, является характеристическим уравнением, т.е.

$$1 + W_{os}(p)W_r(p) = 0 \quad (8.12)$$

Подставим в уравнение (8.12) значения передаточных функций:

$$1 + \frac{k_{os}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} * \frac{k_r}{p} = 0 \quad (8.13)$$

Приводя уравнение (8.13) к общему знаменателю и приравнявая числитель к нулю, получим характеристическое уравнение для системы

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_r k_{os} = 0 \quad (8.14)$$

Составим главный детерминант, который для данного случая имеет второй порядок:

$$D_2 = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k_p k_{ss} \\ T_1 T_2 & 1 \end{vmatrix} = T_1 + T_2 - T_1 T_2 k_p k_{ss} > 0 \quad (8.15)$$

Из последнего равенства получим

$$k_p < \frac{1}{k_{ss}} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \quad (8.16)$$

В уравнении (8.16) слева записан параметр настройки регулятора, а справа параметры объекта. Чтобы система была более устойчивой, необходимо иметь как можно меньшее значение коэффициента передачи регулятора. Но в этом случае регулятор будет медленно воздействовать на объект. Поэтому приходится принимать компромиссное решение: чтобы система была устойчивой и регулятор достаточно быстро воздействовал на объект.

Если в уравнении (8.16) поставить знак равенства, т.е. $k_p = \frac{1}{k_{ss}} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$, то система

окажется на границе устойчивости. Если $k_p > \frac{1}{k_{ss}} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$, то система будет неустойчивой. Поскольку параметры объекта изменяются довольно медленно, то воздействовать на характер переходного процесса можно, изменяя параметры регулятора.

Коэффициент передачи регулятора, при котором система оказывается на границе устойчивости, называется критическим.

$$k_p^* = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 k_{ss}} \quad (8.17)$$

Условие (8.17) можно записать и так

$$k_p^* k_{ss} T_1 T_2 = T_1 + T_2 \quad (8.18)$$

Уравнение (8.18) перепишем в форме

$$XY=1 \quad (8.19)$$

Уравнение (8.19) является уравнением гиперболы Вышнеградского, который сформулировал критерий устойчивости для систем, описываемых уравнениями не выше третьего порядка.

При переходе от уравнения (8.18) к уравнению (8.19) необходимо соблюдать следующие правила:

- 1) параметры X и Y должны быть безразмерными;
- 2) параметр X должен быть пропорционален коэффициенту передачи регулятора.

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + \kappa_p \kappa_{ос} = 0$$

$$T_1 + T_2 = \kappa_p \kappa_{ос} T_1 T_2$$

$$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \kappa_p \kappa_{ос} = 1$$

$$\frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2) T_1} = X \quad (8.20)$$

$$\kappa_p \kappa_{ос} T_1 = Y \quad (8.21)$$

Построим гиперболу Вышнеградского в полученных координатах (рис. 8.4).

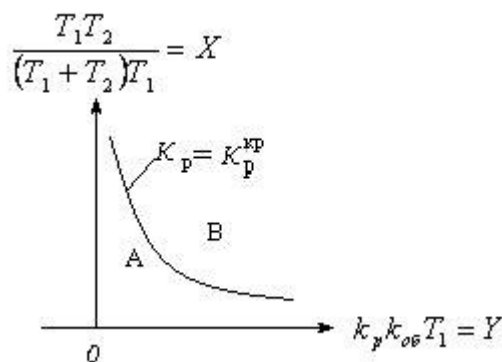


Рисунок 8.4 – Гипербола Вышнеградского для систем третьего порядка

Пример №2. Рассмотрим задачу, сформулированную в примере №1, но для случая, когда объект имеет передаточную функцию вида

$$W_{ос}(p) = \frac{\kappa_{ос}}{T_{ос} p + 1}$$

Приравняв в уравнении (8.14) T_2 к нулю, получим характеристическое уравнение

$$T_{ос} p^2 + p + \kappa_p \kappa_{ос} = 0 \quad (8.22)$$

Составим главный детерминант, который для данного случая имеет первый порядок:

$$D_1 = 1 > 0$$

Получено условие, которое выполняется при любых параметрах системы.

Системы, которые при определенных значениях своих параметров могут быть устойчивыми, называются структурно-устойчивыми.

Пример №3. АСУ включает астатический объект второго порядка с передаточной

функцией $W_{ос}(p) = \frac{\kappa_{ос}}{(T_1 p + 1)p}$ и интегральный регулятор с передаточной

функцией $W_p(p) = \frac{k_p}{p}$. Определить, при каком значении коэффициента передачи регулятора система будет устойчивой.

Используя уравнение (8.13) и подставляя в него значения передаточных функций, получим

$$1 + \frac{K_{ос} K_p}{p^2 (T_{ос} p + 1)} = 0 \quad (8.23)$$

или

$$T_{ос} p^3 + p^2 + K_{ос} K_p = 0 \quad (8.24)$$

Перепишем уравнение (8.24) следующим образом:

$$T_{ос} p^3 + p^2 + 0 \cdot p + K_{ос} K_p = 0$$

Тогда главный детерминант примет вид:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & K_{ос} K_p \\ T_{ос} & 0 \end{vmatrix} = -T_{ос} K_{ос} K_p$$

В данном случае главный детерминант отрицательный, т.е. система неустойчивая, при этом она неустойчивая при любых своих параметрах. О таких системах говорят, что она структурно-неустойчивая.

Из последнего примера можно сделать вывод: что интегральный регулятор нельзя устанавливать на астатическом объекте, так как в любом случае мы получим неустойчивую систему.

Несмотря на простоту применения критерия Гурвица, он обладает рядом недостатков:

- 1) необходимо рассматривать передаточную функцию замкнутой системы, которая получается достаточно сложной;
- 2) с помощью критерия можно анализировать системы, у которых в знаменателе передаточной функции стоит рациональный многочлен.

Действительно, если передаточная функция объекта $W_{ос}(p) = \frac{k_{ос}}{(T_{ос} p + 1)} e^{-\tau p}$, а регулятора $W_p(p) = \frac{k_p}{p}$, то характеристическое уравнение имеет вид:

$$T_{ос} p^2 + p + K_{ос} K_p e^{-\tau p} = 0 \quad (8.25)$$

С помощью критерия устойчивости Гурвица эту систему исследовать нельзя. В этом случае нужны другие критерии.

3.4.3 Результаты и выводы: В ходе работы изучен критерий устойчивости Гурвица.

3.5 Практическое занятие №5(2 часа).

Тема: «Критерий устойчивости Михайлова»

3.5.1 Задание для работы:

1. Изучить критерий устойчивости Михайлова

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

Частотные критерии устойчивости получили достаточно широкое практическое применение, т.к. позволяют определить устойчивость замкнутой системы по более простой передаточной функции разомкнутой системы. Кроме того, анализ устойчивости можно выполнить по экспериментально определенным частотным характеристикам.

Критерий устойчивости сформулирован в 1938 г. российским ученым Михайловым.

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

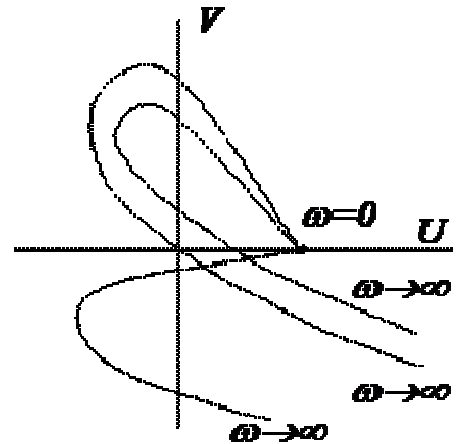
Путем подстановки $\lambda = j\omega$ данное уравнение записывается:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega)$, $V(\omega)$ – соответственно вещественная и мнимая части характеристического многочлена.

Критерий заключается в следующем (рис. 21): чтобы замкнутая система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы годограф характеристического многочлена замкнутой системы (годограф Михайлова) начинался на положительной части действительной оси и проходил последовательно в положительном направлении, исключая точку начала координат, n квадрантов комплексной плоскости (где n – порядок характеристического уравнения).

$$n \text{ квадрантов}$$



годографы для устойчивых
 систем при $n = 4$
 систем при $n = 1 \div 6$

годографы для неустойчивых

Рис. 21. Графическое изображение годографов Михайлова для устойчивых и неустойчивых систем

Практический пример

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы регулирования имеет вид:

$$\lambda^3 + 55\lambda^2 + 700\lambda + 11250 = 0.$$

Проверить устойчивость системы путем построения годографа Михайлова.

При $\lambda^3 + 55\lambda^2 + 700\lambda + 11250 = 0$ данное уравнение записывается

$$U(\omega) + jV(\omega) = (11250 - 55\omega^2) + j\omega(700 - \omega^2).$$

Зададимся различными значениями ω и вычислим U и V .

Таблица 1

Данные вычислений вещественной и мнимой частей годографа Михайлова

ω	0	5	10	15	20	25	30
$U(\omega)$	11250	9875	5750	0	-10750	-27250	-38250
$V(\omega)$	0	3375	6000	17085	-6000	0	-6000

По данным табл. 1 построим годограф Михайлова.

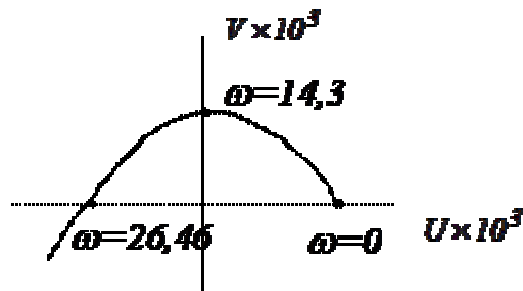


Рис. 22. Годограф

Михайлова для замкнутой системы

Годограф при $n = 3$ пересекает третий квадрант, следовательно, система регулирования устойчива.

3.5.3 Результаты и выводы: В ходе работы изучен критерий устойчивости Михайлова

3.6 Практическое занятие №6(2 часа).

Тема: «Критерий устойчивости Найквиста»

3.6.1 Задание для работы:

1. Изучить критерий устойчивости Найквиста

3. 6.2 Краткое описание проводимого занятия:

Этот критерий, предложенный в 1932 г. американским ученым Г. Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике (АФЧХ) разомкнутой системы (рис. 7.5).

Рассмотрим сначала случай 1, когда известно, что система в разомкнутом состоянии устойчива (рис. 7.5, а). Условие устойчивости замкнутой системы тогда сводится к требованию, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$. На рис. 7.5, а характеристики 1 и 4 соответствуют устойчивым системам, характеристика 3 – неустойчивой, а характеристика 2 – нахождению системы на границе устойчивости. Если, например, уменьшать коэффициент передачи в неустойчивой системе, ее АФЧХ будет сжиматься к началу координат, в результате чего система станет в конце концов устойчивой. Наоборот, при увеличении коэффициента передачи характеристика ранее устойчивой системы в конце концов охватит точку $(-1, j0)$, и система потеряет устойчивость.

Для случая 2, т.е. для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, критерий Найквиста имеет такую формулировку: для устойчивости системы в замкнутом состоянии АФЧХ разомкнутой системы должна охватывать точку $(-1, j0)$. При этом число пересечений ею отрицательной действительной полуоси левее точки $(-1, j0)$ сверху вниз должно быть на $k/2$ больше числа пересечений в обратном направлении, где k – число правых полюсов передаточной функции $W(s)$ разомкнутой системы, т.е. число полюсов с положительной действительной частью.

На рис. 7.5, в качестве примера показаны две АФЧХ разомкнутой системы, неустойчивой в разомкнутом состоянии вследствие наличия правых корней, но устойчивой в замкнутом состоянии. Характеристика 1 соответствует $k = 1$, а характеристика 2 – значению $k = 2$. (В первом случае имеем «половину» пересечения действительной оси левее точки $(-1, j0)$).

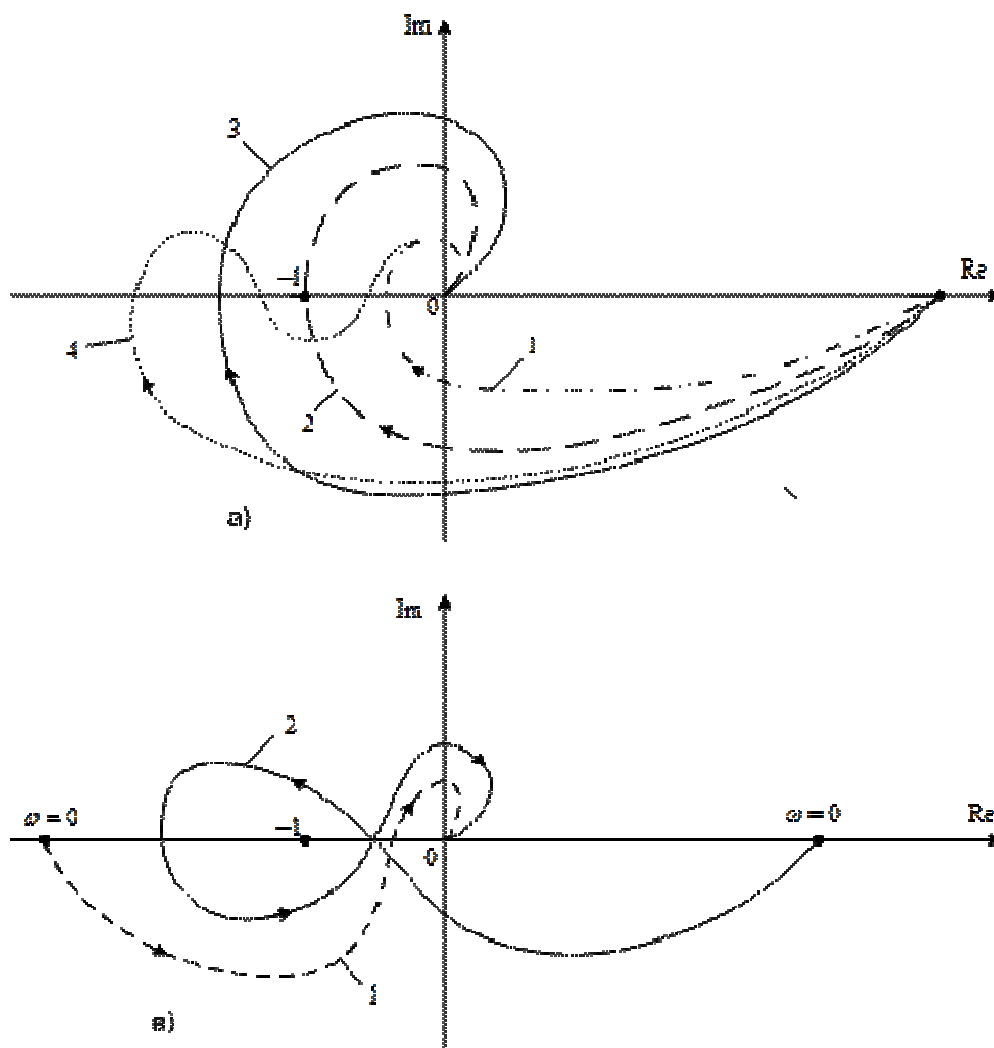


Рис. 7.5. К критерию устойчивости Найквиста

Таким образом, в общем случае при применении критерия Найквиста необходимо предварительно определить число правых полюсов $W(s)$. Для одноконтурной системы, когда знаменатель $W(s)$ представляет собой произведение знаменателей передаточных функций отдельных звеньев, это число находится легко, поскольку полюсами $W(s)$ являются полюсы передаточных функций отдельных звеньев. У многоконтурных систем, особенно с перекрестными связями, задача определения числа k усложняется, и поэтому в этих случаях целесообразно отказаться от применения критерия Найквиста. В соответствии с критерием Найквиста об устойчивости можно судить не только по АФЧХ, но и совместно по АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы. Обычно при этом пользуются логарифмическими характеристиками, что представляет большое удобство в силу простоты их построения.

Согласно критерию Найквиста, для системы, устойчивой в разомкнутом состоянии, условием устойчивости ее в замкнутом состоянии является неохват АФЧХ $W(j\omega)$ точки $(-1, j0)$. Последнее имеет место, если при частоте, на которой $A(\omega) = 1$, абсолютное значение фазы меньше π .

Сказанное непосредственно следует из рис. 7.5, а.

Таким образом, применительно к логарифмическим характеристикам, если учесть при этом, что значению $A = 1$ соответствует $L = 20 \lg A = 0$, критерий устойчивости Найквиста для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии, сводится к тому, что ЛАХ должна пересечь ось абсцисс раньше, чем фаза, спадая, окончательно перейдет за значение $-\pi$. Или иными словами: на частоте среза ω_c величина фазы должна быть меньше π .

Изложенное иллюстрируется на рис. 7.6.

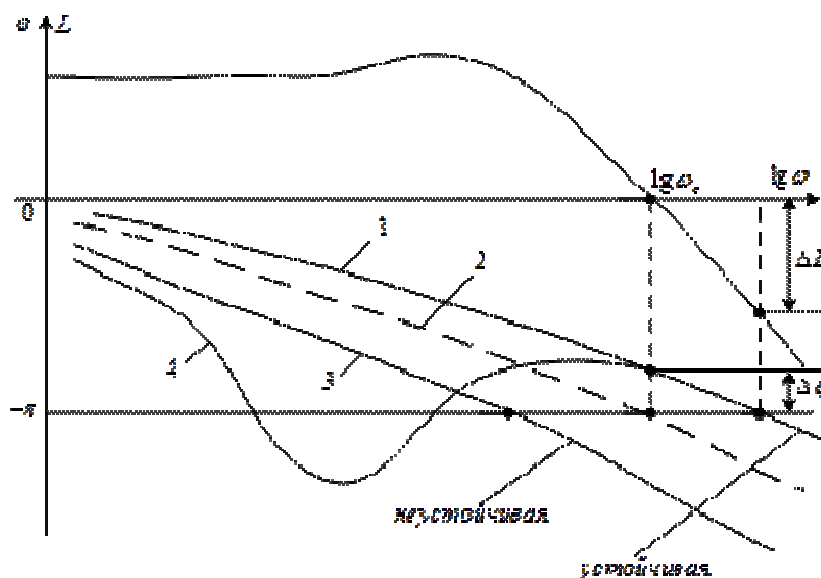


Рис. 7.6. Логарифмический критерий устойчивости Найквиста

Здесь изображены ЛАХ $L(\omega)$ и четыре варианта ЛФХ $\varphi(\omega)$. В случае ЛФХ 1 и 4 замкнутая система устойчива, причем характеристика 4 соответствует АФЧХ 4 на рис. 7.5, а. ЛФХ 2 соответствует нахождению замкнутой системы на границе устойчивости, ЛФХ 3 – неустойчивой замкнутой системе.

Для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, требования к ЛАХ и ЛФХ в отношении устойчивости можно сформулировать, исходя из соответствующих требований к АФЧХ. В частности, для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, условием устойчивости в замкнутом состоянии является следующее: при положительной ЛАХ число пересечений ЛФХ уровня $-\pi$ снизу вверх должно быть на $k/2$ раз больше числа пересечений в обратном направлении.

При оценке устойчивости систем одного факта устойчивости недостаточно. Необходимо еще оценить величину *запаса устойчивости*, т.е. степени удаленности системы от границы устойчивости. Система, которая теоретически является устойчивой, но находится очень близко к границе устойчивости, практически при ее реализации может оказаться неустойчивой как вследствие неточности математического описания системы, использованного при оценке устойчивости, так и из-за изменения во времени параметров системы.

В случае применения критерия Рауса-Гурвица о запасе устойчивости можно судить по тому запасу, с которым выполняются входящие в этот критерий неравенства. При использовании графических критериев Михайлова и Найквиста запас устойчивости определяется удаленностью соответствующих характеристик от критического положения, при котором система находится на границе устойчивости. Для критерия Михайлова это

будет удаленность годографа $D(j\omega)$ от начала координат, а для критерия Найквиста – удаленность характеристики $W(j\omega)$ от точки $(-1, j0)$.

Основное распространение в качестве меры запаса устойчивости получили вытекающие из критерия Найквиста две величины – запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ и запас устойчивости по амплитуде ΔL . Эти величины показаны на рис. 7.6 для системы с ЛФХ, представленной кривой 1. Аналогично они могут быть найдены и по АФЧХ.

Запас устойчивости по фазе определяется величиной $\Delta\varphi$, на которую должно возрасти запаздывание по фазе в системе на частоте среза ω_c , чтобы система оказалась на границе устойчивости.

Запас устойчивости по амплитуде определяется величиной ΔL допустимого подъема ЛАХ, при котором система окажется на границе устойчивости. Таким образом, запас по амплитуде представляет собой запас по коэффициенту передачи k разомкнутой системы по отношению к его критическому по устойчивости значению.

При проектировании САУ рекомендуется выбирать $\Delta\varphi \geq 30^\circ$, а $\Delta L \geq 6$ дБ. Последнее соответствует примерно двойному запасу коэффициента передачи по устойчивости.

Рассмотренные критерии устойчивости тем или иным способом оценивают один и тот же факт: имеются ли среди корней характеристического уравнения замкнутой системы корни с положительной вещественной частью. Поэтому все они дают одинаковый результат в оценке устойчивости системы.

Надо отметить, что прежде чем исследовать устойчивость САУ с помощью того или иного критерия, следует убедиться, что необходимое условие устойчивости выполняется, т.е. *все коэффициенты характеристического уравнения системы являются положительными числами.*

Каждый из критериев применяют в зависимости от того, какими исходными характеристиками и данными располагают. Если известны дифференциальные уравнения системы, то чаще применяют алгебраические критерии устойчивости.

Достоинством алгебраических критериев является сравнительная простота применения, а недостатком – то, что они не позволяют оценить влияние на устойчивость системы параметров отдельных ее элементов. Этого недостатка лишен графоаналитический критерий Михайлова.

Чтобы с помощью критерия Михайлова оценить влияние изменения параметров элементов системы на ее устойчивость, необходимо построить кривую Михайлова при заданном значении интересующего нас параметра. А потом изменять этот параметр и смотреть, как будет меняться кривая Михайлова.

При известной АФЧХ используют частотный критерий Найквиста. С помощью этого критерия также можно оценить влияние параметров элементов системы на ее устойчивость. АФЧХ можно снять экспериментально.

Оценка устойчивости автоматической системы по ее структуре.

В ряде случаев оценить устойчивость автоматической системы можно по ее структуре. Это значительно сокращает время, так как нет необходимости составлять характеристическое уравнение.

Если система имеет такую структуру, что в ней невозможно обеспечить устойчивость ни при каком значении ее элементов, то такая система называется *структурно-неустойчивой*.

Оценим устойчивость данной системы по ее структуре. Например, если система имеет два интегрирующих звена, не охваченных жесткой обратной связью, и не имеет последовательно включенных дифференцирующих звеньев, то она будет неустойчивой при любом значении параметров ее элементов.

Покажем это на примере простейшей системы, состоящей из одного апериодического и двух интегрирующих звеньев. Передаточная функция такой системы в разомкнутом состоянии

$$W(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)},$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы

$$Ts^3 + s^2 + K = 0.$$

Для этого уравнения не выполняется необходимое условие устойчивости. Следовательно, система будет неустойчива при любых значениях параметров T и K , т.е. она будет структурно-неустойчивой.

Структурно-неустойчивую систему можно превратить в устойчивую только изменением ее структуры, т.е. введением дополнительных элементов, например, дифференцирующих элементов при включении пропорциональных элементов параллельно интегрирующим.

Запас устойчивости САУ.

Запас устойчивости – это количественная оценка отклонения значений параметров системы или ее характеристик от зоны, опасной с точки зрения устойчивости. Запас устойчивости по параметрам характеризует расстояние граничной кривой, определяющей область разрешенных значений параметров, от границы области устойчивости. На рис. 7.7 запас устойчивости по параметрам T и K обозначен через h .

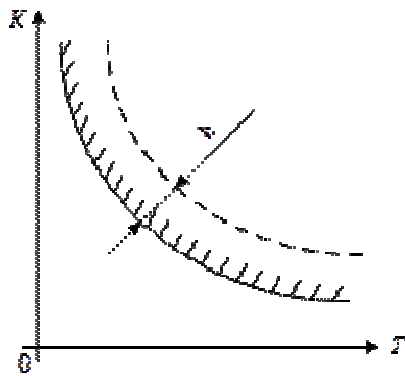


Рис. 7.7. Запас устойчивости по параметрам K и T

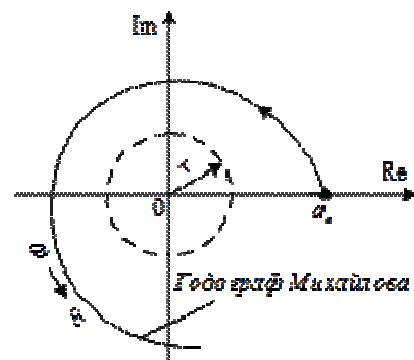


Рис. 7.8. Определение запаса устойчивости при использовании критерия Михайлова

Запас устойчивости по критерию Михайлова равен радиусу окружности r , в которую не должна заходить кривая Михайлова (рис. 7.8). Центром окружности является «опасная» точка при применении критерия Михайлова, т.е. начало координат.

При применении критерия Найквиста «опасной» точкой является точка с координатами $-1, j0$. Оценка запаса устойчивости, исходя из этого критерия, производится по амплитуде и фазе. Запас устойчивости по амплитуде A (рис. 7.9,а) равен расстоянию от точки пересечения АФЧХ разомкнутой системы вещественной оси до точки $-1, j0$, а запас по фазе φ_1 (рис. 7.9,а) – углу между вещественной осью и вектором, проведенным из начала координат в точку пересечения АФЧХ с окружностью единичного радиуса.

При оценке устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам запас устойчивости по амплитуде определяется как ордината ЛАХ при фазе $\varphi = -\pi$ и измеряется в децибелах. Запас устойчивости по фазе φ_1 определяется по фазовой частотной характеристике при частоте среза ω_c , т.е. при частоте пересечения ЛАХ оси частот. В этой точке значение ЛАХ равно нулю, так как модуль АФЧХ в этой точке равен единице.

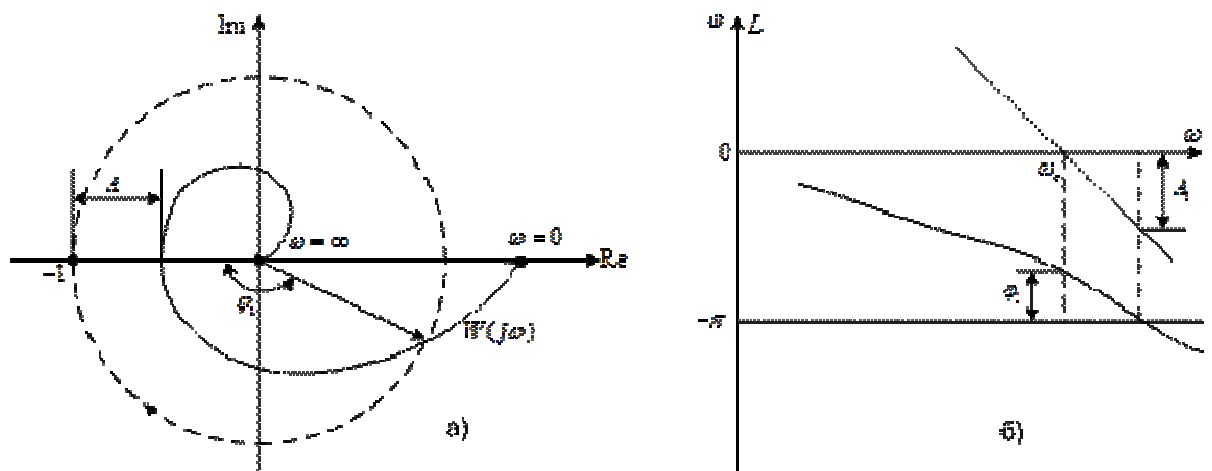


Рис. 7.9. К определению запаса устойчивости по фазе и по амплитуде с помощью АФЧХ (а) и ЛАХ и ФЧХ (б) разомкнутой системы.

На рис. 7.9,б запас по амплитуде A_1 выражен в логарифмическом масштабе. Чем больше по абсолютной величине A_1 , тем дальше от точки -1 пересекает АФЧХ устойчивой системы вещественную ось и, следовательно, тем больше величина A (рис. 7.9,а). Отсюда следует, что запасы по амплитудам A и A_1 одинаково характеризуют расположение АФЧХ разомкнутой системы при фазе $-\pi$, только измеряются они в разных масштабах.

3.6.3 Результаты и выводы: В ходе работы изучен критерий устойчивости Найквиста.

3.7 Практическое занятие №7(2 часа).

Тема: «Динамическое программирование»

3.7.1 Задание для работы:

1. Изучить особенности динамического программирования

3.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

Динамическое программирование (ДП) - метод решения задач путем составления последовательности из подзадач таким образом, что:

- первый элемент последовательности (возможно несколько элементов) имеет тривиальное решение
- последний элемент этой последовательности - это исходная задача
- каждая задача этой последовательности может быть решена с использованием решения подзадач с меньшими номерами

Другими словами, для решения задачи T методом ДП составляется некоторая последовательность подзадач T_1, T_2, \dots, T_n такая, что решение задачи T_1 уже имеет решение, $T = T_n$, и самое главное, что зная решения задач T_1, T_2, \dots, T_{i-1} можно вывести решение задачи T_i для любого $i = 2..n$.

Доказательство работоспособности метода ДП напрямую следует из принципа математической индукции. Действительно, если нам удастся для некоторой задачи построить вышеупомянутую последовательность, удовлетворяющую данным свойствам, то зная T_1 мы легко вычислим T_2 (при $i=2$), а из решений задач T_1 и T_2 будет следовать решение задачи T_3 (при $i=3$) и т.д. увеличивая значение i мы будем находить решение задачи T_i через ранее решенные задачи до тех пор, пока i не достигнет значения n , а решение задачи T_n эквивалентно решению исходной задачи.

Динамическое программирование обычно придерживается двух подходов к решению задач:

- *Нисходящее ДП*: задача разбивается на подзадачи меньшего размера, они решаются и затем комбинируются для решения исходной задачи. Используется запоминание для решений часто встречающихся подзадач.

- *Восходящее ДП*: Все подзадачи, которые впоследствии понадобятся для решения исходной задачи просчитываются заранее и затем используются для построения решения исходной задачи. Этот способ лучше нисходящего ДП в смысле размера необходимого стека и количества вызова функций, но иногда бывает нелегко заранее выяснить решение каких подзадач нам потребуется в дальнейшем.

Многие переборные задачи часто имеют динамическое, более эффективное решение благодаря тому, что появляется возможность не вычислять многократно одни и те же промежуточные значения. Принцип ДП используется во многих известных алгоритмах и отражает эффективность данного метода над другими решениями.

Пример решения задачи "Числа Фибоначчи"

Ранее мы уже рассматривали решения данной задачи. Очевидно, что данная задача имеет рекурсивное решение благодаря рекуррентной записи для вычисления элемента: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Простое рекурсивное решение неэффективно, т.к. приходится многократно вычислять одни и те же значения элементов ряда. Например, из формул $F(4)=F(3)+F(2)$ и $F(3)=F(2)+F(1)$ следует, что для вычисления $F(4)$ значение $F(2)$ приходится вычислять дважды.

Проведем разбор решения поставленной задачи с использованием ДП. Пусть исходная задача T - это вычисление n -го элемента ряда Фибоначчи. В качестве последовательности подзадач T_i выберем последовательность задач $F(i)$, которые сводятся к вычислению i -го члена ряда. Тогда T_1 и T_2 нам известны ($T_1 = T_2 = 1$), а T_n - это как раз поставленная выше задача. Каждая задача T_i легко может решаться через предшествующие ей задачи: $T_i = T_{i-1} + T_{i-2}$ (для $i=3..n$). Поэтому последовательно вычисляя значение T_i мы линейным алгоритмом найдем и последний искомый элемент T_n .

При решении данной задачи методом ДП мы сохраняем все ранее найденные решения и не возвращаемся к повторному их решению в случае необходимости. Это сильно ускоряет процесс вычислений. Заметим, что вовсе не обязательно помнить все решения в массиве, достаточно запоминать только два предыдущих.

Большее понимание принципов ДП приходит в процессе решения динамических задач и многое еще будет рассказано в разборах задач данного раздела.

3.7.3 Результаты и выводы: В ходе работы изучены основы динамического программирования.

3.8 Практическое занятие №8(2 часа).

Тема: «Исследование разомкнутой системы»

3.8.1 Задание для работы:

1. Изучить разомкнутые системы

3.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Набрать модель исследуемой разомкнутой системы (рис. 1), параметры которой приведены в таблице 1 в соответствии со своим номером варианта.
2. Подавая на вход единичное скачкообразное воздействие, зарисовать переходные процессы в системе при заданных параметрах.
3. Экспериментально определить критическое значение коэффициента передачи k_I , т.е. такие значения, при которых система находится на границе устойчивости. Сравнить их с расчетными значениями, найденными с помощью критериев Гурвица и Михайлова.
4. Построить переходный процесс при $k_I = 0.8k_{Iкр}$, исследовать полученную систему с помощью критериев Гурвица и Михайлова, проанализировать результаты.
5. Увеличить коэффициент T_3 в два раза по сравнению с исходным значением и определить $k_{Iкр}$. Затем уменьшить T_3 в два раза и найти $k_{Iкр}$. Построить зависимость $k_{Iкр} = k_{Iкр}(T_3)$.
6. Найти экспериментальное критическое значение $T_{3кр}$. Сравнить $T_{3кр}$, рассчитанное с помощью критерия Гурвица.
7. Воспользовавшись критерием Михайлова, найти $T_{Iкр}$. Определить критические значения $T_{Iкр}$ экспериментально и проанализировать результаты.

3.8.3 Результаты и выводы: В ходе работы изучены разомкнутые системы.