ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика и теоретическая механика»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Направление подготовки (специальность):
27. 03. 04 Управление в технических системах

Профиль образовательной программы:
« Системы и средства автоматизации технологических процессов»

Форма обучения: **очная**

СОДЕРЖАНИЕ

1. **Организация самостоятельной работы**……………………………..........................3
2. **Методические рекомендации по самостоятельному изучению вопросов**………3
3. **Методические рекомендации по подготовке к занятиям**…………………………7

3.1 ЛР-1 Основные принципы и этапы построения математической модели…….7

3.2 ЛР-2 Аппроксимация функций в среде MathCAD………………………………7

3.3 ЛР-3 Сглаживание и фильтрация опытных данных в среде MathCAD…………7

3.4 ЛР-4 Исследование свойств бинарных отношений……………………………….7

3.5 ЛР-5 Исследование свойств алгебраических структур…………………………..7

3.6 ЛР-6 Исследование свойств алгебраических структур (продолжение)…………7

3.7 ЛР-7 Исследование свойств алгебраических структур (продолжение)………..7

3.8 ЛР-8 Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов……………………………………………………………………………8

3.9 ЛР-9 Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов………………………………………………………………………….....8

3.10 ЛР-10 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши………………………………………………………………..8

3.11 ЛР-11 Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка……………………………………………………..8

3.12 ЛР-12 Исследование свойств линейных пространств…………………………..8

3.13 ЛР-13 Исследование свойств нормированных пространств……………………8

3.14 ЛР-14 Исследование свойств евклидовых пространств…………………………8

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1.Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	Введение					2
2	Операции над множествами. Мощность множества				4	2
3	Отношения. Функции				4	2
4	Алгебраические структуры					2
5	Метрические и топологические пространства				8	8
6	Линейные пространства				8	4
7	Эвклидовы пространства					4
	Всего в семестре				**24**	**24**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1 Теорема Кантора-Бернштейна

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Рассмотрим вопрос о сравнении мощностей двух множеств. Для данных множеств A и B теоретически имеются четыре возможности:

- A равномощно некоторой части B, а B равномощно некоторой части A. (В этом случае, как мы знаем, множества равномощны.)
- A равномощно некоторой части B, но B не равномощно никакой части A. В этом случае говорят, что A имеет меньшую мощность, чем B.
- B равномощно некоторой части A, но A не равномощно никакой части B. В этом случае говорят, что A имеет большую мощность, чем B.
- Ни A не равномощно никакой части B, ни B не равномощно никакой части A.

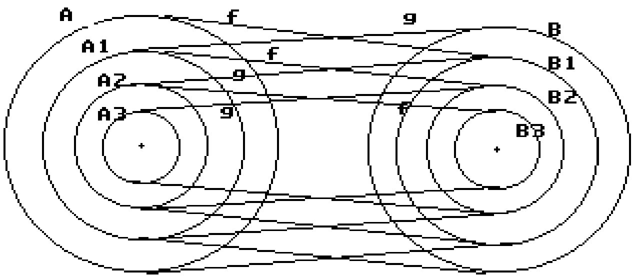
Теорема Кантора-Бернштейна.

Пусть A_1 - подмножество A, а B_1 - подмножество B и пусть A эквивалентно B_1, а B содержится эквивалентно A_1, тогда A эквивалентно B.

Смысл этой замечательной теоремы состоит вот в чем: иногда не так-то просто бывает найти точное взаимно-однозначное соответствие между множествами, попробуйте, например, установить взаимно-однозначное соответствие между отрезком

[0, 1] и интервалом (0, 1) - точки 0 и 1 все время оказываются “лишними”;

эта теорема позволяет ограничиться установлением эквивалентности отрезка [0, 1] и отрезка [1/3, 2,3], лежащего внутри (0, 1), т.к. (0, 1), в свою очередь, лежит в [0, 1], то согласно теореме Кантора-Бернштейна отрезок и интервал эквивалентны. Здесь, как и в других случаях, эта теорема “берет на себя” основные трудности, связанные с установлением взаимно-однозначного соответствия.



2.2 Борелевские алгебры.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Борелевская сигма-алгебра — это минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства (впрочем, она содержит и все замкнутые) . Обычно в качестве топологического пространства выступает множество вещественных чисел. С борелевской сигма-алгеброй связано понятие борелевской функции.

- **Борелева (борелевская) функция** — отображение одного топологического пространства в другое (обычно оба суть пространства вещественных чисел), для которого прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество.

Именно борелевская сигма-алгебра обычно выступает в роли сигма-алгебры случайных событий вероятностного пространства. В борелевской сигма-алгебре на прямой или на отрезке содержатся многие «простые» множества: все интервалы, полуинтервалы, отрезки и их счётные объединения. Всякое борелевское множество на отрезке является измеримым относительно меры Лебега, но обратное не верно. **Любое подмножество множества нулевой меры автоматически измеримо по Лебегу, но такое может не быть борелевским.**

Рассмотрим функцию на отрезке канторовой лестницы. Эта функция монотонна и непрерывна, как следствие — измерима. Мера образа канторова множества равна, а значит, мера образа его дополнения также равна. Поскольку мера образа канторова множества ненулевая, в нём можно найти неизмеримое множество. Тогда его прообраз будет измеримым (так как он лежит в канторовом множестве, мера которого нулевая), но не будет борелевским (поскольку иначе было бы измеримо как образ борелевского множества при измеримом отображении).

2.3 Непрерывные кривые в метрических пространствах

Пусть M — метрическое пространство с метрикой ρ. Кривой в метрическом пространстве M назовем непрерывное отображение α: I → M, где I — интервал в R. **Замечание 1.** В некоторой литературе по метрической геометрии данный объект называется путём либо параметризацией кривой, а понятие кривой используется для обозначения класса путей, которые связаны заменой параметра.

Пусть α: [a, b] → M — кривая. Рассмотрим разбиение T = {ti} n i=0 отрезка [a, b], при этом a = t0 < t1 < ... <tn = b.

Диаметром разбиения назовем величину d(T) = max i∈1,..,n (ti − ti−1). Далее рассмотрим сумму L(α, T) = X n i=1 ρ(α(ti), α(ti−1)). Длиной кривой α будем называть следующую величину L(α)| b a = sup T L(α, T). Кривую α: I → M будем называть спрямляемой, если для любого отрезка [a, b] ⊆ I величина L(α)| b a конечна. Сформулируем ряд известных из метрической геометрии свойств длины кривой в метрическом пространстве

Лемма 1. Пусть α: [a, b] → M — спрямляемая кривая, тогда:

1. Длина кривой не меньше расстояния между ее концами.
2. Длина аддитивна: L(α)| c a + L(α)| b c = L(α)| b a для c ∈ [a, b].
3. Функция l(t) = L(α)| t a непрерывна.
4. L(α)| b a = limd(T)→0 L(α, T)

Спрямляемую кривую α: I → M будем называть натурально параметризованной, если для любых a, b ∈ I, где a < b, справедливо L(α)| b a = b − a

Лемма 2. Для любой спрямляемой кривой α: I → M существует натурально параметризованная кривая β : J → M (J — некоторый интервал в R).

Рассмотрим две кривые α1 : I1 → M и α2 :I2 → M, проходящие через точку p ∈ M в моменты t1 ∈ ˚I1 и t2 ∈ ˚I2 соответственно. Будем говорить, что эти две кривые касаются в точке p, если lim ∆t→0 ρ(α1(t1 + ∆t), α2(t2 + ∆t)) |∆t| = 0. Заметим, что при заданной точке p ∈ M и кривой α, проходящей через эту точку, без ограничения общности всегда можно считать, что α(0) = p. Кроме того, из определения касания видно, что это свойство является локальным свойством кривых, т. е. зависит только от поведения кривой в некоторой открытой окрестности точки p.

2.4 Линейные функционалы. Геометрический смысл

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Линейный функционал — функционал, обладающий свойством линейности по своему аргументу:

$$\Phi[\mathbf{f}+\mathbf{g}] = \Phi[\mathbf{f}] + \Phi[\mathbf{g}] \qquad \Phi[c\ \mathbf{f}] = c\ \Phi[\mathbf{f}]$$

где Φ — линейный функционал, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — функции из его области определения, c — число (константа).

Иными словами, это линейное отображение из (некоторого) пространства функций во множество чисел — чаще всего подразумеваемых вещественными, или, еще иначе, линейный оператор, действующий из (некоторого) пространства функций в $\mathbb{R}$ (иногда в $\mathbb{C}$).

Линейные функционалы играют особую роль в функциональном анализе.

- Как и вообще термин 'функционал', термин 'линейный функционал' употребляется и вообще для аргументов из векторных пространств — в смысле линейного отображения из какого-то векторного пространства в его пространство скаляров, то есть — в этом употреблении — его аргументом может быть не обязательно функция.
- Линейный функционал является аналогом оператора проецирования для бесконечномерных пространств (в частности, для пространств функций), а также применяется как обобщающий термин, покрывающий равно случаи конечномерных и бесконечномерных пространств.
- Одним из важнейших примеров линейного функционала служит скалярное произведение с фиксированной функцией (элементом пространства):

$$\Phi[\mathbf{f}] = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)d\Omega$$

- Такие линейные функционалы, представляющие скалярное произведение $\mathbf{f}$ с каждой из базисных функций полного набора, дают прямое преобразование Фурье.
- **Пример.** $\Phi[\mathbf{f}] = \int_{\Omega} Lf(x)d\Omega$, где L — линейный оператор, действующий на функцию $f(x)$, Ω — область интегрирования,

  в частности:

  - $\int_1^2 f(x)dx$, $\int_1^2 (5\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx} + 3f)dx$, $\int_1^2 \int_3^4 f(x,y)dxdy$,
  - $\int_1^2 K(x)f(x)dx$, где $\mathbf{K}$ — некоторая фиксированная функция,

    $\Phi[\mathbf{f}] = f(11)$ $\qquad \Phi[\mathbf{f}] = f(1) - f(0)$

  - $\Phi[\mathbf{f}] = \frac{d^3f}{dx^3}|_{x=0}$ $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,3)dx$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 ЛР-1 «Основные принципы и этапы построения математической модели»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: отличие математической модели от иных моделей; возможность верификации, т.е. проверки построенной модели на адекватность реальному процессу математическими методами.

3.2 ЛР-2 «Аппроксимация функций в среде MathCAD»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты.

Аппроксима́ция (от лат. *proxima* – ближайшая) или **приближе́ние** — научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). Некоторые разделы математики, в сущности, целиком посвящены аппроксимации. Например, теория приближения функций, численные методы анализа.

Одним из наиболее часто употребляемых методов аппроксимации является метод наименьших квадратов

Следует обратить особое внимание на выбор аналитической функции для аппроксимации в ходе обработки результатов опытов.

3.3 ЛР-3 «Сглаживание и фильтрация опытных данных в среде MathCAD»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: необходимость предварительной обработки опытных данных (выравнивание, сглаживание, фильтрация); виды фильтрации (скользящее усреднение, полосовая и др.) для удаления соответствующей «шумовой» компоненты; встроенные функции MathCAD

3.4 ЛР-4 «Исследование свойств бинарных отношений»

При подготовки к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: бинарное отношение как подмножество прямого (декартового) произведения множеств; виды и свойства бинарных отношений.

3.5 ЛР-5 «Исследование свойств алгебраических структур»

3.6 ЛР-6 «Исследование свойств алгебраических структур (продолжение)»

3.7 ЛР-7 «Исследование свойств алгебраических структур (продолжение)»

При подготовки к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: построение алгебры структур; аксиоматическое определение алгебраических структур, примеры.

3.8 ЛР-8 «Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов»

3.9 ЛР-9 «Исследование метрики рабочего пространства некоторых численных методов»

При подготовки к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты: различные численные методы решения алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений; необходимое и достаточное условия сходимости итерационных процессов.

3.10 ЛР-10 «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: виды ДУ первого порядка и методы их решения; формулировка задачи Коши для обыкновенных ДУ первого порядка.

3.11 ЛР-11 «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: различные методы численного моделирования решения ДУ первого порядка; особенности каждого метода; сравнительная характеристика и оценки погрешности методов.

3.12 ЛР-12 «Исследование свойств линейных пространств»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: аксиоматическое определение линейного пространства, свойства и особенности задания метрики; вопросы сходимости в линейном пространстве.

3.13 ЛР-13 «Исследование свойств нормированных пространств»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: определение линейного нормированного пространства, свойства и особенности задания нормы; вопросы сходимости в нормированном пространстве.

3.14 ЛР-14 «Исследование свойств евклидовых пространств»

При подготовки к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты: аксиоматическое определение линейного евклидова пространства, свойства и особенности задания метрики; вопросы сходимости в евклидовом пространстве.